

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS  
DOCTORADO CONJUNTO UPM-UNLP

**COMPORTAMIENTO AERODINÁMICO DE SONDAS  
ATMOSFÉRICAS EN ENTORNOS AEROPORTUARIOS**

Tesis doctoral

por

Vicente J. Nadal Mora  
Ingeniero Aeronáutico

2005

DEPARTAMENTO DE VEHÍCULOS AEROESPACIALES  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

DEPARTAMENTO DE AERONÁUTICA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

**COMPORTAMIENTO AERODINÁMICO DE SONDAS  
ATMOSFÉRICAS EN ENTORNOS AEROPORTUARIOS**

Tesis doctoral

por

Vicente J. Nadal Mora

Ingeniero Aeronáutico

Dirigido por

Ángel Sanz Andrés

Doctor Ingeniero Aeronáutico

# ÍNDICE

ÍNDICE	i
NOMENCLATURA	iv
LISTA DE FIGURAS	viii
RESUMEN	xii
<i>ABSTRACT</i>	xiv
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1.1</b>
<b>1.1. Contenido de la tesis</b>	1.1
<b>1.2. Introducción</b>	1.2
<b>1.3. Aplicaciones del pararrotor</b>	1.3
1.3.1. <u>Medición de vientos</u>	1.3
1.3.2. <u>Medición de parámetros atmosféricos</u>	1.12
1.3.3. <u>Medición de emisiones</u>	1.14
1.3.4. <u>Sistemas integrados</u>	1.15
1.3.5. <u>Características del pararrotor</u>	1.17
<b>1.4. Antecedentes en el estudio del pararrotor</b>	1.18
<b>1.5. Autorrotación</b>	1.22
<b>2. ANÁLISIS TEÓRICO</b>	<b>2.1</b>
<b>2.1. Introducción</b>	2.1
<b>2.2. Formulación general del problema</b>	2.2
<b>2.3. Hipótesis de partida</b>	2.2
<b>2.4. Fuerzas aerodinámicas</b>	2.3
<b>2.5. Resumen de las ecuaciones</b>	2.7
<b>2.6. Parámetros adimensionales</b>	2.7
<b>2.7. Ecuaciones en forma adimensional</b>	2.9
<b>2.8. Coeficiente de resistencia equivalente</b>	2.16
<b>2.9. Otros efectos</b>	2.19
2.9.1. <u>Coeficiente de resistencia aerodinámica de las palas, <math>c_D</math></u>	2.19
2.9.2. <u>Alargamiento, <math>A</math></u>	2.20

2.9.3. <u>Pendiente de la curva de sustentación, <math>c_{L\alpha}</math></u>	2.21
2.9.4. <u>Solidez, <math>\sigma</math></u>	2.23
2.9.5. <u>Modelo considerando la fricción lateral del cilindro y la fricción de los rodamientos</u>	2.23
2.9.6. <u>Modelo teórico con fricción</u>	2.25
<b>3. RESULTADOS EXPERIMENTALES</b>	<b>3.1</b>
<b>3.1. Descripción del modelo</b>	<b>3.1</b>
<b>3.2. Configuración experimental</b>	<b>3.1</b>
3.2.1. <u>Instrumentación</u>	3.4
3.2.2. <u>Descripción del instrumental</u>	3.4
<b>3.3. Definiciones y parámetros a determinar durante los ensayos</b>	<b>3.5</b>
<b>3.4. Configuraciones ensayadas</b>	<b>3.6</b>
<b>3.5. Análisis de los resultados</b>	<b>3.13</b>
3.5.1. <u>Análisis de la configuración básica</u>	3.13
3.5.2. <u>Análisis de las diferentes configuraciones</u>	3.14
3.5.3. <u>Análisis de reproducibilidad</u>	3.18
3.5.4. <u>Visualización del flujo</u>	3.26
<b>3.6. Observaciones referentes a los ensayos experimentales</b>	<b>3.32</b>
<b>3.7. Conclusiones referentes a los ensayos experimentales</b>	<b>3.33</b>
<b>4. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON LOS MODELOS TEÓRICOS</b>	<b>4.1</b>
<b>4.1. Tratamiento de los datos experimentales</b>	<b>4.1</b>
4.1.1. <u>Corrección de la tracción</u>	4.1
4.1.2. <u>Velocidad inducida de referencia</u>	4.1
4.1.3. <u>Corrección por ubicación del centro de presiones</u>	4.2
<b>4.2. Datos experimentales utilizados para la comparación</b>	<b>4.3</b>
<b>4.3. Comparación de los resultados experimentales con los modelos teóricos</b>	<b>4.4</b>
<b>4.4. Observaciones y conclusiones referentes a la comparación</b>	<b>4.8</b>

<b>5. ANÁLISIS DINÁMICO TEÓRICO</b>	5.1
<b>5.1. Caída simétrica de cuerpo simétrico</b>	5.1
5.1.1. <u>Análisis para la pala P1</u>	5.2
5.1.2. <u>Análisis para la pala P2</u>	5.6
5.1.3. <u>Cálculo de la dirección de la sustentación para la pala P1</u>	5.10
5.1.4. <u>Cálculo de la dirección de la sustentación para la pala P2</u>	5.11
5.1.5. <u>Resumen</u>	5.13
<b>5.2. Dinámica rotacional</b>	5.17
5.2.1. <u>Movimiento de giro del cuerpo alrededor del centro de masas</u>	5.18
5.2.2. <u>Movimiento sin fricción</u>	5.24
5.2.3. <u>Análisis de la estabilidad del equilibrio para el movimiento</u> <u>sin fricción</u>	5.27
5.2.4. <u>Análisis de casos</u>	5.33
5.2.5. <u>Movimiento con fricción</u>	5.38
5.2.6. <u>Análisis de la estabilidad del equilibrio para el movimiento con</u> <u>fricción</u>	5.42
5.2.7. <u>Determinación de los ángulos de nutación y rotación propia</u> <u>del cuerpo</u>	5.46
5.2.8. <u>Ejemplo numérico</u>	5.50
<b>6. CONCLUSIONES</b>	6.1
<b>7. BIBLIOGRAFÍA</b>	7.1
<b>ANEXO 1. RESULTADOS EXPERIMENTALES</b>	Anexo 1.1

## NOMENCLATURA

$a$ ,	factor de variación de $c_D$ con $\alpha$ ,
$a_{i,j}$ ,	coeficientes utilizados en el análisis dinámico,
$a_{i,jf}$ ,	coeficientes utilizados en el análisis dinámico con fricción,
$a_0$ ,	pendiente de la curva de sustentación de un ala de alargamiento infinito,
$A, B, C$ ,	momentos principales de inercia (Cap. 5),
$B$ ,	medida de la distancia normalizada entre resultados teóricos y experimentales (Cap. 4),
$b$ ,	envergadura de la pala,
$b_{1,2}$ ,	coeficientes utilizados en el análisis dinámico,
$b_{1,2f}$ ,	coeficientes utilizados en el análisis dinámico con fricción,
$c$ ,	cuerda de la pala,
$c_D$ ,	coeficiente de resistencia aerodinámica de la pala,
$c_{D0}$ ,	coeficiente de resistencia de fricción,
$c_{DC}$ ,	coeficiente de resistencia aerodinámica del cilindro,
$c_{DM}$ ,	coeficiente de resistencia equivalente, coeficiente de resistencia aerodinámica del modelo,
$c_f$ ,	coeficiente de fricción,
$c_L$ ,	coeficiente de sustentación de la pala,
$c_{La}$ ,	pendiente de la curva de sustentación de la pala,
$c_{ma}$ ,	coeficiente de momento aerodinámico,
$dif$ ,	diferencia entre los valores teóricos y experimentales,
$D$ ,	resistencia aerodinámica,
$Det$ ,	determinante,
$e$ ,	factor de eficiencia,
$\bar{e}_{Di}$ ,	versor en la dirección de la resistencia de la pala $P_i$ ,
$\bar{e}_{Li}$ ,	versor en la dirección de la sustentación de la pala $P_i$ ,
$f_0$ ,	factor de fricción del rodamiento dependiente de la velocidad,
$F$ ,	factor para medir el efecto de la cortadura del viento sobre las actuaciones de una aeronave,
$\bar{F}_i$ ,	fuerza generada por la pala $P_i$ ,

$F_C$ ,	fricción lateral del cilindro,
$\overline{H}$ ,	momento cinético,
$I_a$ ,	parámetro que representa el momento de inercia del aire asociado al movimiento de las palas,
$k$ ,	parámetro adimensional de relación de velocidades,
$k, k_{1,2}$ ,	raíces de la ecuación característica en el estudio de la estabilidad en el análisis dinámico,
$k_{21}$ ,	parámetro de relación de los vectores posición de la pala,
$k_e$ ,	parámetro adimensional de relación de velocidades equivalente (Cap. 4),
	relación de momentos de inercia, utilizado en el análisis de estabilidad (Cap. 5),
$k_A$ ,	parámetro de relación de momentos de inercia,
$k_B$ ,	parámetro de relación de momentos de inercia,
$k_f$ ,	coeficiente de fricción,
$L$ ,	sustentación,
$M_1, M_2, M_3$ ,	componentes de los momentos de las fuerzas exteriores,
$\overline{M}$ ,	momento generado por las fuerzas exteriores sobre el cuerpo,
$\overline{M}_a$ ,	momento generado por las fuerzas aerodinámicas,
$\overline{M}_f$ ,	momento generado por las fuerzas de fricción,
$\overline{M}_{fo}$ ,	momento de fricción estática,
$M_{rod}$ ,	par debido a la fricción del rodamiento,
$\overline{n}$ ,	versor normal a la pala,
$N$ ,	número de casos analizados en el valor $i$ (Cap. 4),
$N_e$ ,	número de estabilidad,
$p$ ,	parámetro $(k, \overline{V}_v, \overline{U}_T^2)$ ,
$p_{iexp}(\theta_j)$ ,	valor experimental del parámetro $p_i$ para el ángulo de paso $\theta_j$ ,
$p_{iteo}(\theta_j)$ ,	valor teórico del parámetro $p_i$ para el ángulo de paso $\theta_j$ ,
$q$ ,	presión dinámica,
$r$ ,	radio del modelo donde se encuentra el centro de presiones de la pala,
$r_e$ ,	radio equivalente,

$\bar{r}_{pi}$ ,	vector posición de la pala Pi,
$R_C$ ,	radio del cilindro,
$Re$ ,	número de Reynolds,
$Re_P$ ,	número de Reynolds basado en la cuerda de las palas,
$R$ ,	radio de la punta de pala en el modelo,
$S$ ,	área de una sola pala,
$S_C$ ,	área frontal del cilindro,
$S_D$ ,	área del disco,
$S_i$ ,	área de la pala $i$ ,
$S_{LC}$ ,	área lateral del cilindro,
$S_P$ ,	área total de las dos palas,
$t$ ,	tiempo,
$t_c$ ,	tiempo característico asociado al momento de las fuerzas aerodinámicas,
$T$ ,	tracción, resistencia del modelo en la dirección de la corriente, variable temporal utilizada en el análisis dinámico,
$Tr$ ,	traza,
$T_M$ ,	tracción medida en los ensayos experimentales,
$\bar{U}_{Di}$ ,	velocidad en la dirección de la resistencia de la pala Pi,
$\bar{U}_{Li}$ ,	velocidad en la dirección de la sustentación de la pala Pi,
$U_R$ ,	velocidad de la corriente resultante,
$U_T$ ,	velocidad tangencial,
$\bar{U}_T$ ,	velocidad tangencial adimensional,
$\bar{U}_{T_e}$ ,	velocidad tangencial adimensional equivalente,
$U_\infty$ ,	velocidad de caída del cuerpo,
$v_i$ ,	velocidad inducida,
$\bar{v}_i$ ,	velocidad inducida adimensional,
$v_{i0}$	velocidad inducida de referencia (vuelo a punto fijo $V_v = 0$ ),
$V_{ni}$ ,	velocidad normal a la pala Pi,
$\bar{V}_{reli}$ ,	velocidad relativa a la pala Pi,
$V_v$ ,	velocidad de la corriente libre,
$\bar{V}_{v_e}$ ,	velocidad de la corriente adimensional,



$\overline{V}_{ve}$ ,	velocidad de la corriente adimensional equivalente,
$x_1, x_2$ ,	velocidades angulares adimensionales,
$x_{1e}, x_{2e}$ ,	valor de $x_1, x_2$ para el equilibrio,
$x_{1f}, x_{2f}$ ,	contribución de la fricción en el análisis dinámico,
$x_{1fe}, x_{2fe}$ ,	valor de $x_{1,2f}$ para el equilibrio,
$X_1, X_2$ ,	variable introducida para el estudio de la estabilidad en el análisis dinámico,
$\alpha$ ,	ángulo de ataque,
$\alpha_{1,2}$ ,	coeficientes utilizados para el estudio de la estabilidad en el análisis dinámico,
$\beta$ ,	ángulo de paso de las palas,
$\delta_\beta$ ,	diferencia de paso entre las palas,
$\theta$ ,	ángulo de nutación,
$\mu_f$ ,	parámetro utilizado en el análisis de estabilidad,
$\nu$ ,	viscosidad cinemática (Cap. 3),
	término auxiliar igual a $\frac{\omega_2}{\omega_3} - \theta \cos \varphi$ (Cap. 5),
$\nu_f$ ,	parámetro utilizado en el análisis de estabilidad para el caso con fricción,
$\rho$ ,	densidad del aire,
$\sigma$ ,	solidez,
$\varphi$ ,	ángulo de rotación propia del cuerpo,
$\psi$ ,	ángulo de precesión del cuerpo,
$\omega$ ,	velocidad angular,
$\omega_0$ ,	velocidad angular de referencia,
$\omega_{12}$ ,	resultante de la suma vectorial de las velocidades angulares $\omega_1$ y $\omega_2$ ,
$\omega_{ie}$ ,	velocidad angular en el equilibrio,
$\phi$ ,	ángulo de incidencia del flujo,
$\Lambda$	alargamiento,
$\Delta$ ,	discriminante,
$\Omega$ ,	velocidad angular de rotación del modelo.

## LISTA DE FIGURAS

- Fig. 2.1. Fuerzas y velocidades relativas a la sección del ala de referencia.
- Fig. 2.2. Fuerzas y velocidades relativas a la pala en autorrotación.
- Fig. 2.3. Variación con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , de la velocidad tangencial adimensional al cuadrado,  $\overline{U_T}^2$ , la velocidad de la corriente adimensional,  $-\overline{V_V}$ , el ángulo de paso,  $\beta$ , el parámetro adimensional de relación de velocidades,  $k$ , y el ángulo de ataque,  $\alpha$ , para  $c_D = 0,07$ ,  $c_{L\alpha} = 3,4$  y  $\sigma = 0,45$ .
- Fig. 2.4. Variación con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , de la velocidad tangencial adimensional al cuadrado,  $\overline{U_T}^2$ , la velocidad de la corriente adimensional,  $-\overline{V_V}$ , el ángulo de paso,  $\beta$ , el parámetro adimensional de relación de velocidades,  $k$ , y el ángulo de ataque,  $\alpha$ , para  $c_D = 0,15$ ,  $c_{L\alpha} = 3,4$  y  $\sigma = 0,45$ .
- Fig. 2.5. Variación, con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , de la velocidad tangencial adimensional al cuadrado,  $\overline{U_T}^2$ , la velocidad de la corriente adimensional,  $-\overline{V_V}$ , el ángulo de paso,  $\beta$ , el parámetro adimensional de relación de velocidades,  $k$ , y el ángulo de ataque,  $\alpha$ , para  $c_D = 0,07$ ,  $c_{L\alpha} = 5$  y  $\sigma = 0,45$ .
- Fig. 2.6. Variación, con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , de la velocidad tangencial adimensional al cuadrado,  $\overline{U_T}^2$ , la velocidad de la corriente adimensional,  $-\overline{V_V}$ , el ángulo de paso,  $\beta$ , el parámetro adimensional de relación de velocidades,  $k$ , y el ángulo de ataque,  $\alpha$ , para  $c_D = 0,07$ ,  $c_{L\alpha} = 3,4$  y  $\sigma = 0,7$ .
- Fig. 2.7. Variación teórica de  $c_{DM}$  en función de  $\beta$ , para  $c_{L\alpha} = 3,4$  y  $\sigma = 0,45$ .
- Fig. 2.8. Variación teórica de  $c_{DM}$  en función de  $\beta$ , para  $c_{D0} = 0,07$  y  $\sigma = 0,45$ .
- Fig. 2.9. Variación teórica de  $c_{DM}$  en función de  $\beta$ , para  $c_{D0} = 0,07$  y  $c_{L\alpha} = 3,4$ .
- Fig. 2.10. Variación de  $c_{L\alpha}$  [1/rad] con  $\alpha$  [°]. Los puntos (rombos) provienen de la comparación entre el modelo teórico y los resultados experimentales, la línea de trazo continuo grueso es un ajuste lineal a esos puntos y la línea de trazo continuo fino es una ley teórica para  $\Lambda = 1,65$ .

