

Cálculo de la resistencia a la fatiga superficial en superficies con lubricación elastohidrodinámica mediante el criterio de Dang Van

E. de la Guerra, E. Chacón, P. Lafont, J. Echávarri, J.M. Muñoz-Guijosa, J.L. Muñoz, A. Díaz, J. Muñoz.

Grupo Investigador en Ingeniería de Máquinas, Departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación. Universidad Politécnica de Madrid
e.delaguerra@upm.es , e.chacon@upm.es

Resumen

Los fenómenos de fatiga superficial en sus diferentes escalas (micropitting, pitting, spalling), aparecen en multitud de elementos mecánicos en contacto lubricado como pueden ser los engranajes o rodamientos o en elementos con contacto seco como son las ruedas de ferrocarril. Los defectos que aparecen en las superficies en contacto debidos a estos fenómenos empeoran las condiciones de funcionamiento, provocando vibraciones, desgaste prematuro y en los casos más extremos el fallo de la máquina.

El procedimiento que se sugiere en este artículo se inicia con el cálculo de los parámetros que definen el contacto elastohidrodinámico y que tienen influencia en la resistencia a fatiga del contacto: espesor de película, distribución de presión y coeficiente de fricción. Una vez se tiene la presión y el coeficiente de fricción en la superficie de contacto, se procede al cálculo de las tensiones en el interior del material obteniendo la distribución de tensiones.

Conocidas las tensiones en todo punto interior y el proceso de carga completo se aplica el criterio de fatiga de Dang Van y se verifica si existe, o no, probabilidad de fallo por fatiga. El criterio de Dang Van es aplicable para el cálculo de la vida a fatiga para un alto número de ciclos (donde el tiempo de propagación de grieta es despreciable frente al tiempo de iniciación) y se basa en la aproximación a la escala mesoscópica y la existencia de un plano crítico.

Una vez descrita la teoría se propondrá una aplicación para el cálculo de tensiones en contactos puntuales y contactos lineales y el análisis de fatiga superficial en engranajes.

INTRODUCCIÓN

La fatiga superficial es un modo de fallo común en elementos sometidos a altas presiones de contacto y un alto número de ciclos. Elementos mecánicos característicos que pueden ser susceptibles de sufrir este tipo de daño son: rodamientos, engranajes o ruedas de ferrocarril, ver Fig. (1).



Fig. 1. Pitting en el flanco de un engranaje donde se observan las típicas marcas de playa de los fallos por fatiga. En el centro la banda de rodadura de una rueda de tren con marcas de pitting y desgaste. En tercer lugar se observa la pista interior de un rodamiento de bolas

Dentro de los fenómenos de fatiga superficial se distinguen tres escalas: micropitting, pitting y spalling;

colocados en orden creciente del tamaño del defecto. Los límites en el tamaño de la grieta no están del todo claro en la bibliografía pero se acepta que $D < 10 \mu\text{m}$ es considerado como micropitting, $D \sim 10 \mu\text{m}$ es pitting y para $D > 100 \mu\text{m}$ se considera spalling. A diferentes escalas, todos estos procesos tienen el mismo origen: la fatiga superficial, que está relacionada con la aplicación repetida de esfuerzos sobre la superficie. La variación temporal de las tensiones superficiales induce un campo variable de tensiones en el interior del material.

Para el cálculo de la distribución de tensión se va a proponer una metodología consistente en el cálculo de la presión presente en el contacto elastohidrodinámico (EHD) y posterior análisis del campo de tensiones en el material, tanto en un contacto puntual como en un contacto lineal. En el caso de contacto seco, bastará sustituir la distribución de presión EHD por la distribución de presión hertziana.

Una vez se tiene la variación temporal de las tensiones se pasa al cálculo de la fatiga. El estudio de la fatiga superficial es uno de los fenómenos de fatiga más complejo debido al estado multiaxial de tensiones y a que las tensiones pueden no encontrarse en fase. Es por ello que en los últimos años han surgido una gran cantidad de artículos que utilizan el criterio de fatiga multiaxial de Dang Van [1-5].

LUBRICACIÓN ELASTOHIDRODINÁMICA (EHD)

La lubricación elastohidrodinámica (EHD) es un régimen de lubricación en el cual toda la carga del contacto está soportada por el lubricante y por tanto no existe contacto entre las asperezas metálicas. En este régimen las presiones de contacto son tan elevadas que las propiedades reológicas del lubricante, viscosidad (η) y densidad (ρ), dependen de la presión. Debido a la elevada viscosidad, la rigidez del contacto es muy alta, lo que provoca la deformación elástica de las superficies de contacto.

