

TESIS DOCTORAL



**ESTABILIZACION ROBUSTA DE SISTEMAS CON
INCERTIDUMBRE EN LOS POLOS**

por

Florencia Agueda Mata Hernandez

**Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad Complutense
de Madrid**

Presentada en la

FACULTAD DE INFORMATICA

de la

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

para la obtención del

Grado de Doctor en Informática

MADRID , SEPTIEMBRE DE 1988

A mis padres

Quiero agradecer a D. José Manuel Amillo Gil,
Director de esta Tesis, la colaboración prestada para
la elaboración de este trabajo. Sin sus enseñanzas y
consejos no habría sido posible su realización.

ABSTRACT

In this thesis we consider the problem of robust stabilization of systems with uncertainties in the poles of the transfer function. The poles must satisfy one of the following conditions: to be r real poles placed on an algebraic curve or to be the roots of a complex number. Different regions of uncertainty are considered.

We show that this problem can be solved, as in the case of uncertainty in the gain factor, using techniques from the complex function theory. To accomplish this we pose a General Problem of interpolation in the Complex Field that we solve using the Nevanlinna-Pick theory and the hyperbolic metric.

First we obtain a necessary and sufficient condition in terms of a fixed value α_{\max} which depends on the poles and zeros of the plant. We also provide with an estimator of this number.

Then we build a sequence of conformal transformations that map the unit disk on a simply connected domain G which depends on the type of uncertainties.

Finally we develop an algorithm for the construction of the compensator and we apply it to different examples.

RESUMEN

En este trabajo resolvemos el problema de estabilización robusta de sistemas en los casos en que exista incertidumbre en los polos de la función de transferencia, cumpliendo éstos unas condiciones determinadas, como son: que sean r polos reales situados sobre una curva algebraica; o tales que sean las raíces r -ésimas de un cierto número complejo.

Mostramos que este problema se puede resolver, como en el caso de los problemas de estabilización robusta con incertidumbre en la ganancia, utilizando técnicas de la Teoría de Funciones de Variable Compleja. Para ello planteamos un Problema General de interpolación en el campo complejo, que resolvemos haciendo uso de la Teoría de Interpolación de Nevanlinna-Pick y de la Métrica Hiperbólica o de Poincaré.

En primer lugar obtenemos una condición necesaria y suficiente que viene dada en términos de un valor fijo α_{\max} , que depende de los polos y ceros de la planta; en vistas a estimar este valor, en el apartado 2.4 damos una cota superior que en la práctica resulta muy adecuada.

A continuación construimos una serie de transformaciones conformes que llevan el disco unidad sobre un cierto dominio simplemente conexo G que depende del tipo de incertidumbre. Esto nos permite resolver nuestro problema como

un problema de interpolación en el disco.

Por último desarrollamos un algoritmo para la construcción del compensador en el caso de que se cumpla la condición necesaria y suficiente, y lo aplicamos a distintos ejemplos.

INDICE

CAPITULO 1.- INTRODUCCION.....	1
1.1. Introducción al Problema.....	4
1.2. Problema de Blending.....	10
1.3. Casos sin resolver. Descripción de este trabajo.....	18
CAPITULO 2.- EL PROBLEMA GENERAL.....	21
2.1. Planteamiento del problema.....	23
2.2. Lemas previos.....	28
2.3. El Problema General.....	48
2.4. Estimación de α_{\max}	54
CAPITULO 3.- CONSTRUCCION DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES.....	57
3.1. Familia Tipo 1.....	60
3.2. Familia Tipo 2.....	64
3.3. Familia Tipo 3.....	68
3.4. Familia Tipo 4.....	71
3.5. Familia Tipo 5.....	85

CAPITULO 4.- APLICACIONES Y COMENTARIOS.....	91
4.1. Teoría de interpolación.....	94
4.2. Aplicaciones.....	99
4.3. Comentarios y perspectivas futuras.....	114
 BIBLIOGRAFIA.....	 117

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1. INTRODUCCIÓN

Este primer capítulo pretende dar una visión general del problema objeto de esta Tesis.

En el apartado primero vemos como surge del marco de la Teoría de Sistemas y como puede ser planteado en el campo del Análisis Complejo; veremos también, que el problema en su más completa generalidad no tiene solución posible, de modo que se intenta resolver algún caso particular con importancia práctica.

En el segundo apartado estudiaremos el único caso particular que había sido resuelto hasta la fecha. Inclu-

remos también en este apartado, algunas definiciones básicas y los enunciados de algunos teoremas que utilizaremos en el desarrollo de este trabajo.

Para terminar, en el tercer apartado, exponemos el trabajo realizado en esta Tesis, detallando los resultados originales así como la importancia práctica de los mismos.

1.1. INTRODUCCION AL PROBLEMA

El problema que nos vamos a plantear resolver surge del siguiente problema físico:

Dada Σ_1 una planta (sistema dinámico continuo con entrada-salida escalar, lineal, de dimensión finita, tiempo invariante sobre \mathbb{R}), se trata de encontrar un controlador Σ_2 (sistema canónico lineal, tiempo invariante, dimensión finita, continuo, con entrada-salida escalar sobre \mathbb{R}) asintóticamente estable, y tal que el sistema de realimentación (Feedback) dado por el diagrama de la figura 1, sea también asintóticamente estable.

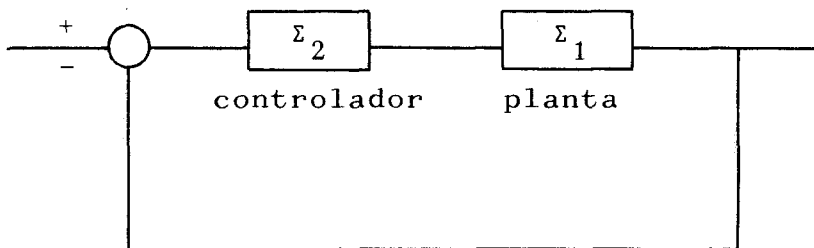


Figura 1

Este problema de estabilización podemos reducirlo a un problema de análisis complejo, utilizando las funciones de transferencia de los sistemas (Véase [27,pg.143]). Así, tenemos que el problema anterior podemos enunciarlo en los siguientes términos:

1.1.1. ENUNCIADO

Dada $P(z)$ una función racional real y propia (función de transferencia de Σ_1), encontrar $C(z)$ (la que será función de transferencia de Σ_2) que sea racional real propia, analítica en \tilde{H} y tal que el denominador:

$$1 + P(z) \cdot C(z)$$

de la función de transferencia del sistema de realimentación sea estrictamente Hurwitz (es decir, no tenga ceros en \tilde{H}).

Las condiciones para la existencia de tal función fueron dadas por D. Youla y M. Saito en su artículo [33].

Una vez establecidas estas condiciones, el siguiente paso a dar es construir $C(z)$ para obtener el compensador adecuado que estabilize el sistema. D. Youla, J. Bongiorno y Y. Lu, en [32], transforman el problema en un problema de interpolación que se puede resolver por la teoría clásica de Nevanlinna-Pick. Para ello dan la siguiente definición:

1.1.2. DEFINICION

Para cada compensador $C(z)$ definimos la función de sensibilidad como:

$$S(z) = \frac{1}{1 + P(z) \cdot C(z)}$$

El resultado que demuestran es el siguiente:

1.1.3. TEOREMA

El compensador $C(z)$ estabiliza asintóticamente la planta determinada por $P(z)$ si y solamente si la función de sensibilidad $S(z)$ verifica las siguientes condiciones:

- i) $S(z)$ es real racional y analítica en \tilde{H} .
- ii) Los ceros de $S(z)$ son los polos de $P(z)$ en \tilde{H} , multiplicidades incluidas.
- iii) Los ceros de $S(z) - 1$ contienen a $\{z_1, \dots, z_m\}$ multiplicidades incluidas; siendo $\{z_1, \dots, z_m\}$ los ceros de $P(z)$ en \tilde{H} .

Para la demostración del teorema anterior véase [32]. Una vez establecido ésto, el caso quedaba totalmente resuelto.

El problema surge cuando, debido a limitaciones físicas, la función de transferencia del sistema Σ_1 no puede ser determinada con toda exactitud; tendremos entonces una incertidumbre en la función $P(z)$ de modo que el sistema estará gobernado por una familia de funciones $\{P_s(z) : s \in K\}$ racionales reales propias, que dependen continuamente de un parámetro s que toma valores en algún compacto K . Dichas funciones serán no idénticamente nulas y todas ellas tendrán el mismo grado McMillan (grado del denominador).

Tannenbaum (ver [27]) demostró la no existencia de solución al problema planteado en toda su generalidad; para ello utilizó el siguiente enunciado del problema, dado por D. Youla, J. Bongiorno y C. Lu en [32, pgs.161-162]:

Dada una familia de funciones $\{P_s(z) : s \in K\}$ en las condiciones anteriores, encontrar $g(z)$ tal que:

- i) $g(z)$ es racional y real.
- ii) $1/g(z)$ es propia y holomorfa en \tilde{H} .
- iii) $-g(z) + P_s(z) \neq 0$, para cada $z \in \tilde{H}$ y $s \in K$.

Una vez obtenida $g(z)$ podemos obtener fácilmente, a partir de ella, la función de transferencia del controlador $C(z)$.

Detallaremos a continuación, por la importancia que tiene a la hora de estudiar los posibles casos que sí tengan solución, la obstrucción topológica que da Tannenbaum (véase [27]) a la solución general del problema, es decir

a la existencia de una tal función $g(z)$ para todos los casos de familias posibles:

Supongamos un sistema gobernado por una familia de funciones $\{P_s(z) : s \in K\}$ racionales, reales, estrictamente propias, de grado McMillan n y que dependen continuamente del parámetro s , tales que podemos poner:

$$P_s(z) = \frac{P_{1s}(z)}{P_{2s}(z)}$$

existiendo dos puntos $a, b \in H$ que verifican:

$$P_{1s}(a) = P_{1s}(b) = 0, \text{ para cada } s \in K$$

$P_{2s}(a)$ es circular alrededor del origen

$P_{2s}(b)$ es una constante fija $z_0 \neq 0$ para todo $s \in K$,
donde $z_0 \in H$.

Si suponemos la existencia de una función:

$$g(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$$

en las condiciones que dan D. Youla, J. Bongiorno y C. Lu en [32], entonces la función definida por:

$$f(z) = -g_1(z) \cdot P_{2s}(z) + g_2(z) \cdot P_{1s}(z)$$

verifica que:

$f(a) = -g_1(a) \cdot P_{2s}(a)$ es circular alrededor del origen.

$f(b) = -g_1(b) \cdot P_{2s}(b)$ es una constante fija no nula para todo $s \in K$.

Por lo tanto f es una transformación continua que nos lleva una curva circular alrededor del origen a un punto distinto del origen. Podemos asegurar entonces la existencia de un $s_0 \in K$ y un $z_1 \in \tilde{H}$ tales que:

$$f(z_1) = -g_1(z_1) \cdot P_{2s_0}(z_1) + g_2(z_1) \cdot P_{1s_0}(z_1) = 0$$

con lo que llegamos a contradicción con las condiciones dadas para la función g .

1.2. PROBLEMA DE BLENDING

Se plantea, por tanto, la necesidad de estudiar en qué casos particulares tiene solución nuestro problema; y ante todo, estudiar la posibilidad de resolver los casos que con mayor frecuencia se presentan en la práctica.

En este sentido, el único caso que había sido resuelto completamente con éxito es el que se llamó "Problema de Blending", tratado por P. Khargonekar y A. Tannenbaum en [19].

Por el paralelismo que tiene el desarrollo de este trabajo con el nuestro, expondremos a continuación los pasos principales.

Se considera un sistema gobernado por una familia de funciones $\{P_s(z) : s \in K\}$ racionales reales propias, donde:

$$P_s(z) = s \cdot P_0(z) \quad , \quad s \in K = [k_{\min}, k_{\max}]$$

y $P_0(z)$ es una función racional real propia fija no idénticamente nula (lo que llamaremos modelo nominal). P. Khargonekar y A. Tannenbaum, inspirados en el resultado del Teorema 1.1.2, establecen lo siguiente:

1.2.1. TEOREMA

El compensador propio $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema definido por la familia de funciones $\{ P_s(z) : s \in K \}$

donde $K = [a, b]$, $0 < a < 1 < b$, y

$$P_s(z) = s \cdot P_0(z)$$

según lo definido anteriormente, si y solamente si la función de sensibilidad $S(z)$ verifica:

- i) $S(z)$ es racional real y analítica en \tilde{H} .
- ii) Los ceros de $S(z)$ son $\{ p_1, \dots, p_n \}$ multiplicidades incluidas.
- iii) Los ceros de $S(z) - 1$ contienen a $\{ z_1, \dots, z_m \}$ multiplicidades incluidas.
- iv) $S(z) \notin (-\infty, \frac{a}{a-1}] \cup [\frac{b}{b-1}, +\infty)$ para cada $z \in \tilde{H}$.

Siendo $\{ p_1, \dots, p_n \}$ y $\{ z_1, \dots, z_m \}$ los polos y los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} .

La demostración de este Teorema se basa en el resultado 1.1.1. dado por A. Tannenbaum en [27,pg.143], con lo que claramente se tiene la necesidad de las tres primeras condiciones.

Además, puesto que debe verificarse que el denominador de la función de transferencia del sistema de realimentación sea estrictamente Hurwitz, es decir que:

$$1 + s \cdot P_0(z) \cdot C(z) \neq 0$$

para cada $s \in [a, b]$ y $z \in \tilde{H}$, y puesto que:

$$1 \in [a, b]$$

se sigue que:

$$S(z) \notin \left(-\infty, \frac{a}{a-1}\right] \cup \left[\frac{b}{b-1}, +\infty\right)$$

para cada $z \in \tilde{H}$.

La suficiencia se obtiene automáticamente por el resultado anteriormente referido de D. Youla, J. Bongiorno y C. Lu en [32]. Para más detalles sobre la demostración de este teorema véase [19].

Una vez establecido este teorema y puesto que el dominio:

$$G = \mathbb{C} \setminus \left\{ \left(-\infty, \frac{a}{a-1}\right] \cup \left[\frac{b}{b-1}, +\infty\right) \right\}$$

es simplemente conexo y verifica que $0, 1 \in G$, podemos enunciar el siguiente problema, que contiene al enunciado del Problema de Blending:

1.2.2. PROBLEMA GENERALIZADO DE BLENDING

Dado $G \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo tal que $0, 1 \in G$. Encontrar, si es posible, una función racional analítica:

$$S : \tilde{H} \longrightarrow G$$

que satisfaga:

- i) Los ceros de $S(z)$ contienen $\{p_1, \dots, p_n\}$ multiplicidades incluidas.
- ii) Los ceros de $S(z) - 1$ contienen $\{z_1, \dots, z_m\}$ multiplicidades incluidas.

siendo $p_1, \dots, p_n, z_1, \dots, z_m$ los polos y los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} , respectivamente.

En los cuatro siguientes apartados detallaremos algunos resultados que se utilizan para la solución completa de este problema, por ser también utilizados por nosotros en el capítulo siguiente.

1.2.3. DEFINICIÓN

Sean:

$$a_1, \dots, a_\ell \in D$$

$$a_{\ell+1}, \dots, a_q \in T$$

$$b_1, \dots, b_q \in \mathbb{C}$$

donde $\ell \leq q$, $D = \{z : |z| < 1\}$ y $T = \{z : |z| = 1\}$.

Se definen las matrices:

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & \\ \hline 1 - a_i \cdot \bar{a}_j & \end{array} \right]_{i,j=1, \dots, \ell}$$

$$B = \left[\frac{b_i \cdot \bar{b}_j}{1 - a_i \cdot \bar{a}_j} \right]_{i,j=1, \dots, \ell}$$

$$A, B \in M_{\ell \times \ell}(\mathbb{C})$$

Si $b_i = 0$ para todo $i=1, \dots, \ell$ definimos:

$$\alpha_1 = \infty$$

Si existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ tal que $b_i \neq 0$ definimos:

$$\alpha_1 = (\lambda_{\max})^{-\frac{1}{2}}$$

siendo λ_{\max} el mayor autovalor de la matriz $A^{-1} \cdot B$.

Por último se define α_{\max} como:

$$\alpha_{\max}(a_j, b_i) = \min_{\substack{j=1, \dots, \ell \\ i=1, \dots, q}} \left\{ \alpha_1, \frac{1}{|b_{\ell+1}|}, \dots, \frac{1}{|b_q|} \right\}$$

1.2.4. MÉTRICA HIPERBÓLICA

Un concepto importante que necesitamos introducir es el de Métrica Hiperbólica o Métrica de Poincaré. Expondremos los conceptos más básicos y remitimos a quién esté interesado al libro de L. Ahlfors [4].

Sean $z_1, z_2 \in D$. Se define:

$$\delta(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 \cdot z_2} \right|$$

La distancia hiperbólica entre dos puntos del disco unidad $D \subset \mathbb{C}$ viene dada por:

$$d_D(z_1, z_2) = \log \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} \quad , \quad z_1, z_2 \in D$$

Sea ahora $G \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo con más de un punto frontera; el Teorema de Riemann de la Aplicación Conforme (véase [25]) establece la existencia de una equivalencia conforme:

$$\lambda : G \longrightarrow D$$

Definimos entonces la distancia hiperbólica entre dos puntos de G como:

$$d_G(z_1, z_2) = d_D(\lambda(z_1), \lambda(z_2)) \quad , \quad z_1, z_2 \in G$$

Se puede demostrar (ver [4]) que $d_G(z_1, z_2)$ es independiente de la equivalencia conforme elegida.

En los dos apartados siguientes vamos a enunciar dos teoremas claves para establecer nuestros resultados.

1.2.5. TEOREMA

Dados dos dominios $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ simplemente conexos, con más de un punto frontera, y dada una función analítica:

$$f : G_1 \longrightarrow G_2$$

entonces se verifica que para todos $z_1, z_2 \in G_1$:

$$d_{G_1}(z_1, z_2) \geq d_{G_2}(f(z_1), f(z_2))$$

siendo d_G la métrica hiperbólica definida anteriormente. Además, la igualdad se da si y solamente si f es una equivalencia conforme.

Ver [4] para la demostración.

1.2.6. TEOREMA

Sean:

$$a_i \in D, \quad i=1, \dots, \ell$$

$$a_j \in T, \quad j=\ell+1, \dots, q$$

$$b_i \in \mathbb{C}, \quad i=1, \dots, q$$

Entonces, existe una función analítica:

$$f_\alpha : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

tal que $f_\alpha(a_i) = \alpha \cdot b_i$, $i=1, \dots, q$ si y solamente si se verifica que:

$$\alpha < \alpha_{\max}(a_j, b_i), \quad j=1, \dots, \ell, \quad i=1, \dots, q$$

donde α_{\max} está definido en 1.2.3.

Ver [19] para la demostración.

A partir de estos resultados se puede demostrar el siguiente teorema que da una solución completa al Problema Generalizado de Blending 1.2.2.

1.2.7. TEOREMA

El problema 1.2.2. es resoluble si y solamente si:

$$d_G(0, 1) < d_D(0, \alpha_{\max}) = \log \frac{1 + \alpha_{\max}}{1 - \alpha_{\max}}$$

La construcción de la solución se puede reducir a un problema de interpolación de Nevanlinna-Pick. La demostración de este teorema se puede ver en [19].

Quedaba así completamente resuelto el Problema de Blending, problema muy importante en la práctica y que corresponde, como ya hemos visto, a una cierta familia de funciones de transferencia en la que todas las funciones tienen los mismos ceros y los mismos polos.

1.3. CASOS SIN RESOLVER: DESCRIPCION DE ESTE TRABAJO

Con el Problema de Blending se abrió el estudio de estabilización de plantas con incertidumbre en los parámetros. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, se presentaban muchos otros casos más importantes, para los que no se conocían soluciones. Este es, por ejemplo, el caso en que existe incertidumbre en los polos de la función de transferencia, hecho que se presenta muy a menudo en la práctica.