- Fig. 2.11. Variación del momento de fricción en función de la velocidad de rotación para un rodamiento SKF 619/6 en las condiciones de trabajo del modelo físico.
- Fig. 3.1. Esquema del modelo.
- Fig. 3.2. Vista del modelo y la balanza. La corriente fluye de izquierda a derecha. Los números indican: 1, cilindro; 2, pala; 3, eje de rotación; 4, extremo de la balanza; 5, carenado.
- Fig. 3.3. Vista del modelo. Los números indican: 1, cilindro; 2, palas; 3, base giratoria del túnel aerodinámico.
- Fig. 3.4. Instalación de ensayo. La corriente fluye de derecha a izquierda. Los números indican: 1, micromanómetro; 2, taquímetro; 3, barómetro; 4, multímetro; 5, amplificador de la balanza; 6, tubo pitot; 7, modelo.
- Fig. 3.5. Modelo girando durante el ensayo. La corriente fluye de derecha a izquierda. Los números indican: 1, modelo; 2, carenado de la balanza; 3, estructura soporte del modelo y la balanza.
- Fig. 3.6. Vista del intradós y lateral de la pala.
- Fig. 3.7. Vista del intradós y lateral de la pala.
- Fig. 3.8. Vista del intradós y lateral de la pala.
- Fig. 3.9. Vista del intradós de la pala.
- Fig. 3.10. Vista del intradós de la pala.
- Fig. 3.11. Efecto del ángulo de guiñada en el parámetro  $k$ .
- Fig. 3.12. Efecto del ángulo de guiñada en el parámetro  $c_{DM}$ .
- Fig. 3.13. Configuración básica, C01,  $\beta = 2^\circ$ .
- Fig. 3.14. Configuración básica, C01,  $\beta = 2^\circ$ .
- Fig. 3.15. Configuración básica, C01,  $\beta = 4^\circ$ .
- Fig. 3.16. Configuración básica, C01,  $\beta = 4^\circ$ .
- Fig. 3.17. Configuración básica, C01,  $\beta = 6^\circ$ .
- Fig. 3.18. Configuración básica, C01,  $\beta = 6^\circ$ .
- Fig. 3.19. Configuración básica, C01,  $\beta = 8^\circ$ .
- Fig. 3.20. Configuración básica, C01,  $\beta = 8^\circ$ .
- Fig. 3.21. Flujo sobre el intradós durante un ensayo.
- Fig. 3.22. Flujo sobre el intradós durante un ensayo de la configuración C02.
- Fig. 3.23. Esquema del flujo en intradós y extradós para la configuración C01.
- Fig. 3.24. Esquema del flujo en intradós y extradós para la configuración C02.

- Fig. 3.25. Esquema del flujo en intradós y extradós para la configuración C09.
- Fig. 4.1. Configuración C01. Curvas teóricas (línea continua), puntos experimentales (círculos) y curvas de ajuste a los puntos experimentales (línea punto- raya), para los parámetros  $k$ ,  $\overline{V}_v$  y  $\overline{U}_T^2$ .
- Fig. 4.2. Configuración C03. Curvas teóricas (línea continua), puntos experimentales (círculos) y curvas de ajuste a los puntos experimentales (línea punto- raya), para los parámetros  $k$ ,  $\overline{V}_v$  y  $\overline{U}_T^2$ .
- Fig. 4.3. Configuración C07. Curvas teóricas (línea continua), puntos experimentales (círculos) y curvas de ajuste a los puntos experimentales (línea punto- raya), para los parámetros  $k$ ,  $\overline{V}_v$  y  $\overline{U}_T^2$ .
- Fig. 4.4. Configuración C09. Curvas teóricas (línea continua), puntos experimentales (círculos) y curvas de ajuste a los puntos experimentales (línea punto- raya), para los parámetros  $k$ ,  $\overline{V}_v$  y  $\overline{U}_T^2$ .
- Fig. 5.1. Definición de la geometría.  $\psi$ , precesión;  $\theta$ , nutación;  $\varphi$ , rotación propia.  $(X,Y,Z)$ : sistema de referencia inercial.  $(1,2,3)$ : sistema de referencia fijo al cuerpo.  $\overline{\omega}$ : velocidad angular.
- Fig. 5.2. Vista desde el eje 1 de la pala P1, con  $\varphi = 0$ .
- Fig. 5.3. Determinación del ángulo de ataque,  $\alpha_1$ .
- Fig. 5.4. Velocidad relativa a la pala P1. La velocidad relativa no tiene componente a lo largo de la envergadura de la pala (es decir, en la dirección del eje 1).
- Fig. 5.5. Esquema de la posición de las palas.
- Fig. 5.6. Dirección de los vectores  $D$ ,  $L$  y  $V_{rel}$ .
- Fig. 5.7. Tipos de trayectorias en función de los valores de la traza  $Tr$  y del determinante  $Det$  de la ecuación característica.
- Fig. 5.8. Tipos de trayectorias para el caso  $A, B < C$ . Sólo es accesible el primer cuadrante
- Fig. 5.9. Tipos de trayectorias para  $A, B > C$ . Sólo es accesible el segundo cuadrante.
- Fig. 5.10. Tipos de trayectorias para el caso  $B < C < A$ . Sólo es accesible el cuarto cuadrante.
- Fig. 5.11. Regiones de estabilidad para el caso con fricción, para  $\nu_f = 0,5$ .

Fig. 5.12. Orientación del cuerpo.  $(X,Y,Z)$ : sistema de referencia inercial.  $(1,2,3)$ : sistema fijo al cuerpo.  $\psi$ , precesión;  $\theta$ , nutación;  $\varphi$ , rotación propia. La velocidad angular,  $\bar{\omega}$ , está dirigida según el eje  $Z$ .

## **RESUMEN**

El objeto del trabajo es el estudio del comportamiento aerodinámico de un tipo de sondas basadas en el concepto de pararrotor, para su empleo en la exploración y medición de características de la atmósfera en entornos aeroportuarios. Se espera que las características de este tipo de sondas permitan controlar su caída en una forma más precisa que las basadas en paracaídas y puedan formar parte de un sistema meteorológico de terminal integrado (ver Apartado 1.3.4).

El pararrotor es un decelerador aerodinámico (frena la caída de cuerpos en la atmósfera), que vuela en régimen de autorrotación. Aunque el régimen de autorrotación es ampliamente conocido (y, sin embargo, continúa siendo objeto de investigación) por su aplicación al caso de las aeronaves de ala giratoria (p.e. los helicópteros), el problema estudiado aquí se diferencia fundamentalmente del estudio clásico en el alargamiento de las palas, siendo en el presente caso de alargamiento pequeño (de orden de la unidad), por lo que no son aplicables los conceptos desarrollados en el caso de helicópteros. El alargamiento es pequeño por razones de almacenamiento para su transporte: las palas deben ir plegadas sobre el cuerpo de la sonda, que suele ser cilíndrico, y cuya altura está limitada por razones de estabilidad giroscópica.

El desarrollo teórico comienza con la elaboración de un modelo de la acción de las fuerzas aerodinámicas sobre el movimiento del cuerpo en rotación alrededor de un eje fijo, basado en aspectos de la teoría de cantidad de movimiento y la teoría de alas esbeltas. Este modelo permite predecir la variación con el ángulo de incidencia del flujo de la velocidad tangencial adimensional, la velocidad de la corriente adimensional, el ángulo de paso, el parámetro adimensional de relación de velocidades y el ángulo de ataque, para diferentes características aerodinámicas de las palas. El modelo permite identificar los factores de los que dependen los parámetros del funcionamiento del pararrotor y su influencia, y así poder explicar aspectos del comportamiento del pararrotor en los ensayos experimentales (ver Capítulo 2).

Paralelamente, se diseña y construye un modelo con el que se realizan ensayos experimentales relacionados con el modelo teórico mencionado. En el Capítulo 3 se describe el modelo físico utilizado, el instrumental, los procedimientos de ensayo, los

parámetros medidos, las configuraciones ensayadas, etc. Se presenta el estudio del efecto del ángulo de paso y de la velocidad de la corriente sobre la velocidad de rotación y la tracción en el modelo. También se presenta el estudio de esos efectos para diferentes configuraciones de palas (que producen diferentes rugosidades), aunque manteniendo la misma forma en planta. Se incluye también un análisis de reproducibilidad de los ensayos y los resultados de los ensayos de visualización del flujo realizados para permitir elaborar modelos teóricos basados en hipótesis más precisas, tratando de elucidar el mecanismo de autorrotación en el caso de rotores con palas de envergadura pequeña. De los parámetros cuyo efecto se ha estudiado se ha observado que el más destacable es la rugosidad de las palas, que influye sobre la velocidad de rotación y el coeficiente de resistencia del modelo.

En el Capítulo 4 se presenta el estudio de la comparación entre los resultados del modelo teórico y los resultados experimentales.

En el Capítulo 5 se realiza un análisis dinámico teórico sobre la estabilidad del movimiento de rotación del pararrotor. Se plantean las ecuaciones del movimiento, incluyendo las hipótesis simplificadoras apropiadas. Se analiza la estabilidad del equilibrio para el caso del pararrotor en caída libre y para un modelo sujeto mediante una rótula con fricción. Se presentan los resultados de un ejemplo numérico basado en las características del modelo experimental, que resulta ser estable sin y con fricción.

Finalmente, en las conclusiones se destacan las contribuciones novedosas que se han obtenido durante el desarrollo de la Tesis. Asimismo se presentan los resultados, las observaciones y las conclusiones más importantes que se desprenden de cada capítulo, y las posibles líneas de investigación, tanto experimentales como teóricas, que se abren como continuación de las tareas realizadas a lo largo del desarrollo de esta Tesis.

## **ABSTRACT**

*The purpose of this work is to study the aerodynamic behaviour of a kind of probe, based on the “pararotor” concept, to be used for exploring and measuring atmospheric conditions in airport surroundings. This kind of probes would allow to control its falling in a more accurate way than those based on parachutes and could be part of an Integrated Terminal Weather System.*

*The pararotor is an aerodynamic decelerator (it slows down the falling of bodies in the atmosphere), which flies in an autorotation regime. Although the autorotation regime is widely known (and nevertheless, it is nowadays a matter of research) for its application for rotary winged aircrafts (for instance, helicopters), the problem here studied differs from the classical case in the aspect ratio of the wings, which are small (close to the unity), so the concepts developed for helicopters can not be applied. The aspect ratio is small for storing: the wings must be folded over the body for transportation. The body is usually cylindrical in shape, and its height limited for gyroscopic stability reasons.*

*The theoretical study begins with a model, based on aspects of the momentum theory and the slender wings theory, that considers the aerodynamic forces exerted on the body. The body spins around a fixed axis. This model allows to predict, for different aerodynamic characteristics of the blades, the change of the nondimensional tangential velocity, the nondimensional stream velocity, the angle of incidence of the blade, the nondimensional velocity relation and the angle of attack, related to the angle of incidence of the flow. The model also allows to identify the factors that govern the performance of the pararotor and their influence over it, and thus it allows to explain aspects of the behaviour of the pararotor in experimental tests (see Chapter 2).*

*At the same time, a model is designed and built, and experimental tests with it are performed, related to the theoretical model mentioned above. In Chapter 3, the physical model, the instruments, the tests procedures, the measured parameters, the tested configurations, etc. are described. The study of the effect of the angle of the blade and the stream velocity on the spin velocity and the drag for the model are presented. It is also presented the study of those effects for different configurations of the blades that produce different roughness, but keeping the wing plan form unchanged. A*



*reproducibility analysis for the tests and the flow visualization results is included. The latter is performed to obtain more accurate hypotheses for the development of the theoretical model, trying to explain the autorotation mechanism for low span wings. From the parameters studied, it is observed that the roughness of the blades has a significant influence over the spin velocity and the drag coefficient of the model.*

*In Chapter 4, the study of the comparison between the results of the theoretical model and the experimental tests are presented.*

*In Chapter 5, a theoretical dynamic analysis about the stability of the movement of the pararotor is performed. The motion equations are stated, with the proper simplification hypothesis included. The equilibrium stability for the free falling pararotor and for a model held by means of an universal joint with friction are analysed.*

*Finally, the conclusions highlight novel achievements obtained during the development of the Thesis. The results, the relevant aspects, observations and conclusions that are inferred from each chapter are emphasize, and some possible research lines, experimental and theoretical that arise from the development of the Thesis are presented.*

# **1. INTRODUCCIÓN**

## **1.1. Contenido de la tesis**

La Tesis comienza con una introducción a las funciones y características de los deceleradores en general y del pararrotor en particular, donde se explica la necesidad de frenar la caída de una sonda en la atmósfera, se mencionan posibles aplicaciones de estos dispositivos y los sistemas existentes para la mediciones de dichos parámetros, se analizan los antecedentes en el estudio del pararrotor y se explica el fenómeno de la autorrotación.

En el Capítulo 2 se desarrolla un modelo teórico de la acción de las fuerzas aerodinámicas sobre el movimiento del cuerpo en rotación alrededor de un eje fijo, basado en aspectos de la teoría de cantidad de movimiento y la teoría de alas esbeltas. Este modelo permite predecir la variación con el ángulo de incidencia del flujo de la velocidad tangencial adimensional, la velocidad de la corriente adimensional, el ángulo de paso, el parámetro adimensional de relación de velocidades y el ángulo de ataque, para diferentes características aerodinámicas de las palas. El modelo permite identificar los factores de los que dependen los parámetros del funcionamiento del pararrotor y su influencia, y así poder explicar aspectos del comportamiento del pararrotor en los ensayos experimentales.

En el Capítulo 3 se describen los ensayos experimentales realizados en relación con el modelo teórico desarrollado en el Capítulo 2, presentando el modelo físico utilizado, el instrumental, los procedimientos de ensayo, los parámetros medidos, las configuraciones ensayadas, etc. También se analizan los resultados considerando la reproducibilidad de los ensayos. Finalmente, se presentan las conclusiones relativas a los resultados de los ensayos experimentales.

El Capítulo 4 se dedica a la presentación del análisis de la comparación entre los resultados del modelo teórico y los resultados experimentales, y las conclusiones que se derivan del mismo.

En el Capítulo 5 se realiza un análisis dinámico teórico sobre la estabilidad del movimiento de rotación del pararrotor alrededor del centro de masas. Se realizan hipótesis simplificadoras y se obtienen las ecuaciones del movimiento. Se analiza la estabilidad del equilibrio para el caso del pararrotor en caída libre y para un modelo sujeto mediante una rótula con fricción. Se realiza un ejemplo numérico basado en las características del modelo experimental, que resulta ser estable sin y con fricción.

## **1.2. Introducción**

El presente trabajo trata sobre un tipo particular de decelerador de la velocidad de caída de un cuerpo en la atmósfera. Existen varios mecanismos para decelerar cuerpos en caída en la atmósfera, que se podrían agrupar en aerodinámicos y no aerodinámicos. Dentro de los primeros, se encontrarían los paracaídas y, el presente caso: los pararrotos, entre otros. En el segundo grupo, podrían ubicarse los globos, sistemas con propulsión propia, etc. Entre las características más significativas de un decelerador aerodinámico se encuentra su capacidad de producir resistencia aerodinámica. Se conoce como pararrotor a un ala giratoria en el régimen de autorrotación.

Existen múltiples aplicaciones en las cuales se desea frenar la caída de un cuerpo en la atmósfera. Entre ellas se pueden mencionar las siguientes: la recuperación de elementos provenientes del espacio, el control de la trayectoria de proyectiles y el uso de sondas meteorológicas. Algunas de las principales causas por las cuales es preciso frenar la caída de estos cuerpos son las siguientes: para el caso de sondas espaciales, la recuperación sin daños; para proyectiles, el control de la trayectoria y la velocidad precisa de descenso; para sondas meteorológicas, viajar por la atmósfera a una velocidad lo suficientemente lenta como para permitir la recolección de datos atmosféricos adecuadamente. El estudio propuesto está, en principio, orientado a la deceleración de sondas para obtener medidas de diversos parámetros de la atmósfera en el entorno de los aeropuertos. Esto no quiere decir que este principio quede restringido a estos usos en particular.

En resumen, como se ha mencionado, se pretende estudiar el frenado en la baja atmósfera por medios aerodinámicos de la caída de un cuerpo que transporta sondas de medición utilizando el principio del pararrotor.

### **1.3. Aplicaciones del pararrotor**

El estudio está pensado en la aplicación a la medición de parámetros ambientales en el entorno de aeropuertos: la intensidad de emisiones de contaminantes, la detección de cortadura del viento y de la presencia de “microburst”, la medición de otros parámetros atmosféricos como presión y temperatura en altura, etc. En el primer caso, se trata de conocer las emisiones de los gases producto de la combustión para determinar la calidad del ambiente y el impacto en el mismo del uso de motores de combustión en el entorno de aeropuertos. En cuanto a la cortadura del viento y la presencia de “microburst”, las fuerzas y momentos generados sobre una aeronave a causa de perturbaciones existentes en la atmósfera pueden afectar al equilibrio estático y también afectar a la dinámica del vuelo. Dependiendo de su naturaleza, duración e intensidad estas fuerzas y momentos perturbadores pueden, en casos extremos, resultar en una pérdida de control por parte del piloto y en consecuencia en un accidente. En casos menos severos el piloto puede retener o recuperar el control, pero estos cambios de trayectoria o actitud pueden producir malestar en los pasajeros, lesiones, caída de objetos, etc.

#### **1.3.1. Medición de vientos**

Existen comportamientos de los vientos en la atmósfera que se tornan de importancia en el entorno de los aeropuertos: cortadura del viento (wind shear), turbulencia, “downburst”, “microburst”.

Una cortadura del viento es un cambio en la dirección o en la velocidad del viento con la distancia o el tiempo. Se puede decir que cortaduras de viento de cierta magnitud existen en todos los puntos de la atmósfera en casi todos los instantes de tiempo. Sin embargo, estos fenómenos son de importancia para la aviación solamente cuando son de ciertos tipos e intensidad. En efecto, existen dos tipos de cortadura: la vertical y la horizontal.

La cortadura vertical se refiere a un cambio con la altura en la componente de la velocidad del viento horizontal y/o su dirección, mientras que la cortadura horizontal es un efecto análogo pero en un plano horizontal. Respecto al primer caso, una variación

con la altura de la componente horizontal del viento puede ser peligrosa en ascenso y descenso, por ejemplo, durante un despegue puede generarse una pérdida de velocidad relativa al ascender que resulte en una pérdida rápida de sustentación, con la consecuente pérdida de altitud.