Todas estas consideraciones requieren de la resolución simultánea de las tres ecuaciones implicadas: ecuación de Reynolds (Ec. (1)), ecuación de la deformación elástica (Ec. (2)) y las ecuaciones del modelo reológico (Ec. (3)).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u_m \frac{\partial \rho h}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$h(x, y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{1}{\pi E} \iint \frac{p(\xi, \zeta) d\xi d\zeta}{\sqrt{x - \xi^2 + y - \zeta^2}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(p, T, \dot{\gamma}) \\ \rho &= \rho(p, T) \end{aligned} \quad (3)$$

Para la resolución de estas ecuaciones se ha empleado el método de Full MultiGrid descrito por Venner y Lubrecht en [6], obteniendo tanto la distribución de presiones (ver Fig. (2)) como el espesor de película.

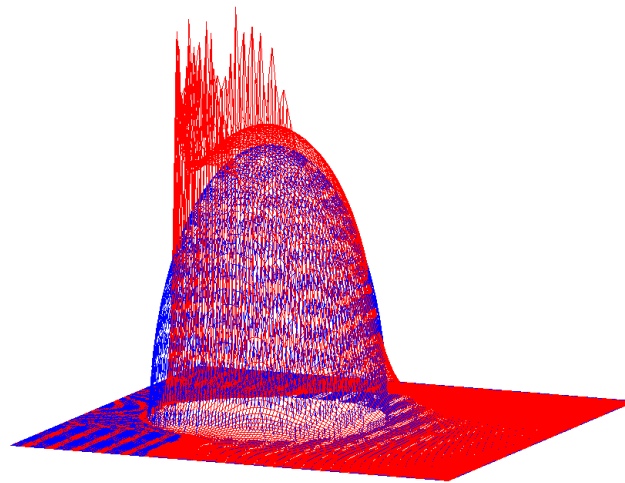


Fig. 2. Comparación entre la distribución de presión EHD y la presión de contacto seco o hertziana

CÁLCULO DE TENSIONES.

El siguiente paso, conocida la distribución de presión EHD, es el cálculo de las tensiones internas que son las que van a determinar el número de ciclos que va a soportar el material.

Se presentan dos casos de cálculo, el primero para el contacto lineal y el segundo para el caso de contacto puntual debido a que su formulación es diferente.

Tensiones en el contacto lineal

Para el cálculo de tensiones se supone un sólido semiinfinito de superficie plana. Debido a la idealización del sólido, el estado de deformación es deformación plana.

Un esquema genérico del sólido, ejes, distribuciones de presión ($p(x)$) y de tensión cortante ($q(x)$) se puede ver en la Fig. (3).

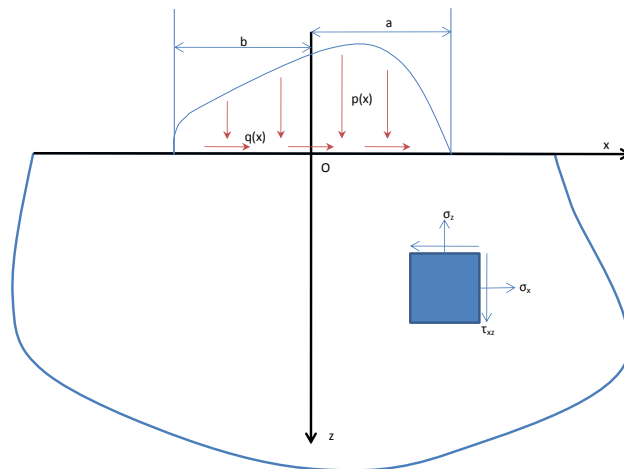


Fig. 3. Esquema del contacto lineal

Para resolver el campo de tensiones inducido por una distribución $p(x)$ y $q(x)$ cualesquiera se recurre al principio de superposición, es decir, se dividen las distribuciones originales en N distribuciones triangulares equivalentes ($p_k(x)$ y $q_k(x)$) que superpuestas proporcionan los mismos esfuerzos con la ventaja de que el campo de tensiones tiene solución analítica. La distribución triangular es la base para el cálculo numérico por lo que se va a aplicar para la resolución del contacto lineal.

La distribución triangular tiene la siguiente forma (Fig. (4)) y la siguiente expresión analítica (Ec. (4)):

$$\begin{aligned} p_k(x) &= p_k \frac{a - |x|}{a}, \quad |x| \leq a \\ q_k(x) &= q_k \frac{a - |x|}{a}, \quad |x| \leq a \end{aligned} \quad (4)$$