En este sentido, P. Khargonekar y A. Tannenbaum en su artículo [19], sugieren la solución en el caso de que la incertidumbre exista en un sólo polo real.

Nuestro trabajo consiste en resolver los casos en que existe incertidumbre en los polos de la función de transferencia, siendo éstos r polos reales situados sobre una cierta curva algebraica, dos polos complejos conjugados, o tales que son las raíces r -ésimas de un cierto número complejo $z \in \mathbb{C}$. La importancia de estos casos radica en que existen una gran cantidad de situaciones prácticas en las que los polos de la función de transferencia del sistema, aunque no se ajustan exactamente a las condicio-

nes requeridas, podemos considerarlos en alguno de nuestros casos ampliando, si es necesario, la zona de incertidumbre.

El problema ha surgido como parte de un Proyecto de Investigación en el que participan la Universidad de Minnesota (Minneapolis) y la Universidad Politécnica de Madrid, dirigido por los profesores Fredric N. Bailey y Jose Manuel Amillo Gil.

La resolución de este problema nos lleva, en primer lugar, a plantear un nuevo problema de variable compleja, que deducimos por los cinco lemas establecidos en el apartado 2.2. y que llamaremos Problema General. Este Problema generaliza al expuesto en el apartado 1.2.2. para el caso del Problema de Blending.

Con vistas a resolver este Problema General enunciamos y demostramos un teorema, que llamaremos Teorema General, que generaliza al Teorema 1.2.7. obtenido para el Problema de Blending y del que obtenemos, como corolario, una condición necesaria y suficiente para la existencia de la función interpoladora T requerida en los cinco lemas mencionados. Además, este teorema nos da también un método para la obtención de tal función.

Una vez establecido ésto, y puesto que la estimación de α_{\max} juega un papel importante en este trabajo, daremos una cota superior para este valor, que consideramos bastante útil

La obtención, para cada familia de funciones considerada, de la función T se desarrolla en el capítulo tercero de esta Tesis; para ello construimos una serie de transformaciones conformes que reducen este problema a un problema de interpolación en el disco. Una vez obtenida tal función T , para cada familia considerada, es prácticamente inmediata la construcción explícita de la función de transferencia del compensador adecuado que establezca el sistema.

Para terminar, en el capítulo cuarto desarrollamos un algoritmo sobre la teoría de interpolación de Nevanlinna-Pick, que utilizamos para aplicar nuestros métodos a la estabilización robusta de distintos sistemas prácticos; por ejemplo, el de una aeronave con incertidumbre en los polos de la función de transferencia que determina el sistema.

En el último apartado de este capítulo damos las consecuencias obtenidas del estudio en estos casos prácticos de nuestra teoría, así como posibles líneas de investigación futuras que consideramos serían de gran importancia para la industria.

CAPITULO 2

EL PROBLEMA GENERAL

2. EL PROBLEMA GENERAL

En este segundo capítulo comenzamos por describir los casos en los que hemos resuelto el problema de estabilización robusta de sistemas con incertidumbre en los polos; estableceremos un lema por cada uno de los casos, que nos lleva a plantear el problema como un nuevo Problema General de interpolación.

Con vistas a resolver este Problema General enunciamos y demostramos el Teorema General, y como corolario de éste obtenemos el resultado deseado.

2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos un sistema gobernado por una familia de funciones $\{P_s(z), s \in K\}$ racionales, reales, propias, no idénticamente nulas, cuyo grado McMillan es n , siendo K un conjunto compacto y para cada s perteneciente a K :

$$P_s(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{R_s(z)}$$

donde $\tilde{P}(z)$ es una función racional, real fija y para cada $s \in K$, $R_s(z)$ es un polinomio real cuyos ceros son distintos de los ceros de $\tilde{P}(z)$ y verifican una de las condiciones siguientes:

CASO 1: $R_s(z)$ tiene r ceros en \tilde{H} que son traslación, definida por vectores de la forma $(a, 0)$ con $a > 0$, de las raíces r -ésimas de un número $s \in \mathbb{R}^+$, $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, $s_0 > \alpha > 0$, $\beta > 0$. Por tanto, podremos expresar $R_s(z)$ como:

$$R_s(z) = \prod_{k=0}^{r-1} \left[z - a_0 - \sqrt[r]{s} \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{r} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{r} \right) \right]$$

CASO 2: $R_s(z)$ tiene dos ceros imaginarios en \tilde{H} : $a_0 + s \cdot i$, $a_0 - s \cdot i$ donde $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, $\alpha, \beta > 0$, $s_0 - \alpha \geq 0$.

Por tanto, podemos expresar $R_S(z)$ como:

$$R_S(z) = (z - a_0 - s.i) \cdot (z - a_0 + s.i)$$

CASO 3: $R_\omega(z)$ tiene r ceros en \tilde{H} , que son traslaciones de las raíces r -ésimas de un número complejo ω perteneciente a un cierto disco $D_t(\omega_0)$ de radio t y centro ω_0 . Por tanto, podremos expresar $R_\omega(z)$ como:

$$R_\omega(z) = \prod_{k=0}^{r-1} [z - a_0 - |\omega|^{1/r} \cdot (\cos \frac{\arg \omega + 2k\pi}{r} + i \cdot \sen \frac{\arg \omega + 2k\pi}{r})]$$

CASO 4: $R_{\rho, \theta}(z)$ tiene r ceros en \tilde{H} que son traslación de las raíces r -ésimas de un número complejo (ρ, θ) donde $\rho \in [\rho_0 - \alpha, \rho_0 + \beta]$, $\theta \in [\theta_0 - \gamma, \theta_0 + \delta]$, $\rho_0 - \alpha > 0$, $\delta + \gamma < \frac{2\pi}{r}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Por tanto, podremos expresar $R_{\rho, \theta}(z)$ como:

$$R_{\rho, \theta}(z) = \prod_{k=0}^{r-1} [z - a_0 - \frac{\rho}{\sqrt[r]{\rho}} \cdot (\cos \frac{\theta + 2k\pi}{r} + i \cdot \sen \frac{\theta + 2k\pi}{r})]$$

CASO 5: $R_{a_1}(z)$ tiene r ceros reales en \tilde{H} que son las coordenadas de un punto de la curva algebraica γ determinada por las ecuaciones:

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_r = \lambda_1 \\ \sum_{i \neq j} x_i \cdot x_j = \lambda_2 \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{i=1}^r x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot \hat{x}_i \cdot \dots \cdot x_r = \lambda_{r-1} \end{array} \right.$$

$R_{a_1}(z)$ lo podremos entonces expresar como:

$$R_{a_1}(z) = (z - a_1) \cdot (z - a_2) \cdot \dots \cdot (z - a_r)$$

donde $(a_1, \dots, a_r) \in \gamma$, $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$, siendo $\alpha, \beta > 0$.

Claramente los casos 1 y 2 están contenidos en el caso 3. Estudiaremos independientemente estos casos por dos motivos principales: En primer lugar por la importancia práctica que tienen por si mismos y, en segundo lugar, porque al ser los primeros casos que tratamos quizás pueda verse más fácilmente la generalización a los otros casos.

Nuestro primer objetivo será dar condiciones necesarias y suficientes para que un controlador determinado estabilice el sistema gobernado por nuestra familia de funciones. Introducimos para ello la siguiente definición:

2.1.1. DEFINICIÓN

Para cada compensador $C(z)$ (función racional real propia, holomorfa en \tilde{H}) y para cada función peso $W(z)$ (función racional, real, propia, estrictamente Hurwitz) definimos la función de sensibilidad con peso como:

$$T(z) = \frac{W(z)}{1 + P_0(z) \cdot C(z)}, \quad z \in \tilde{H}$$

El siguiente teorema, demostrado por G. Zames y B.A. Francis en [34], se basa en el resultado, mencionado en [27,pg.143], que dice que si $C(z)$ es una función de transferencia las condiciones de estabilidad requeridas son que $C(z)$ sea holomorfa en \tilde{H} y que el denominador:

$$1 + P_0(z) \cdot C(z)$$

sea estrictamente Hurwitz.

2.1.2. TEOREMA:

El compensador $C(z)$ estabiliza asintóticamente la planta determinada por $P_0(z)$ si y solamente si $T(z)$ verifica:

i) $T(z)$ es analítica en \tilde{H} .

ii) Los ceros de $T(z)$ son $\{p_j\}_{j=1}^n$ multiplicidades incluidas.

iii) $T(z_i) = W(z_i)$, $i=1, \dots, m$, multiplicidades incluidas.

siendo $p_1, \dots, p_n, z_1, \dots, z_m$ los polos y los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} respectivamente.

Nosotros vamos a demostrar un teorema análogo a éste último para nuestras cinco familias de plantas; así, siguiendo un desarrollo paralelo al Problema de Blending vamos a establecer cinco lemas, que nos dan condiciones necesarias y suficientes para que un determinado controlador $C(z)$ estabilice el sistema regido por una familia de funciones $\{P_s(z) : s \in K\}$ pertenecientes a uno de los cinco tipos definidos anteriormente.

El correspondiente sistema de realimentación viene definido según la figura 2.

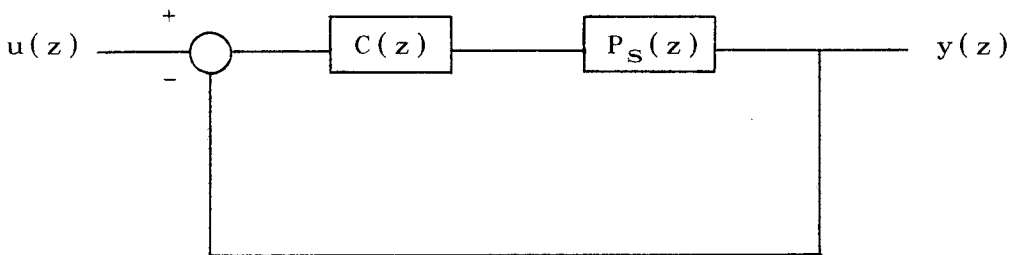


Figura 2

2.2. LEMAS PREVIOS

En este apartado comenzaremos el estudio de los sistemas regidos por las familias de funciones anteriormente definidas. Para ello, estableceremos cinco lemas que nos darán condiciones necesarias y suficientes para que un determinado controlador $C(z)$ estabilice al sistema. Por supuesto, en todos los casos supondremos que no hay cancelación inestable de ceros y polos entre $C(z)$ y $P_s(z)$, para todo $s \in K$.

2.2.1. DEFINICIÓN:

Dado un sistema gobernado por la familia de funciones:

$$\{ P_s(z) : s \in K \}$$

llamaremos modelo nominal del sistema a una función de dicha familia, $P_0(z)$, correspondiente a un valor arbitrario s_0 del interior de K . Es decir, $P_0(z) = P_{s_0}(z)$, $s_0 \in K^\circ$.

El modelo nominal jugará el papel de valor real de la función de transferencia del sistema, no determinada con exactitud.

2.2.2. LEMA

El compensador propio $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema regido por la familia $\{ P_s(z) : s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta] \}$ del caso 1 si y sólo si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^r - s_0] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica las condiciones siguientes:

- i) $T(z)$ es analítica en \tilde{H} .
- ii) Los ceros de $T(z)$ en \tilde{H} son los polos de $\tilde{P}(z)$ multiplicidades incluidas.
- iii) $T(z_i) = \frac{1}{(z_i - a_0)^r - s_0}$, $i=1, \dots, m$, siendo $\{z_1, \dots, z_m\}$ los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} , multiplicidades incluidas.
- iv) $T(z) \notin (-\infty, \frac{-1}{\alpha}] \cup [\frac{1}{\beta}, \infty)$ para $z \in \tilde{H}$.

DEMOSTRACIÓN:

Según las condiciones del caso 1:

$$P_s(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\prod_{k=1}^{r-1} [z - a_0 - \frac{r}{v_s} \cdot (\cos \frac{2k\pi}{r} + i \cdot \text{sen} \frac{2k\pi}{r})]}$$

La figura 3 ilustra, para $r = 6$, la posible distribución de los polos con mala determinación del sistema regido por la familia de funciones del caso 1:

$$\{ P_s(z) : s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta] \}$$

donde

$$\alpha, \beta > 0, \quad s_0 - \alpha \geq 0, \quad a_0 > \sqrt{s_0} + \alpha$$

y siendo $P_0(z) = P_{s_0}(z)$ el modelo nominal.

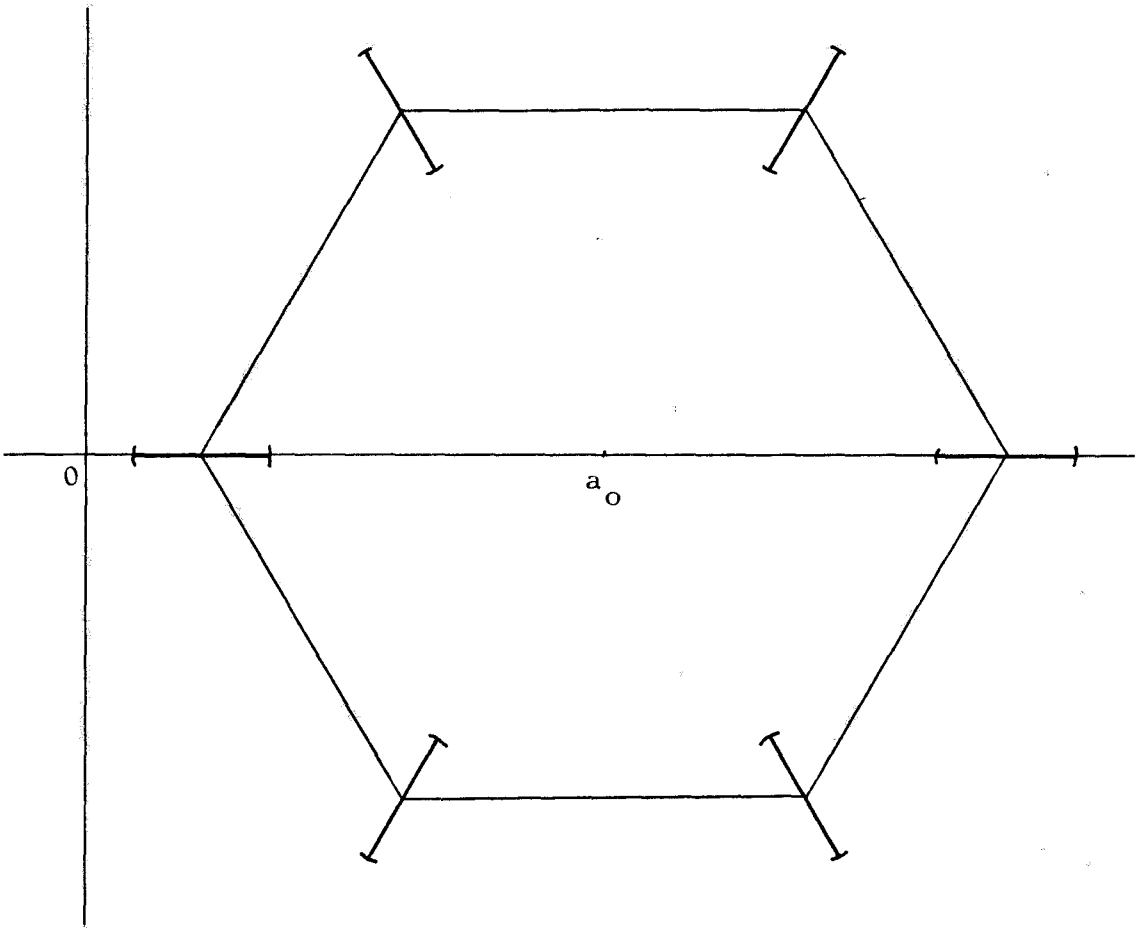


Figura 3

Si $C(z)$ estabiliza el sistema para todo $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$ tenemos que debe verificarse:

$$1 + C(z) \cdot P_s(z) \neq 0$$

para cada $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, $z \in \tilde{H}$

y por tanto:

$$(z - a_0)^{r-s} + \tilde{P}(z).C(z) \neq 0$$

para cada $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, y $z \in \tilde{H}$. De lo anterior se deduce que:

$$[(z - a_0)^{r-s_0}]. [1 + P_0(z).C(z)] \notin [-\alpha, \beta]$$

para cada $z \in \tilde{H}$.

Así, la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^{r-s_0}]. [1 + P_0(z).C(z)]}$$

verifica que:

$$T : \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -\frac{1}{\alpha}] \cup [\frac{1}{\beta}, \infty)\}$$

con lo que obtenemos la condición (iv). Por otra parte, puesto que $C(z)$ estabiliza el sistema, es holomorfa en \tilde{H} .

Además podemos poner:

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_0)^{r-s_0} + \tilde{P}(z).C(z)}$$

con lo que obtenemos las otras tres condiciones.

Recíprocamente, Por verificar $T(z)$ la condición (iv), tenemos que:

$$1 + C(z).P_s(z) \neq 0$$

para cada $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, y $z \in \tilde{H}$. Por otra parte, despejando $C(z)$ en la función de sensibilidad con peso, tenemos que:

$$C(z) = \frac{T(z) - W(z)}{T(z) \cdot P_0(z)}$$

donde:

$$W(z) = \frac{1}{(z - a_0)^{r - s_0}}$$

$$P_0(z) = \tilde{P}(z) \cdot W(z)$$

Aplicando las condiciones (i), (ii) y (iii) llegamos a que $C(z)$ es analítica en \tilde{H} y por tanto, se dan las condiciones de estabilidad requeridas.

□

2.2.3. LEMA

El compensador propio $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema regido por la familia $\{P_s(z) : s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]\}$ del caso 2 si y solamente si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^2 + s_0^2] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica las condiciones siguientes:

- i) $T(z)$ es analítica en \tilde{H} .*
- ii) Los ceros de $T(z)$ son los polos de $\tilde{P}(z)$ multiplicidades incluidas.*

$$iii) T(z_i) = \frac{1}{(z_i - a_0)^2 + s_0^2}, \quad i=1, \dots, m, \quad \text{siendo}$$

$\{z_1, \dots, z_m\}$ los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} , multiplicidades incluidas.

$$iv) T(z) \notin \left(-\infty, \frac{-1}{\beta \cdot (2s_0 + \beta)}\right] \cup \left[\frac{1}{\alpha \cdot (2s_0 - \alpha)}, \infty\right)$$

para todo $z \in \tilde{H}$.

DEMOSTRACIÓN:

Según las condiciones del caso 2:

$$P_s(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z - a_0)^2 + s^2}$$

para $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, $\alpha, \beta > 0$, $s_0 - \alpha \geq 0$.

La figura 4 ilustra la posible distribución de los polos con mala determinación del sistema regido por la familia de funciones del caso 2.

Sea el modelo nominal:

$$P_0(z) = P_{s_0}(z)$$

Si $C(z)$ estabiliza el sistema para todo $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$ tendremos que:

$$1 + C(z) \cdot P_s(z) \neq 0$$

para cada $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$ y $z \in \tilde{H}$.