En efecto, una cortadura horizontal en la dirección de vuelo puede provocar cambios rápidos en la velocidad del avión respecto al aire, con la consecuente variación en la magnitud de las fuerzas y momentos aerodinámicos que se generan sobre el avión, que varían con el cuadrado de la velocidad. Un viento de cola que aumenta a lo largo de la trayectoria del avión ocasionará una pérdida en la sustentación.

En cuanto a la turbulencia, la definición de este tipo de flujo puede resumirse como el movimiento irregular e instantáneo del fluido originado por un número de pequeños remolinos que viajan con la corriente. La turbulencia atmosférica puede describirse en términos de fluctuaciones aleatorias en el viento, que pueden ser causadas por corrientes térmicas o convectivas, diferencias en el terreno y en las velocidades del viento a lo largo de una zona frontal, o variaciones en la temperatura y la presión. También pueden ser producidas por la presencia de construcciones (edificios, estructuras), por ejemplo, hangares, edificios terminales, etc.

Una aeronave que atraviese una zona de la atmósfera con turbulencia puede experimentar fluctuaciones en las fuerzas aerodinámicas. La turbulencia de alta frecuencia no afecta al avión. Las fluctuaciones en el rango de frecuencias medias, cercanas a los modos de vibración del avión, pueden provocar cambios de actitud y altitud, pérdida de control, oscilaciones en la trayectoria y oscilaciones estructurales. La turbulencia en el rango de frecuencias más bajas puede afectar a la sustentación y provocar cambios en la trayectoria. Está claro que estos efectos varían de un avión a otro. Los efectos de la turbulencia pueden ir desde molestias para los pasajeros a lesiones, daños en la estructura, variaciones en el empuje de los motores, etc. Según sus efectos y características, la turbulencia se clasifica en leve, moderada, severa y extrema, y sus consecuencias van desde pequeños cambios en altitud y/o actitud, para la turbulencia leve, hasta pérdidas de control severas, daños estructurales y lesiones a los pasajeros, para la turbulencia extrema. La turbulencia puede ser generada también por tormentas eléctricas, vientos fuertes de superficie, ondas de montaña, etc., y turbulencia

de aire claro, que suele encontrarse a altitudes mayores a los 5000 m. La turbulencia puede estar asociada a ráfagas, que consisten en un “soplido” transitorio de viento, que puede, por ejemplo, sacar al avión del eje de pista durante una aproximación.

Por su parte, el “downburst” es una corriente descendente severa localizada, proveniente de una tormenta o lluvia. Puede tener una extensión de cientos de kilómetros cuadrados. El “microburst” es un “downburst” localizado. Aparece como consecuencia de viento que desciende de una tormenta y al acercarse a tierra diverge horizontalmente siguiendo un patrón aproximadamente axilsimétrico. Cubre un área menor que los 4 km de diámetro y es breve en duración, usualmente menor que 5 minutos. La velocidad del viento puede alcanzar los 75 m/s.

La seguridad y operatividad de los aeropuertos está influida por la turbulencia y la cortadura de viento, pues estos fenómenos pueden afectar seriamente las actuaciones y la controlabilidad de las aeronaves y pueden dar lugar a restricciones operativas bajo ciertas condiciones de viento.

Existe un requerimiento operacional de información de cortadura del viento y turbulencia de baja altura al piloto de forma que éste pueda contrarrestar esos efectos y mantener un control seguro de la aeronave.

Con la medición del viento horizontal con respecto a la altura se obtiene un registro llamado “perfil de viento o perfil de velocidad del viento”. Mediante la ubicación de anemómetros a varias alturas, por ejemplo, sobre una torre, se pueden determinar los perfiles de velocidad del viento. Estas permiten obtener perfiles de velocidad del viento en forma continua en el tiempo, pero a intervalos discretos en altura.

Cuando un avión se encuentra un campo de cortadura del viento y detecta una ganancia o pérdida de altitud y/o velocidad debe iniciar un procedimiento de recuperación para escapar de los efectos dañinos de la cortadura. Estos procedimientos actualmente forman parte de los procedimientos de entrenamiento de muchas tripulaciones. Sin embargo, las técnicas de recuperación apropiadas ante un encuentro de frente con un “microburst” y con una cortante de baja altura son opuestas. La elección equivocada del procedimiento puede determinar que el escape sea exitoso o termine en un accidente.

Por esto, el reconocimiento apropiado del tipo de fenómeno con que se puede encontrar una aeronave es de gran importancia para la seguridad de la aviación.

Antes de comentar las técnicas de detección de los fenómenos mencionados, es conveniente indicar que existen dos filosofías diferentes en cuanto a la medición de parámetros en meteorología: la medida “in situ” y la medida remota. En el primer caso, el elemento sensor está en contacto directo con el medio cuyos parámetros se desean medir. En la medida remota, el equipo no se encuentra en el lugar donde se desea medir sino alejado, y mide las características de absorción y reflexión de radiación del medio. Los sensores “in situ” miden parámetros en el sitio donde están ubicados. Se asume que los valores medidos son válidos también en la vecindad de la locación del sensor. Para extender la cobertura puede utilizarse una disposición de varios sensores “in situ” que cubran una determinada área. Pueden estar ubicados en una plataforma móvil, como un avión o un globo. Los sensores remotos pueden estar basados en tierra, en aviones o en satélites.

- Técnicas de medición de vientos

- a) Liberación de globos

Un método convencional para determinar los perfiles de velocidad del viento a mayores alturas es mediante la liberación de un globo y el seguimiento de su trayectoria mediante un radar de precisión. Este seguimiento es usualmente ayudado por un transpondedor llevado como parte de la carga útil del globo. La señal de respuesta del transpondedor también puede contener información derivada de otros sensores incluidos en la carga útil, como temperatura y presión. El radar realiza un seguimiento en tres dimensiones, suministrando información de altura y velocidad, que es utilizada para determinar el perfil de velocidades.

Los globos meteorológicos son muy populares, útiles y extensamente utilizados. Sin embargo, desde el punto de vista de la aviación, poseen varios inconvenientes, a saber (Mahapatra, P., 1999):

- Este método es muy lento. Como el globo deriva por la atmósfera solamente por efecto de corriente de aire naturales y fuerzas de flotación, su ascenso es lento hasta su techo operacional, requiriendo un tiempo de una o dos horas para realizar la operación.
- Los perfiles de velocidad del viento se obtienen solamente a lo largo de la trayectoria de vuelo del globo, sobre la cual no hay control por parte del personal. Dependiendo de los vientos locales, el globo puede derivar grandes distancias de la vertical del punto de lanzamiento, y hay una gran incertidumbre en asegurar que el perfil se ha determinado sobre un área de interés pequeña, como un aeropuerto o una aerovía. Así y todo, los globos para estas aplicaciones presentan una paradoja: el globo ascenderá en forma vertical y proporcionará el perfil de velocidades de viento sobre la vertical del punto de lanzamiento solamente cuando la atmósfera esté en calma, es decir, cuando la cortadura del viento sea muy pequeña. Por otro lado, cuando las cortaduras son significativas y es de interés su determinación, el globo puede derivar y proveer un perfil muy alejado de la vertical.
- Cada lanzamiento de un globo es una operación discreta en el tiempo. Como un globo demora una hora o más en determinar un perfil, los lanzamientos están separados por períodos aún mayores. Los lanzamientos de rutina usualmente se realizan una o dos veces al día en un lugar dado. Pueden realizarse a intervalos menores para apoyo a la aviación, por ejemplo, desde aeropuertos, pero, aún así, las frecuencias de lanzamientos no satisfacen las necesidades de las operaciones de vuelo modernas.

#### b) Radares

Los sistemas electromagnéticos son un medio moderno para la determinación de perfiles de velocidad del viento. Éstos son, esencialmente, radares configurados y optimizados para recibir eco de capas de aire sobre su ubicación y procesar las señales para obtener la velocidad del viento en función de la altura.

Como los perfiles de velocidad del viento son requeridos bajo cualquier condición meteorológica, los sistemas electromagnéticos deben ser capaces de operar satisfactoriamente con ecos provenientes de capas atmosféricas incluso donde el aire es claro, exento de nubosidad. Estos ecos son principalmente causados por fluctuaciones



de pequeña escala en el índice refractivo atmosférico, que surge de inhomogeneidades o irregularidades en la temperatura local y en la concentración de vapor de agua.

Mientras que las redes de sensores para determinar perfiles pueden mejorar el tráfico aéreo y la eficiencia en ruta, ya que proporcionan perfiles en un área extensa, los sistemas individuales pueden ayudar mucho a las operaciones aéreas locales como, por ejemplo, en áreas terminales. De un solo sensor ubicado adecuadamente dentro del área del aeropuerto se puede obtener información muy útil sobre cortaduras del viento verticales y cambios en los vientos, para apoyo a las operaciones de aproximación, despegue y aterrizaje de aviones. En tal caso, estos sensores deben tener un alcance de solamente el orden de 4 a 6 km en altura. Éstos requieren menor potencia y pueden operar a mayor frecuencia que los sistemas troposféricos, presentan una configuración compacta y son transportables.

Los sistemas electromagnéticos pueden ser aún más simples, pequeños y baratos si la máxima altura de observación se reduce más. Los sistemas que miden hasta 2 ó 3 km de altura se denominan “perfiladores de capa límite”. Estas últimas alturas de cobertura son adecuadas para operaciones en áreas terminales. Como la capa límite terrestre posee estructuras de remolinos con grandes variaciones del índice de refracción debido a la mezcla de partículas fluidas a diversas temperaturas provenientes de la tierra, la reflectividad en aire claro de esta capa es relativamente alta, reduciendo mucho la potencia y sensibilidad requeridas por el perfilador. El costo de los perfiladores electromagnéticos para capa límite está en el orden de 40000 a 60000 dólares (Mahapatra, P., 1999). El costo aumenta con la altura que el sistema es capaz de resolver.

También es posible conformar una red de perfiladores electromagnéticos distribuidos en una cierta área de interés.

Además de las ventajas, los sistemas radar poseen algunas limitaciones importantes:

- La separación espacial de las posiciones de los haces. Para obtener buena exactitud en la determinación de las velocidades del viento en altura suele utilizarse una configuración de cinco haces: uno vertical rodeado de cuatro inclinados. A medida

que aumenta la altura, mayor es la separación entre los haces, que, entonces, miden el viento en puntos distantes entre sí.

- La necesidad de hacer hipótesis sobre la uniformidad de los campos de velocidades.
- La existencia de límites en la altura máxima y mínima de cobertura (esta última puede ser crítica en áreas terminales).
- La capacidad de proveer solamente perfiles en las capas atmosféricas situadas sobre la vertical de la instalación.
- La susceptibilidad de errores debidos a precipitaciones. Las actuaciones de estos sistemas se ven apreciablemente degradadas en condiciones de tormenta que incluyan lluvia y turbulencia. Sin embargo, los radares Doppler son capaces de operar bajo estas condiciones.

Estos perfiladores son particularmente útiles en zonas donde la cobertura del radar meteorológico no posee una calidad adecuada. Pero aun en zonas donde el radar meteorológico provee buena cobertura, los perfiladores electromagnéticos pueden suplementar eficientemente tales observaciones. Esto se debe a que los perfiladores están optimizados para la observación en aire claro y pueden observar hasta altitudes muy bajas.

c) Sistema de alerta de cortadura a baja altura (Low Level Wind Shear Alert System – LLWAS)

Este sistema fue desarrollado antes de que los radares de generación moderna estuviesen disponibles, como consecuencia del gran número de accidentes ocurrido por cortaduras del viento en la década de 1970.

El sistema está basado en una red de anemómetros. Cada anemómetro mide la dirección de la velocidad en un punto. Para detectar la existencia de una cortadura del viento sobre una línea y determinar su intensidad se utilizan como mínimo dos anemómetros, uno ubicado en cada extremo del segmento. Para obtener una información más fiable y detallada sobre tal segmento pueden instalarse más anemómetros. Para medir cortaduras del viento sobre un área, ésta debe estar circunscrita apropiadamente con un número de anemómetros. Cuanto más densa sea la cobertura, incluyendo anemómetros dentro del área, más detallada será la determinación del campo de viento. Para su uso en

aplicaciones aeronáuticas, esta red cubre los puntos más sensibles del área del aeropuerto para la determinación de cortadura a baja altura. En la versión original del LLWAS, 1980, la disposición consiste en un anemómetro ubicado cerca del centro del complejo de pistas y otros cinco más ubicados, en la medida de lo posible, cerca de las trayectorias de aproximación de cada pista. Cada sensor está situado sobre un mástil a una altura entre 4 y 20 m del suelo. Los datos son recibidos por un procesador central cada 10 s y promediados en un período de 2 min. Las lecturas instantáneas de cada anemómetro exterior son comparadas con las del anemómetro central y se emite un aviso de presencia de una cortadura si hay una diferencia mayor a 15 nudos, entre un sensor exterior y el central.

En principio, este sistema fue pensado como una solución transitoria hasta que los sistemas radar estuviesen operativos, sin embargo, su éxito hizo que fuesen incorporados como un elemento del Programa Integrado de Cortadura del Viento de 1987 (1987 Integrated Windshear Program Plan) de la US Federal Aviation Administration. El sistema es simple y económico.

La configuración original descrita posee la limitación de disponer de pocos sensores, con lo que está limitada el área de cobertura y los anemómetros exteriores solamente cubren una porción de la senda de planeo. Si los sensores se colocan muy espaciados entre sí puede perderse la detección de efectos de pequeña escala, como “microburst”. Esto se ha solucionado con mejores diseños de la red y de los programas de cálculo.

Este sistema también presenta algunos inconvenientes. El principal es que al estar los sensores próximos a tierra pueden detectar vientos en superficie que sean diferentes a los que existan sobre la trayectoria de vuelo durante el despegue y aterrizaje.

#### d) Detección de cortadura del viento mediante sistemas embarcados

Todos los sistemas hasta ahora descritos son sistemas basados en tierra, y la información se obtiene en algún sitio en tierra. Esta información debe transmitirse al piloto. Éste lograría autonomía si pudiese detectar estos fenómenos a bordo, minimizando la necesidad de apoyo de tierra y sistemas de comunicación. Este sistema poseería importantes ventajas. En primer lugar, el tiempo requerido para recoger,

procesar, interpretar y confirmar las observaciones, y las múltiples transmisiones de información (del sistema de toma de datos al centro de control de tráfico y de éste al piloto) serían eliminados. Lo que significaría una ganancia de tiempo precioso para el piloto. Otra ventaja reside en que un avión equipado podría tener un alto grado de protección en zonas no cubiertas por sistemas basados en tierra.

Un forma de detectar cortaduras a bordo es mediante la detección “in situ”. Las perturbaciones en la trayectoria y en la actitud del avión son detectadas por los sistemas inerciales, acelerómetros y giróscopos. El efecto de la cortadura del viento sobre las actuaciones de una aeronave puede determinarse a través del denominado factor  $F$ , que involucra, para la detección de cortaduras planas (cuando la variación del viento es en el plano vertical) a la aceleración de la componente horizontal del viento, a la componente vertical de la velocidad del viento y a la velocidad del avión. Este parámetro puede determinarse en vuelo a través de la observación de ciertos parámetros como la velocidad de vuelo, la velocidad vertical, el nivel de empuje y el ángulo de ataque. El avión puede declararse que ha entrado en una zona con cortaduras cuando se han medido factores  $F$  superiores a un cierto umbral. Así y todo, no es fácil esta detección. Las cortaduras del viento usualmente están acompañadas por turbulencia fuerte y ráfagas. Este “ruido” debe ser de alguna manera eliminado, lo que es posible pero introduciendo a su vez un retraso en la detección de las cortaduras.

Los sistemas embarcados de detección “in situ” poseen la desventaja de que el avión se entera de la cortadura únicamente cuando ya está dentro de ella. Está claro que sería preferible detectar las perturbaciones antes de que el avión se encuentre con ellas, para que el piloto pueda tomar las medidas preventivas apropiadas. En un estudio (Mahapatra, P., 1999) se menciona que todas las clases de aviones comerciales de transporte pueden escapar del peor caso de “microburst” situado en su senda de vuelo si poseen 20 s de tiempo de alerta o están a una distancia de, al menos, 1,5 km. A partir de estos conceptos surge el otro sistema de detección a bordo: la detección remota, que utiliza instrumentos que miran hacia delante, como el radar Doppler y los sensores infrarrojo.

e) Detección por satélites

En el contexto de la detección directa de fenómenos de pequeña escala en aeropuertos, los sistemas basados en satélites se muestran inadecuados, aunque son útiles para la detección de fenómenos convectivos de mayor escala. Pueden detectar sistemas tormentosos que generen fuertes cortaduras del viento o turbulencia, pero los detalles no son usualmente suficientes por sí solos para advertencia de riesgo a la aviación. Pueden detectar frentes de ráfagas, pero no las discontinuidades del viento horizontal que caracterizan estos frentes. Estos sistemas permiten inferir la localización de campos de viento adversos en un frente de ráfagas a partir de las imágenes que brindan.

La actualización de la información usualmente se realiza cada 30 min o 1 h, que es una cadencia muy lenta. Con actualizaciones más rápidas es posible determinar los vientos que mueven las nubes. La detección de nubes a diferentes alturas permite determinar el perfil de vientos en altura. Estos perfiles pueden no ser tan precisos como los obtenidos de sensores basados en tierra, pero permiten disponer de ellos en grandes áreas. También pueden determinarse los movimientos verticales de los techos de nubes lo que permite conocer la severidad de una tormenta.

También es posible determinar perfiles de temperatura y concentración de vapor de agua, que, como en el caso anterior, tampoco son tan precisos como los obtenidos mediante sensores basados en tierra, pero, sin embargo, proporcionan datos en espacios muy amplios.

### 1.3.2. Medición de parámetros atmosféricos

Una de las posibles aplicaciones del sistema estudiado es la determinación de la variación con la altura de diversos parámetros atmosféricos, como son la temperatura, la presión y la humedad.