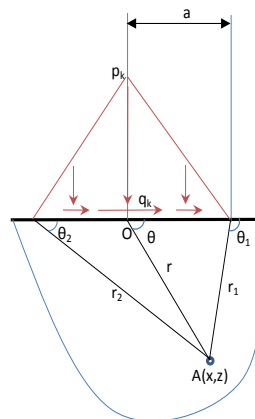


Fig. 4. Distribución triangular de presión normal y tangencial

La solución al campo de tensiones debido a la distribución de presión triangular normal y tangencial responde a las siguientes expresiones [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^k &= \frac{p_k}{\pi a} \left\{ x-a \theta_1 + x+a \theta_2 - 2\theta x + 2z \ln \left(\frac{r_1 r_2}{r^2} \right) \right\} + \frac{q_k}{\pi a} \left\{ 2x \ln \left(\frac{r_1 r_2}{r^2} \right) + 2a \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - 3z \theta_1 + \theta_2 - 2\theta \right\} \\ \sigma_z^k &= \frac{p_k}{\pi a} x - a \theta_1 + x + a \theta_2 - 2\theta x - \frac{q_k z}{\pi a} \theta_1 + \theta_2 - 2\theta \\ \tau_{xz}^k &= -\frac{p_k z}{\pi a} \theta_1 + \theta_2 - 2\theta + \frac{q_k}{\pi a} \left\{ x-a \theta_1 + x+a \theta_2 - 2\theta x + 2z \ln \left(\frac{r_1 r_2}{r^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Siendo las variables geométricas las siguientes:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= x-a^2 + z^2 \\ r_2^2 &= x+a^2 + z^2 \\ r^2 &= x^2 + z^2 \\ \tan \theta_1 &= \frac{z}{x-a} \\ \tan \theta_2 &= \frac{z}{x+a} \\ \tan \theta &= \frac{z}{x} \end{aligned} \quad (6)$$

Aplicando el principio de superposición en cada punto A(x,z).

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^N \sigma_x^k; \quad \sigma_z = \sum_{k=1}^N \sigma_z^k; \quad \tau_{xz} = \sum_{k=1}^N \tau_{xz}^k$$

Tensiones en el contacto puntual

Para el caso de contacto puntual se utilizan las expresiones del campo de tensiones para el caso de una distribución de presión y tensión cortante uniforme sobre un rectángulo de lados $2\alpha \times 2\beta$ (ver Fig. (5)) y se procede de forma parecida al caso de distribución triangular presentado anteriormente.

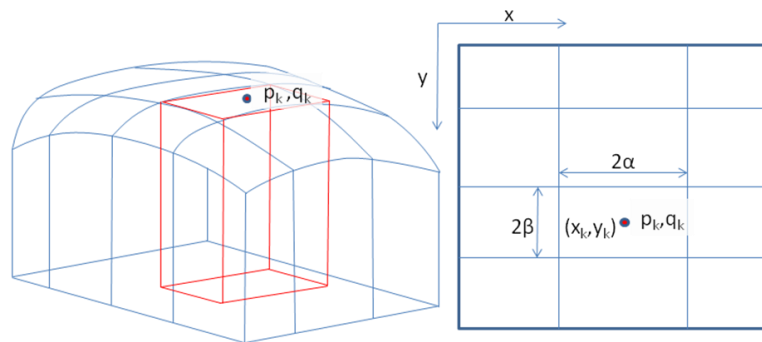


Fig. 5. Esquema y discretización del contacto puntual (geometría y presión)

Las expresiones del campo de tensiones que proporciona la distribución uniforme se presentan a continuación [8 y 9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j}^k &= \frac{p_k}{2\pi} A_{i,j} \bar{x} + \alpha, \bar{y} + \beta, \bar{z} + A_{i,j} \bar{x} - \alpha, \bar{y} - \beta, \bar{z} - A_{i,j} \bar{x} - \alpha, \bar{y} + \beta, \bar{z} - A_{i,j} \bar{x} + \alpha, \bar{y} - \beta, \bar{z} + \\ &+ \frac{q_k}{2\pi} B_{i,j} \bar{x} + \alpha, \bar{y} + \beta, \bar{z} + B_{i,j} \bar{x} - \alpha, \bar{y} - \beta, \bar{z} - B_{i,j} \bar{x} - \alpha, \bar{y} + \beta, \bar{z} - B_{i,j} \bar{x} + \alpha, \bar{y} - \beta, \bar{z} \\ &\bar{x} = x - x_k \\ &\bar{y} = y - y_k \\ &\bar{z} = z \end{aligned} \quad (7)$$