Se deduce entonces que :

$$(z - a_0)^2 + s^2 + \tilde{P}(z) \cdot C(z) \neq 0$$

para cada $z \in \tilde{H}$, y $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, y por lo tanto para cada $z \in \tilde{H}$, se tendrá que:

$$[(z - a_0)^2 + s_0^2] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)] \notin [-\beta \cdot (2s_0 + \beta), \alpha \cdot (2s_0 - \alpha)]$$

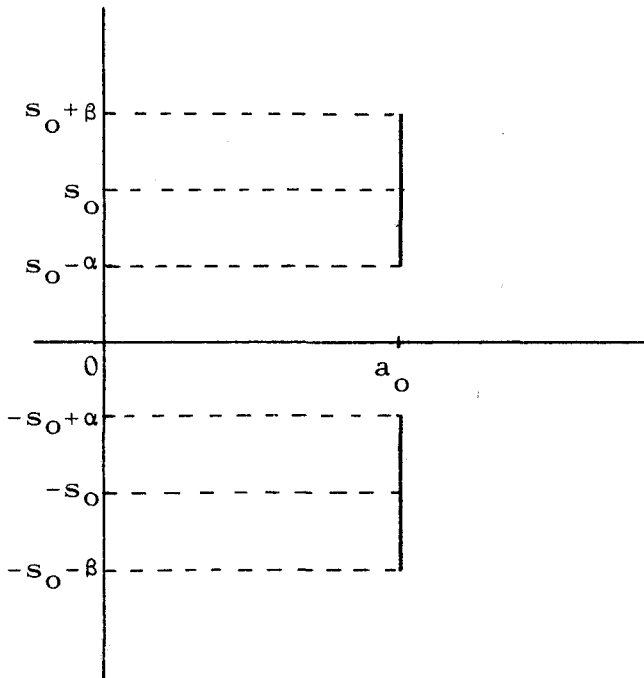


Figura 4

de modo que la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^2 + s_0^2] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica que:

$$T : H \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \left(-\infty, \frac{-1}{\beta \cdot (2s_0 + \beta)} \right] \cup \left[\frac{1}{\alpha \cdot (2s_0 - \alpha)}, \infty \right) \right\}$$

con lo que obtenemos la condición (iv). Las otras tres condiciones se obtienen de aplicar que $C(z)$ es holomorfa, por

estabilizar el sistema, y poner:

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_0)^2 + s_0^2 + \tilde{P}(z) \cdot C(z)}$$

Recíprocamente, por verificar $T(z)$ la condición (iv) se tiene que:

$$1 + C(z) \cdot P_s(z) \neq 0$$

para cada $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, $z \in \tilde{H}$, y puesto que $C(z)$ es analítica por verificar (i), (ii) y (iii), tenemos que $C(z)$ estabiliza el sistema.

□

2.2.4. LEMA

El compensador propio $C(z)$ estabiliza el sistema regido por la familia de funciones:

$$\{ R_\omega(z) : \omega \in D_t(\omega_0) \}$$

del caso 3, si y solamente si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^{r - \omega_0}] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica:

- i) $T(z)$ es analítica en \tilde{H} .*
- ii) Los ceros de $T(z)$ son los polos de $\tilde{P}(z)$ en \tilde{H} , multiplicidades incluidas.*

$$iii) T(z_i) = \frac{1}{(z_i - a_0)^r - \omega_0}, \quad i=1, \dots, m, \quad \text{siendo}$$

$\{z_1, \dots, z_m\}$ los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} multiplicidades incluidas.

iv) $T(z) \in D_{1/t}(0)$, para cada $z \in \tilde{H}$, donde $D_{1/t}(0)$ es el disco de radio $1/t$ centrado en el origen y $D_t(\omega_0)$ es el disco de radio t centrado en ω_0 .

DEMOSTRACIÓN:

Según las condiciones del caso 3 tenemos que:

$$P_\omega(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\prod_{k=0}^{r-1} [z - a_0 - |\omega|^{1/r} \cdot (\cos \frac{\arg \omega + 2k\pi}{r} + i \cdot \sen \frac{\arg \omega + 2k\pi}{r})]}$$

donde $\omega \in D_t$. Sea el modelo nominal $P_0(z) = P_{\omega_0}(z)$. Si $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema tenemos que:

$$1 + C(z) \cdot P_\omega(z) \neq 0$$

para cada $z \in \tilde{H}$, $\omega \in D_t$. Se verifica por tanto que:

$$(z - a_0)^r - \omega + \tilde{P}(z) \cdot C(z) \neq 0$$

para cada $z \in \tilde{H}$ y $\omega \in D_t$, de donde se deduce que:

$$[(z - a_0)^r - \omega_0] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)] \notin D_t(0)$$

para cada $z \in \tilde{H}$, siendo $D_t(0)$ el disco centrado en el origen de radio t . Por lo tanto la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^r - \omega_0] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica que:

$$T : \tilde{H} \longrightarrow D_{1/t}(0)$$

Las otras tres condiciones se obtienen automáticamente por ser $C(z)$ un controlador que estabiliza el sistema, y

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_0)^{r - \omega_0} + \tilde{P}(z) \cdot C(z)}$$

Recíprocamente, por verificar $T(z)$ la condición (iv), se tiene que:

$$1 + P_\omega(z) \cdot C(z) \neq 0$$

para cada $\omega \in D_t(\omega_0)$ y $z \in \tilde{H}$. Y puesto que $C(z)$ es analítica por verificar (i), (ii) y (iii), tenemos que $C(z)$ estabiliza el sistema.

□

2.2.5. LEMA

El compensador propio $C(z)$ estabiliza el sistema regido por la familia de funciones:

$$\{ P_{\rho, \theta}(z) : \rho \in [\rho_0 - \alpha, \rho_0 + \beta], \theta \in [\theta_0 - \gamma, \theta_0 + \delta] \}$$

del caso 4, si y solamente si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^{r - z_0}] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica:

- i) $T(z)$ es analítica en \tilde{H} .*
- ii) Los ceros de $T(z)$ son los polos de $\tilde{P}(z)$ en \tilde{H} , multiplicidades incluidas.*

$$iii) T(z_i) = \frac{1}{(z_i - a_0)^r - z_0}, \quad i=1, \dots, m, \quad \text{siendo}$$

$\{z_1, \dots, z_m\}$ los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} , multiplicidades incluidas.

iv) $T(z) \notin A$ para cada $z \in \tilde{H}$, donde:

$$A = \{z : \rho_0 - \alpha \leq \left| \frac{1}{z} + z_0 \right| \leq \rho_0 + \beta, \quad \theta_0 - \gamma \leq \arg\left(\frac{1}{z} + z_0\right) \leq \theta_0 + \delta\}$$

$$z_0 = (\rho_0, \theta_0) = \rho_0 \cdot (\cos \theta_0 + i \cdot \text{sen } \theta_0)$$

DEMOSTRACIÓN:

Según las condiciones del caso 4, tenemos que:

$$P_{\rho, \theta}(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\prod_{k=0}^{r-1} \left[z - a_0 - \frac{r}{\sqrt{\rho}} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{r} + i \cdot \text{sen } \frac{\theta + 2k\pi}{r} \right) \right]}$$

donde $\rho \in [\rho_0 - \alpha, \rho_0 + \beta]$, $\theta \in [\theta_0 - \gamma, \theta_0 + \delta]$, $\rho_0 - \alpha > 0$,

$\delta + \gamma < \frac{2\pi}{r}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Sea el modelo nominal:

$$P_0(z) = P_{\rho_0, \theta_0}(z)$$

Por ejemplo para $r=6$ y $\theta=0$, la figura 5 ilustra la posible distribución de los polos con mala determinación del sistema, regido por una familia de funciones del tipo 4.

Si $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema tenemos que:

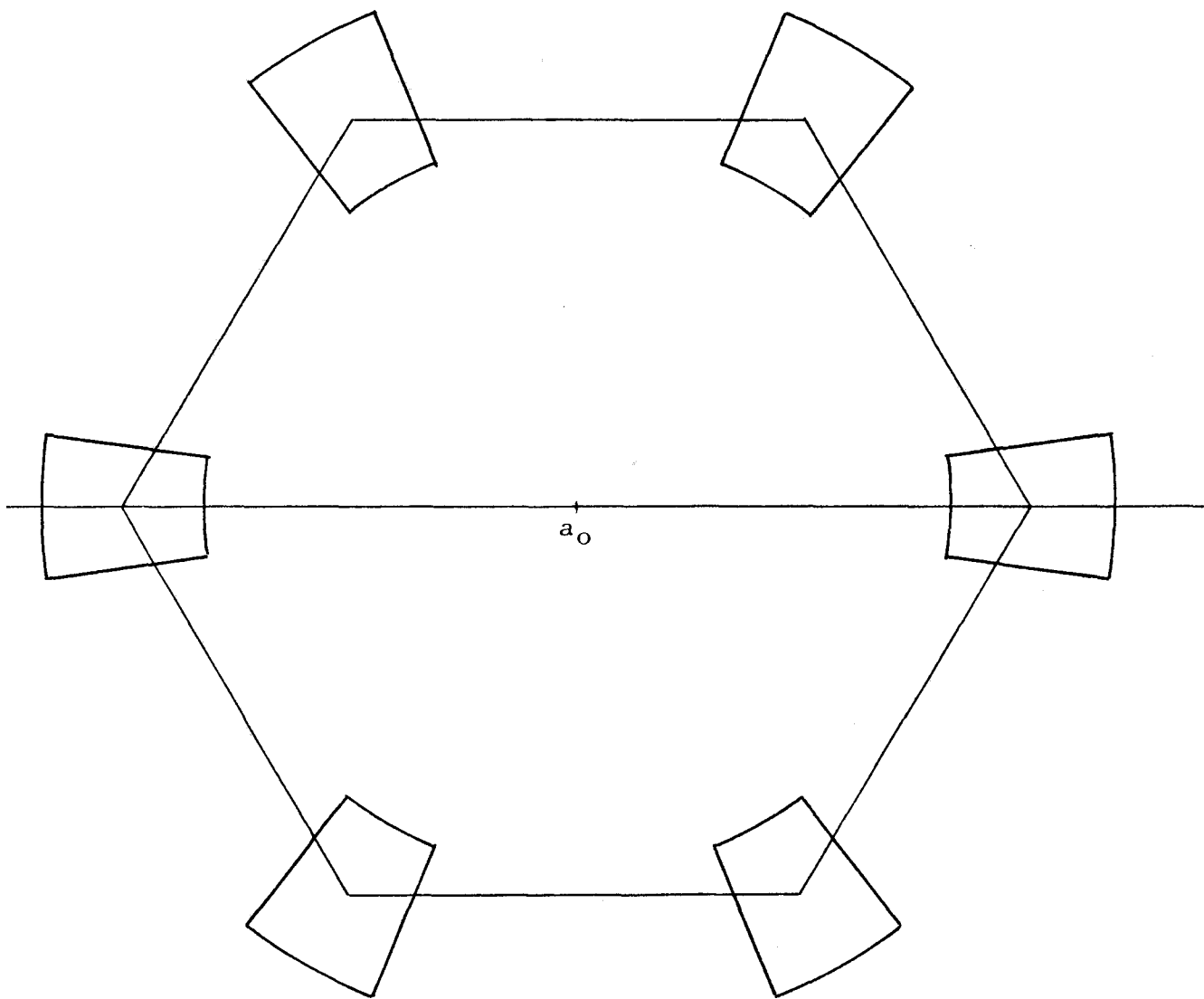


Figura 5

$$1 + C(z) \cdot P_{\rho, \theta}(z) \neq 0$$

para cada $z \in \tilde{H}$, $\rho \in [\rho_0 - \alpha, \rho_0 + \beta]$, $\theta \in [\theta_0 - \gamma, \theta_0 + \delta]$.

Se verifica, por tanto, que:

$$(z - a_0)^{r - \rho} \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) + \tilde{P}(z) \cdot C(z) \neq 0$$

para cada $z \in \tilde{H}$, $\rho \in [\rho_0 - \alpha, \rho_0 + \beta]$, $\theta \in [\theta_0 - \gamma, \theta_0 + \delta]$; y de aquí se deduce que:

$$[(z - a_0)^{r - \rho} - z_0] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)] \notin A'$$

para cada $z \in \tilde{H}$, siendo

$$A' = \{ z : \rho_0 - \alpha \leq |z + z_0| \leq \rho_0 + \beta, \theta_0 - \gamma \leq \arg(z + z_0) \leq \theta_0 + \delta \}$$

y por tanto, la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^{r - \rho} - z_0] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica que:

$$T : \tilde{H} \longrightarrow G$$

siendo $G = \{ z : z \notin A \}$ donde A está definido en el enunciado del lema y, como se demostrará en el apartado 3.3, G es el dominio simplemente conexo expresado en la figura 6; con lo que se tiene la condición (iv) del lema.

Las otras tres condiciones se obtienen automáticamente por ser $C(z)$ un controlador que estabiliza al sistema y:

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_0)^{r - \rho} - z_0 + \tilde{P}(z) \cdot C(z)}$$

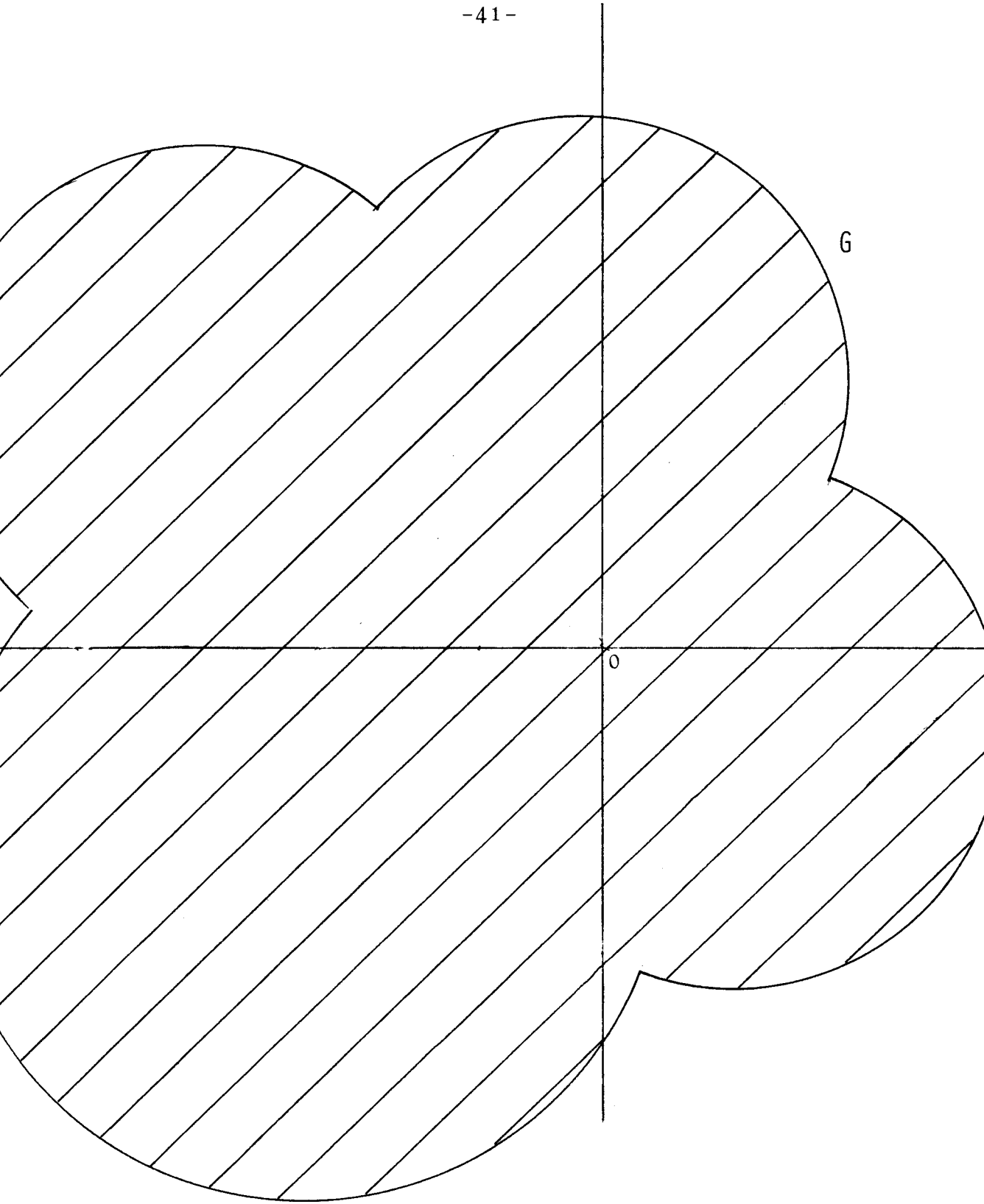


Figura 6

Recíprocamente, por verificar $T(z)$ la condición (iv), se tiene que:

$$1 + C(z) \cdot P_{\rho, \theta}(z) \neq 0$$

para cada $\rho \in [\rho_0 - \alpha, \rho_0 + \beta]$, $\theta \in [\theta_0 - \gamma, \theta_0 + \delta]$, y $z \in \tilde{H}$. Y puesto que $C(z)$ es analítica, por verificar (i), (ii) y (iii), tenemos que $C(z)$ estabiliza el sistema. □

2.2.6. LEMA

El compensador propio $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema regido por la familia:

$$\{ P_{a_1}(z) : a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta] \}$$

del caso 5, si y solamente si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0) \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica las condiciones siguientes:

- i) $T(z)$ es analítica en \tilde{H} .*
- ii) Los ceros de $T(z)$ son los polos de $\tilde{P}(z)$, multiplicidades incluidas.*
- iii) $T(z_i) = \frac{1}{(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0)}$, $i=1, \dots, m$, siendo $\{z_1, \dots, z_m\}$ los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} , multiplicidades incluidas.*

iv) $T(z) \notin A$ para todo $z \in \tilde{H}$, siendo:

$$A = \left(-\infty, \frac{-1}{\beta \cdot (a_2^0 - a_1^0 - \beta) \cdot \dots \cdot (a_r^0 - a_1^0 - \beta)} \right] \cup \left[\frac{1}{\alpha \cdot (a_2^0 - a_1^0 + \alpha) \cdot \dots \cdot (a_r^0 - a_1^0 + \alpha)}, +\infty \right)$$

cuando r es par y

$$A = \left(-\infty, \frac{-1}{\alpha \cdot (a_1^0 - a_2^0 - \alpha) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 - \alpha)} \right] \cup \left[\frac{1}{\beta \cdot (a_1^0 - a_2^0 + \beta) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 + \beta)}, +\infty \right)$$

cuando r es impar.

DEMOSTRACIÓN:

Sea γ la curva determinada por las ecuaciones:

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_r = \lambda_1 \\ \sum_{i \neq j} x_i \cdot x_j = \lambda_2 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^r x_1 \cdot \dots \cdot \hat{x}_i \cdot \dots \cdot x_r = \lambda_{r-1} \end{array} \right.$$

y sea $(a_1^0, \dots, a_r^0) \in \gamma$, $a_i^0 \neq a_j^0$ para $i \neq j$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que:

$$0 < a_1^0 < a_i^0, \text{ para } i=2, \dots, r$$

La familia de plantas viene dada por:

$$P_{a_1}(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_r)}$$

donde $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, $(a_1, \dots, a_r) \in \gamma$, y $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$

con $\alpha, \beta > 0$, $a_1^0 - \alpha > 0$.

Supongamos también, con vistas a simplificar los cálculos, que $a_1^0 + \beta \leq \mu$, siendo μ el menor punto de \mathbb{R} en el que la curva definida por la ecuación:

$$f(x) = x^r - \lambda_1 \cdot x^{r-1} + \dots + (-1)^{r-1} \cdot \lambda_{r-1} \cdot x + (-1)^r \cdot a_1^0 \dots a_r^0$$

alcanza un extremo relativo ($\mu > 0$).

Sea el modelo nominal:

$$P_o(z) = P_{a_1^0}(z)$$

En estas condiciones, si $C(z)$ es un compensador propio que estabiliza el sistema, se verifica que:

$$1 + C(z) \cdot P_{a_1}(z) \neq 0$$

para todo $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$, $(a_1, \dots, a_r) \in \gamma$, y $z \in \tilde{H}$. Se deduce entonces que:

$$(z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_r) + \tilde{P}(z) \cdot C(z) \neq 0$$

para todo $z \in \tilde{H}$, $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$, $(a_1, \dots, a_r) \in \gamma$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} (z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0) \cdot [1 + P_o(z) \cdot C(z)] &\neq \\ &\neq (-1)^r \cdot (a_1^0 \cdot \dots \cdot a_r^0 - a_1 \cdot \dots \cdot a_r) \end{aligned}$$

para cada $z \in \tilde{H}$, $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$, $(a_1, \dots, a_r) \in \gamma$.