La medición de temperaturas en altura puede ser útil para determinar si hay presencia de inversión de temperatura, que es un fenómeno particularmente interesante del flujo en la capa límite atmosférica. Habitualmente, la temperatura en la capa límite disminuye con la altura; sin embargo, en determinadas condiciones la temperatura aumenta considerablemente con la altura a partir de una altitud determinada; este punto se denomina altura de inversión. El perfil de variación de la velocidad horizontal del

viento en superficie es logarítmico y, en esta zona, la dirección del viento llega a formar ángulos de  $45^\circ$  con las isobaras. La humedad decrece rápidamente con la altura, por lo que puede utilizarse la temperatura en altura deducida de las medidas de radiosondeos para definir la altura de la capa de mezcla. La existencia de contaminantes atrapados en una capa de inversión es un fenómeno típico de regiones de alta presión, debido a la imposibilidad de los remolinos que los desplazan para superar la capa estable. Este fenómeno, en principio, puntual, ha llevado al estudio de las diferentes situaciones de estabilidad atmosférica en la capa límite en relación con el perfil de temperatura. Como marco de referencia se define el perfil de temperatura adiabático como aquél en el que la temperatura decrece con la altura de modo que la densidad del aire varía proporcionalmente a la presión en cada nivel: su valor aproximado es de  $1^\circ\text{C}/102\text{ m}$ . Si la temperatura del aire decrece más rápidamente con la altura que en el caso del perfil adiabático, se habla de perfil superadiabático. El conocimiento del gradiente de temperatura es suficiente para determinar la estabilidad estática, salvo en los casos en que el perfil es adiabático a una altura media de la capa límite; en este caso, si el perfil próximo al suelo es superadiabático, se tendrá una situación inestable y, en caso contrario, la situación será de estabilidad. De ahí que el gradiente vertical de temperatura se considere fundamental para la determinación de la clase de estabilidad.

En particular, la temperatura ambiente local es un factor importante para la determinación de las condiciones que favorezcan la formación de hielo en las aeronaves.

Un radiosondeo permite conocer la variación de parámetros atmosféricos con la altura, por ejemplo, por medio de un globo meteorológico que transporte un termómetro y transmita las mediciones por radio se puede construir el perfil de temperatura con la altura.

- Sistemas radioaústicos

Los radares Doppler y perfiladores no poseen la capacidad de medir parámetros atmosféricos como temperatura y presión, pues la reflectividad y los campos de velocidad del viento están poco e indirectamente influenciados por estos parámetros.

El instrumento denominado “Sistema de Sondeo Radioacústico” (Radio Acoustic Sounding System – RASS) es un radar perfilador de vientos que puede medir perfiles de temperatura (variación de la temperatura con la altura) en la baja troposfera. El RASS es una combinación de un radar perfilador y de un irradiador acústico que envía haces potentes en las mismas zonas de la atmósfera donde lo hace el radar perfilador. Las ondas sonoras provocan cambios cíclicos en la densidad del aire, formando una trama que dispersa la radiación electromagnética. El irradiador acústico barre un intervalo de frecuencias, y la frecuencia acústica correspondiente al máximo eco electromagnético que retorna de cada ubicación a lo largo del haz es utilizada para deducir el perfil de temperatura.

Los equipos de más bajas frecuencias pueden determinar perfiles de temperatura hasta alturas de 10 km.

Las condiciones peligrosas para la formación de hielo en los aviones se encuentran usualmente a temperaturas entre  $-10$  y  $0$  °C. Pero para determinar las condiciones potenciales de formación de hielo en una región de la atmósfera no basta con conocer la temperatura, también debe conocerse la distribución de líquido subenfriado, que depende de la temperatura y de la concentración de agua.

### 1.3.3. Medición de emisiones

La contaminación generada por el transporte aéreo es un problema de gran interés en zonas de gran tráfico aéreo. Esto se observa sin duda en los documentos de la Unión Europea, donde se manifiesta la preocupación por la contaminación generada por las aeronaves, su contribución al efecto invernadero y al empobrecimiento de la capa de ozono, etc. La Unión Europea promueve estudios para realizar la integración del medio ambiente en el ámbito del transporte aéreo. La preocupación está producida por el crecimiento sostenido del transporte aéreo y el objetivo de sus acciones es tratar de compensar los efectos en el medio ambiente. A escala mundial, el transporte aéreo contribuye al efecto invernadero y al empobrecimiento de la capa de ozono. A nivel regional, contribuye a la acidificación, a la formación de ozono y a la eutrofización. Localmente, en las cercanías de los aeropuertos, el transporte aéreo contribuye a la contaminación acústica y atmosférica. La estrategia de la Unión Europea es mejorar las

normas técnicas medioambientales relativas al ruido y a las emisiones de gas. Un ejemplo de medida práctica es la mejora de los sistemas de gestión del tráfico aéreo, lo que permitiría conseguir importantes ahorros de combustible. A nivel local, las preocupaciones en la vecindad inmediata de los aeropuertos se centran en los efectos potenciales sobre la salud y el medio ambiente del ruido y la emisión de contaminantes atmosféricos tales como los óxidos de nitrógeno, los compuestos orgánicos volátiles y las partículas. Las emisiones gaseosas de los motores de las aeronaves tienen un impacto negativo a los niveles local, regional y sobre la atmósfera planetaria. El Volumen II del Anexo 16 de la Convención sobre Aviación Civil Internacional, OACI, establece niveles de certificación internacionales orientados a cuatro categorías de emisiones de los motores de los aviones: humos, hidrocarburos sin quemar (HC), monóxido de carbono (CO) y óxidos de nitrógeno (NOx). Además, la OACI está encargada de lograr la reducción del impacto de las emisiones de gases de efecto invernadero de las aeronaves. Actualmente, las condiciones de referencia para la certificación de las emisiones de los motores de los aviones son las del ciclo de aterrizaje y despegue.

Muchos aeropuertos poseen estaciones de supervisión permanentes que proveen información continua de la calidad del aire. Los contaminantes emitidos por varias fuentes se mezclan en el aire, por lo que las estaciones de supervisión solamente pueden dar el total de cada contaminante presente en el aire. Por esto, las concentraciones medidas no solamente contienen aquellas emisiones causadas por el tráfico aéreo, sino también las generadas por el tráfico terrestre y por otras fuentes no relacionadas que también afectan a la calidad del aire en el aeropuerto. No obstante lo anterior, un gran número de estudios muestran que las concentraciones de contaminantes presentes en los aeropuertos son considerablemente menores a aquellas de las áreas circundantes, aun para grandes aeropuertos internacionales.

#### 1.3.4. Sistemas integrados

La aviación es una actividad que se desarrolla sobre un área extensa que no puede ser cubierta por un solo tipo de fuente de información que provea todos los datos necesarios. Los datos que requiere la actividad aeronáutica, referentes a vientos, meteorología, parámetros atmosféricos, etc., provienen de un número de fuentes de



diferentes características y distribución espacial. El análisis y la combinación de toda esta información no es simple, debido a la diferencia en los tipos de información. En primer lugar, hay una cantidad de tipos de sensores diferentes con diferentes coberturas, tipos de parámetros observados, intervalos de actualización de datos y formatos de datos. Por otro lado, se produce una superposición de la cobertura en algunas zonas por instrumentos similares, mientras que en otras puede no haber ninguna. Además, los instrumentos trabajan sin una organización centralizada que coordine su operación. Finalmente, y no por ello menos importante, hay una gran cantidad de información valiosa proveniente de fuentes que no son instrumentos, como son los informes de los pilotos, las impresiones e interpretaciones de los meteorólogos, y los modelos computacionales. Un requerimiento de las operaciones aeronáuticas es que sea posible predecir la aparición de fenómenos peligrosos. Esto puede llevarse a cabo por medio de modelos computacionales, por extrapolación de parámetros y fenómenos observados, o por medición y reconocimiento de fenómenos preliminares.

Debido a las diferentes capacidades de los sensores existentes se requeriría una gran cantidad de diferentes sensores situados en un área terminal para realizar la vigilancia de todos los fenómenos meteorológicos que pueden afectar a la aviación. El resultado es que hay multiplicidad y paralelismo en generación y presentación de información, si bien no todos los tipos de sensores pueden estar presentes en un aeropuerto dado.

De lo expuesto, se deduce que hay multiplicidad y redundancia en disponibilidad de información, que tiene sus desventajas, a saber:

- La exhibición de muchos dispositivos que muestran información de sensores y sistemas meteorológicos independientes requiere espacio frente al personal de control y pilotos.
- Tanta información puede distraer a los controladores de la atención al control del tráfico aéreo.
- La existencia de dos o más datos referentes a un mismo fenómeno provenientes de diferentes fuentes genera un conflicto en el personal, que debe resolverlo.
- El personal debe realizar una integración mental de toda la información del área terminal y alrededores.

El efecto de todos estos factores es recargar de trabajo al personal de control de tráfico e interferir con su función principal, además de generar posibles demoras en los procesos de decisión de temas relacionados con la meteorología.

El “Sistema Meteorológico de Terminal Integrado” (Integrated Terminal Weather System, ITWS) es un sistema integrado totalmente automatizado, que procesa y transmite datos meteorológicos. La exhibición de la información para los controladores es alfanumérica y la comunicación a los pilotos por vía oral. Presenta en una pantalla información meteorológica indicando las zonas con peligro. Esta presentación posee la importante ventaja de que no requiere una interpretación meteorológica, por lo que el sistema puede ser usado por personal entrenado que no sean necesariamente meteorólogos. Combina la presentación de datos actuales con eventuales pronósticos basados en el procesamiento de datos de diferentes fuentes.

#### 1.3.5. Características del pararrotor

De lo expuesto anteriormente se deduce que son necesarias varias fuentes de información para la determinación apropiada de los fenómenos y parámetros mencionados, debido a las limitaciones de cada tipo de sensor y a los diferentes fenómenos a medir. De aquí surge, a su vez, la necesidad de integrar los sistemas y automatizarlos.

El pararrotor es un vehículo que posee características diferentes a las de otros medios de transporte de los sensores mencionados, por lo que podría incorporarse a un sistema integrado. Por ejemplo, en comparación con los globos, puede diseñarse para que posea velocidades de caída mayores y menor deriva con el viento horizontal; podría lanzarse más rápidamente en el momento en que se den condiciones que hagan probable la presencia de algún fenómeno. También puede lanzarse en regiones fuera de la zona de cobertura de otros sistemas.

El objeto de este trabajo es estudiar las características de un cierto modelo de pararrotor, sus actuaciones, cómo influyen en esas actuaciones los diferentes parámetros del sistema, y, de esta manera, conocer qué posibles aportaciones podría realizar a un sistema meteorológico integrado, como el mencionado anteriormente.

#### **1.4. Antecedentes en el estudio del pararrotor**

Se han realizado numerosos estudios tendientes a hallar métodos aerodinámicos para frenar y controlar la caída de cuerpos en la atmósfera, quizá el más conocido y estudiado es el paracaídas. No obstante, esta solución presenta algunas limitaciones que hacen necesario estudiar posibles alternativas. Algunos métodos alternativos consisten en la utilización de aletas o asimetrías para generar rotación, y a su vez sustentación, y de esta forma incrementar la resistencia aerodinámica de los cuerpos, y a veces también la estabilidad del movimiento. Algunas de estas investigaciones se han orientado al guiado de proyectiles y a la recuperación de vehículos de re-entrada en la atmósfera. Para mediciones de parámetros atmosféricos también se utilizan sensores transportados en globos. Estas plataformas no son costosas de operar y permiten transportar gran carga útil a gran altura.

Entre los estudios realizados para frenar y controlar la caída de cuerpos en la atmósfera se encuentran los que se mencionan a continuación.

Shpund y Levin han enfocado su estudio a las propiedades aerodinámicas de paracaídas giratorios. En la referencia (Levin, Shpund, 1995) explican que el propósito de sus estudios es la aplicación a municiones que deben realizar maniobras complicadas mientras descienden en busca de blancos. El paracaídas se utiliza como mecanismo de control del vuelo. El objetivo es poder controlar el régimen de descenso, la velocidad de giro y la posición espacial instantánea de la carga. El estudio de la referencia (Levin, Shpund, 1995) está orientado a entender los efectos de las variables geométricas del paracaídas (relación entre el ancho y el largo de las bandas del paracaídas –relación de aspecto, porosidad geométrica–, y relación entre la longitud de las bandas y la longitud de las cuerdas de suspensión) en la estabilidad dinámica del sistema. Estudian paracaídas tipo “cruz”. Muestran que los resultados presentan movimientos estables e inestables, dependiendo de las variables mencionadas; a mayor relación de aspecto se alcanza mayor estabilidad. La relación entre la longitud de las bandas y la longitud de las cuerdas de suspensión resulta en diferentes efectos sobre la estabilidad, dependiendo de la velocidad de rotación propia: a bajas velocidades de rotación propia la estabilidad aumenta con el aumento de la relación mencionada, mientras que a altas velocidades de

rotación propia sucede lo opuesto. Obtienen una configuración estable donde el sistema presenta movimiento de precesión, describiendo un movimiento cónico estable y donde la frecuencia dominante es el giro sobre el propio eje. Destacan la presencia de tres frecuencias dominantes: las dos más bajas relacionadas con las propiedades de inercia y aerodinámicas de la carga y del paracaídas; la tercera relacionada con la velocidad de giro propia, y depende estrechamente de las variables geométricas (las dos primeras varían poco con los cambios en la configuración). Exponen también las diferencias que existen entre los ensayos en túnel aerodinámico, donde el movimiento del modelo está restringido, y el vuelo libre. Afirman que, sin embargo, las principales propiedades aerodinámicas, estáticas y dinámicas, y las propiedades de inercia se manifiestan, en ambos casos, de forma cualitativamente igual aunque no cuantitativamente y que los resultados de los ensayos en túnel aerodinámico podrían ser empleados para el diseño y análisis de las configuraciones reales.

En la referencia (Shpund, Levin, 1997), los mismos autores investigan la interferencia aerodinámica entre la carga útil y el paracaídas, para sistemas giratorios y no giratorios.

En la referencia (Levin, Shpund, 1997), los autores estudian el efecto de la geometría del paracaídas. Mencionan el aumento de la resistencia aerodinámica que se genera en los paracaídas por el movimiento de rotación y la intención de que el paracaídas sirva como medio de control de la trayectoria del sistema paracaídas más carga.

Karlsen, L., Borgström, D. y Paulsson, L., 1991, describen la aerodinámica de un cuerpo giratorio provisto de aletas, para ser utilizado como submunición de artillería. Comentan las desventajas de un paracaídas rotatorio respecto de un sistema giratorio con aletas rígidas: las dificultades para desplegar el paracaídas apropiadamente, los amplios movimientos de precesión de los sistemas con paracaídas, la funcionalidad de un paracaídas para decelerar una carga, etc. Por otra parte, la mayor velocidad de descenso del sistema de alas rígidas es beneficioso para esta aplicación. También mencionan la mayor fiabilidad de los ensayos en túnel aerodinámico de un sistema con aletas rígidas respecto de uno con superficies flexibles. Señalan que la sensibilidad a los vientos de un sistema rígido es mucho menor que la de los paracaídas. Indican que la relación entre la velocidad de caída, la velocidad de giro y el ángulo de ataque es muy importante para la orientación del cuerpo en el espacio. También que la relación entre el

momento de inercia respecto al eje principal de rotación,  $C$ , y los momentos de inercia respecto a los otros dos ejes del sistema de referencia fijo al cuerpo,  $A$  y  $B$ , debe ser alrededor de 1,1 para obtener un movimiento rápido en la orientación del cuerpo y un amortiguamiento suficiente en los movimientos de precesión, si bien no presentan resultados experimentales ni modelos matemáticos como los resultados obtenidos y los modelos desarrollados en esta Tesis

Pepper Jr., 1986, presenta un diseño de paracaídas giratorio de altas prestaciones, aplicable a la recuperación de vehículos en re-entrada a la atmósfera. Destaca la ventaja del vuelo en autorrotación, en particular, con referencia a las mayores estabilidad giroscópica y resistencia aerodinámica que se obtienen.

También Doherr y Schilling, 1992, han estudiado sistemas de paracaídas giratorios, para decelerar municiones. En la referencia mencionada realizan una simulación numérica de la trayectoria y la dinámica del sistema de paracaídas rotatorio. Comentan que los paracaídas rotatorios son muy sensibles a las perturbaciones atmosféricas.

Asimismo el principio de autorrotación aparece también en la naturaleza, en la reproducción de ciertas plantas. Algunas plantas forman frutos en forma de un ala que contiene a la semilla. Este tipo de semilla se denomina “sámara”. Al desprenderse el fruto al alcanzar la maduración, cae girando y así reduce la velocidad de caída de la semilla, aumentando la distancia que ésta puede ser transportada por efecto del viento. Rosen y Seter, 1991, 1992, han estudiado la aerodinámica de las sámaras. En el trabajo publicado en el año 1991 presentan un modelo teórico para la autorrotación vertical de un ala sámara basado en las teorías del elemento de pala y cantidad de movimiento. Presentan una comparación con resultados experimentales realizados sobre una sámara artificial y una natural.

Su modelo se diferencia al desarrollado en el Capítulo 2 de esta Tesis en aspectos como que, en lugar de aplicar la teoría del elemento de pala (considerar una sección transversal del ala y determinar las fuerzas por unidad de longitud en el elemento), en esta Tesis se ha trabajado con fuerzas resultantes concentradas en un punto. Mediante la aplicación de la teoría de cantidad de movimiento determinan la velocidad inducida. Destacan las diferencias entre las sámaras y las alas rotantes de los helicópteros y otras

alas rotantes: mayores ángulos de conicidad y de ataque en las sámaras, números de Reynolds mucho menores y mayor rugosidad de la superficie. Indican que las sámaras naturales trabajan a ángulos de ataque mayores al de pérdida. Debido a los ángulos grandes de conicidad, que son del orden de 20 grados, realizan una corrección para tener en cuenta el flujo en la dirección de la envergadura tomando, en lugar de una sección perpendicular al eje del ala, una oblicua.