Donde las funciones $A_{i,j}$ y $B_{i,j}$ se corresponden con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 A_{xx}(x, y, z) &= 2\nu \left[\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yR}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \right] - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{yz}{xR}\right) + \frac{xyz}{R(x^2 + z^2)} \\
 B_{xx}(x, y, z) &= 2 \ln(R + y) + \frac{x^2 y}{R(x^2 + z^2)} + 1 - 2\nu \frac{y}{R + z} \\
 A_{yy}(x, y, z) &= 2\nu \left[\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xR}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \right] - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{xz}{yR}\right) + \frac{xyz}{R(y^2 + z^2)} \\
 B_{yy}(x, y, z) &= 2 \ln(R + y) - \frac{y}{R} + (-2\nu) \frac{y}{R + z} \\
 A_{zz}(x, y, z) &= -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{yz}{xR}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{xz}{yR}\right) - \frac{xyz}{R(x^2 + z^2)} - \frac{xyz}{R(y^2 + z^2)} \\
 B_{zz}(x, y, z) &= \frac{z^2 y}{R(x^2 + z^2)} \\
 A_{xy}(x, y, z) &= (-2\nu) \ln(R + z) - \frac{z}{R}; \quad B_{xy}(x, y, z) = 2 \ln(R + x) - \frac{x}{R} + (-2\nu) \frac{x}{R + z} \\
 A_{xz}(x, y, z) &= \frac{yz^2}{R(x^2 + z^2)}; \quad B_{xz}(x, y, z) = -\tan^{-1}\left(\frac{xy}{Rz}\right) + \frac{xyz}{R(x^2 + z^2)} \\
 A_{yz}(x, y, z) &= \frac{xz^2}{R(y^2 + z^2)}; \quad B_{yz}(x, y, z) = -\frac{z}{R} \\
 R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Finalmente se aplica el principio de superposición en todos los elementos para obtener el campo de tensiones en un punto $A(x,y,z)$ debido a una distribución arbitraria de presión.

$$\sigma_{i,j} = \sum_{k=1}^N \sigma_{i,j}^k$$

Como se puede ver el estado de tensiones que proporcionan estas expresiones es un estado tridimensional (3D) o estado de tensiones multiaxial.

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}_{x,y,z} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{x',y',z'}$$

CRITERIO DE DANG VAN

Existen multitud de criterios de fatiga multiaxial que se pueden dividir en tres grandes grupos: aproximación basada en un plano crítico, aproximación basada en el invariante de tensiones y aproximación basada en la escala mesoscópica. El criterio de Dang Van se basa en combinar la escala mesoscópica de tensiones junto con el uso de un plano crítico.

Existen tres escalas para los estudios a fatiga:

- Escala microscópica, distancia interatómica $\sim 10^{-10}$ m
- Escala mesoscópica, tamaño de grano $\sim 10^{-6}$ m
- Escala macroscópica $\sim 10^{-3}$ m

Debido a que los daños a la fatiga suceden en el interior de los granos el uso de las tensiones mesoscópicas parece razonable en el estudio de los fenómenos de fatiga.

El tensor macroscópico (Σ) de tensiones calculado anteriormente está relacionado con el valor medio del tensor mesoscópico (σ) a través del tensor residual mesoscópico (ρ).

$$\sigma = A : \Sigma + \rho \tag{9}$$

Siendo A un tensor de cuarto orden de localización de tensión elástica que tiene en cuenta las diferencias de propiedades elásticas de los granos debido a su orientación. Realizando simplificaciones razonables, Dang Van demostró que se puede eliminar el tensor A [10] y por lo tanto la Ec. (9) se puede simplificar en la Ec. (10).

$$\sigma = \Sigma + \rho \tag{10}$$

Para la obtención de los esfuerzos mesoscópicos, se recurre al teorema de Melan [9], Ec. (11), que propone un método basado en el shakedown elástico o ciclo elástico estabilizado diferido por el cual se produce un crecimiento y desplazamiento de la superficie de fluencia del material, es decir, se produce el endurecimiento dinámico y cinemático del material [11] y que gráficamente se puede ver en Fig. (6).

$$f \ m\sigma_{ela} \ x,t + \rho \ x - K^2 \leq 0 \tag{11}$$

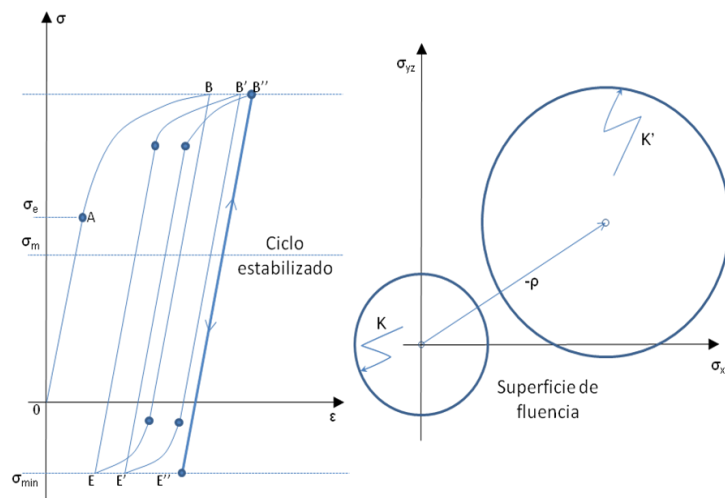


Fig. 6. Shakedown elástico y endurecimiento dinámico y cinemático

Donde f, representa el criterio de fluencia o superficie de fluencia. Para el criterio de Von Mises la superficie de fluencia queda definida por la Ec. (12).

$$-J_2 - K^2 = 0 \tag{12}$$

$$\left(\frac{s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2}{2} + s_{xy}^2 + s_{xz}^2 + s_{yz}^2 \right) - K^2 = 0$$

Siendo J_2 el segundo invariante de un tensor desviador de tensiones s, y $s = dev(\sigma)$. Esta ecuación representa un hiperesfera de seis dimensiones.