Desarrollando:

$$(-1)^r \cdot (a_1^0 \cdot \dots \cdot a_r^0 - a_1 \cdot \dots \cdot a_r)$$

y puesto que $(a_1^0, \dots, a_r^0), (a_1, \dots, a_r) \in \gamma$, tenemos que:

$$(-1)^r \cdot (a_1^0 \cdot \dots \cdot a_r^0 - a_1 \cdot \dots \cdot a_r) = (a_1 - a_1^0) \cdot \dots \cdot (a_1 - a_r^0) = f(a_1)$$

Distinguimos dos casos:

a) Si r es impar.

La figura 7 nos da una idea de la gráfica de la función $f(z)$ para $r=5$.

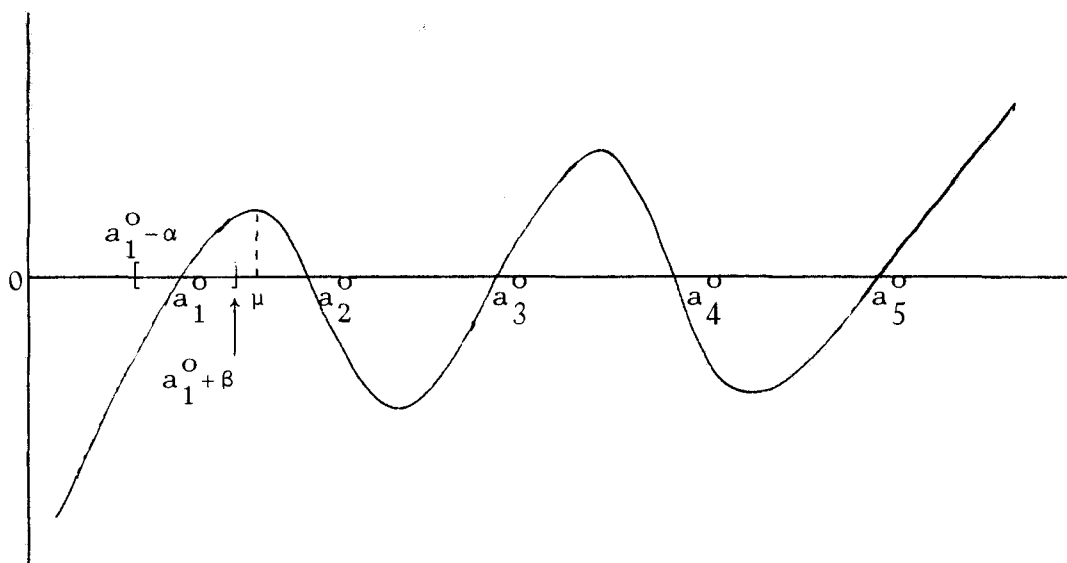


Figura 7

Puesto que $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$, tendremos que:

$$(z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0) \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)] \notin$$

$$\notin [-\alpha \cdot (a_1^0 - a_2^0 - \alpha) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 - \alpha), \beta \cdot (a_1^0 - a_2^0 + \beta) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 + \beta)]$$

para todo $z \in \tilde{H}$, y por tanto la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0) \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica que:

$$T : \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus A$$

siendo:

$$A = \left(-\infty, \frac{-1}{\alpha \cdot (a_1^0 - a_2^0 - \alpha) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 - \alpha)} \right] \cup \left[\frac{1}{\beta \cdot (a_1^0 - a_2^0 + \beta) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 + \beta)}, +\infty \right)$$

con lo que obtenemos (iv) para r impar. Las otras tres condiciones las obtenemos de aplicar que C(z) es holomorfa por estabilizar el sistema, y:

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0) + \tilde{P}(z) \cdot C(z)}$$

Recíprocamente, si $T(z) \notin A$, para todo $z \in \tilde{H}$, se tiene que:

$$1 + P_{a_1}(z) \cdot C(z) \neq 0$$

para todo $z \in \tilde{H}$, $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$, $(a_1, \dots, a_r) \in \Upsilon$, y puesto que C(z) es analítica por verificar (i), (ii) y (iii), tenemos que C(z) estabiliza el sistema.

b) Si r es par.

La figura 8 nos da una idea de la gráfica de la función f(z) para r=4. Puesto que $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$, tendremos que:

$$(z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0) \cdot [1 + P_o(z) \cdot C(z)] \notin [-\beta \cdot (a_2^0 - a_1^0 - \beta) \cdot \dots \cdot (a_r^0 - a_1^0 - \beta), \alpha \cdot (a_2^0 - a_1^0 + \alpha) \cdot \dots \cdot (a_r^0 - a_1^0 + \alpha)]$$

para todo $z \in \tilde{H}$, y por tanto la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0) \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica que:

$$T : \tilde{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus A$$

siendo:

$$A = (-\infty, \frac{-1}{\beta \cdot (a_2^0 - a_1^0 - \beta) \cdot \dots \cdot (a_r^0 - a_1^0 - \beta)}] \cup [\frac{-1}{\alpha \cdot (a_2^0 - a_1^0 + \alpha) \cdot \dots \cdot (a_r^0 - a_1^0 + \alpha)}, +\infty)$$

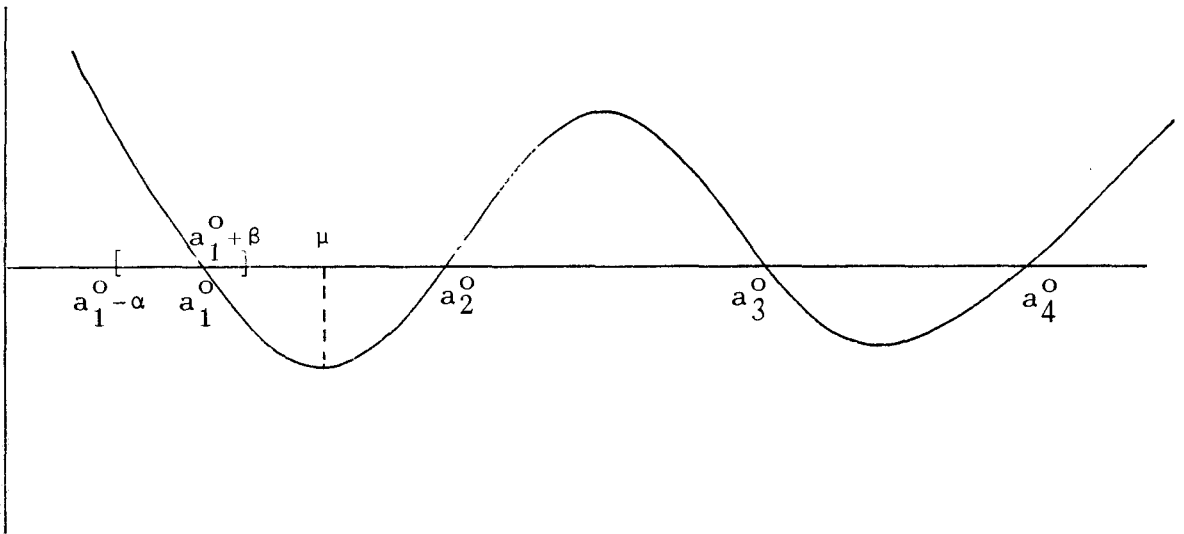


Figura 8

El resto de la demostración es análogo al caso anterior.

2.3. EL PROBLEMA GENERAL

Una vez establecidos los lemas del apartado anterior, podemos plantear nuestro problema como un problema de interpolación que se presenta, para cada familia de funciones, como un caso particular del siguiente problema general:

2.3.1. PROBLEMA GENERAL

Sea G un dominio simplemente conexo, con mas de un punto frontera, tal que $0 \in G$. Dados z_1, \dots, z_q en \tilde{H} y w_1, \dots, w_q en G encontrar, si es posible, una función f analítica en \tilde{H} tal que $f: \tilde{H} \longrightarrow G$ y:

$$f(z_i) = w_i \quad , \quad i=1, \dots, q$$

2.3.2. EQUIVALENCIA DEL PROBLEMA GENERAL CON UN PROBLEMA DE INTERPOLACIÓN EN EL DISCO.

El teorema de Riemann de la aplicación conforme (véase [25]) nos asegura la existencia de dos transformaciones conformes, una ψ de \tilde{H} en \bar{D} y otra θ de G en D . De esta forma podemos considerar el diagrama de la figura 9

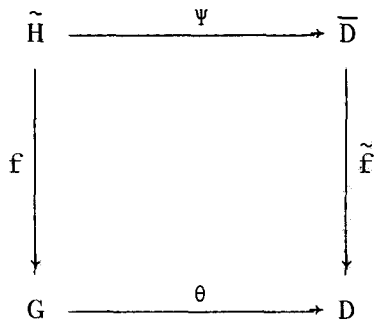


Figura 9

y reducir el problema general a encontrar una función analítica $\tilde{f} : \bar{D} \longrightarrow D$ tal que:

$$\tilde{f}(\psi(z_i)) = \theta(w_i) \quad , \quad i=1, \dots, q \quad (2.1)$$

Obtenemos así, un problema de interpolación en el disco que se puede tratar mediante la teoría de Nevanlinna-Pick. A continuación, utilizando este resultado, vamos a establecer un teorema, que llamaremos Teorema General, y que nos dará una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución al problema 2.3.1., así como un método constructivo para la obtención de tal solución.

2.3.3. TEOREMA GENERAL

Sea G un dominio de \mathbb{C} simplemente conexo con mas de un punto frontera, tal que $0 \in G$. Sean $\{z_1, \dots, z_q\}$ puntos de \tilde{H} y $\{w_1, \dots, w_q\}$ puntos de G .

Se verifica entonces que existe una función analítica $f : \tilde{H} \longrightarrow G$ tal que:

$$f(z_i) = w_i \quad , \quad i=1, \dots, q$$

si y solamente si:

$$\max \{ d_G(0, w_i) : i=1, \dots, q \} < d_D(0, \alpha_{\max}) = \log \frac{1 + \alpha_{\max}}{1 - \alpha_{\max}} \quad (2.2)$$

siendo α_{\max} el definido en 1.2.3.

DEMOSTRACIÓN:

Consideramos las transformaciones conformes cuya existencia hemos justificado en el apartado 2.3.2.:

$$\psi : \tilde{H} \longrightarrow \bar{D}$$

$$\theta : G \longrightarrow D$$

tales que $\theta(0) = 0$. Según lo expuesto en tal apartado existe f analítica de \tilde{H} en G tal que:

$$f(z_i) = w_i \quad , \quad i=1, \dots, q$$

si y solamente si existe \tilde{f} analítica de \bar{D} en D tal que verifica las condiciones (2.1).

Sea:

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

y supongamos sin pérdida de generalidad que:

$$\psi(z_1), \dots, \psi(z_\ell) \in D$$

$$\psi(z_{\ell+1}), \dots, \psi(z_q) \in \partial D$$

y sea:

$$\alpha = \max \{ |\theta(w_i)| : i=1, \dots, q \}$$

Si consideramos los puntos:

$$b_i = \frac{1}{\alpha} \cdot \theta(w_i) \quad , \quad i=1, \dots, q$$

tenemos entonces que la existencia de la función analítica $\tilde{f} : \bar{D} \longrightarrow D$ satisfaciendo (2.1) es equivalente a la existencia de una función analítica $f_\alpha : \bar{D} \longrightarrow D$ tal que:

$$f_\alpha(\psi(z_i)) = \alpha \cdot b_i \quad , \quad i=1, \dots, q$$

Aplicando ahora el teorema 1.2.6. obtenemos que existe tal función f_α si y solamente si:

$$\alpha < \alpha_{\max}(\psi(z_j), b_i)$$

para cada $j=1, \dots, \ell$, $i=1, \dots, q$, según la definición de α_{\max} dada en 1.2.3.

Tenemos, por tanto, que existe la función f en las condiciones pedidas por el teorema si y solamente si:

$$\alpha < \alpha_{\max}(\psi(z_j), b_i)$$

para cada $j=1, \dots, \ell$, $i=1, \dots, q$.

Notaremos $\alpha_{\max}(\Psi(z_j), b_i) = \alpha_{\max}$. Desarrollando esta expresión para volver a la notación inicial, y aplicando el Teorema 1.2.5., tenemos que:

$$d_D(0, \theta(w_i)) < d_D(0, \alpha_{\max})$$

para todo $i=1, \dots, q$, o lo que es equivalente:

$$d_G(0, w_i) < d_D(0, \alpha_{\max}) = \log \frac{1 + \alpha_{\max}}{1 - \alpha_{\max}}$$

para todo $i=1, \dots, q$, de donde se deduce:

$$\max \{ d_G(0, w_i) : i=1, \dots, q \} < d_D(0, \alpha_{\max}) = \log \frac{1 + \alpha_{\max}}{1 - \alpha_{\max}}$$

que es el resultado deseado.

¶¶

Una vez establecido este teorema, y como corolario de él, podemos dar una condición necesaria y suficiente para la existencia de la función T requerida en los lemas 2.2.2., 2.2.3., 2.2.4., 2.2.5. y 2.2.6.:

Sea $\{P_s(z) : s \in K\}$ una familia de funciones verificando alguna de las condiciones definidas en 2.1. Sea $P_0(z)$ el modelo nominal y sean $W(z)$ y G , respectivamente, la función y el dominio dados por el lema correspondiente a la familia de funciones. Se tiene:

2.3.4. COROLARIO

Existe una función T tal que $T : \tilde{H} \longrightarrow G$ verificando:

i) T es analítica en \tilde{H} .

ii) Los ceros de T son los polos de $\tilde{P}(z)$ en \tilde{H} , multiplicidades incluidas. (2.3)

iii) $T(z_i) = W(z_i)$, $i=1, \dots, m$, siendo $\{z_1, \dots, z_m\}$ los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} .

si y solamente si:

$$\max \{ d_G(0, W(z_i)) : i=1, \dots, m \} < d_D(0, \alpha_{\max})$$

DEMOSTRACIÓN:

Basta aplicar el Teorema 2.3.3. al dominio G y a los conjuntos de puntos $\{z_i, P_j : i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$ y $\{W(z_i), b_j : i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$ donde $b_j = 0$ para $j=1, \dots, n$, que corresponden respectivamente a los conjuntos de puntos $\{z_i : i=1, \dots, q\} \subset \tilde{H}$ y $\{w_i : i=1, \dots, q\} \subset G$ del teorema.

2.4. ESTIMACION DE α_{MAX}

Puesto que el teorema 2.3.2. nos da una condición de solubilidad basada en una acotación en la que interviene principalmente α_{max} , y en vistas a facilitar una estimación de este valor establecemos el siguiente resultado:

2.4.1. TEOREMA

Sea f una función analítica de D en D y sean $a_i \in D$, $i=1, \dots, l+k$, tales que:

$$f(a_i) = 0, \quad i=1, \dots, k$$

$$f(a_{j+k}) = \alpha \cdot b_j, \quad j=1, \dots, l$$

donde se verifican las siguientes condiciones:

$$0 < |b_j| \leq 1, \quad j=1, \dots, l$$

y existe $j_0 \in \{1, \dots, l\}$ tal que $|b_{j_0}| = 1$,

y sean:

$$\lambda_i = \min \left\{ \left| \frac{a_i - a_{j+k}}{b_i \cdot (1 - \bar{a}_i a_{j+k})} \right| : j=1, \dots, l \right\}$$

para $i=1, \dots, k$..

Bajo estas condiciones se tiene que:

$$|\alpha| \leq \min \{ \lambda_i : i=1, \dots, k \}$$

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos, para $i=1, \dots, k$, la equivalencia:

$$e_i(z) = \frac{a_i - z}{1 - \bar{a}_i \cdot z}$$

Claramente se tiene que $e_i^{-1}(z) = e_i(z)$. Sean:

$$e_i^{-1}(a_{j+k}) = \frac{a_i - a_{j+k}}{1 - \bar{a}_i \cdot a_{j+k}} = \beta_{ji}$$

Llamaremos g_i , para $i=1, \dots, k$, a la función $g_i = f \circ e_i$.

Se tiene que para cada $i=1, \dots, k$, $g_i : D \longrightarrow D$ es analítica y verifica que :

$$g_i(0) = 0$$

$$g_i(\beta_{ji}) = \alpha \cdot b_j, \quad j=1, \dots, \ell$$

Aplicando el lema de Schwarz tenemos que:

$$|\alpha \cdot b_j| \leq |\beta_{ji}|, \quad j=1, \dots, \ell$$

de donde:

$$|\alpha| \leq \min \left\{ \left| \frac{\beta_{ji}}{b_j} \right| : j=1, \dots, \ell \right\}$$

para cada $i=1, \dots, k$.

Y por tanto obtenemos que:

$$|\alpha| \leq \min \{ \lambda_i : i=1, \dots, k \}$$

con lo que queda demostrado el teorema.

□

CAPITULO 3

CONSTRUCCION DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES

3. CONSTRUCCION DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES

En el capítulo anterior hemos establecido una condición necesaria y suficiente para que exista un controlador que estabilice asintóticamente un sistema, regido por las familias de funciones definidas en el apartado 2.1. Además, en el caso de que se cumpla la condición, el controlador se obtiene transformando el problema anterior en un problema de interpolación en el disco.

Para construir la solución necesitamos tener explícitamente las transformaciones conformes, cuya existencia está asegurada por el Teorema de Riemann, Ψ de \tilde{H} en \bar{D} y θ

de G en D ; siendo G el dominio dado por el lema correspondiente a la familia de funciones considerada.

El propósito de este tercer capítulo será, en primer lugar, construir las transformaciones conformes correspondientes a cada tipo de familia; y en segundo lugar, y utilizando lo anterior, ver en qué se traduce la condición de existencia (2.2) para cada caso.

Dividiremos por tanto este capítulo en cinco apartados, cada uno de los cuales corresponderá al desarrollo de los dos temas expuestos anteriormente, realizado para cada familia de funciones.

3.1. FAMILIA TIPO 1

Sea $\{P_s(z) : s \in K\}$ la familia de funciones, que puede expresarse como:

$$P_s(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\prod_{k=0}^{r-1} [z - a_0 - \sqrt[r]{s} \cdot (\cos \frac{2k\pi}{r} + i \cdot \text{sen} \frac{2k\pi}{r})]}$$

donde $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, $s_0 > \alpha > 0$, $\beta > 0$, en las condiciones pedidas por 2.1.

Según el lema 2.2.2. el compensador propio $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema, regido por esta familia de funciones, si y solamente si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^r - s_0] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica las condiciones (2.3) para la función:

$$W(z) = \frac{1}{(z - a_0)^r - s_0}$$

y además:

$$T(z) \notin (-\infty, \frac{-1}{\alpha}] \cup [\frac{1}{\beta}, \infty)$$

para todo $z \in \tilde{H}$.