En los experimentos han determinado la velocidad de caída, la velocidad angular de rotación y el ángulo de conicidad sobre una sámara artificial (los datos que presentan sobre una sámara natural provienen de un trabajo de Norberg, 1973). Estiman la incertidumbre en la determinación de la velocidad de caída en el 5 %, en la determinación del ángulo de conicidad o nutación en el 25 % y en la velocidad de rotación en el 15 %. Se ve que estos dos últimos valores son de importancia.

Por lo recién expuesto, no han realizado hipótesis de ángulos aerodinámicos y de nutación pequeños (este es otro aspecto en que se diferencia su modelo del desarrollado en el Capítulo 2 de esta Tesis). Los datos sobre el  $c_D$  y el  $c_L$  de la sámara los han tomado de la literatura para alas de insectos y aves, pues indican lo complicada que es su determinación experimental, e indican ésta como causa de las desviaciones entre los experimentos y los modelos teóricos.

En el trabajo publicado en el año 1992, Seter y Rosen presentan un modelo numérico para investigar la estabilidad de la autorrotación vertical de la sámara, obtenido a partir del método de pequeñas perturbaciones aplicado a las ecuaciones del movimiento de la sámara. Estudian la influencia de diferentes parámetros en la estabilidad. Comparan los resultados del modelo con resultados experimentales cualitativos realizados sobre sámaras artificiales diversas.

El principio de la sámara, colocando una sola ala a un cuerpo, fue estudiado para aplicaciones en caída de municiones por Crimi, 1988, mediante una simulación numérica. Dice que su dispositivo permite alcanzar buena efectividad en la caída de la submunición debido al régimen de descenso constante y al movimiento de rotación periódico. Menciona que el cuerpo se mueve con un movimiento donde el ángulo entre el eje vertical del sistema inercial y el eje de rotación propia del cuerpo es constante, y

la velocidad de precesión es constante e igual a la velocidad de rotación del cuerpo. El análisis involucra a 11 variables para describir el movimiento del cuerpo en régimen estacionario. Realiza una comparación con resultados experimentales para varias configuraciones diferentes; compara el ángulo de conicidad, la velocidad propia de giro y la velocidad de caída del cuerpo.

Ha de destacarse que en los estudios mencionados no se ofrecen datos acerca del comportamiento aerodinámico del tipo de alas giratorias como las que se estudian en el presente trabajo, datos que hubieran sido de gran ayuda en el desarrollo de esta Tesis.

### **1.5. Autorrotación**

La autorrotación es la rotación continua de un cuerpo inmerso en un flujo axial sin otras fuentes externas de energía más que la propia acción de la corriente de fluido. Bajo esta definición, los molinos de viento, turbinas hidráulicas, anemómetros de cazoletas, frutos de especies vegetales tipo sámara, algunos tipos de extractores de aire, etc, funcionan bajo el principio de autorrotación. Todos estos dispositivos giran puramente por efecto de fuerzas fluidodinámicas, sin fuentes externas de energía; están conformados geoméricamente de tal manera que, cuando se sitúan en el seno de una corriente de fluido, se crea un par que inicia la rotación cuando se libera el cuerpo permitiéndole girar libremente. En algunos casos, se requiere un impulso que inicia el movimiento. En los ejemplos mencionados se ve también que el eje de rotación del cuerpo puede ser paralelo o perpendicular a la dirección de la corriente; esto genera dos tipos de análisis diferentes (Lugt, H., 1983). Generalmente, los que poseen su eje de rotación perpendicular a la dirección de la corriente presentan movimientos periódicos, mientras que los de eje paralelo suelen presentar movimientos constantes.

También puede ocurrir que un cuerpo se mueva libremente en un fluido, generándose un movimiento de autorrotación que no sea perpendicular ni paralelo, sino que se mueva con seis grados de libertad, incluyendo efectos giroscópicos.

Aunque el régimen de autorrotación es ampliamente conocido (a pesar de lo cual todavía es objeto de investigación) por su aplicación al caso de los helicópteros, el problema del pararrotor estudiado aquí se diferencia fundamentalmente en el

alargamiento de las palas, siendo en el presente caso de alargamiento pequeño, por lo que no son aplicables los conceptos desarrollados en el caso de helicópteros. Por razones de almacenamiento para su transporte, las palas del pararrotor deben ir plegadas sobre el cuerpo de la sonda, que suele ser cilíndrico, y cuya altura está limitada por la estabilidad giroscópica.

En el caso del pararrotor el mecanismo de autorrotación es el siguiente: si el pararrotor está inicialmente en reposo, al incidir una corriente sobre las palas se genera una fuerza aerodinámica que posee una componente tangencial que hace girar y acelerar el rotor. En un determinado momento, cuando se alcanza un régimen estacionario, la fuerza tangencial es cero y la resultante de las fuerzas aerodinámicas tiene la dirección del flujo incidente (ver Fig. 2.2). Las palas deben tener un ángulo de paso negativo, como se verá en el Capítulo 2.



## 2. ANÁLISIS TEÓRICO

### 2.1. Introducción

Se recurre al desarrollo de modelos teóricos a fin de obtener una herramienta que permita predecir el comportamiento del modelo físico con un ajuste razonable con los resultados experimentales. Se pretende determinar las fuerzas que actúan sobre las palas. En primer lugar, se estudia el patrón del flujo sobre las palas, intentando describir el flujo de la forma más precisa posible, dado que las palas del modelo son alas de bajo alargamiento (la envergadura y la cuerda son del mismo orden de magnitud) y no se conoce bien su comportamiento como alas giratorias. Este tipo de alas, también utilizado en misiles, es en varios aspectos diferente a las de los aviones de transporte, que poseen alargamientos mayores. Estas últimas alas poseen un perfil cuidadosamente diseñado, con el borde de ataque redondeado, exhibiendo un flujo que, sobre un amplio rango de ángulos de incidencia y velocidades de vuelo, permanece adherido casi en la totalidad de la superficie del ala.

Las alas de gran alargamiento experimentan una fuerza de sustentación que, para ángulos de ataque pequeños, depende linealmente con el ángulo de ataque.

Un caso muy diferente es el de las alas de bajo alargamiento como las que se consideran en este estudio. En el caso de un ala corta de forma en planta rectangular el campo fluidodinámico está caracterizado por el hecho de que el flujo se desprende de los bordes marginales del ala, formando un torbellino. Este campo fluidodinámico provoca que la fuerza de sustentación no dependa linealmente con el ángulo de ataque.

Cuando un ala rectangular de bajo alargamiento es una placa plana delgada, con borde de ataque afilado (Stahl, W. H., 1979), se obtiene una configuración del flujo donde, a un cierto ángulo de ataque, en la zona central del ala puede producirse un desprendimiento en el borde de ataque y posterior adherencia del flujo corriente abajo, con la formación de una burbuja; en las puntas de ala, el flujo proveniente del intradós se desprende al pasar hacia el extradós, formando un torbellino, cuyo núcleo se sitúa sobre el ala. Este torbellino interfiere con el flujo descrito anteriormente.

Además, para el cuerpo en estudio, se agrega la complejidad de que el cuerpo gira. Como se desprende de la visualización del flujo realizada, existen flujos tridimensionales y desprendimientos en las puntas de las palas. Además, las alas son placas planas delgadas, con los bordes afilados, lo que genera desprendimientos del flujo a pequeños ángulos de ataque.

## **2.2. Formulación general del problema**

Como ya ha sido descrito, el sistema es un cuerpo giratorio, compuesto por un cilindro y dos alas rectangulares, de bajo alargamiento. Las fuerzas que impulsan al sistema a girar las generan las palas. El caso planteado es el de autorrotación. Esto significa que el rotor gira libremente, sin entregar ni recibir energía en el eje. Se analiza la situación estacionaria, es decir, se deja al modelo girar libremente, para una determinada velocidad de la corriente y ángulo de paso, hasta que se alcance un régimen en el cual la velocidad de giro permanece constante. En esa situación, es nulo el momento alrededor del eje de giro (y, por tanto, también lo es la fuerza tangencial resultante). En consecuencia, la fuerza total resultante debe ser paralela al eje de rotación y a la velocidad de la corriente libre.

Es un procedimiento usual establecer un sistema de referencia fijo al modelo, con el origen en el mismo modelo. Estos ejes se conocen como “ejes cuerpo”. El eje Z del sistema de referencia inercial se considera alineado con la vertical. En este caso, se alinea con el eje de simetría del modelo, y se corresponde con la dirección de caída.

Como sobre cualquier otro cuerpo inmerso en un fluido en movimiento, se desarrolla una fuerza resultante sobre el cuerpo, que se trata de modelizar aquí empleado las herramientas más simples que permitan predecir el comportamiento del cuerpo de manera satisfactoria.

## **2.3. Hipótesis de partida**

El modelo teórico se ha desarrollado basado en aspectos de la teoría de cantidad de movimiento y en el análisis de las fuerzas generadas sobre el cuerpo.

La teoría de cantidad de movimiento permite analizar el vuelo axial de rotores. Se basa en las leyes de conservación de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. Básicamente, se trata de idealizar al rotor como un disco actuador de espesor infinitesimal a través del cual se produce un salto de presiones, origen de la fuerza de empuje del rotor. Es una teoría simple que permite obtener aproximaciones aceptables sobre la potencia necesaria para generar un determinado empuje y el valor medio de la velocidad inducida en el rotor, entre otros. La velocidad inducida se considera constante en el plano del rotor. La teoría expresa los resultados en función de la velocidad inducida y de la velocidad de caída del rotor. Las hipótesis de esta teoría son: flujo unidimensional, cuasi-estacionario, incompresible, no viscoso, no existe rotación de la estela, no actúan fuerzas externas sobre el fluido aguas arriba o aguas abajo del rotor. De este modelo se obtiene la expresión bien conocida (Cuerva, A., et al):

$$T = -2\rho S_D v_i (V_v + v_i) \quad (2.1)$$

donde  $T$  es la tracción, (resistencia aerodinámica del modelo en la dirección de la corriente),  $\rho$  la densidad del aire,  $S_D$  el área del disco,  $v_i$  la velocidad inducida y  $V_v$  la velocidad de la corriente libre.

## 2.4. Fuerzas aerodinámicas

Para relacionar las características geométricas de las palas con las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre ellas no se utiliza la teoría del elemento de pala (ya que el alargamiento es pequeño) sino que se analizan las fuerzas resultantes sobre cada pala, que se suponen concentradas en un punto.

La nomenclatura empleada y la orientación de las fuerzas que aparecen en el problema se muestran en el esquema de la Fig. 2.1.

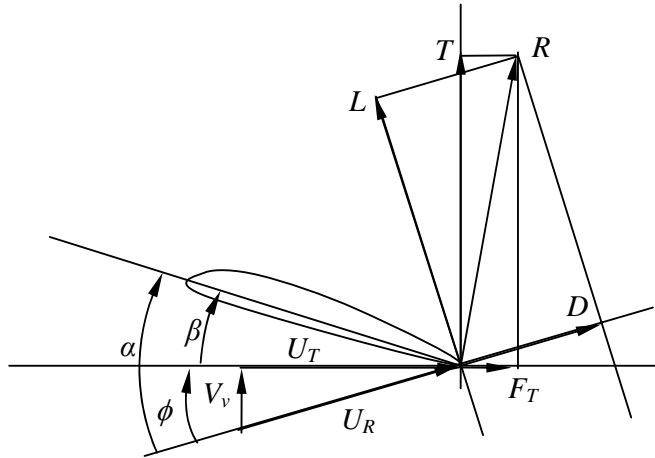


Fig. 2.1. Fuerzas y velocidades relativas a la sección del ala de referencia.

Se ha respetado la convención de signos para ángulos, velocidades y fuerzas, usualmente utilizada en análisis de rotores de helicópteros.

La sustentación de las palas,  $L$ , es:

$$L = \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_p c_{L\alpha} \alpha \quad (2.2)$$

donde  $L$  es la sustentación,  $S_p$  el área total de las dos palas,  $c_{L\alpha}$  la pendiente de la curva de sustentación del ala y  $\alpha$  el ángulo de ataque.

La resistencia aerodinámica,  $D$ , se define como:

$$D = \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_p c_D \quad (2.3)$$

donde  $c_D$  es el coeficiente de resistencia aerodinámica de la pala.

La tracción se obtiene, por tanto, de la expresión:

$$T = L \cos \phi + D \sin \phi \quad (2.4)$$

donde  $\phi$  es el ángulo que forma la velocidad del aire relativa a la pala con el plano del rotor (ángulo de incidencia del flujo).

La fuerza tangencial,  $F_T$ , es:

$$F_T = -L \sin \phi + D \cos \phi \quad (2.5)$$

El ángulo de incidencia del flujo se relaciona con las velocidades de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\tan \phi = -\frac{V_v + v_i}{\Omega r} \quad (2.6a)$$

$$\sin \phi = -\frac{V_v + v_i}{U_R} \quad (2.6b)$$

$$\cos \phi = \frac{\Omega r}{U_R} \quad (2.6c)$$

donde  $\Omega$  es la velocidad angular de rotación del modelo,  $r$  el radio de la sección de referencia, distancia al eje del centro de presiones de la pala y  $U_R$  la velocidad de la corriente relativa a la pala.

Suponiendo que los ángulos son pequeños, se obtiene:

$$\phi \approx -\frac{V_v + v_i}{\Omega r} \quad (2.7a)$$

$$\phi \approx -\frac{V_v + v_i}{U_R} \quad (2.7b)$$

$$\frac{\Omega r}{U_R} \approx 1 \quad (2.7c)$$

Bajo la hipótesis anterior, la tracción será aproximadamente igual a la sustentación:

$$T \approx L = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 S_P c_{L\alpha} \alpha \quad (2.8)$$

En autorrotación hay equilibrio de momentos; la resultante de las fuerzas aerodinámicas coincide con la tracción en dirección y magnitud, como se ve en la Fig. 2.2.

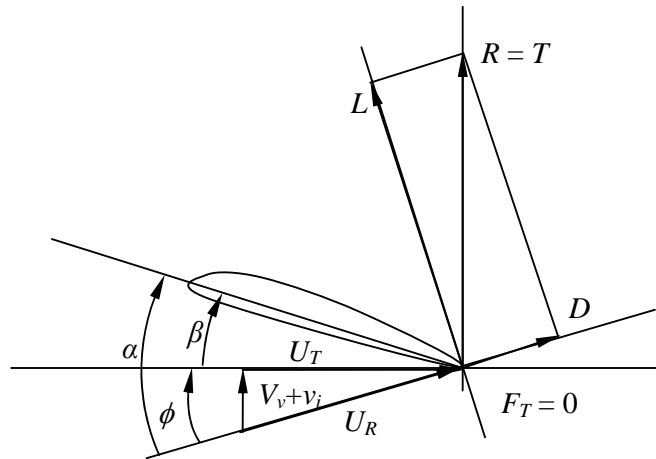


Fig. 2.2. Fuerzas y velocidades relativas a la pala en autorrotación.

El equilibrio de momentos respecto al eje de giro se obtiene de (2.5) haciendo  $F_T = 0$ , es decir,

$$T\phi = D \quad (2.9)$$

A su vez, el ángulo de ataque es:

$$\alpha = \phi + \beta \quad (2.10)$$

donde  $\beta$  es el ángulo de paso de las palas.

De (2.9) y (2.10) se obtiene:

$$\phi^2 + \beta\phi - \frac{c_D}{c_{L\alpha}} = 0 \quad (2.11)$$

Entonces, la tracción es:

$$T = \frac{1}{2} \rho S c_{L\alpha} (\Omega r)^2 (\phi + \beta) \quad (2.12)$$

de donde puede despejarse la velocidad de giro:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2T}{\rho S_P c_{L\alpha} r^2 (\phi + \beta)}} \quad (2.13)$$

## 2.5. Resumen de las ecuaciones

En resumen, se han obtenido las siguientes ecuaciones:

$$\phi = -\frac{V_v + v_i}{\Omega r} = -\frac{V_v + v_i}{U_T} \quad (2.7a)$$

$$T\phi = D \quad (2.9)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho S_P c_{L\alpha} (\Omega r)^2 (\phi + \beta) \quad (2.12)$$

donde  $\Omega r = U_T$ , y  $U_T$  es la velocidad tangencial.

## 2.6. Parámetros adimensionales

Para independizarse de las dimensiones y valores absolutos de los parámetros que describen el comportamiento del modelo, y así generalizar el análisis, se adimensionalizan las ecuaciones. Para ello, en primer lugar, se define el parámetro:

$$k = -\frac{V_v}{U_T} \quad (2.14)$$

que representa la relación entre la velocidad de caída y la velocidad tangencial de la pala.