Existen otros teoremas equivalentes al de Melan con formulaciones ligeramente diferentes: Teorema de Mandel o Teorema de Nguyen [10].

Por lo tanto, para conocer el valor de los esfuerzos mesoscópicos se hará uso del Teorema de Melan y las hipótesis de Dang Van. El problema entonces se resume en el cálculo del radio y del centro de una hiperesfera que contenga a todos los puntos de la historia temporal de tensiones elásticas macroscópicas, que matemáticamente se expresa como un problema de optimización del cálculo de la hiperesfera de menor radio que contenga la historia temporal [12]:

$$K^2 = \min_{\rho} \max_t -J_2 \ \Sigma \ t + \rho \tag{13}$$

$$\rho : K^2 = \max_t -J_2 \ \Sigma \ t + \rho$$

Una vez se tienen los esfuerzos mesoscópicos se pasa a comprobar si durante el ciclo de carga se exceden o no

los límites de fatiga del material.

Para ello Dang Van propone un criterio para conocer si se produce o no iniciación de grietas que queda representado por la Fig. (7) y la Ec. (14):

$$\tau_{\max} t + \alpha_{DV} p_H t \leq \beta_{DV} \quad (14)$$

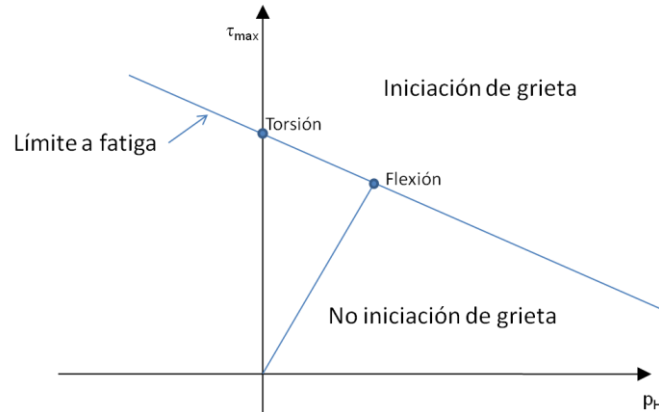


Fig. 7. Plano crítico del criterio de Dang Van

Donde τ_{\max} es la tensión cortante máxima de la parte alternante del tensor mesoscópico desviador de tensiones y p_H la presión hidrostática del tensor mesoscópico, cuyas expresiones se recogen a continuación, Ec. (15), y α_{DV} y β_{DV} los parámetros de Dang Van.

$$\tau_{\max} t = \frac{s_{1a} t - s_{3a} t}{2} \quad (15)$$

$$p_H t = \frac{1}{3} \sigma_{xx} t + \sigma_{yy} t + \sigma_{zz} t = \frac{1}{3} \sigma_1 t + \sigma_2 t + \sigma_3 t$$

El cálculo del valor alternante de la tensión cortante máxima es complejo para el caso de estado de tensión multiaxial, ya que la orientación de los planos críticos puede variar a lo largo del ciclo.

Para el cálculo, el tensor de tensiones puede representarse como un vector que rota en el espacio y describe una curva cerrada a lo largo del ciclo. El valor medio del tensor es definido como el centro de la menor hipersfera que circunscribe la curva y por tanto la parte alternante se calcula como el valor de la tensión menos dicho centro [13]. Se puede calcular utilizando el mismo procedimiento que para resolver la Ec. (13).

El criterio, como se puede ver en la Ec. (14), depende de dos parámetros a priori desconocidos, que representan la ordenada en el origen y la pendiente de la recta. Aplicando el criterio a dos ensayos con resultados conocidos se tendría definida la recta. Estos dos ensayos suelen ser los de flexión alternante y fatiga a torsión. Con ellos se obtiene la relación que se puede ver en la Ec. (16) entre los dos parámetros de Dang Van y los límites de fatiga del material [3].

$$\beta_{DV} = \tau_w$$

$$\alpha_{DV} = 3 \left(\frac{\tau_w}{\sigma_f} - \frac{1}{2} \right) \quad (16)$$

Siendo τ_w el límite a fatiga a torsión y σ_f el límite a fatiga debido a tensión alternante. Como criterio se suele definir el límite a fatiga como aquel en el que la pieza aguanta 10^6 ciclos.