Sea:

$$G = \mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, \frac{-1}{\alpha}] \cup [\frac{1}{\beta}, \infty) \right\}$$

Tomamos como transformación θ correspondiente a esta familia la composición $\theta = \theta_3 \circ \theta_2 \circ \theta_1$, siendo $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ las transformaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_1 : G &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ z &\longrightarrow \theta_1(z) = \frac{1 - \beta z}{1 + \alpha z} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] &\longrightarrow H \\ z &\longrightarrow \theta_2(z) = \sqrt{z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \theta_3 : H &\longrightarrow D \\ z &\longrightarrow \theta_3(z) = \frac{1 - z}{1 + z} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por tanto $\theta : G \longrightarrow D$ está definida como:

$$\theta(z) = \frac{1 - \left(\frac{1 - \beta z}{1 + \alpha z}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(\frac{1 - \beta z}{1 + \alpha z}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Veamos ahora en que se traduce la condición (2.2) utilizando esta función θ :

$$\theta\left(\frac{1}{(z_i - a_0)^{r-s_0}}\right) = \frac{[|(z_i - a_0)^{r-(s_0-\alpha)}|^{\frac{1}{2}} - |(z_i - a_0)^{r-(s_0+\beta)}|^{\frac{1}{2}}]^2}{\alpha + \beta}$$

para todo $i=1, \dots, m$, siendo z_1, \dots, z_m los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} .

luego:

$$d_G\left(0, \frac{1}{(z_i - a_0)^{r-s_0}}\right) < d_D(0, \alpha_{\max})$$

para todo $i=1, \dots, m$, si y solamente si:

$$\max\left\{\frac{|[(z_i - a_0)^{r-(s_0-\alpha)}]^{\frac{1}{2}} - [(z_i - a_0)^{r-(s_0+\beta)}]^{\frac{1}{2}}|^2}{\alpha + \beta} : 1 \leq i \leq m\right\} < \alpha_{\max}$$

donde α_{\max} es el valor definido en 1.2.3. para los datos de interpolación siguientes:

Si p_1, \dots, p_n son los polos de $\tilde{P}(z)$ en \tilde{H} , sea a un número real tal que:

$$a \neq p_j, \text{ para todo } j=1, \dots, n$$

$$a \neq z_i, \text{ para todo } i=1, \dots, m$$

y sea ψ de \tilde{H} en \bar{D} definida por:

$$\begin{aligned} \Psi : \tilde{H} &\longrightarrow \bar{D} \\ z &\longrightarrow \frac{a-z}{a+z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Entonces tenemos que:

$$\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(\Psi(\tau_k), b_i) \quad , \quad k=1, \dots, \ell \quad , \quad i=1, \dots, m$$

donde:

$$\begin{aligned} \{\tau_k : k=1, \dots, \ell\} &= \{z_i : 1 \leq i \leq m, \Psi(z_i) \in D\} \cup \\ &\cup \{p_j : 1 \leq j \leq n, \Psi(p_j) \in D\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

y:

$$b_i = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{[[(z_i - a_0)^r - (s_0 - \alpha)]^{\frac{1}{2}} - [(z_i - a_0)^r - (s_0 + \beta)]^{\frac{1}{2}}]^2}{\alpha + \beta}$$

para $i=1, \dots, m$, siendo:

$$\omega = \max \left\{ \left| \theta \left(\frac{1}{(z_i - a_0)^r - s_0} \right) \right| : 1 \leq i \leq m \right\}$$

Una vez comprobado ésto, y según el diagrama de la figura 9, aplicaremos la teoría de interpolación de Nevanlinna-Pick para encontrar una función T^* de \bar{D} en D tal que:

$$T^* \left(\frac{a - p_j}{a + p_j} \right) = 0 \quad , \quad j=1, \dots, n \quad (3.6)$$

$$T^* \left(\frac{a - z_i}{a + z_i} \right) = \theta \left(\frac{1}{(z_i - a_0)^r - s_0} \right) \quad , \quad i=1, \dots, m \quad (3.7)$$

3.2. FAMILIA TIPO 2

Sea $\{P_s(z) : s \in K\}$ la familia de funciones que puede expresarse como:

$$P_s(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z - a_0 - si) \cdot (z - a_0 + si)}$$

donde i es la unidad imaginaria, $s \in [s_0 - \alpha, s_0 + \beta]$, $\alpha, \beta > 0$, y $s_0 - \alpha \geq 0$, en las condiciones pedidas en 2.1.

Según el lema 2.2.3. el compensador propio $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema regido por esta familia de funciones si y sólo si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^2 + s_0^2] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica las condiciones (2.3) para la función:

$$W(z) = \frac{1}{(z - a_0)^2 - s_0^2}$$

y además:

$$T(z) \notin \left(-\infty, \frac{-1}{\beta \cdot (2s_0 + \beta)}\right] \cup \left[\frac{1}{\alpha \cdot (2s_0 - \alpha)}, +\infty\right) \text{ para todo } z \in \tilde{H}$$

Llamamos G al dominio simplemente conexo:

$$G = \mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, \frac{-1}{\beta(2s_0 + \beta)}] \cup \left[\frac{1}{\alpha(2s_0 - \alpha)}, +\infty \right) \right\}$$

y tomamos como transformación θ correspondiente a esta familia la composición $\theta = \theta_3 \circ \theta_2 \circ \theta_1$ siendo θ_1 definida como:

$$\begin{aligned} \theta_1 : G &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ z &\longrightarrow \theta_1(z) = \frac{1 - \alpha \cdot (2s_0 - \alpha) \cdot z}{1 + \beta \cdot (2s_0 + \beta) \cdot z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

y θ_2 de $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a H , y θ_3 de H a D definidas según (3.2) y (3.3) respectivamente. Por tanto, $\theta : G \longrightarrow D$ está definida como:

$$\theta(z) = \frac{1 - \left[\frac{1 - \alpha \cdot (2s_0 - \alpha) \cdot z}{1 + \beta \cdot (2s_0 + \beta) \cdot z} \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \left[\frac{1 - \alpha \cdot (2s_0 - \alpha) \cdot z}{1 + \beta \cdot (2s_0 + \beta) \cdot z} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Veamos ahora en que se traduce la condición (2.2) utilizando esta función θ . Puesto que:

$$\theta\left(\frac{1}{(z_i - a_0)^2 + s_0^2}\right) = \frac{[\left[(z_i - a_0)^2 + (s_0 - \alpha)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[(z_i - a_0)^2 + (s_0 + \beta)^2\right]^{\frac{1}{2}}]}{(s_0 + \beta)^2 - (s_0 - \alpha)^2}$$

para todo $i=1, \dots, m$, siendo z_1, \dots, z_m los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} , tendremos que:

$$d_G\left(0, \frac{1}{(z_i - a_0)^2 + s_0^2}\right) < d_D(0, \alpha_{\max})$$

para todo $i=1, \dots, m$ si y solamente si:

$$\max \left\{ \frac{|[(z_i - a_0)^2 + (s_0 + \beta)^2]^{\frac{1}{2}} - [(z_i - a_0)^2 + (s_0 - \alpha)^2]^{\frac{1}{2}}|^2}{(s_0 + \beta)^2 - (s_0 - \alpha)^2} : 1 \leq i \leq m \right\} < \alpha_{\max}$$

donde α_{\max} es el valor definido en 1.2.3. para los siguientes datos de interpolación:

Si p_1, \dots, p_n son los polos de $\tilde{P}(z)$ en \tilde{H} , sea a un número real tal que:

$$a \neq p_j \quad , \quad \text{para todo } j=1, \dots, n$$

$$a \neq z_i \quad , \quad \text{para todo } i=1, \dots, m$$

y sea ψ de \tilde{H} en \bar{D} definida según (3.4).

Entonces tenemos que:

$$\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(\psi(\tau_k), b_i) \quad , \quad k=1, \dots, \ell \quad , \quad i=1, \dots, m$$

donde $\{\tau_k : k=1, \dots, \ell\}$ es el conjunto definido en (3.5),

y:

$$b_i = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|[(z_i - a_0)^2 + (s_0 - \alpha)^2]^{\frac{1}{2}} - [(z_i - a_0)^2 + (s_0 + \beta)^2]^{\frac{1}{2}}|^2}{(s_0 + \beta)^2 - (s_0 - \alpha)^2}$$

para todo $i=1, \dots, m$, siendo:

$$\omega = \max \left\{ \left| \theta \left(\frac{1}{(z_i - a_0)^2 + s_0^2} \right) \right| : 1 \leq i \leq m \right\}$$

Una vez comprobada esta condición, y según el diagrama de la figura 9, aplicaremos la teoría de interpolación de Nevanlinna-Pick para encontrar una función T^* de \bar{D} en D tal que verifique la condición (3.6) y además:

$$T^*\left(\frac{a - z_i}{a + z_i}\right) = \theta\left(\frac{1}{(z_i - a_0)^2 + s_0^2}\right), \quad i=1, \dots, m \quad (3.9)$$

3.3. FAMILIA TIPO 3

Sea $\{ P_{\omega}(z) : \omega \in D_t(\omega_0) \}$ la familia de funciones que pueden expresarse como:

$$P_{\omega}(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\prod_{k=0}^{r-1} [z - a_0 - |\omega|^{1/r} \cdot (\cos \frac{\arg \omega + 2k\pi}{r} + i \cdot \sen \frac{\arg \omega + 2k\pi}{r})]}$$

en las condiciones pedidas por 2.1.

Según el lema 2.2.4. el compensador propio $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema regido por esta familia de funciones si y solamente si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^r - \omega_0] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

verifica las condiciones (2.3) para la función:

$$W(z) = \frac{1}{(z - a_0)^r - \omega_0}$$

y además $T(z) \in D_{1/t}(0)$ para todo $z \in \tilde{H}$.

Consideramos como transformación θ correspondiente a esta familia la definida por:

$$\begin{array}{ccc} \theta : D_{1/t}(0) & \longrightarrow & D \\ z & \longrightarrow & t \cdot z \end{array}$$

Veamos ahora en qué se traduce la condición (2.2) utilizando esta función θ :

$$\theta\left(\frac{1}{(z_i - a_0)^{r - \omega_0}}\right) = \frac{t}{(z_i - a_0)^{r - \omega_0}}$$

para todo $i=1, \dots, m$, siendo z_1, \dots, z_m los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} . Luego:

$$d_G\left(0, \frac{1}{(z_i - a_0)^{r - \omega_0}}\right) < d_D(0, \alpha_{\max})$$

para todo $i=1, \dots, m$, si y solamente si:

$$\max \left\{ \frac{t}{|(z_i - a_0)^{r - \omega_0}|} : 1 \leq i \leq m \right\} < \alpha_{\max}$$

donde α_{\max} es el valor definido en 1.2.3, para los datos de interpolación siguientes:

Si p_1, \dots, p_n son los polos de $\tilde{P}(z)$ en \tilde{H} , sea a un número real como el elegido en los casos anteriores, y sea ψ de H en \bar{D} definida según (3.4). Tenemos entonces que α_{\max} depende de los datos $\{\psi(\tau_k), b_i : k=1, \dots, \ell, i=1, \dots, m\}$ donde $\{\tau_k : k=1, \dots, \ell\}$ es el conjunto definido en (3.5), y

$$b_i = \frac{t}{\eta} \cdot \frac{1}{(z_i - a_0)^{r - \omega_0}}$$

para todo $i=1, \dots, m$, siendo:

$$\eta = \max \left\{ \left| \theta \left(\frac{1}{(z_i - a_0)^{r - \omega_0}} \right) \right| : 1 \leq i \leq m \right\}$$

Una vez comprobada esta condición, y razonando de forma análoga a los casos anteriores, aplicaremos la teoría de interpolación de Nevanlinna-Pick para encontrar una función T^* de \bar{D} en D tal que verifique (3.6) y :

$$T^* \left(\frac{a - z_i}{a + z_i} \right) = \theta \left(\frac{1}{(z_i - a_0)^{r - \omega_0}} \right) \quad , \quad i=1, \dots, m \quad (3.10)$$

3.4. FAMILIA TIPO 4

Sea $\{P_{\rho, \psi}(z) : \rho \in K, \psi \in K'\}$ la familia de funciones que pueden expresarse como:

$$P_{\rho, \psi}(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\prod_{k=0}^{r-1} [z - a_0 - \frac{r}{\rho} \cdot (\cos \frac{\psi + 2k\pi}{r} + i \cdot \text{sen} \frac{\psi + 2k\pi}{r})]}$$

siendo $\rho \in [\rho_0 - \alpha, \rho_0 + \beta]$, $\psi \in [\psi_0 - \gamma, \psi_0 + \delta]$, $\rho_0 - \alpha > 0$, $\delta + \gamma < \frac{2\pi}{r}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, en las condiciones pedidas por 2.1.

Esta es la única familia de funciones, que tratamos, que depende continuamente de dos parámetros en vez de uno, y es por ésto que resulta uno de los casos más interesantes en la práctica.

Según el Lema 2.2.5. el compensador propio $C(z)$ estabiliza asintóticamente el sistema regido por esta familia de funciones si y solamente si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{[(z - a_0)^r - z_0] \cdot [1 + P_0(z) \cdot C(z)]}$$

donde $z_0 = \rho_0 \cdot (\cos \psi_0 + i \cdot \text{sen} \psi_0)$, verifica las condiciones

(2.3) para la función:

$$W(z) = \frac{1}{(z - a_0)^r - z_0}$$

y además $T(z) \notin A$ para todo $z \in \tilde{H}$, siendo A el dominio:

$$A = \{z : \rho_0 - \alpha \leq \left| \frac{1}{z} + z_0 \right| \leq \rho_0 + \beta, \psi_0 - \gamma \leq \arg\left(\frac{1}{z} + z_0\right) \leq \psi_0 + \delta \}$$

Llamamos G al dominio simplemente conexo $G = \mathbb{C} \setminus A$. Vamos a construir una equivalencia conforme θ entre G y D . Para ello, en primer lugar veremos detalladamente las ecuaciones de la frontera de G , y luego, siguiendo los mismos pasos que en los casos anteriores, definiremos distintas transformaciones cuya composición nos dará la transformación deseada θ .

Sea:

$$A' = \{z : \rho_0 - \alpha \leq |z + z_0| \leq \rho_0 + \beta, \psi_0 - \gamma \leq \arg(z + z_0) \leq \psi_0 + \delta \}$$

el dominio representado en la figura 10. Tenemos que A es la imagen del dominio A' por la transformación $\frac{1}{z}$; y puesto que esta transformación nos convierte las rectas que pasan por un punto $\omega_0 \neq 0$ en circunferencias que pasan por el origen y por el punto $\frac{1}{\omega_0}$, tendremos que las curvas ℓ_1 y ℓ_2 definidas por las ecuaciones:

$$\ell_1 : \psi_0 - \gamma = \arg\left(\frac{1}{z} + z_0\right)$$

$$\ell_2 : \psi_0 + \delta = \arg\left(\frac{1}{z} + z_0\right)$$

que delimitan una parte de la frontera de A son dos circunferencias que pasan por el origen y por el punto $\frac{-1}{z_0}$.

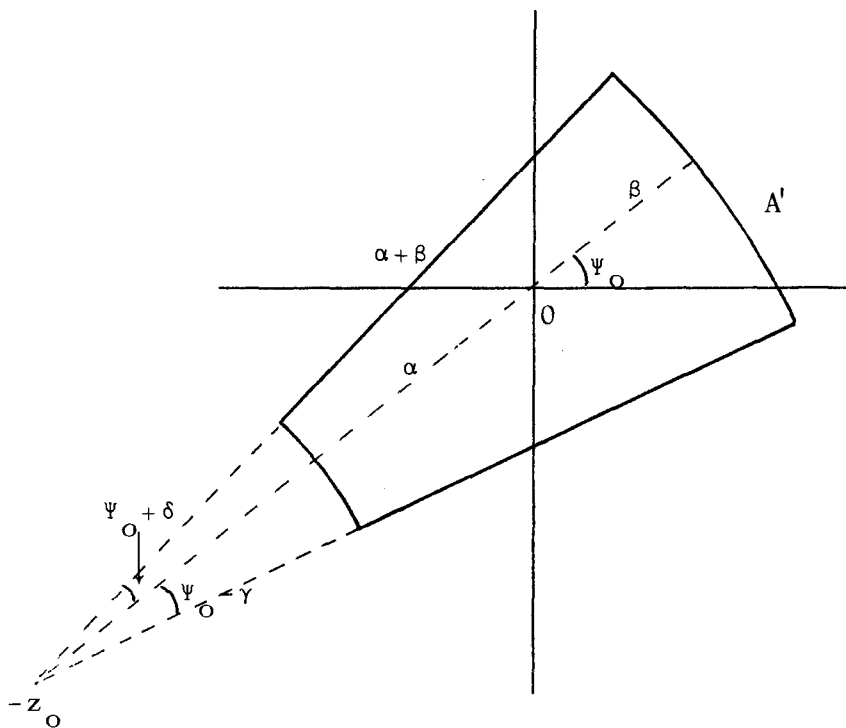


Figura 10

Por otra parte, las circunferencias:

$$\rho_0 - \alpha = |z + z_0|$$

$$\rho_0 + \beta = |z + z_0|$$

se transforman a través de $\frac{1}{z}$ en dos circunferencias C_1 y

C_2 de ecuaciones:

$$\left| z + \frac{\bar{z}_0}{\rho_0 - R_i} \right|^2 = \frac{R_i^2}{\rho_0 - R_i} \quad i=1,2$$

siendo $R_1 = \rho_0 - \alpha$, $R_2 = \rho_0 + \beta$.

Por tanto, y puesto que C_1 y C_2 cortan a ℓ_1 y ℓ_2 ortogonalmente, tendremos que el dominio G será la unión de las cuatro circunferencias C_1 , C_2 , ℓ_1 y ℓ_2 junto con sus interiores, según representa la figura 11, siendo:

$$z_1 = \frac{-\bar{z}_0}{\alpha \cdot (2\rho_0 - \alpha)} \quad ; \quad r_1 = \frac{\rho_0 - \alpha}{\alpha \cdot (2\rho_0 - \alpha)}$$

$$z_2 = \frac{\bar{z}_0}{\beta \cdot (2\rho_0 + \beta)} \quad ; \quad r_2 = \frac{\rho_0 + \beta}{\beta \cdot (2\rho_0 + \beta)}$$

Consideramos entonces las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \theta_1 : G &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus A' \\ z &\longrightarrow \frac{1}{z} \\ \\ \theta_2 : \mathbb{C} \setminus A' &\longrightarrow B' \\ z &\longrightarrow \log(z+z_0) \end{aligned}$$

cortando por la recta:

$$\arg(z+z_0) = \psi_0 - \gamma$$

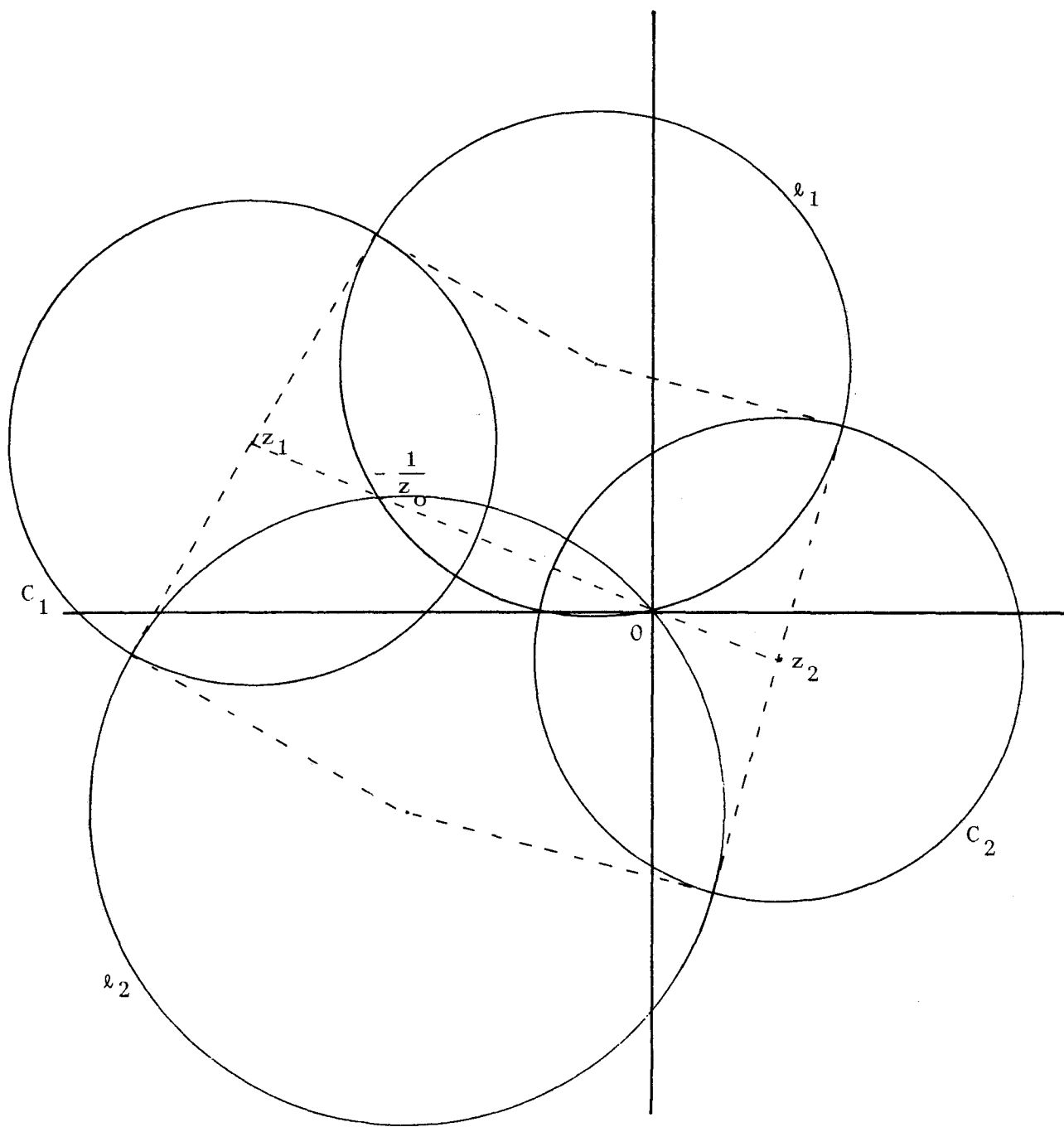


Figura 11

donde B' es la franja, con una cavidad rectangular, representada en la figura 12.