Se utiliza como condición de referencia el vuelo a punto fijo, es decir, cuando la velocidad de descenso es nula:

$$V_v = 0 \quad (2.15)$$

Los parámetros referidos a esta condición se escriben con el subíndice “0”. Se define la velocidad inducida en vuelo a punto fijo a partir de la relación (2.1) proporcionada por la ecuación de la teoría de cantidad de movimiento:

$$T = 2\rho S_D v_{i0}^2 \quad (2.16)$$

de donde se deduce que:

$$v_{i0} = \sqrt{\frac{T}{2\rho S_D}} \quad (2.17)$$

De las ecuaciones (2.1), (2.7) y (2.16), se obtiene:

$$v_{i0}^2 = \phi U_T v_i \quad (2.18)$$

Las velocidades se adimensionalizan con la velocidad inducida en vuelo a punto fijo,  $v_{i0}$ , y se las denota con una raya sobre el símbolo:

$$\overline{V}_v = \frac{V_v}{v_{i0}} \quad (2.19)$$

$$\overline{U}_T = \frac{U_T}{v_{i0}} \quad (2.20)$$



$$\overline{v_i} = \frac{v_i}{v_{i0}} \quad (2.21)$$

## 2.7. Ecuaciones en forma adimensional

Con ayuda de los parámetros y variables adimensionales introducidos puede reducirse la complejidad de la formulación, como se muestra a continuación. El objetivo es expresar las relaciones que aparecen en función de una única variable de forma que se puedan analizar fácilmente los resultados del modelo. Dicha variable es el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ . Siguiendo esta filosofía, la ecuación (2.18) queda:

$$\phi \overline{U_T v_i} = 1 \quad (2.22)$$

Igualando las ecuaciones (2.8) y (2.17), se obtiene:

$$T = 2\rho S_D v_{i0}^2 = \frac{1}{2} \rho U_T^2 S_P c_{L\alpha} \alpha$$

que se reduce a:

$$\frac{1}{4} \overline{U_T}^2 \sigma c_{L\alpha} \alpha = 1 \quad (2.24)$$

donde  $\sigma$  es la solidez:

$$\sigma = \frac{S_P}{S_D} \quad (2.25)$$

Además, de la relación entre las ecuaciones (2.3), (2.8) y (2.9), surge:

$$\frac{1}{2} \rho U_R^2 S_P c_{L\alpha} \alpha \phi = \frac{1}{2} \rho U_R^2 S_P c_D$$

es decir,

$$\frac{c_{L\alpha}}{c_D} \alpha \phi = 1 \quad (2.26)$$

que reemplazada en la ecuación (2.24), proporciona:

$$\overline{U_T}^2 = \phi \frac{1}{\frac{\sigma}{4} c_D} \quad (2.27)$$

Ahora, de (2.22) y (2.27):

$$\overline{v_i} = \phi^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{4} c_D}} \quad (2.28)$$

Reemplazando (2.10) en (2.26), se obtiene:

$$\frac{c_{L\alpha}}{c_D} (\phi + \beta) \phi = 1$$

$$\beta = \frac{1}{\phi} \frac{c_D}{c_{L\alpha}} - \phi \quad (2.29)$$

De (2.7a) y (2.14), se obtiene:

$$k = \phi + \frac{v_i}{U_T} \quad (2.30)$$

Ahora, con las ecuaciones (2.20), (2.21), (2.27) y (2.28), se obtiene:

$$k = \phi + \frac{\bar{v}_i}{U_T} = \phi + \frac{\phi^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{\frac{\sigma}{4} c_D}}}{\phi \frac{1}{\frac{\sigma}{4} c_D}} = \phi + \frac{1}{\phi^2} \frac{\sigma}{4} c_D \quad (2.31)$$

Además, de (2.14), (2.19), (2.20), (2.27) y (2.31):

$$-\bar{V}_v = k \bar{U}_T = \left( \phi + \frac{1}{\phi^2} \frac{\sigma}{4} c_D \right) \sqrt{\phi \frac{1}{\frac{\sigma}{4} c_D}} = \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{\sigma}{4} c_D}} + \sqrt{\frac{\sigma}{4} c_D} \phi^{-\frac{3}{2}} \quad (2.32)$$

Finalmente, las ecuaciones que caracterizan el comportamiento del sistema se resumen en la forma siguiente:

$$\bar{U}_T^2 = \phi \frac{1}{\frac{\sigma}{4} c_D} \quad (2.27)$$

$$\bar{v}_i = \phi^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma}{4} c_D}} \quad (2.28)$$

$$\beta = \frac{1}{\phi} \frac{c_D}{c_{L\alpha}} - \phi \quad (2.29)$$

$$k = \phi + \frac{1}{\phi^2} \frac{\sigma}{4} c_D \quad (2.31)$$

$$-\bar{V}_v = \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{\sigma}{4} c_D}} + \sqrt{\frac{\sigma}{4} c_D} \phi^{-\frac{3}{2}} \quad (2.32)$$

En las expresiones anteriores se observa fácilmente cuáles son los parámetros que afectan a tal comportamiento, a saber:

- La relación entre la superficie de las palas y la superficie del disco,  $\sigma$ , la solidez.
- El coeficiente de resistencia de las palas,  $c_D$ .
- La pendiente de la curva  $c_L$  vs.  $\alpha$  de las palas,  $c_{L\alpha}$ .

Como se comentaba antes, si  $c_D$  y  $c_{L\alpha}$  son constantes, todos los parámetros quedan referidos a la variable independiente “ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ ”, y la sencillez de las expresiones anteriores permite analizar la influencia de los parámetros que intervienen. En particular, puede ser de interés conocer los valores de  $\phi$  que hacen mínimos a  $k$  y  $-\overline{V}_v$ ,  $\phi_{k\min}$  y  $\phi_{Vv\min}$  respectivamente, así como para el valor del ángulo de incidencia de la velocidad,  $\phi$ , cuando el paso,  $\beta$ , es cero ( $\phi_{\beta 0}$ ). En efecto, de (2.29), (2.31) y (2.32) se deducen:

$$\phi_{\beta 0} = \sqrt{\frac{c_D}{c_{L\alpha}}} \quad (2.33)$$

$$\phi_{k\min} = \sqrt[3]{\frac{\sigma}{2} c_D} \quad (2.34)$$

$$\phi_{Vv\min} = \sqrt[3]{\frac{\sigma}{4} c_D} \quad (2.35)$$

Para que el pararrotor arranque es necesario que  $\beta$  sea negativo, luego las soluciones obtenidas tienen interés cuando  $\beta < 0$ , es decir,  $\phi > \phi_{\beta 0}$ . A medida que aumenta  $\frac{c_D}{c_{L\alpha}}$ , aumenta también  $\phi_{\beta 0}$ , es decir, para un cierto paso,  $\beta$ , aumenta el ángulo de incidencia de la corriente,  $\phi$ . También se deduce que es siempre  $\phi_{Vv\min} < \phi_{k\min}$ . Y para los casos de interés resulta ser:  $\phi_{\beta 0} < \phi_{Vv\min} < \phi_{k\min}$ .

Reemplazando (2.34) y (2.35) en (2.31) y (2.32) se obtienen los valores de  $k$  y  $-\overline{V}_v$  mínimos:

$$k_{\min} = \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma}{2} c_D \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.36)$$

$$-\overline{V}_{v \min} = 2 \quad (2.37)$$

De la ecuación (2.36) se deduce que el valor mínimo de  $k$  varía con  $c_D$  y  $\sigma$ , aunque de forma suave, debido al exponente 1/3. En la ecuación (2.37) se ve que el valor mínimo de  $-\overline{V}_v$  es independiente de cualquier parámetro.

En la Fig. 2.3 se muestra la variación de los parámetros que caracterizan el comportamiento del sistema con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , para ciertos valores de  $c_D$ ,  $c_{L\alpha}$  y  $\sigma$ .

Los parámetros  $c_D$ ,  $c_{L\alpha}$  y  $\sigma$  afectan al comportamiento del modelo, como se muestra a continuación.

En relación con la influencia de  $c_D$ , como se muestra en la Fig. 2.4, al aumentar de  $c_D$  se producen los siguientes efectos:

- Una disminución de la pendiente de la curva de  $\overline{U}_T^2$ , es decir, disminuye la velocidad de giro del modelo, lo que lleva asociado también el aumento del mínimo de  $k$ .
- Los mínimos de  $k$ ,  $-\overline{V}_v$  y  $\phi_{\beta 0}$  se desplazan hacia la derecha, hacia valores grandes de  $\phi$ .
- Para igual ángulo de paso,  $\beta$ , aumentan los valores de  $\phi$  y por tanto los ángulos de ataque,  $\alpha$ , deberían disminuir, si no fuera porque la curva  $\alpha(\phi)$  también se desplaza hacia valores crecientes de  $\alpha$ , dando como resultado neto un aumento de  $\alpha$ .

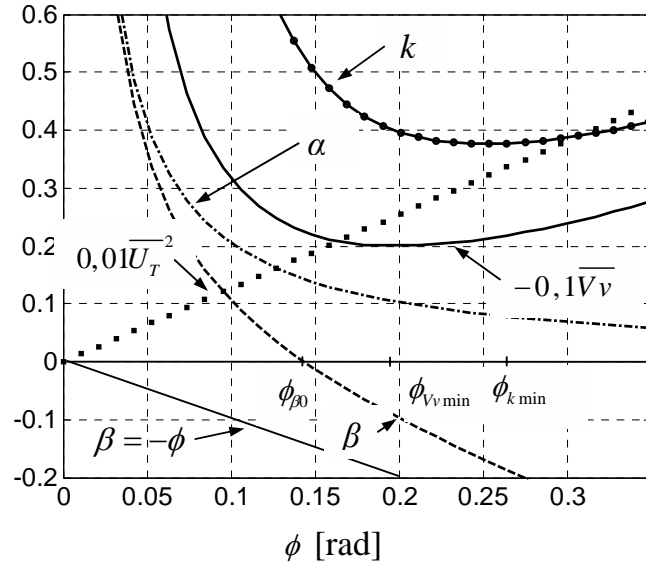


Fig. 2.3. Variación con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , de la velocidad tangencial adimensional al cuadrado,  $\overline{U_T}^2$ , la velocidad de la corriente adimensional,  $-\overline{V_v}$ , el ángulo de paso,  $\beta$ , el parámetro adimensional de relación de velocidades,  $k$ , y el ángulo de ataque,  $\alpha$ , para  $c_D = 0,07$ ,  $c_{L\alpha} = 3,4$  y  $\sigma = 0,45$ .

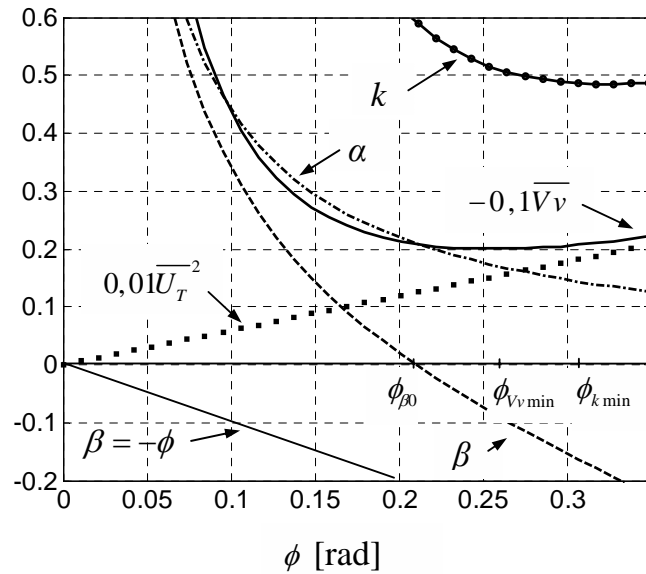


Fig. 2.4. Variación con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , de la velocidad tangencial adimensional al cuadrado,  $\overline{U_T}^2$ , la velocidad de la corriente adimensional,  $-\overline{V_v}$ , el ángulo de paso,  $\beta$ , el parámetro adimensional de relación de velocidades,  $k$ , y el ángulo de ataque,  $\alpha$ , para  $c_D = 0,15$ ,  $c_{L\alpha} = 3,4$  y  $\sigma = 0,45$ .

En cuanto al aumento de  $c_{L\alpha}$  se observa (Fig. 2.5) que no se alteran las curvas de  $\overline{U_T}^2$ ,  $k$ , y  $-\overline{V_V}$  (con respecto a la Fig. 2.3), mientras que  $\phi_{\beta 0}$  disminuye, es decir, para el mismo paso,  $\beta$ , el valor de  $\phi$  es menor. Obviamente, también decrece  $\alpha(\phi)$ .

Respecto al aumento de  $\sigma$  (Fig. 2.6), en las curvas de  $\overline{U_T}^2$ ,  $k$  y  $-\overline{V_V}$ , produce el mismo efecto que un aumento del  $c_D$ . Las curvas de  $\beta(\phi)$  y  $\alpha(\phi)$  permanecen inalteradas.

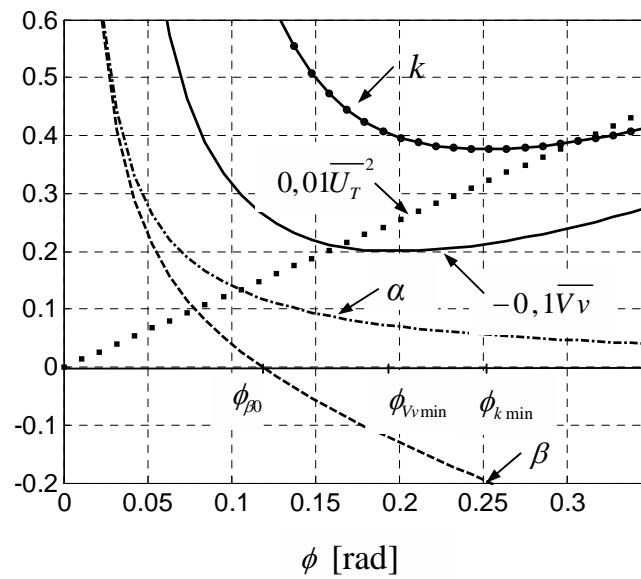


Fig. 2.5. Variación, con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , de la velocidad tangencial adimensional al cuadrado,  $\overline{U_T}^2$ , la velocidad de la corriente adimensional,  $-\overline{V_V}$ , el ángulo de paso,  $\beta$ , el parámetro adimensional de relación de velocidades,  $k$ , y el ángulo de ataque,  $\alpha$ , para  $c_D = 0,07$ ,  $c_{L\alpha} = 5$  y  $\sigma = 0,45$ .

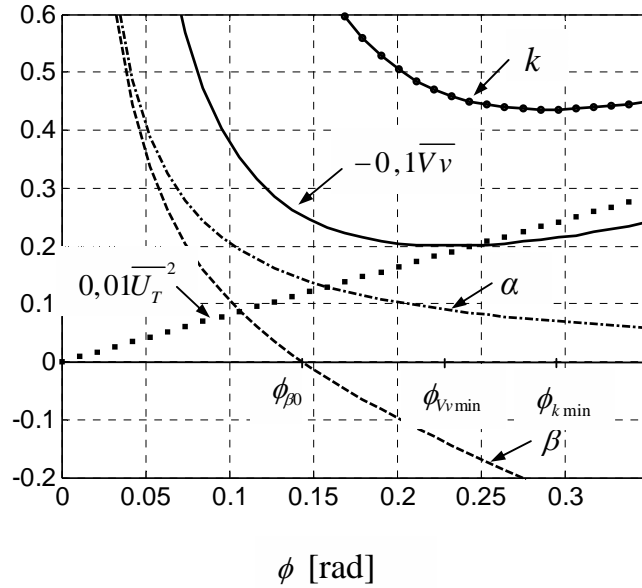


Fig. 2.6. Variación, con el ángulo de incidencia del flujo,  $\phi$ , de la velocidad tangencial adimensional al cuadrado,  $\overline{U_T^2}$ , la velocidad de la corriente adimensional,  $-\overline{V_v}$ , el ángulo de paso,  $\beta$ , el parámetro adimensional de relación de velocidades,  $k$ , y el ángulo de ataque,  $\alpha$ , para  $c_D = 0,07$ ,  $c_{L\alpha} = 3,4$  y  $\sigma = 0,7$ .

## 2.8. Coeficiente de resistencia equivalente

El coeficiente de resistencia equivalente al de un decelerador convencional se obtiene al adimensionalizar la tracción con la presión dinámica y la superficie de las palas. También se le llama “coeficiente de resistencia aerodinámica del modelo”. Se calcula a partir de la expresión:

$$T = \frac{1}{2} \rho U_T^2 S_p c_{L\alpha} \alpha = \frac{1}{2} \rho V_v^2 S_p c_{DM} \quad (2.38)$$

De donde  $c_{DM}$  resulta:

$$c_{DM} = \frac{U_T^2}{V_v^2} c_{L\alpha} \alpha = \frac{c_{L\alpha} \alpha}{k^2} = \frac{c_D}{\phi^3 + \frac{1}{\phi^3} \left( \frac{\sigma}{4} c_D \right)^2 + \frac{\sigma}{2} c_D} \quad (2.39)$$



donde se han empleado (2.29) y (2.31). El valor máximo aparece para  $\phi = \phi_{c_{DM}} = \left(\frac{\sigma}{4} c_D\right)^{\frac{1}{3}} = \phi_{V_{v\min}}$ , y resulta ser  $c_{DM\max} = \frac{1}{\sigma}$ , es decir, sólo depende de la solidez.

La forma en que varía  $c_{DM}$  en función de  $\beta$ , según la ecuación (2.39), se muestra en las Figs. 2.7 a 2.9.