Considerando otro número de ciclos diferente, se tendría una familia de rectas, en función de los límites a torsión y flexión para un determinado número de ciclos.

RESULTADOS

En la Fig. (8) se puede ver la influencia de la utilización de diferentes distribuciones de presión en el cálculo de tensiones: presión hertziana, distribución de presiones EHD con una modelo de densidad constante y la

distribución de presiones EHD para un modelo reológico de densidad variable (modelo compresible), [14]. Queda reflejada la importancia de una buena caracterización reológica del lubricante con la presión y la simplificación que supone la utilización de la distribución hertziana a la vista de los valores de la tensión de Von Mises adimensional (σ_{VM}/p_0) y la localización del punto crítico que se incluyen en las figuras.

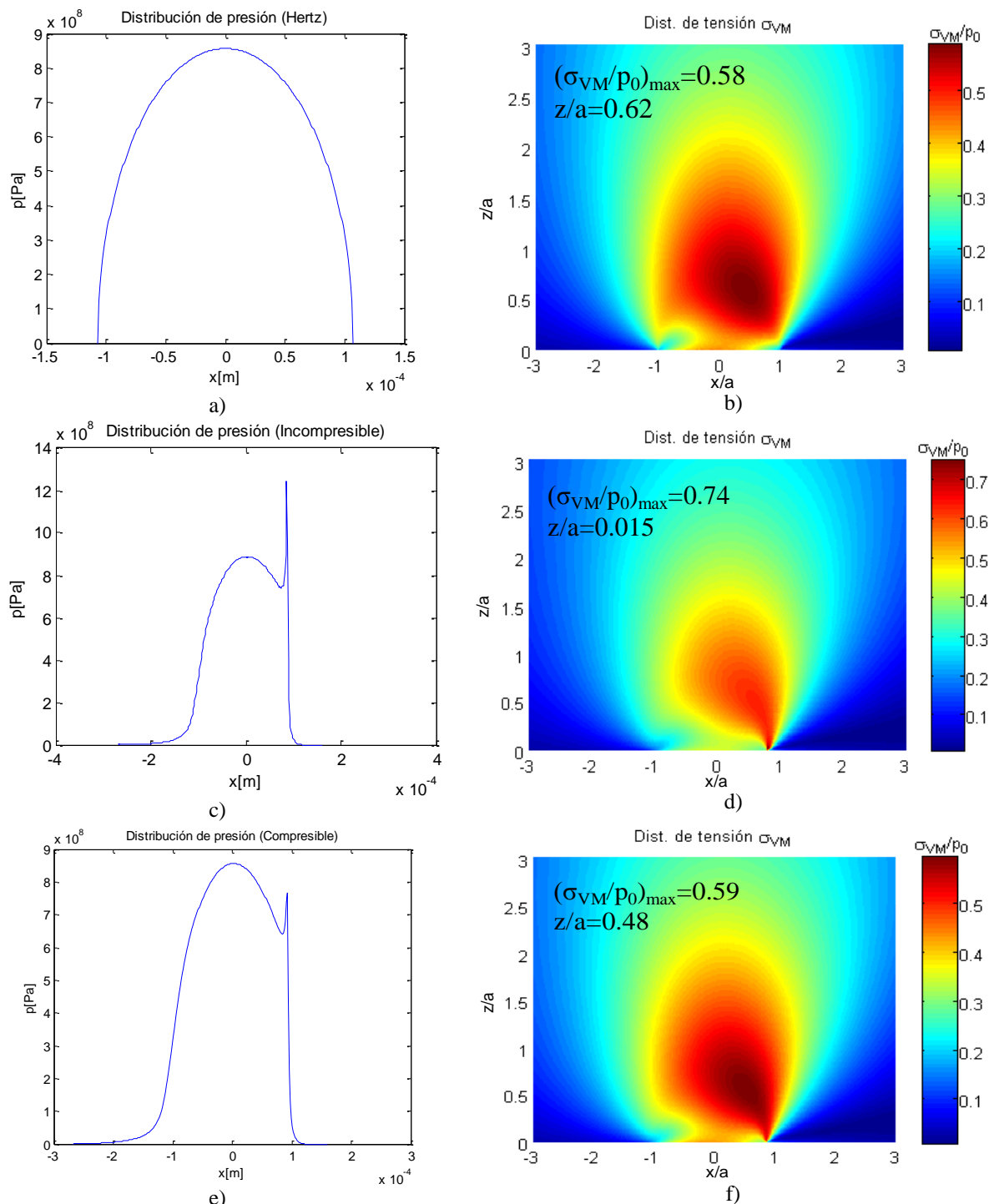


Fig. 8. Distribución de presión y tensiones en contacto lineal: a-b) presión hertziana, c-d) modelo reológico de densidad constante y e-f) modelo reológico de densidad variable. Presión de Hertz, $p_0 = 8.6E6$, y coeficiente de fricción, $\mu = 0.08$

Del mismo modo se muestra en la Fig. (9) la distribución de tensiones en un contacto puntual debida a la presión y fricción elastohidrodinámica. Se han seleccionado unos datos de presión de Hertz y coeficiente de fricción similares para los casos lineal y puntual con el fin de establecer comparaciones. A la vista de los resultados no

existen diferencias muy grandes en el valor de la tensión de Von Mises adimensional para el caso lineal y puntual siendo la parte central del contacto la más crítica.