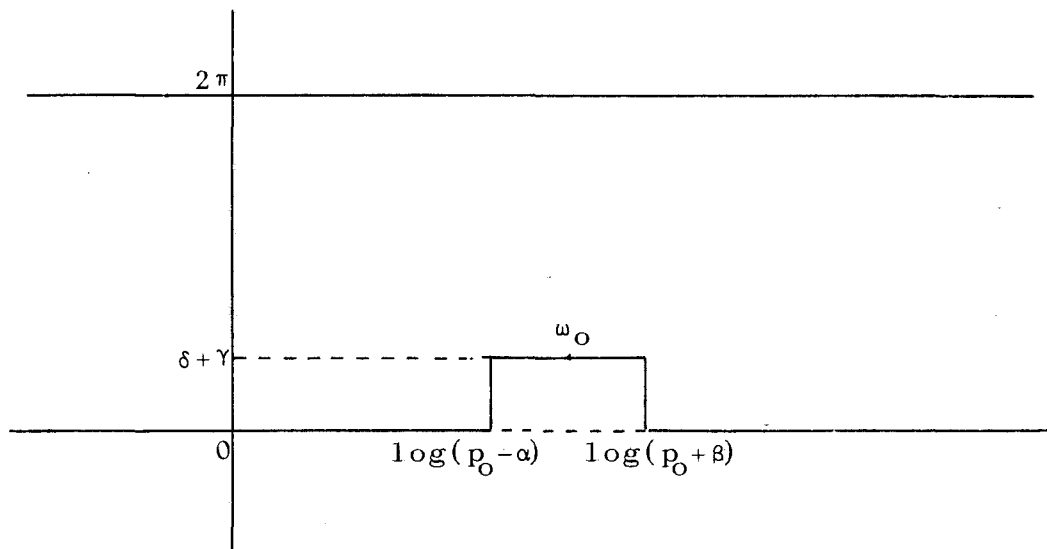


Figura 12

Utilizaremos ahora las transformaciones de Christoffel-Schwarz; para ello, en primer lugar, aplicaremos una traslación y un giro. Sea:

$$\begin{aligned} \theta_3 : B' &\longrightarrow B \\ z &\longrightarrow (z - \omega_0) \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} \end{aligned}$$

donde $\omega_0 = \log[(\rho_0 - \alpha) \cdot (\rho_0 + \beta)]^{\frac{1}{2}} + i \cdot (\delta + \gamma)$.

Por tanto B es el recinto representado en la figura 13:

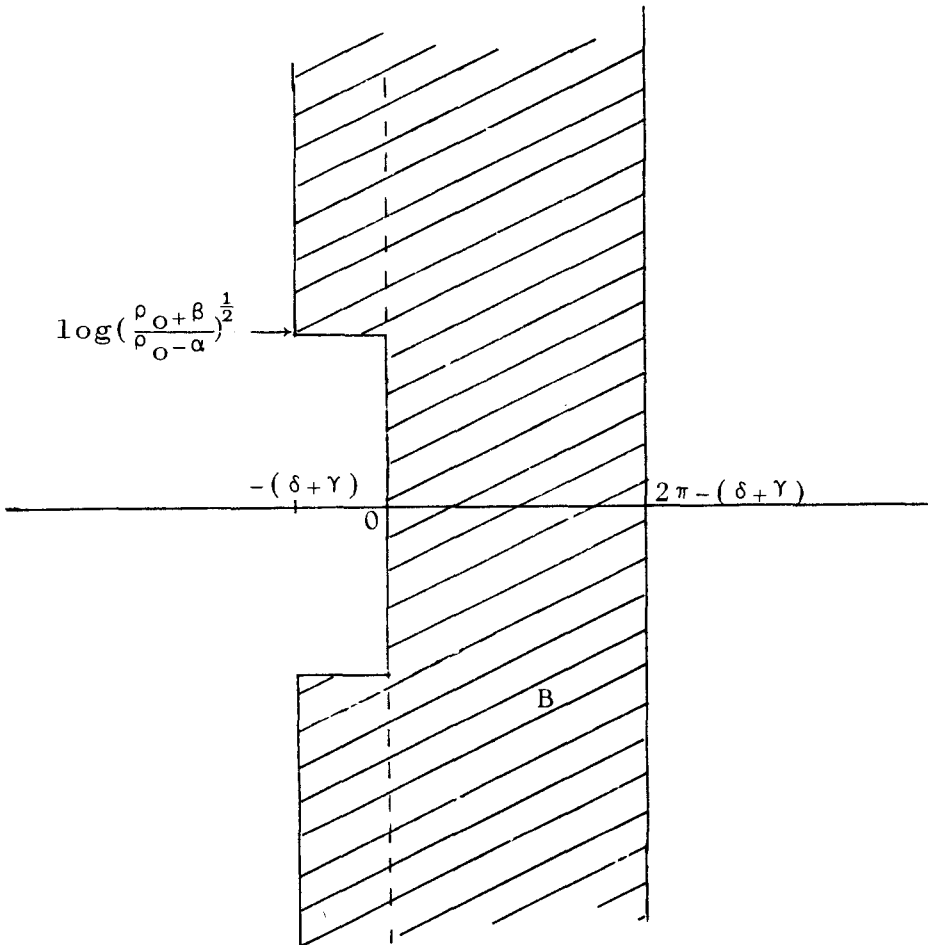


Figura 13

Definimos a continuación la integral elíptica normal de tercera especie como:

$$\omega(z, \nu, k) = \int_0^z \frac{dt}{(1 + \nu \cdot t^2) \cdot [(1 - t^2) \cdot (1 - k^2 t^2)]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \int_0^\theta \frac{d\psi}{(1 + \nu \operatorname{sen}^2 \psi) \cdot (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi)^{\frac{1}{2}}} = \Pi(\theta, \nu, k) \quad (3.11)$$

que también puede expresarse, haciendo el cambio de variable $z = \operatorname{sn} u$, como:

$$\omega(\operatorname{sn} u, \nu, k) = \int_0^u \frac{d\tau}{1 + \nu \operatorname{sn}^2 \tau}$$

donde $\operatorname{sn} u$ es la función inversa de la integral elíptica normal de primera especie:

$$u(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{[(1-t^2) \cdot (1-k^2 t^2)]^{\frac{1}{2}}}$$

y haciendo el cambio $z = \operatorname{sen} \psi$ y la sustitución $t = \operatorname{sen} \phi$, la podemos poner como:

$$u(\operatorname{sen} \psi, k) = F(\psi, k) = \int_0^\psi \frac{d\phi}{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

La figura 14 representa axiomáticamente la función sn .

Llamaremos integral completa de tercera especie a la magnitud:

$$\Pi_1(\nu, k) = \omega(1, \nu, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \nu, k\right)$$

Tenemos que, como se puede ver en [30, pg.292], la imagen del primer cuadrante del z -plano en la transformación de la integral elíptica normal de tercera especie (3.11) para $0 < k < 1$ y $-1 < \nu < -k^2$, es la representada en la figura

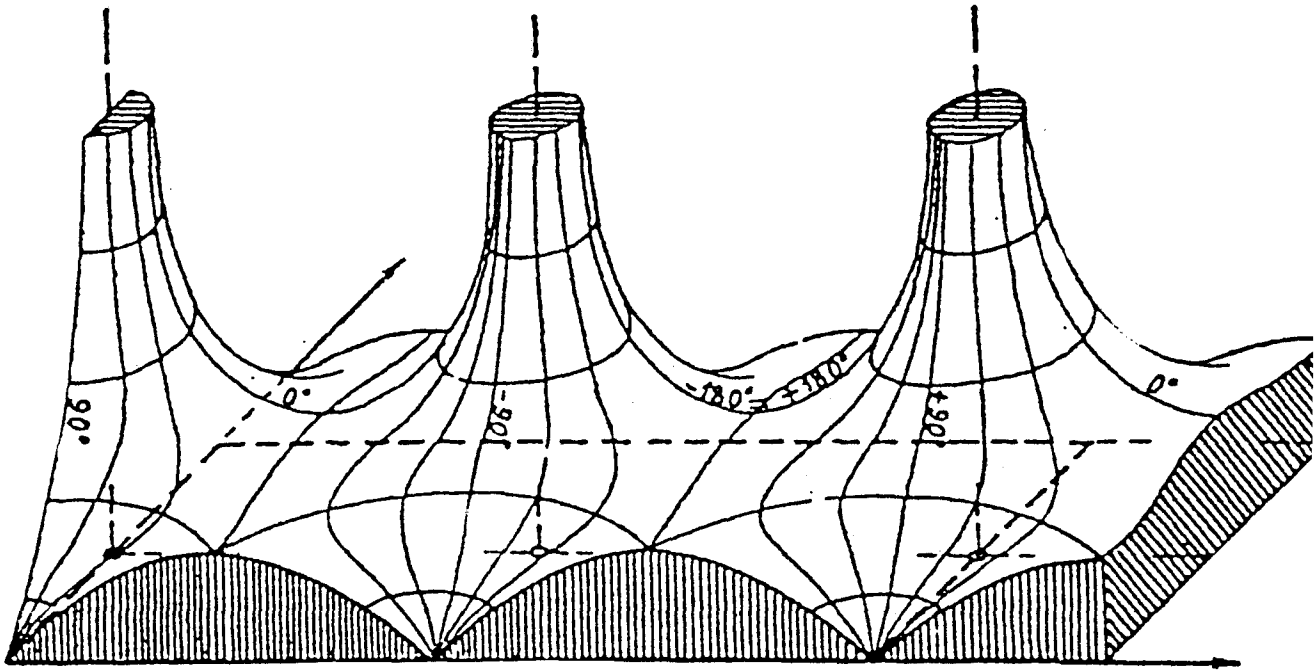


Figura 14

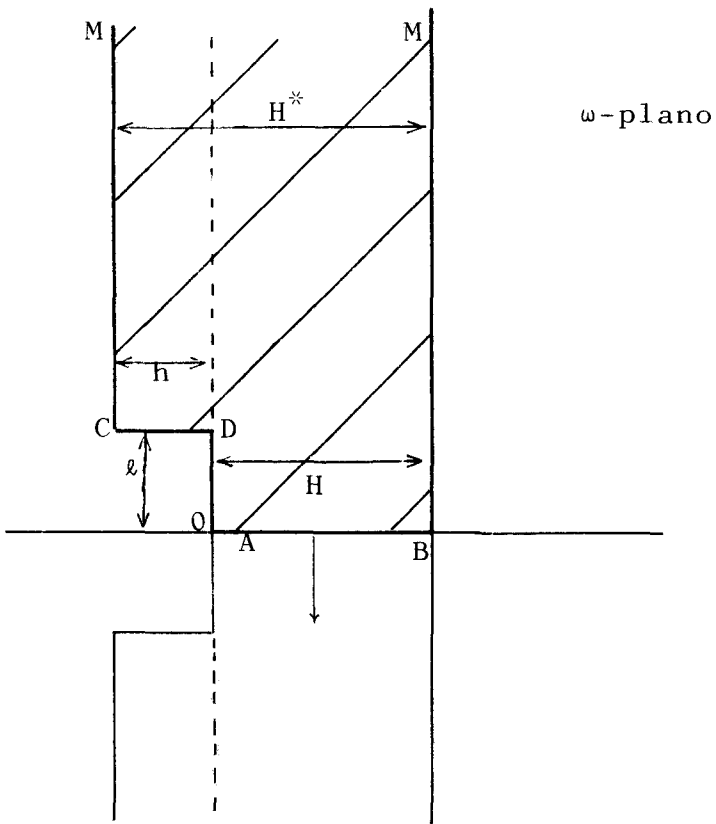
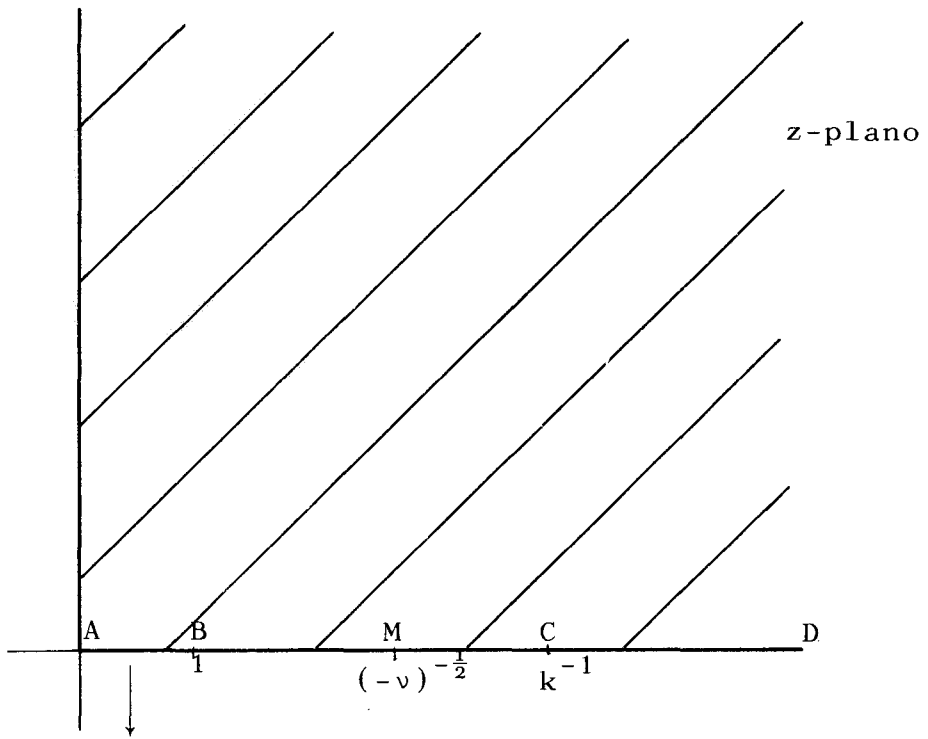


Figura 15

15; además, la prolongación de la transformación del primer cuadrante del z -plano según el principio de simetría, lleva en el ω -plano a una franja con una cavidad rectangular tal como se indica en la figura.

Llamamos por tanto θ_4 a la transformación inversa de la integral elíptica normal de tercera especie $\omega(z, \nu, k)$ donde ν y k son tales que verifican:

$$H^* = 2\pi = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{|\nu|}{|\nu+1| \cdot |\nu+k^2|} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ell = \log \left(\frac{\rho_0 + \beta}{\rho_0 - \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{k^2}{k^2 + \nu} \cdot \Pi_1(\nu', k')$$

donde:

$$\nu' = - \frac{\nu}{k^2 + \nu} \cdot k'^2$$

$$k' = (1 - k^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{módulo complementario})$$

y:

$$H = 2\pi - (\delta + \gamma) = \Pi_1(\nu, k)$$

La transformación θ_4 lleva nuestro dominio B de la figura 13 en el semiplano derecho con una franja a lo largo de la semirrecta $x \geq 1$, es decir en el dominio C de la figura 16.

La transformación θ_5 será un giro de 90° :

$$\theta_5(z) = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

para aplicar la transformación inversa a:

$$z = \frac{1}{2} (w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}})$$

que llamaremos θ_6 (véase [20,pg.150]), y que nos lleva nuestro dominio C al semiplano superior $V = \{ z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0 \}$.

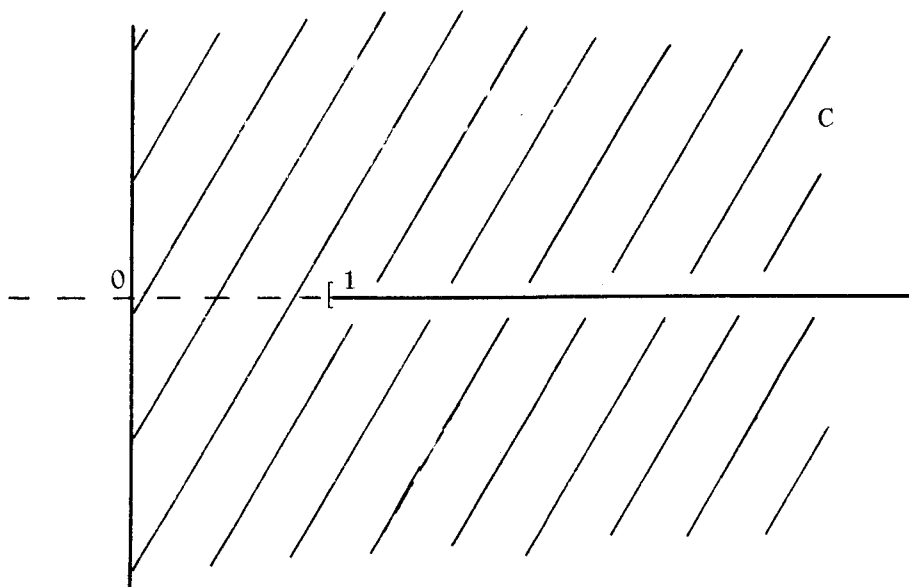


Figura 16

Por último:

$$\begin{array}{ccc} \theta_7 : V & \longrightarrow & D \\ z & \longrightarrow & \frac{1 - z e^{-\frac{\pi}{2}i}}{1 + z e^{-\frac{\pi}{2}i}} \end{array}$$

La transformación buscada θ de G en D será la composición de estas siete transformaciones y la condición (2.2) para

esta familia se traduce en lo siguiente:

Si z_1, \dots, z_m son los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} , tendremos que:

$$d_G(0, \frac{1}{(z_i - a_0)^{r - z_0}}) < d_D(0, \alpha_{\max})$$

si y solamente si:

$$\max \{ |\theta(\frac{1}{(z_i - a_0)^{r - z_0}})| : 1 \leq i \leq m \} < \alpha_{\max}$$

donde α_{\max} está definido en 1.2.3. para los siguientes datos de interpolación:

$$\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(\Psi(\tau_k), b_i) \quad , \quad k=1, \dots, \ell \quad , \quad i=1, \dots, m$$

donde $\{ \tau_k : k=1, \dots, \ell \}$ está definido en (3.5) y

$$b_i = \frac{1}{\omega} \cdot \theta(\frac{1}{(z_i - a_0)^{r - z_0}}) \quad , \quad i=1, \dots, m$$

siendo:

$$\omega = \max \{ |\theta(\frac{1}{(z_i - a_0)^{r - z_0}})| : 1 \leq i \leq m \}$$

Una vez comprobado ésto, aplicamos la teoría de interpolación de Nevanlinna-Pick para encontrar una función T^* de \bar{D} en D tal que verifique (3.6) y:

$$T\left(\frac{a - z_i}{a + z_i}\right) = \theta\left(\frac{1}{(z_i - a_0)^{r - z_0}}\right), \quad i=1, \dots, m \quad (3.12)$$

siendo a definido como para la familia anterior.