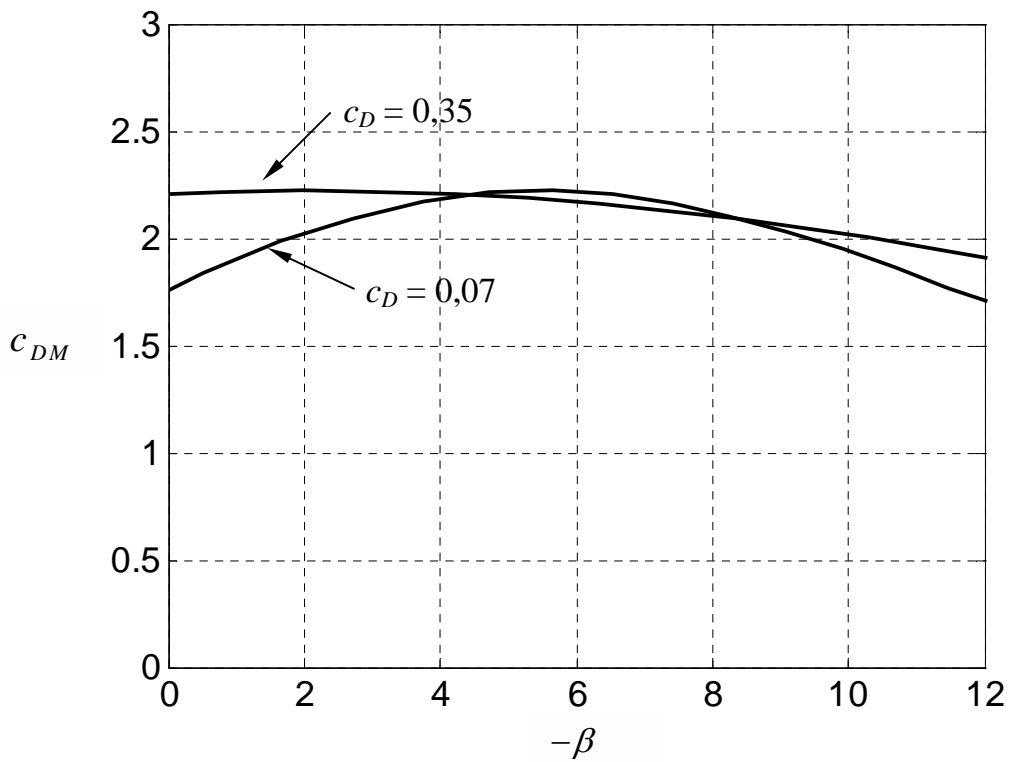


Fig. 2.7. Variación teórica de  $c_{DM}$  en función de  $\beta$ , para  $c_{L\alpha} = 3,4$  y  $\sigma = 0,45$ .

En la Fig. 2.7 se observa que, en efecto,  $c_D$  no influye en el máximo valor de  $c_{DM}$ . Al aumentar  $c_D$  ese máximo se desplaza hacia valores menores de  $\beta$ .

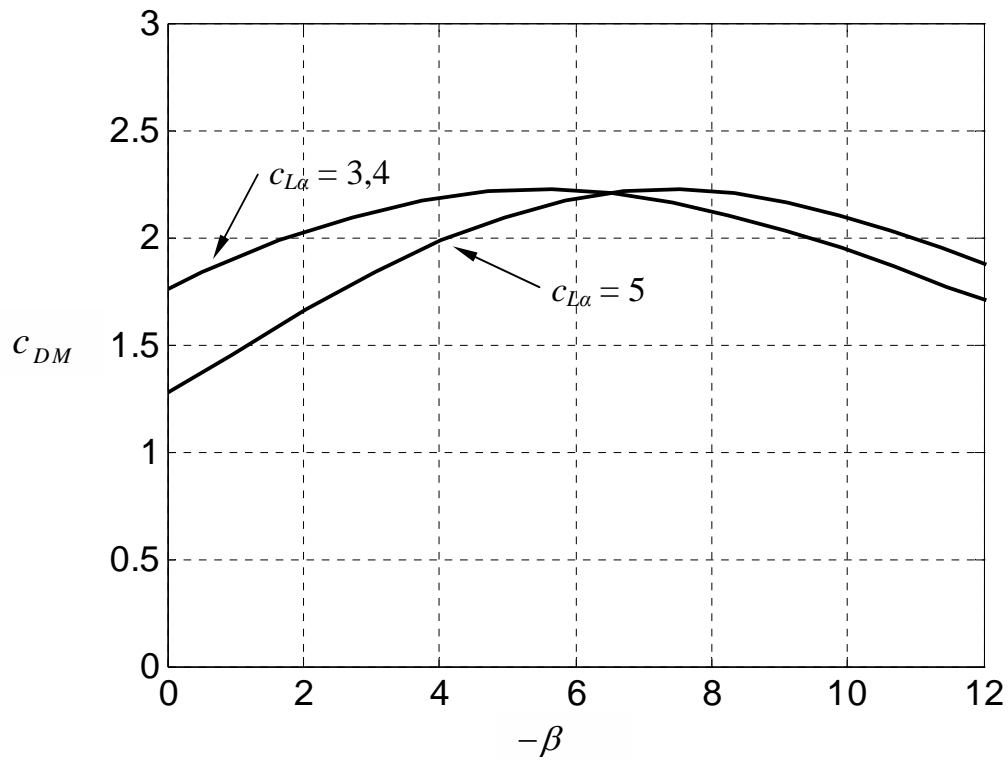


Fig. 2.8. Variación teórica de  $c_{DM}$  en función de  $\beta$ , para  $c_{D0} = 0,07$  y  $\sigma = 0,45$ .

En la Fig. 2.8 se observa que  $c_{L\alpha}$  tampoco modifica el valor máximo de  $c_{DM}$ , pero al aumentar  $c_{L\alpha}$  ese máximo se desplaza hacia valores mayores de  $\beta$ .

En la Fig. 2.9 se observa el efecto de  $\sigma$  en el valor máximo de  $c_{DM}$ . Al aumentar  $\sigma$  ese valor máximo disminuye y se produce para valores mayores de  $\beta$ .

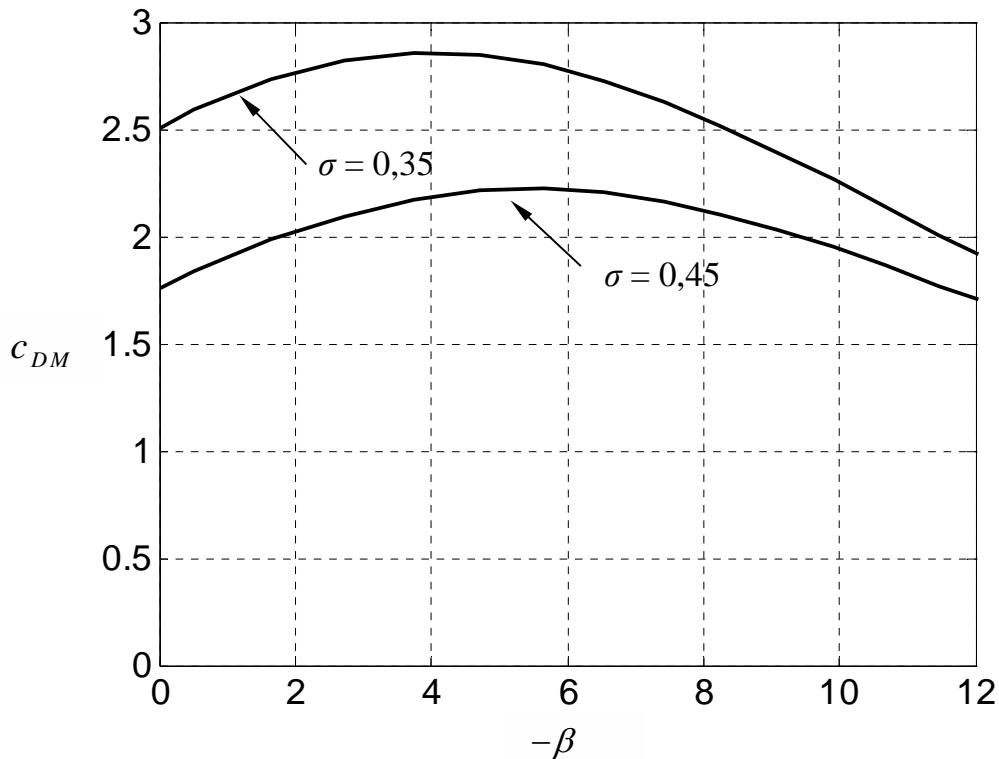


Fig. 2.9. Variación teórica de  $c_{DM}$  en función de  $\beta$ , para  $c_{D0} = 0,07$  y  $c_{L\alpha} = 3,4$ .

## 2.9. Otros efectos

A fin de conseguir que el modelo teórico represente mejor el comportamiento del modelo físico se analizan otros efectos, que se han introducido escalonadamente, para permitir ver el efecto de cada uno en la respuesta del modelo teórico y en la comparación de los resultados experimentales con los modelos teóricos. Estos efectos se comentan a continuación:

### 2.9.1. Coefficiente de resistencia aerodinámica de las palas, $c_D$

Se han considerado diversos grados de complejidad a la hora de describir este coeficiente e introducirlo en los modelos teóricos. En primer lugar, se ha partido de un valor constante, independiente del ángulo de ataque y solamente dependiente de la rugosidad de las palas, es decir,  $c_D = c_{D0}$ , donde  $c_{D0}$  es el coeficiente de resistencia de fricción. Con esta hipótesis (y como se presentará más adelante) se ha llegado a que el valor que mejor ajusta a los experimentos para la configuración básica es

$c_D = c_{D0} = 0,06$ , que es razonable para una placa similar a las palas del modelo a un número de Reynolds de ese orden de magnitud (Pelletier, A. and Mueller, T. J., 2000).

Para mejorar el modelo teórico se han considerado otras formas de describir este coeficiente. Para tener en cuenta su variación con el ángulo de ataque, como sucede con alas, placas, etc. (Anderson, J., 1984) se propone la siguiente expresión:

$$c_D = c_{D0} + \frac{c_L^2}{\pi e \Lambda} = c_{D0} + \frac{c_{L\alpha}^2 \alpha^2}{\pi e \Lambda} \quad (2.40)$$

donde el factor de eficiencia,  $e$ , se obtiene de los datos de la referencia (Anderson, J., 1984). Esta expresión es válida para el movimiento de traslación, donde el segundo término se debe a la velocidad inducida por la estela. En el presente caso, la velocidad inducida se calcula por el teorema de conservación de cantidad de movimiento. Dando un paso más, se piensa que para este caso el coeficiente que multiplica a  $\alpha^2$  no necesariamente tiene que ser el mismo que para alas de aeronaves, ya que existe la posibilidad de variación de la resistencia de fricción con el ángulo de ataque, y se utiliza la siguiente expresión para el coeficiente de resistencia:

$$c_D = c_{D0} + a\alpha^2 \quad (2.41)$$

En este caso “ $a$ ” no es conocido a priori y es necesario determinarlo durante el proceso de ajuste de los modelos teóricos a los experimentos.

### 2.9.2. Alargamiento, $A$

En primer lugar, se ha tomado un valor de alargamiento considerando un ala rectangular de cuerda  $c = 0,138$  m y envergadura  $b = 0,088$  m, resultando un alargamiento  $A = 0,64$ . A la vista de los resultados de las visualizaciones del flujo realizadas, que permiten conocer cómo se comportan las palas, se observa que el flujo no barre el ala según la cuerda sino que lo hace a un determinado ángulo, dependiendo de la posición sobre la superficie de la pala. De aquí se desprende que el alargamiento efectivo no se corresponde con un ala rectangular sino, más bien, con un ala triangular. Por ello, es

difícil poder determinar el valor del alargamiento real de las palas. Tomando como envergadura la diagonal de la pala y considerando que la parte posterior de la pala no trabaja, el alargamiento tendría un valor de 4,2. Sin embargo, si la variación de  $c_{L\alpha}$  con  $\alpha$  se rige según las leyes aplicables a alas esbeltas, como parece desprenderse de la comparación del modelo teórico con los resultados experimentales, según se muestra en el apartado siguiente, las palas giratorias se comportan como un ala esbelta de alargamiento aproximadamente 1,5 inmersa en un flujo longitudinal. De todas maneras, al considerar que el coeficiente de resistencia varía según la expresión (2.41), el valor del alargamiento de las palas no se utiliza en las versiones más avanzadas del modelo teórico.

### 2.9.3. Pendiente de la curva de sustentación, $c_{L\alpha}$

El modelo posee palas rotatorias de bajo alargamiento. A partir de las visualizaciones del flujo se concluye que las palas se comportan como alas delta. Esta conclusión se afirma aun más como resultado de la comparación del modelo teórico con los resultados experimentales de la variación de  $c_{L\alpha}$  con  $\alpha$ , como se verá más adelante (Fig. 2.10). Por todo esto, se puede tomar la expresión sugerida por K. W. Mangler y J. H. B. Smith (Stahl, W. H., 1979), derivada de modelizar alas esbeltas, para determinar teóricamente el valor de  $c_{L\alpha}$  para las palas del modelo:

$$c_L = \frac{\pi}{2} \Lambda \alpha + 4\alpha^2 \quad (2.42)$$

de donde se obtiene:

$$c_{L\alpha} = \frac{\pi}{2} \Lambda + 8\alpha \quad (2.43)$$

donde la parte lineal de la curva de sustentación posee la pendiente dada por la teoría de cuerpos esbeltos de R. T. Jones (Stahl, W. H., 1979):

$$c_{L\alpha} = \frac{\pi}{2} \Lambda \quad (2.44)$$

Realizando un ajuste lineal a los puntos ( $c_{L\alpha}$  vs.  $\alpha$ ) obtenidos de la comparación del modelo teórico con los resultados experimentales, se obtiene la expresión:

$$c_{L\alpha} = 2,28 + 10,1\alpha \quad (2.45)$$

donde  $\alpha$  [rad]. La comparación entre los resultados experimentales (2.45) y los obtenidos de la expresión (2.42) se muestra en la Fig. 2.10.

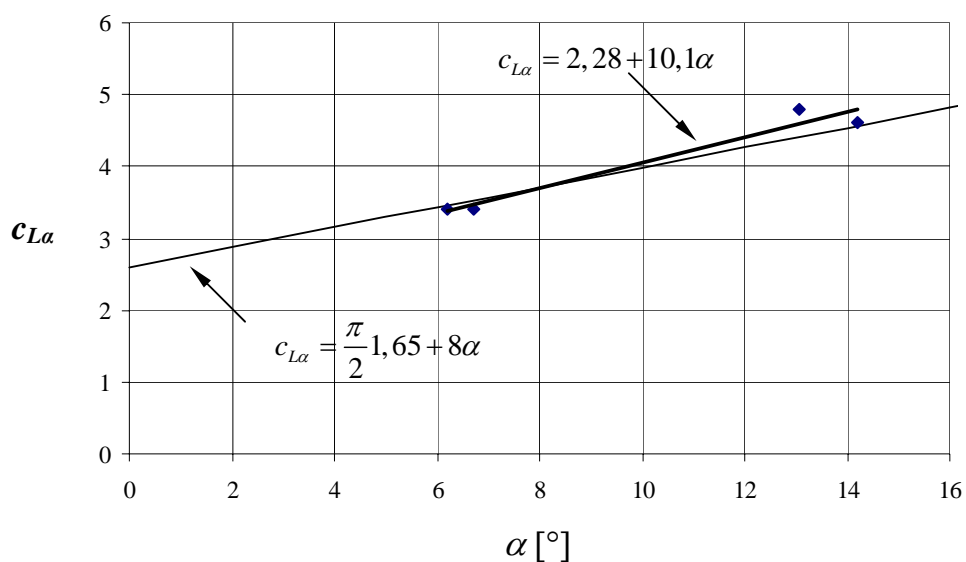


Fig. 2.10. Variación de  $c_{L\alpha}$  [1/rad] con  $\alpha$  [°]. Los puntos (rombos) provienen de la comparación entre el modelo teórico y los resultados experimentales, la línea de trazo continuo grueso es un ajuste lineal a esos puntos y la línea de trazo continuo fino es una ley teórica para  $\Lambda = 1,65$ .

Este comportamiento de la pendiente de la curva de sustentación con el ángulo de ataque explica los valores de  $c_{L\alpha}$  obtenidos de la comparación del modelo teórico con los resultados experimentales, donde se obtiene  $c_{L\alpha} \approx 3,4$ , para las configuraciones con menor rugosidad, C01 y C07, correspondientes a  $\alpha$  en torno a los 6°, y  $c_{L\alpha}$  de 4,6 y 4,8, para las que poseen mayor rugosidad, C03 y C09, correspondientes a  $\alpha$  en torno a los 13°.

#### 2.9.4. Solidez, $\sigma$

Teniendo en cuenta el procedimiento empleado en la teoría de cantidad de movimiento, hay que considerar el área de la sección del tubo de corriente que pasa por el rotor ( $S_D - S_C$ ), en vez del área del disco. Por lo tanto, la solidez se define como:

$$\sigma = \frac{S_P}{S_D - S_C} \quad (2.46)$$

donde  $S_P$  es el área total de las dos palas,  $S_D$  el área del disco y  $S_C$  el área del cilindro.

Para el modelo ensayado:  $\sigma = 0,45$ .

#### 2.9.5. Modelo considerando la fricción lateral del cilindro y la fricción de los rodamientos

A fin de elaborar un modelo que contemplase más elementos del funcionamiento del modelo físico, se ha estimado cuáles son los pares resistentes debidos a la resistencia aerodinámica de fricción del cilindro y a los rodamientos.

- Par debido a la fricción lateral del cilindro

Se ha considerado un modelo simplificado en el que el cilindro gira a la velocidad de giro del modelo, con velocidad de la corriente nula. Se ha supuesto que el cilindro es una placa plana, de ancho igual a la altura del cilindro y longitud igual al perímetro, embestido por una corriente con la velocidad tangencial del cilindro. El valor de la resistencia de fricción es pues :

$$F_C = \frac{1}{2} \rho U_T^2 S_{LC} c_f \quad (2.47)$$

donde  $S_{LC}$  es el área lateral del cilindro y  $c_f$  el coeficiente de fricción.

Se ha obtenido el coeficiente de fricción la placa plana lisa a partir de la referencia (Gerhart, P., Gross, R., Hochstein, J., 1995). Para el rango de números de Reynolds ensayado  $c_f$  varía entre 0,005 y 0,006.

- Par de fricción de los rodamientos

El par de fricción de los rodamientos se ha calculado a partir de la información en la referencia ([www.skf.com](http://www.skf.com)), para rodamientos similares a los del modelo. Este par varía linealmente con la velocidad:

$$M_{rod} = f_0 U_T \quad (2.48)$$

donde  $f_0$  es el factor de fricción del rodamiento dependiente de la velocidad.