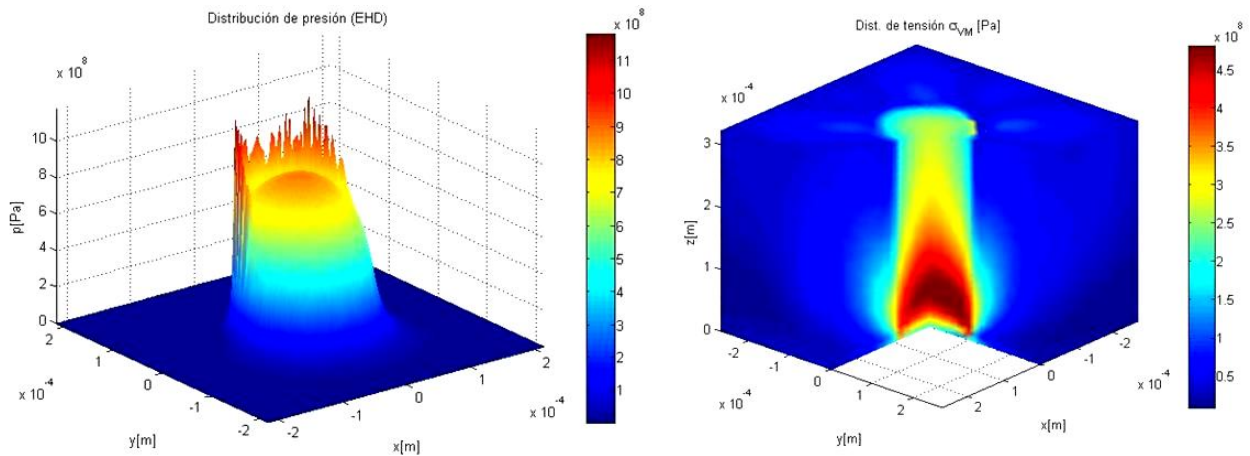


Fig. 9. Distribución de presión y tensiones en un contacto puntual EHD. Presión de Hertz, $p_0=8.3E6$, y coeficiente de fricción, $\mu=0.08$. $(\sigma_{VM}/p_0)_{max}=0.66$

Una vez se tiene la distribución de tensiones se procede al cálculo de la resistencia a fatiga, en este caso se ha realizado un aplicación para una serie de pasos de carga, ver Tabla (1), en la máquina de ensayos de engranajes FZG con unos engranajes tipo C y tipo A [15].

Los parámetros de Dang Van se han recogido de [16-17] tomándose β_{DV} entre 300MPa y 500MPa y α_{DV} entre 0.25 y 0.9 que corresponden a metales de dureza media-alta. En la Fig. (9) se representa la aplicación del criterio de Dang Van para cada uno de los ciclos de tensión del material con las diferentes combinaciones de β_{DV} y α_{DV} en el punto más crítico. Como se puede ver en la Fig. (10) el primer paso de carga para el cual se produciría iniciación de grietas al millón de ciclos sería el LS9 con los valores más bajos de β_{DV} y α_{DV} que corresponderían a materiales con límites de fatiga bajo ya sea por las propias características del metal base o propiedades como pueden ser la rugosidad, inclusiones, etc.

Tabla. 1. Pasos de carga en la FZG

Paso	LS1	LS2	LS3	LS4	LS5	LS6	LS7	LS8	LS9	LS10	LS11	LS12
Par (N·m)	3.3	13.7	35.3	60.8	94.1	135.5	183.4	239.3	302	372.6	450.1	534.5