3.5. FAMILIA TIPO 5

Sea $\{ P_{a_1}(z) : a_1 \in K \}$ la familia de funciones que puede expresarse como:

$$P_{a_1}(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_r)}$$

donde $a_1 \in [a_1^0 - \alpha, a_1^0 + \beta]$, con $\alpha, \beta > 0$ y $(a_1, \dots, a_r) \in \gamma$ en las condiciones pedidas por 2.1. Según el Lema 2.2.6. el compensador propio $C(z)$ estabiliza azintóticamente el sistema regido por esta familia de funciones si y solamente si la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{1}{(z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0) \cdot [1 + P_o(z) \cdot C(z)]}$$

siendo $(a_1^0, \dots, a_r^0) \in \gamma$, verifica las condiciones (2.3) para la función:

$$W(z) = \frac{1}{(z - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z - a_r^0)}$$

y además:

$$T(z) \notin A, \text{ para todo } z \in \tilde{H}$$

donde el dominio A está definido como sigue:

$$A = \left(-\infty, \frac{-1}{\alpha \cdot (a_1^0 - a_2^0 - \alpha) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 - \alpha)} \right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{1}{\beta \cdot (a_1^0 - a_2^0 + \beta) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 + \beta)}, +\infty \right)$$

si r es impar, y:

$$A = \left(-\infty, \frac{-1}{\beta \cdot (a_2^0 - a_1^0 - \beta) \cdot \dots \cdot (a_r^0 - a_1^0 - \beta)} \right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{1}{\alpha \cdot (a_2^0 - a_1^0 + \alpha) \cdot \dots \cdot (a_r^0 - a_1^0 + \alpha)}, +\infty \right)$$

si r es par.

Estudiaremos por separado los dos casos:

CASO a) Sea r impar.

Llamaremos:

$$\eta = \alpha \cdot (a_1^0 - a_2^0 - \alpha) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 - \alpha)$$

$$\xi = \beta \cdot (a_1^0 - a_2^0 + \beta) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 + \beta)$$

y tomaremos como transformación θ correspondiente a esta familia la composición $\theta = \theta_3 \circ \theta_2 \circ \theta_1$, donde θ_1 está definida como sigue:

$$\begin{aligned} \theta_1 : G &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ z &\longrightarrow \frac{1 - \xi z}{1 + \eta z} \end{aligned} \quad (3.13)$$

y las transformaciones θ_2 de $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a H y θ_3 de H a D como las definidas en (3.2) y (3.3) respectivamente.

Por tanto, $\theta : G \longrightarrow D$ está definida como:

$$\theta(z) = \frac{1 - \left[\frac{1 - \beta \cdot (a_1^0 - a_2^0 + \beta) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 + \beta) \cdot z}{1 + \alpha \cdot (a_1^0 - a_2^0 - \alpha) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 - \alpha) \cdot z} \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \left[\frac{1 - \beta \cdot (a_1^0 - a_2^0 + \beta) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 + \beta) \cdot z}{1 + \alpha \cdot (a_1^0 - a_2^0 - \alpha) \cdot \dots \cdot (a_1^0 - a_r^0 - \alpha) \cdot z} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Utilizando esta función θ , vemos en qué se traduce la condición (2.2) para esta familia:

Si z_1, \dots, z_m son los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} :

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{1}{(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0)}\right) &= \\ &= \frac{[[(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0) + \eta]^{\frac{1}{2}} - [(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0) - \xi]^{\frac{1}{2}}]^2}{\eta + \xi} \end{aligned}$$

para todo $i=1, \dots, m$. Luego tenemos que:

$$d_G\left(0, \frac{1}{(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0)}\right) < d_D(0, \alpha_{\max})$$

para todo $i=1, \dots, m$, si y solamente si:

$$\max \left\{ \frac{|[(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0) + \eta]^{\frac{1}{2}} - [(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0) - \xi]^{\frac{1}{2}}|^2}{\eta + \xi} : \right.$$

$$\left. 1 \leq i \leq m \right\} < \alpha_{\max} \quad (3.14)$$

donde α_{\max} es el valor definido en 1.2.3. para los datos de interpolación siguientes:

Si p_1, \dots, p_n son los polos de $\tilde{P}(z)$ en \tilde{H} , tomamos un número real a tal que:

$$a \neq p_j \quad , \quad \text{para todo } j=1, \dots, n$$

$$a \neq z_i \quad , \quad \text{para todo } i=1, \dots, m$$

y definimos una función Ψ de \tilde{H} en \bar{D} como en (3.4). Tenemos entonces que:

$$\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(\Psi(\tau_k), b_i) \quad , \quad k=1, \dots, \ell \quad , \quad i=1, \dots, m$$

donde $\{\tau_k : k=1, \dots, \ell\}$ está definido según (3.5) y:

$$b_i = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|[(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0) + \eta]^{\frac{1}{2}} - [(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0) - \xi]^{\frac{1}{2}}|^2}{\eta + \xi}$$

para todo $i=1, \dots, m$, siendo:

$$\omega = \max \left\{ \left| \theta \left(\frac{1}{(z_i - a_1^0) \cdot \dots \cdot (z_i - a_r^0)} \right) \right| : 1 \leq i \leq m \right\}$$

Una vez comprobado ésto, y razonando de modo análogo a los casos anteriores, aplicaremos la teoría de interpolación de Nevanlinna-Pick para encontrar una función T^* de \bar{D} en D tal que verifique la condición (3.6) y además:

$$T^*\left(\frac{a - z_i}{a + z_i}\right) = \theta\left(\frac{1}{(z_i - a_1^0) \cdots (z_i - a_r^0)}\right), \quad i=1, \dots, m \quad (3.15)$$

CASO b) Sea r par.

Llamaremos:

$$\eta = \beta \cdot (a_2^0 - a_1^0 - \beta) \cdots (a_r^0 - a_1^0 - \beta)$$

$$\xi = \alpha \cdot (a_2^0 - a_1^0 + \alpha) \cdots (a_r^0 - a_1^0 + \alpha)$$

y tomamos entonces la transformación θ correspondiente a esta familia, como la composición $\theta = \theta_3 \circ \theta_2 \circ \theta_1$, donde θ_1 de G en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ está definida como en (3.13) para estos valores de ξ y η , y θ_2 y θ_3 de $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ en H y de H en D , respectivamente, como las definidas en (3.2) y (3.3).

Por tanto, la función $\theta : G \longrightarrow D$ está definida como:

$$\theta(z) = \frac{1 - \left[\frac{1 - \alpha \cdot (a_2^0 - a_1^0 + \alpha) \cdots (a_r^0 - a_1^0 + \alpha) \cdot z}{1 + \beta \cdot (a_2^0 - a_1^0 - \beta) \cdots (a_r^0 - a_1^0 - \beta) \cdot z} \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \left[\frac{1 - \alpha \cdot (a_2^0 - a_1^0 + \alpha) \cdots (a_r^0 - a_1^0 + \alpha) \cdot z}{1 + \beta \cdot (a_2^0 - a_1^0 - \beta) \cdots (a_r^0 - a_1^0 - \beta) \cdot z} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

y utilizando esta función, la condición (2.2) se traduce en la dada en (3.14) para los valores de ξ y n definidos anteriormente. El razonamiento seguido a continuación es análogo al caso estudiado para r impar, llegando así a que la función T^* buscada debe de verificar las condiciones de interpolación (3.6) y (3.15).

CAPITULO 4

APLICACIONES Y COMENTARIOS

4. APLICACIONES Y COMENTARIOS

En este último capítulo vamos a dar una implementación a nuestro método, dando la construcción, en distintos casos prácticos, del compensador que da estabilidad robusta a un sistema determinado.

Para ello, en el primer apartado haremos un estudio de la Teoría de Interpolación de Nevanlinna-Pick, describiendo el algoritmo que hemos utilizado para implementarla en el paquete PC-MATLAB.

En el segundo apartado, describiremos diferentes sistemas a los que podemos aplicar nuestros métodos, entre

ellos, el determinado en un caso práctico de aeromodelismo espacial, en el que se dan algunas de las condiciones expuestas en este trabajo. Utilizando todo el desarrollo expuesto, llegaremos a construir un compensador que estabiliza robustamente el sistema descrito.

En el último apartado de este capítulo estudiaremos las consecuencias obtenidas a raíz del caso práctico, así como la aportación de este trabajo al estudio de la estabilidad de sistemas. Describiremos también las posibles líneas futuras de investigación, que nos proponemos seguir.

4.1. TEORIA DE INTERPOLACION

En esta sección describiremos un método, de la teoría clásica de interpolación, relevante para nuestro trabajo.

El problema lo podemos enunciar como sigue:

4.1.1. PROBLEMA DE INTERPOLACIÓN

Dados $z_i \in D$, $\omega_i \in \mathbb{C}$, para todo $i=1, \dots, n$ donde suponemos que todos los z_i son distintos entre sí, y dado $\alpha \geq 0$ real; Encontrar, si existe, una función analítica:

$$f_\alpha : D \longrightarrow D$$

tal que:

$$f_\alpha(z_i) = \alpha \cdot \omega_i \quad \text{para todo } i=1, \dots, n$$

Un método para la construcción de una tal función es el siguiente (véase [19] y [2]):

Sea la matriz cuadrada:

$$N = \left[\frac{1 - \alpha^2 \cdot \omega_i \cdot \bar{\omega}_j}{1 - z_i \cdot \bar{z}_j} \right]_{i,j=1,\dots,n} \quad (4.1)$$

N es la matriz de Nevanlinna-Pick para nuestros datos de interpolación; y por tanto, podemos asegurar que la función f_α buscada existe si y solamente si la matriz N es semidefinida positiva.

Sea la función:

$$B(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z_i - z}{1 - \bar{z}_i \cdot z} \cdot \frac{\bar{z}_i}{|z_i|}$$

y sea:

$$y^t = (y_1, \dots, y_n)$$

donde:

$$y_i = \frac{\bar{B}(0)}{\bar{z}_i} \quad \text{para } i=1, \dots, n$$

Sea ahora:

$$x^t = (x_1, \dots, x_n)$$

el único vector que verifica la ecuación:

$$N \cdot x = y \quad (4.2)$$

Definimos las funciones:

$$P(z) = B(0) \cdot B(z) - \sum_{i=1}^n \frac{B(z)}{(z - z_i)} \cdot x_i$$

$$Q(z) = -z \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha \cdot \bar{\omega}_i}{1 - \bar{z}_i \cdot z} \cdot \bar{x}_i \right)$$

$$\tilde{Q}(z) = B(z) \cdot \bar{Q}(1/z) \quad ; \quad \tilde{P}(z) = B(z) \cdot \bar{P}(1/z)$$

entendiendo por $\bar{Q}(z)$ el polinomio que tiene por coeficientes los conjugados de $Q(z)$, y análogamente para $\bar{P}(z)$.

En estas condiciones, todas las funciones f_α interpoladoras son de la forma:

$$f_\alpha(z) = \frac{\tilde{P}(z) \cdot g(z) + \tilde{Q}(z)}{P(z) + Q(z) \cdot g(z)} \quad (4.3)$$

siendo $g: \bar{D} \longrightarrow D$, una función analítica arbitraria.

En particular, para $g \equiv 0$ podemos expresar f_α , como:

$$f_\alpha(z) = \alpha \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (z-z_1) \cdot \dots \cdot (z-z_{i-1}) \cdot \omega_i \cdot x_i \cdot (z-z_{i+1}) \cdot \dots \cdot (z-z_n)}{\sum_{i=1}^n (z-z_1) \cdot \dots \cdot (z-z_{i-1}) \cdot x_i \cdot (z-z_{i+1}) \cdot \dots \cdot (z-z_n) - B(0) \cdot \prod_{i=1}^n (z-z_i)} \quad (4.4)$$

4.1.2. ALGORITMO

Los pasos principales para la construcción de este algoritmo son los siguientes:

- 1) Construcción de la matriz de Nevanlinna-Pick (4.1).
- 2) Resolución del sistema (4.2).

3) Construcción de la función f_α (4.4).

Detallaremos a continuación el algoritmo:

Input : n , $A=[z_1, \dots, z_n]$, $B=[\omega_1, \dots, \omega_n]$, α

1.- $x = \alpha^2$

for $i=1:n$

for $j=1:n$

$P(i, j) = x * B(i) * \text{conj}(B(j))$

$Q(i, j) = A(i) * \text{conj}(A(j))$

$N(i, j) = (1 - P(i, j)) / (1 - Q(i, j))$

end

$y(i) = \text{abs}(\text{prod}(A)) / \text{conj}(A(i))$

end

2.- Call sistema $N \cdot x = y$

3.- if $i > 1$

for $j=1:n$

for $i=1:n-1$

if $i < j$

$R(j, i) = A(i)$

else

$R(j, i) = A(i+1)$

end

end

$S(j, :) = \text{poly}(R(j, :))$

end

```
for i=1:n
    M(i,i) = B(i) * x(i) * S(i,i) * alpha
    N(i,i) = x(i) * S(i,i)
end
Q = sum(M)
P = [0, sum(N)] - abs(prod(A)) * poly(A)
F = [0, Q; P]
else
    F = [0, alpha*B(1)*x(1) ; - abs(prod(A)), x(1)+A(1)*abs(prod(A))]
end
```

Este algoritmo lo hemos implementado utilizando el paquete PC-MATLAB y puede ser utilizado para construir una función racional que interpola determinados puntos del interior del disco; en [19] se describe cómo mediante una ligera variación del método puede construirse una función racional que interpole también puntos de la frontera del disco.

4.2. APLICACIONES

En este apartado, describiremos diferentes sistemas gobernados por familias de funciones pertenecientes a alguno de los casos definidos en 2.1.

Construiremos, siguiendo el proceso descrito en los capítulos anteriores, el compensador adecuado a cada tipo de familia.

En primer lugar vamos a dar dos ejemplos de familias de funciones propias, pertenecientes a los tipos primero y quinto de los expuestos en 2.1.

EJEMPLO 1

Dada la familia del tipo 1:

$$\{ P_S(z) : s \in [1-\omega, 1+\omega] \}$$

donde:

$$P_S(z) = \frac{(z-5) \cdot (z-6) \cdot (z-7)}{(z-2)^3 - s}$$

$$\omega = 10^{-2}$$

El modelo nominal es:

$$P_0(z) = \frac{(z-5) \cdot (z-6) \cdot (z-7)}{(z-2)^3 - 1}$$

$$G = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -100] \cup [100, +\infty)\}$$

$$W(z) = \frac{1}{(z-2)^3 - 1}$$

Comprobamos en primer lugar que se verifica la condición que nos da el corolario 2.3.4, es decir que:

$$\max \{ d_G(0, W(z_i)) : i=1,2,3 \} < d_D(0, \alpha_{\max})$$

siendo $z_1=5$, $z_2=6$, $z_3=7$.

$$\max \{ d_G(0, \frac{1}{26}), d_G(0, \frac{1}{63}), d_G(0, \frac{1}{124}) \} = 1.9230 \cdot 10^{-4}$$

$$d_D(0, \alpha_{\max}) = 0.0422$$

Siguiendo el razonamiento descrito en 3.1, buscamos una función racional real de \bar{D} en D que verifique las condiciones (3.6) y (3.7). Puesto que los datos a interpolar $-2/3$, $-5/7$ y $-3/4$ están en el interior del disco unidad, utilizamos el algoritmo descrito en 4.1.2, con lo que obtenemos que:

$$T^*(z) = \frac{a_3 z^2 + a_2 z + a_1}{b_4 z^3 + b_3 z^2 + b_2 z + b_1}$$

donde:

$$a_3 = -0.0029 \quad a_2 = -0.0044 \quad a_1 = -0.0017$$

$$b_4 = -0.3571 \quad b_3 = -1.5119 \quad b_2 = -2.1310 \quad b_1 = -1$$

Aplicamos ahora las transformaciones $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y ψ definidas en 3.1, para la obtención de la función T; y puesto que:

$$T = \theta_1^{-1} \circ \theta_2^{-1} \circ \theta_3^{-1} \circ T^* \circ \psi$$

tenemos que:

$$T(z) = \frac{\sum_{i=0}^6 g_{i+1} z^i}{\sum_{i=0}^6 h_{i+1} z^i}$$

con:

$$g_7 = 0.1904$$

$$h_7 = 0.1133$$

$$g_6 = 1.3328$$

$$h_6 = 4.0782$$

$$g_5 = -11.0336$$

$$h_5 = 60.9618$$

$$g_4 = -62.5408$$

$$h_4 = 484.1859$$

$$g_3 = 386.8432$$

$$h_3 = 2155.0578$$

$$g_2 = 2237.208$$

$$h_2 = 5045.6236$$

$$g_1 = 1800$$

$$h_1 = 5000$$

De la fórmula $T(z) = \frac{W(z)}{1 + P_0(z) \cdot C(z)}$ obtenemos que el

compensador adecuado es:

$$C(z) = \frac{\sum_{i=0}^9 l_{i+1} z^i}{\sum_{i=0}^9 m_{i+1} z^i}$$

con:

$l_{10} = -0.1904$	$m_{10} = 0.1904$
$l_9 = -0.1904$	$m_9 = -2.0944$
$l_8 = 16.7456$	$m_8 = -14.6512$
$l_7 = -17.8275$	$m_7 = 238.6896$
$l_6 = -613.6114$	$m_6 = 52.0944$
$l_5 = 796.0002$	$m_5 = -9100.7792$
$l_4 = 6902.4483$	$m_4 = 16056.046$
$l_3 = -10409.849$	$m_3 = 125744.18$
$l_2 = 3580.4956$	$m_2 = -277213.68$
$l_1 = 21200$	$m_1 = -378000$

EJEMPLO 2

Dada la familia del tipo 5:

$$\{ P_{s_1}(z) : s_1 \in [2-\omega, 2+\omega], (s_1, s_2, s_3) \in \gamma \}$$

donde:

$$\gamma : \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 9 \\ s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 = 26 \end{cases}$$

$$P_{s_1}(z) = \frac{(z+2) \cdot (z+4) \cdot (z+6) \cdot (z-6)}{(z-s_1) \cdot (z-s_2) \cdot (z-s_3) \cdot (z-7)}$$

$$\omega = 10^{-2}$$

El modelo nominal es:

$$P_0(z) = \frac{(z+2) \cdot (z+4) \cdot (z+6) \cdot (z-6)}{(z-2) \cdot (z-3) \cdot (z-4) \cdot (z-7)}$$

$$G = \mathbb{C} \setminus \left\{ \left(-\infty, \frac{-10^4}{203.01} \right] \cup \left[\frac{10^4}{197.01}, +\infty \right) \right\}$$

$$W(z) = \frac{1}{(z-2) \cdot (z-3) \cdot (z-4)}$$

$$\eta = 203.01 \cdot 10^{-4}$$

$$\xi = 197.01 \cdot 10^{-4}$$

Comprobamos, en primer lugar, que se verifica la condición que nos da el corolario 2.3.4, es decir, que para $z_1 = 6$, $p_1 = 7$:

$$\max \{ d_G(0, W(z_1)) , d_G(0, 0) \} < d_D(0, \alpha_{\max})$$

lo cual es cierto, puesto que:

$$d_G(0, W(z_1)) = 7.5757 \cdot 10^{-4}$$

y

$$d_D(0, \alpha_{\max}) = 0.0769$$

Para la construcción de la función $T^* : \bar{D} \longrightarrow D$ descrita en 3.5 cumpliendo las condiciones (3.6) y (3.15), y puesto que los datos de interpolación $-5/7$ y $-3/4$ están en el interior del disco unidad, utilizamos el algoritmo desarrollado en 4.1.2, con lo que obtenemos:

$$T^*(z) = \frac{a_1 z + a_2}{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}$$

donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.0048 & a_2 &= -0.0036 \\ b_1 &= -0.5357 & b_2 &= -1.4643 & b_3 &= -1 \end{aligned}$$

Aplicamos ahora las transformaciones $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y ψ definidas en 3.5 para la obtención de la función T ; y puesto que:

$$T = \theta_1^{-1} \circ \theta_2^{-1} \circ \theta_3^{-1} \circ T^* \circ \psi$$

tenemos que:

$$T(z) = \frac{\sum_{i=0}^4 g_{5-i} z^i}{\sum_{i=0}^4 h_{5-i} z^i}$$

con:

$$\begin{array}{ll} g_1 = -3.4272 & h_1 = 0.006702 \\ g_2 = -24.0096 & h_2 = 53.0445 \\ g_3 = 147.4272 & h_3 = 516.2734 \\ g_4 = 1176.0096 & h_4 = 2228.4470 \\ g_5 = 1008 & h_5 = 3599.9058 \end{array}$$

Por tanto, aplicando la fórmula de la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{W(z)}{1 + P_0(z) \cdot C(z)}$$

tenemos que el compensador adecuado es:

$$C(z) = \frac{\sum_{i=0}^8 l_{9-i} z^i}{\sum_{i=0}^8 m_{9-i} z^i}$$

con:

$$\begin{array}{ll} l_1 = 3.4272 & m_1 = -3.4272 \\ l_2 = -30.8256 & m_2 = -44.5728 \\ l_3 = -226.56 & m_3 = 99.3312 \\ l_4 = 2613.6835 & m_4 = 3473.1168 \\ l_5 = 369.92239 & m_5 = 10109.203 \\ l_6 = -53988.277 & m_6 = -51809.779 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \ell_7 &= 126392.74 & m_7 &= -324701.11 \\ \ell_8 &= -1920.836 & m_8 &= -556418.76 \\ \ell_9 &= -194543.34 & m_9 &= -290304 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

En este ejemplo presentamos el modelo linealizado de una aeronave F4-E, que al añadirle un alerón adicional, tal como indica la figura 17, presenta una pérdida longitudinal de estabilidad.