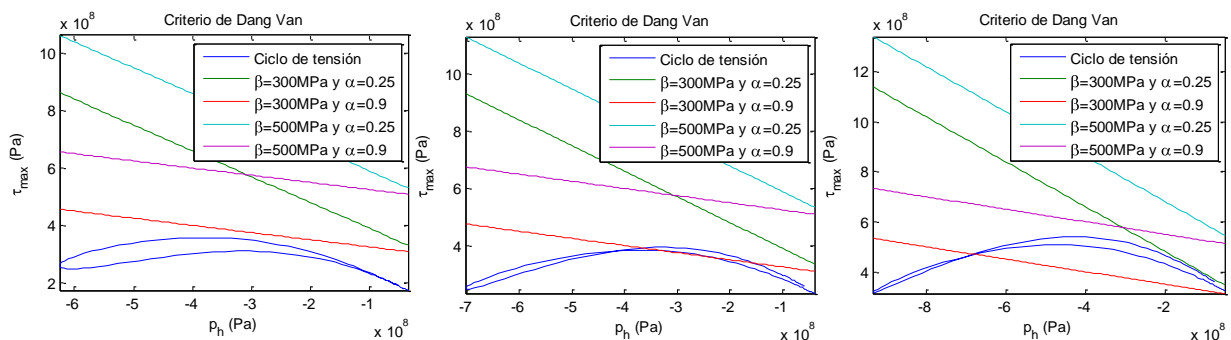


Fig. 10. Aplicación del criterio de Dang Van para los pasos de carga LS8, LS9 y LS12 respectivamente

Se ha considerado cada ciclo como independiente, si se quiere tener en cuenta el daño acumulado en la sucesión de ciclos basta con aplicar la regla de Palmgren-Miner [18].

DISCUSIÓN Y TRABAJOS FUTUROS

Se ha mostrado el desarrollo de una metodología para el cálculo de la resistencia a la fatiga superficial en diferentes tipos de contactos mecánicos consistente en el modelado del contacto, cálculo de la distribución de presión y de la tensión en el interior del material y por último aplicación del criterio de fatiga de Dang Van.

Como trabajos futuros queda la realización de ensayos para la validación del modelo con el ensayo de diferentes materiales y lubricantes. Del mismo modo también se quiere estudiar la influencia de otros parámetros como puede ser la rugosidad de los elementos en contacto o la influencia de la presencia de aditivos en el lubricante.

REFERENCIAS

- [1] A. Ekberg, H. Bjarnhed. *A fatigue life model for general rolling contact with application to wheel/rail damage*. Fatigue & fracture of engineering materials & structures, 18 (10), (1995), 1189-1199.
- [2] M. Sraml, J. Flaker, I. Potre. *Critical plane modeling of fatigue initiation under rolling and sliding contact*. J. Strain Analysis, Vol. 39, N° 2. (2003)
- [3] H. Desimone, A. Bernasconi, S. Beretta. *On the application of Dang Van criterion to rolling contact fatigue*. Wear 260, (2006), 567-572.
- [4] M. Ciavarella, F. Monno, G. Demelio. *On the Dang Van fatigue limit in rolling contact fatigue*. International Journal of Fatigue 28 (2006), 852-863.
- [5] G. Peridas, D.A. Hills. *Crack initiation: the choice of test available to calibrate Dang Van's criterion*. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 25 (2001), 321-330.
- [6] C.H. Venner, A.A. Lubrecht. *Multilevel methods in lubrication*. Elsevier. Tribology series, 37. (2000)
- [7] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press (1985).
- [8] S.D. Lee, T.W. Kim, Y. J. Cho. *The effect of surface roughness on contact fatigue behavior using mesoscopic approach*. Tribol. Lett. 36 (2009), 269-276.
- [9] E. Sourty, J.L. Sullivan, M.D. Bijker. *Numerical modeling of sub-surface stress in magnetic data tape heads due to the dynamic contact with a tape*. Tribology International 35 (2002), 171-184.
- [10] A. Constantinescu, K. Dang Van, M. H. Maitournam. *A unified approach for high and low cycle fatigue based on shakedown concepts*. Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 26 (2003), 561-568.
- [11] V. Zubizarreta, A. Ros. *Introducción a la mecánica de los sólidos*. Sección de Publicaciones de la E.T.S.I. Industriales de la Univ. Politécnica de Madrid, (2005)
- [12] P. Kumar, J. S. B. Mitchell, A. Yildirimir. *Computing core-sets and approximate smallest enclosing hyperspheres in high dimensions*. <http://www.compgeom.com/meb/> (2003)
- [13] A. Ekberg. *Rolling contact fatigue of railway wheels- a parametric study*. Wear, 211 (1997), 280-288.
- [14] E. Höglund. *Influence of lubricant properties on elastohydrodynamic lubrication*. Wear 232, (1999). 176-184
- [15] ASTM International. *Standard test method for evaluating the scuffing load capacity of oils*. (2002)
- [16] I.V. Papadopoulos et al. *A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals*. Int. J. Fatigue Vol. 19 No. 3- (1997) 219-235
- [17] J. F. Brandão. *Gear micropitting prediction using the Dang Van high-cycle fatigue criterion*. Tesis Doctoral, Facultad de Ingeniería de la Universidad de Oporto (1993).
- [18] R. Avilés. *Análisis de fatiga en máquinas*. Thomson (2005)