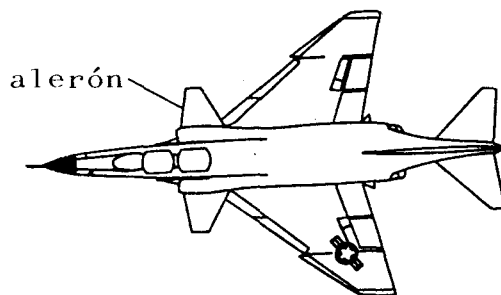


Figura 17

La ecuación de estado linealizada de este sistema es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}$$

Estudiaremos para este modelo dos casos, que corres-

ponden a distintos valores de A y b, obtenidos por interpolación entre cuatro típicas condiciones de vuelo tomadas de [1,pg.571]; ambos ejemplos corresponderan a familias del tipo 3.

Tanto en el caso 1 como en el 2, la familia de funciones a considerar va a ser estrictamente propia. Es por ello que nos aparecerá, a la hora de obtener la función T^* , puntos a interpolar en la frontera de D.

Para la construcción de tal función T^* podemos ampliar el algoritmo expuesto en 4.1.1 del siguiente modo (véase [19]):

Supongamos que, en las condiciones dadas en 4.1.1,

$$z_i \in D, \text{ para todo } i=1, \dots, q$$

$$z_j \in \partial D, \text{ para todo } j=q+1, \dots, n$$

Siguiendo el desarrollo expuesto en 4.1.2, construimos una función $f_\alpha : D \longrightarrow D$ tal que:

$$f_\alpha(z_i) = \alpha \cdot \omega_i, \text{ para todo } i=1, \dots, q$$

Esta función, por (4.3), puede ser expresada como:

$$f_\alpha = \frac{\tilde{P} \cdot g + \tilde{Q}}{P + Q \cdot g} \quad (4.5)$$

donde $g : \bar{D} \longrightarrow D$ es una función analítica arbitraria. Se trata entonces, de construir una tal función g, que verifique además:

$$g(z_j) = \frac{\tilde{Q}(z_j) - P(z_j) \cdot \alpha \cdot \omega_j}{Q(z_j) \cdot \alpha \cdot \omega_j - \tilde{P}(z_j)}, \text{ para } j=q+1, \dots, n$$

Una vez obtenida esta función g , e incorporándola a (4.5), obtenemos la función f_α que es solución a nuestro problema (para más detalles ver [19]).

En los dos casos que exponemos a continuación no hemos utilizado este método para la construcción de T^* , dado que en ambos casos el número de puntos a interpolar es muy bajo; es por tanto bastante sencillo el encontrar una función que verifique las condiciones deseadas.

CASO 1 :

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5120 & -29.1257 & -160.6365 \\ 0.0545 & 0.2473 & 18.9086 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 170.4264 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

El modelo nominal del sistema es:

$$P_o(z) = \frac{0.1704 z^2 + 0.0949 z - 7.7441}{z^3 + 13.2407 z^2 - 8.9162 z + 23.9956}$$

Los ceros de $P_0(z)$ en \tilde{H} son:

$$z_1 = 6.4682 \qquad z_2 = \infty$$

$\tilde{P}(z)$ tiene un polo en $z_2 = \infty$. Polos con incertidumbre en su determinación tenemos:

$$p_1 = 0.3797 + 1.2529 i$$

$$p_2 = 0.3797 - 1.2529 i$$

Según las condiciones del caso 3:

$$\omega_0 = -(1.2529)^2 = -1.5698$$

$$a_0 = 0.3797$$

$$t = 0.01$$

$$G = D_{1/t}(0)$$

$$W(z) = \frac{1}{(z-a_0)^{2-\omega_0}}$$

Comprobamos, en primer lugar, que se verifican las condiciones que nos dan el corolario 2.3.4, que en este caso se reducen a:

$$d_G\left(0, \frac{1}{(z_1-a_0)^{2-\omega_0}}\right) < d_D(0, \alpha_{\max})$$

lo cual es cierto, puesto que:

$$d_G\left(0, \frac{1}{(z_1-a_0)^{2-\omega_0}}\right) = 2.5880 \cdot 10^{-4}$$

y

$$d_D(0, \alpha_{\max}) = 1$$

Construimos una función T^* de \bar{D} en D en las condiciones que nos da el apartado 3.3 y verificando (3.6) y (3.10):

$$T^*(z) = \frac{a_1 \cdot (z^2 + 2z + a_2) - a_1 \cdot (a_2 - 1)}{(a_2 - 1) \cdot (z^2 + 2z + a_2) - a_1^2}$$

donde:

$$a_1 = 1.3623748 \cdot 10^{-4}$$

$$a_2 = 1.2334417$$

Aplicamos ahora las transformaciones θ y ψ definidas en 3.3 para la obtención de la función T :

$$T = \theta^{-1} \circ T^* \circ \psi$$

Luego tenemos que:

$$T(z) = \frac{5.4495 \cdot 10^{-2}}{5.4495 \cdot 10^{-2} z^2 + 10.899 \cdot 10^{-2} z + 98.82616 \cdot 10^{-2}}$$

y por tanto, aplicando la fórmula de la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{W(z)}{1 + P_o(z) \cdot C(z)}$$

tenemos que:

$$C(z) = \frac{\sum_{i=0}^4 \ell_{5-i} z^i}{\sum_{i=0}^4 m_{5-i} z^i}$$

con:

$\ell_1 = 0.15037348$	$m_1 = 0.9285946 \cdot 10^{-2}$
$\ell_2 = 2.8859081$	$m_2 = -1.3400318 \cdot 10^{-2}$
$\ell_3 = 10.5078$	$m_3 = -41.644196 \cdot 10^{-2}$
$\ell_4 = -4.3704419$	$m_4 = 85.289324 \cdot 10^{-2}$
$\ell_5 = 21.472679$	$m_5 = -72.332136 \cdot 10^{-2}$

CASO 2 :

Para los valores de A y b siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7382 & -15.8507 & -18.7965 \\ -1.1030 & -0.6022 & -10.4464 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 34.6614 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

obtenemos la planta nominal:

$$P_o(z) = \frac{10^{-3} \cdot (0.0347 z^2 + 0.2430 z + 2.4519)}{z^3 + 13.8640 z^2 - 19.8319 z - 250.9901}$$

El único cero de $P_0(z)$ en \tilde{H} es $z=\infty$. $\tilde{P}(z)$ no tiene polos en \tilde{H} . Tenemos un polo con incertidumbre en:

$$p_1 = 4.3027$$

Según las condiciones del caso 3:

$$a_0 = 0$$

$$\omega_0 = 4.3027$$

$$t = 0.01$$

$$G = D_{1/t}(0)$$

$$W(z) = \frac{1}{z - 4.3027}$$

La condición que nos da el corolario 2.3.4 se verifica trivialmente.

Construimos la función T^* de \bar{D} en D en las condiciones que nos da el apartado 3.3, verificando (3.6) y (3.10):

$$T^*(z) = \frac{a(z+1)}{(b-1)z + b(b-1) - a^2}$$

donde:

$$a = 1$$

$$b = 15.177447$$

Por tanto, puesto que $T = \theta^{-1} \circ T^* \circ \psi$ para las transformaciones θ y ψ definidas en 3.3, tenemos que:

$$T(z) = \frac{200}{200z + 228.3549}$$

y por tanto, aplicando la fórmula de la función de sensibilidad con peso:

$$T(z) = \frac{W(z)}{1 + P_0(z) \cdot C(z)}$$

tenemos que:

$$C(z) = \frac{\sum_{i=0}^3 \ell_{4-i} z^i}{\sum_{i=0}^3 m_{4-i} z^i}$$

con:

$\ell_1 = 1088.849$	$m_1 = 0.0694 \cdot 10^{-1}$
$\ell_2 = 15096.439$	$m_2 = 0.1873926 \cdot 10^{-1}$
$\ell_3 = -21594.855$	$m_3 = 2.8126878 \cdot 10^{-1}$
$\ell_4 = 273301.84$	$m_4 = -21.09958 \cdot 10^{-1}$

4.3. COMENTARIOS Y PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabajo, como ya hemos visto, consiste en resolver el problema de la estabilización de sistemas en los casos en que existe incertidumbre en los polos de la función de transferencia, cumpliendo éstos unas condiciones determinadas, como son: que sean r polos reales situados sobre una curva algebraica, dos polos complejos conjugados o tales que sean las raíces r -ésimas de un cierto número complejo.

El desarrollo de este trabajo nos lleva en primer lugar a establecer una condición necesaria y suficiente para la existencia de un compensador que estabilice el sistema. Con vistas a esto enunciamos y demostramos los lemas del apartado 2.2, que nos llevan a considerar el problema como un nuevo problema de Análisis Complejo, que enunciamos como Problema General.

Este problema lo resolvemos en el apartado 2.3 haciendo uso de la teoría de interpolación de Nevanlinna-Pick y de la métrica hiperbólica o de Poincaré, en el teorema que hemos llamado Teorema General.

La condición necesaria y suficiente que nos da el Teorema General, viene dada en términos de un valor fijo

α_{\max} que depende de los polos y ceros de la planta. Con vistas a estimar este valor, en el apartado 2.4, damos una cota superior que en la práctica resulta muy adecuada.

Una vez comprobada la condición necesaria y suficiente para la existencia del controlador adecuado, se trata de obtener explícitamente la expresión de éste; para ello, siguiendo los pasos dados en la demostración del Teorema General, debemos construir una serie de transformaciones conformes que llevan el disco unidad sobre un cierto dominio simplemente conexo G , obtenido en los lemas previos, para cada familia de funciones. Mediante ellas, y utilizando la función de sensibilidad con peso, podemos construir el compensador adecuado a cada sistema.

Queda con ésto resuelto el problema de incertidumbre en los polos expuesto en el apartado 2.1. La importancia de estas familias radica en que además de existir una grán cantidad de situaciones prácticas en las que se presentan, muchos otros casos, que no se ajustan exactamente a ellos, pueden ser adaptados (ampliando la zona de incertidumbre, si es necesario) y tratados con los métodos desarrollados en este trabajo.

Sería importante saber, y es por ésto que lo tenemos como una de nuestras perspectivas futuras de investigación, cómo influye el ampliar la zona de incertidumbre sobre el compensador construido; Sin embargo, a la vista de los

ejemplos expuestos en este capítulo, suponemos que éste no variaría el grado, sino únicamente los coeficientes.

Por otra parte, está aún sin estudiar el caso en que existe incertidumbre en los ceros de la función de transferencia del sistema; pensamos que sería interesante desarrollar una teoría paralela a ésta para construir el compensador adecuado a estos sistemas.

El siguiente paso a considerar sería la variación simultánea de ceros y polos de una planta, así como el caso multivariable. Este es un interesante problema en el que trabajaremos próximamente.

Para terminar, diremos que existen otras formas de obtener la función de interpolación, distintas de la dada (véase por ejemplo [5]); sería interesante estudiar qué tipo de compensador ofrecen éstas, y cuales son las ventajas, desde el punto de vista computacional, de utilizar una u otra.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- [1] ACKERMAN, J., *Sampled-Data Control Systems*, Ed. Springer-Verlag, 1985.
- [2] ADAMJAN, V.M., AROV, D.Z. y KREIN, M.G., *Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the Generalized Schur-Takagi Problem*, Math. USSR Sbornik, vol. 15 (1971), nº1, pgs.30-61.
- [3] ADAMJAN, V.M., AROV, D.Z. y KREIN, M.G., *Infinite Hankel Block Matrices and Related Extension Problems*, Trans. of the Am. Math. Soc., vol.III (1978), pgs.133-156.
- [4] AHLFORS, L., *Conformal Invariants*, Ed. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [5] ALLISON, A.C., y YOUNG, N.J., *Numerical Algorithms for the Nevanlinna-Pick Problem*, Numer. Math., vol.42 (1983), pgs.125-145.
- [6] BRUCE, FRANCIS, A. y TANNENBAUM, A., *Generalized Interpolation in Control Theory*, To appear in Math. Intelligencer.
- [7] CARATHEODORY, C., *Conformal Representation*, Ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1963.

- [8] CHENG-CHIH CHU, JOHN C. DOYLE and E. BRUCE LEE, *The general distance problem in H_∞ optimal control theory*, Int. J. Control, vol.44 (1986), nº2, pgs.565-596.
- [9] CHI-TSENG CHEN, *Linear System Theory and Design*, C.B.S. College Publishing, 1984.
- [10] DELSARTE, P.H., GENIN, Y. y KEMP, Y., *The Nevanlinna-Pick Problem for Matrix-Valued Functions*, Siam J. Appl. Math., vol.36 nº1 (1979), pgs.47-61.
- [11] DOYLE, J.C. y STEIN, G., *Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis*, J.E.E.E. Trans. Autom. Contr., vol.A.C.-26, nº1 (1981), pgs.4-16.
- [12] EVANS, W.R., *Graphical Analysis of Control Systems*, Trans. A.J.E.E., vol.67 part II (1948), pgs.547-551.
- [13] GLOVER, K., *All optimal Hankel-norm approximations of Linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds*, Int. J. Control, vol.39 (1984), nº6, pgs.1115-1193.
- [14] HARRIS, H., *The frequency response of Automatic Control Systems*, Trans.A.I.E.E., vol.65(1946), pgs.539-546
- [15] HELTON, W., *The distance of a function to H_∞ in the Poincaré Metric; Electrical Power Transfer*, J. of Functional Analysis, vol.38 (1980), pgs.273-314.
- [16] HELTON, W., *Non Euclidean Functional Analysis and Electronics*, Bull. Am. Math. Soc., vol.7 nº1 (July 1982), pgs.1-64.

- [17] KAILATH, T., *Linear Systems*, Ed. Prentice-Hall Inc., 1980.
- [18] KALMAN, R.E., ARBIB, M. and FALB, P., *Topics in Mathematical System Theory*, Ed. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [19] KHARGONEKAR, P. and TANNENBAUM, A., *Non-Euclidean Metrics and the Robust Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty*, I.E.E.E. Trans. Aut. Contr., vol. A.C. 30 n°10 (1985), pgs.1005-1013.
- [20] KOBER, H., *Dictionary of Conformal Representations*, Dover Publications Inc.
- [21] LUENBERGER, D.G., *Introduction to Dynamic Systems*, Ed. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [22] MARKUSHEVICH, A., *Teoria de Funciones Analiticas*, Ed. MIR, Moscu, 1970.
- [23] NYQUIST, H., *Regeneration Theory*, Bell System Tech. J. (1932).
- [24] OGATA, K., *Ingenieria de Control Moderna*, Ed. Prentice-Hall, 1980.
- [25] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, Ed. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [26] TANNENBAUM, A., *Feedback Stabilization of linear dynamical plants with uncertainty in the gain factor*, Int. J. Control, vol.32 n°1 (1980), pgs.1-16.

- [27] TANNENBAUM, A., *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, Lectures Notes in Mathematics 845, Springer-Verlag, 1981.
- [28] TANNENBAUM, A., *Modified Nevanlinna-Pick interpolation and Feedback Stabilization of Linear Plants with uncertainty in the gain factors*, Int. J. Contr., vol.36 n°2 (1982), pgs.331-336.
- [29] TRUMMER, M.R., *An efficient implementation of a Conformal Mapping Method Based on the Szegö Kernel*, Siam J. Numer. Anal., vol.23 n°4 (Aug., 1986).
- [30] VOLKOVYSKI, L., LUNTS, G. y ARAMANOVICH, I., *Problemas sobre la Teoría de Funciones de variable compleja*, Ed. MIR, Moscu, 1977.
- [31] WALSH, J.L., *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, A.M.S. Colloquium Publications, 1965.
- [32] YOULA, D., BONGIORNO, J. and LU, C., *Single-Loop Feedback-Stabilization of Linear multivariable dynamic plants*, Automatica 10 (1974), pgs.159-173.
- [33] YOULA, D. and SAITO, M., *Interpolation with positive-real functions*, Journal of the Franklin Institute 284 (1967), pgs.77-108.

- [34] ZAMES, G. and FRANCIS, B.A., *Feedback minimax sensitivity and optimal Robustness*, I.E.E.E. Trans. Aut. Contr., vol. A.C.28 (May, 1983), pgs.585-601.

NOTACIÓN

$$D = \{z : |z| < 1\}$$

$$\partial D = T = \{z : |z| = 1\}$$

$$V = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

$$H = \{z : \text{Re}(z) > 0\}$$

$$\bar{H} = \{z : \text{Re}(z) \geq 0\}$$

$$\tilde{H} = \bar{H} \cup \{\infty\}$$

$M_{\ell \times \ell}(\mathbb{C})$ conjunto de matrices de dimensión $\ell \times \ell$
con coeficientes en \mathbb{C} .

$d_G(\cdot, \cdot)$ distancia hiperbólica entre dos puntos
de G .

$\Pi(\theta, \nu, k)$ integral elíptica normal de tercera es-
pecie.

$\text{sn } u$ función sn de Jacobi, inversa de la in-
tegral elíptica normal de primera especie.

$\Pi_1(\nu, k)$ integral elíptica completa de tercera es-
pecie.