En la Fig. 2.11 se muestra la variación del momento de fricción con la velocidad de rotación para un rodamiento similar al utilizado en el modelo.

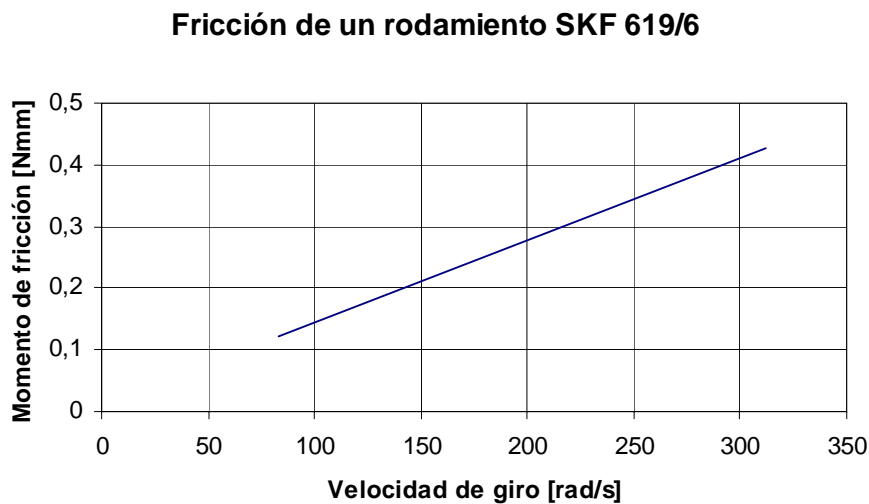


Fig. 2.11. Variación del momento de fricción en función de la velocidad de rotación para un rodamiento SKF 619/6 en las condiciones de trabajo del modelo físico.

- Análisis comparativo de los pares debidos a la fricción lateral del cilindro y de los rodamientos



En la Tabla 2.1 se presentan los pares debidos a la fricción lateral del cilindro y a los dos rodamientos del modelo, para las velocidades de rotación extremas de los ensayos.

Tabla 2.1. Comparación entre el par de fricción del cilindro y de los rodamientos.

$U_T$ [m/s]	Par cilindro [Nm]	Par rodamientos [Nm]
90	0,015	0,00024
300	0,146	0,00086

Como el par debido a la fricción lateral del cilindro es dos órdenes de magnitud mayor al momento de fricción de los dos rodamientos, se desprecia este último.

#### 2.9.6. Modelo teórico con fricción

Se desarrolla en forma análoga a la empleada para el modelo teórico sin fricción. Ahora, la condición de equilibrio (régimen sin aceleración) se obtiene de cancelar la suma de momentos respecto al eje de rotación del modelo:

$$\sum M_z = 0$$

$$(L \sin \phi - D \cos \phi)R - F_c R_c - M_{rod} = 0 \quad (2.49)$$

donde  $R$  es el radio de la punta de pala en el modelo y  $R_c$  el radio del cilindro.

Reemplazando (2.3), (2.8), (2.10) y (2.47) en (2.49), se obtiene:

$$\frac{1}{2} \rho U_T^2 S_P c_{L\alpha} (\beta + \phi) \phi R - \frac{1}{2} \rho U_T^2 S_P c_D R - \frac{1}{2} \rho U_T^2 S_{LC} c_f R_c = 0 \quad (2.50)$$

Simplificando, queda:

$$S_P c_{L\alpha} \beta \phi R + S_P c_{L\alpha} \phi^2 R - S_P c_D R - S_{LC} c_f R_c = 0$$

es decir,

$$\phi^2 + \beta\phi - \frac{c_D}{c_{L\alpha}} - \frac{S_{LC}c_f R_C}{S_p c_{L\alpha} R} = 0 \quad (2.51)$$

donde  $\frac{S_{LC}c_f R_C}{S_p c_{L\alpha} R}$  es el término que aparece al considerar la fricción lateral del cilindro.

Las restantes ecuaciones que rigen a este modelo no se ven afectadas por la fricción.

Para decidir si es necesario retener el efecto de la fricción lateral se comparan los

términos  $\frac{c_D}{c_{L\alpha}}$  y  $\frac{S_{LC}c_f R_C}{S_p c_{L\alpha} R}$ . Siendo:  $c_D = 0,07$ ,  $c_{L\alpha} = 3,4$ ,  $S_{LC} = 5,35 \cdot 10^{-4}$  m,  $c_f = 0,005$ ,

$R_C = 0,044$  m,  $S_p = 0,024$  m y  $R = 0,138$  m, se tiene:  $\frac{c_D}{c_{L\alpha}} = 0,02 \gg \frac{S_{LC}c_f R_C}{S_p c_{L\alpha} R} = 1,04 \cdot 10^{-5}$ ,

por lo que se desprecia el efecto de la fricción lateral del cilindro.

### **3. RESULTADOS EXPERIMENTALES**

#### **3.1. Descripción del modelo**

El objeto del presente apartado es caracterizar un modelo mediante ensayos en túnel aerodinámico. El modelo consiste en un cuerpo principal cilíndrico y dos palas de planta rectangular, sobre la base del cilindro situada a sotavento.

Se ha ensayado una configuración aerodinámica, aquí denominada “Configuración básica”, consistente en un ala de planta rectangular, de dimensiones fijas y ángulo de paso variable. Sobre esta configuración se han estudiado los efectos de la velocidad de la corriente y el ángulo de paso de las palas sobre la tracción y la velocidad de giro.

En una segunda etapa, se han ensayado variaciones a la configuración básica (introducción de varillas, placas, rugosidad, etc. sobre las palas). Estas variaciones fueron realizadas sobre las superficies de las palas; no se realizaron modificaciones sobre el cilindro, sobre el perfil ni sobre la forma en planta de las palas.

Como se muestra en las Figuras 3.1 y 3.2, el modelo consiste en un cuerpo principal cilíndrico, de iguales dimensiones en diámetro y altura, 88 mm. Este cilindro se encuentra montado fijo a un eje. En la base del cilindro, situada a sotavento, se encastran dos palas cortas planas rectangulares, de 88 mm de envergadura, 138 mm de cuerda y 1 mm de espesor; de paso ajustable. Las palas se fijan al cilindro por medio de varillas, situadas sobre el extradós.

#### **3.2. Configuración experimental**

Los ensayos se han realizado en el túnel aerodinámico del Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Éste es un túnel de circuito y cámara de ensayos cerrados, impulsado por una hélice accionada por un motor eléctrico de 37,3 kW. La sección transversal de la cámara de ensayos es rectangular, de 1,4 m de ancho x 1,0 m de altura x 7,2 m de longitud. La velocidad del aire puede variarse en forma continua hasta 18 m/s.

El objeto de los ensayos es caracterizar un modelo consistente en un cuerpo principal y dos palas con ángulo de incidencia variable, como se ha descrito en el apartado anterior (Fig. 3.2). A tal fin, el eje que sostiene al modelo va montado a través de dos

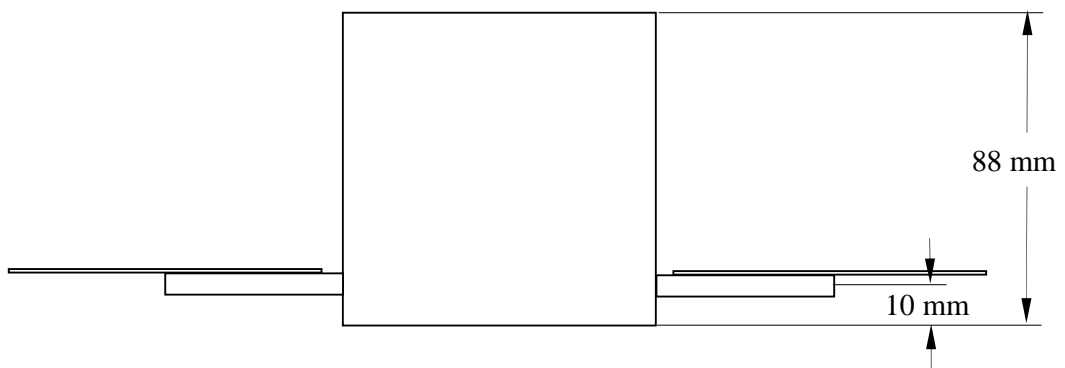
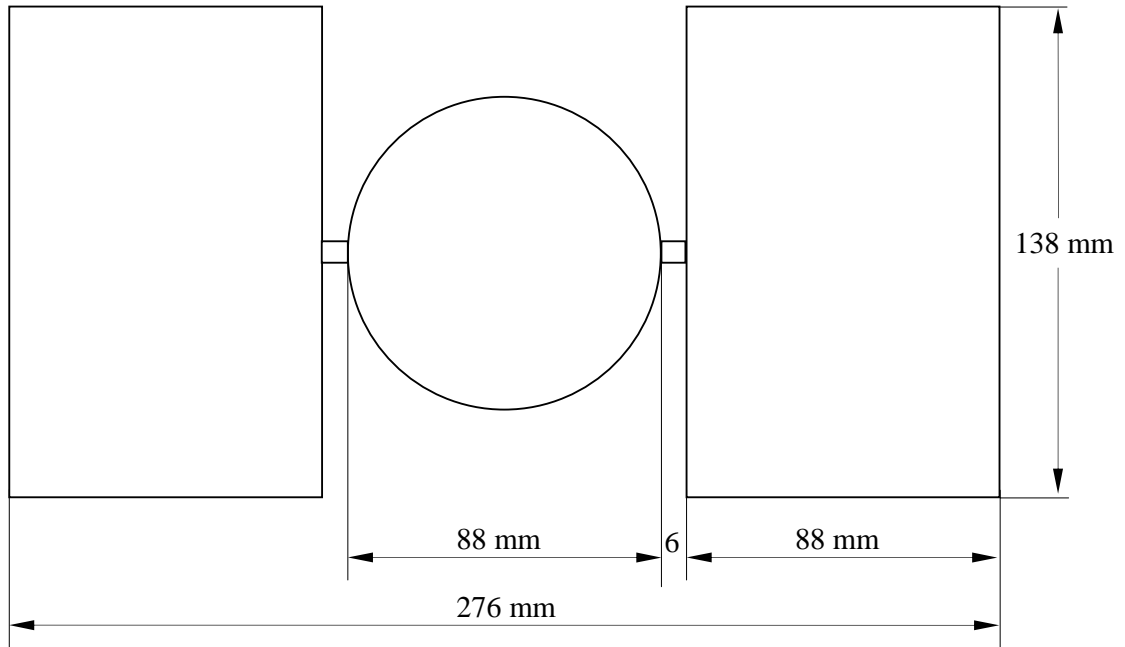


Fig. 3.1. Esquema del modelo.

Fig. 3.2. Vista del modelo y la balanza. La corriente fluye de izquierda a derecha. Los números indican: 1, cilindro; 2, pala; 3, eje de rotación; 4, extremo de la balanza; 5, carenado.

Fig. 3.3. Vista del modelo. Los números indican: 1, cilindro; 2, palas; 3, base giratoria del túnel aerodinámico.

Fig. 3.4. Instalación de ensayo. La corriente fluye de derecha a izquierda. Los números indican: 1, micromanómetro; 2, taquímetro; 3, barómetro; 4, multímetro; 5, amplificador de la balanza; 6, tubo pitot; 7, modelo.

Fig. 3.5. Modelo girando durante el ensayo. La corriente fluye de derecha a izquierda. Los números indican: 1, modelo; 2, carenado de la balanza; 3, estructura soporte del modelo y la balanza.

rodamientos a un soporte. Este soporte se halla fijado en el extremo de una balanza. La balanza es una viga adecuadamente mecanizada de aluminio, que tiene adheridos extensímetros en sus caras. El extremo inferior de la balanza va sujeto al suelo del túnel aerodinámico. La balanza posee un carenado para no ver afectadas las mediciones por la acción del viento sobre ella. El cilindro gira libremente por acción del viento. El cilindro está construido con un tubo de PVC y dos tapas de aluminio. Las palas son también de aluminio.

La instalación experimental puede verse en las fotografías (Figuras 3.2 a 3.5).

Cabe señalar que en las fotografías se ven las palas sujetas a la base del cilindro. Este montaje fue modificado para la realización de los ensayos, excepto el primero (identificado con el número 030326). El nuevo montaje se efectuó insertando una varilla roscada sobre la superficie lateral del cilindro, en un orificio situado a 10 mm de la base. Los ensayos consisten en la medida de la fuerza de tracción sobre el modelo y la velocidad de rotación del mismo, mientras se registran las condiciones del flujo (velocidad, temperatura, presión atmosférica y humedad).

### 3.2.1. Instrumentación

La velocidad de giro del modelo se mide con un tacómetro láser. Los ángulos de paso de las palas se miden con un goniómetro. La velocidad del aire se mide con un tubo pitot y un micromanómetro de alcohol. La resistencia aerodinámica se mide con una balanza.

### 3.2.2. Descripción del instrumental

- Tacómetro Laser Marca Lutron. Modelo DT-2234BL. Rango: 10 a 99999 rpm, resolución: 0,1 rpm (<1000 rpm), 1 rpm (>1000 rpm).
- Tubo Pitot - Micromanómetro diferencial R-Fuess. Alcance: 160 mmCA, resolución: 0,05 mmCA.
- Barómetro Marca Druck. Modelo DPI 740. Rango: 74500 a 115000 Pa.
- Termómetro de bulbo seco - bulbo húmedo. Resolución 0,1°C.
- Balanza. Alcance: 5000 gramos. Resolución: 10 gramos.
- Goniómetro. Resolución: 1 grado.

### 3.3. Definiciones y parámetros a determinar durante los ensayos

En los ensayos se han medido los siguientes parámetros:

- ángulo de incidencia de las palas;
- velocidad del aire;
- velocidad de giro y
- resistencia aerodinámica del modelo.

También se han realizado visualizaciones del flujo, mediante una lámpara estroboscópica e hilos pegados sobre las caras de las palas. Se han tomado algunas fotografías, pero, para facilitar la interpretación, los resultados que se presentan son esquemas de lo visualizado en las fotografías y en directo.

Para la determinación del coeficiente de resistencia,  $c_{DM}$ , se utilizó como área de referencia a la superficie de las dos palas:

$$S_p = 2bc$$

Entonces, el coeficiente de resistencia del modelo es:

$$c_{DM} = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho V_v^2 S_p}$$

Para calcular el número de Reynolds del fenómeno se utilizó como longitud característica la cuerda de las palas:

$$\text{Re}_p = \frac{V_v c}{\nu}$$

Se define,  $k$ , a la relación de velocidades:

$$k = \frac{V_v}{\omega R}$$

Se ha considerado  $R = 0,138$  m.

### 3.4. Configuraciones ensayadas

Inicialmente se ha ensayado la configuración básica, para determinar sus características. A continuación se han probado diferentes configuraciones con el objetivo de estudiar la influencia de los parámetros y, principalmente, reducir la velocidad de giro y aumentar la tracción en el modelo, con el objetivo de no imprimir una excesiva velocidad de rotación al cuerpo que transporta los sensores, y para frenar su caída lo más posible, respectivamente.

Se han ensayado las siguientes configuraciones:

- Configuración básica

Código: C01

Esta es la configuración básica, consistente en las palas sin ningún agregado ni cambio, según fueron descritas anteriormente (Fig. 3.1). Se ha tomado como configuración de referencia el paso de palas  $\beta = 4$  grados.

- Configuración con una varilla sobre el intradós

Código: C02

A la configuración básica, se añade una varilla de 5 mm de diámetro al intradós de las palas, según se muestra en la Fig. 3.6. Con esta configuración se busca aumentar el coeficiente de resistencia de las palas, para disminuir la velocidad de giro y aumentar la tracción.



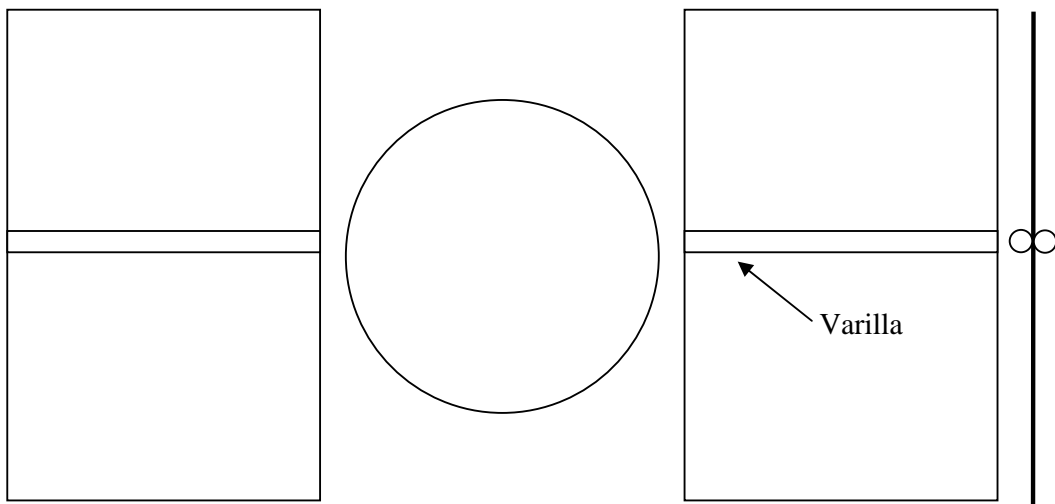


Fig. 3.6. Vista del intradós y lateral de la pala.

- Configuración con dos varillas sobre el intradós

Código: C03

A la configuración básica se añade una varilla de 5 mm de diámetro al borde de ataque, sobre el intradós de las palas, según se muestra en la Fig. 3.7.

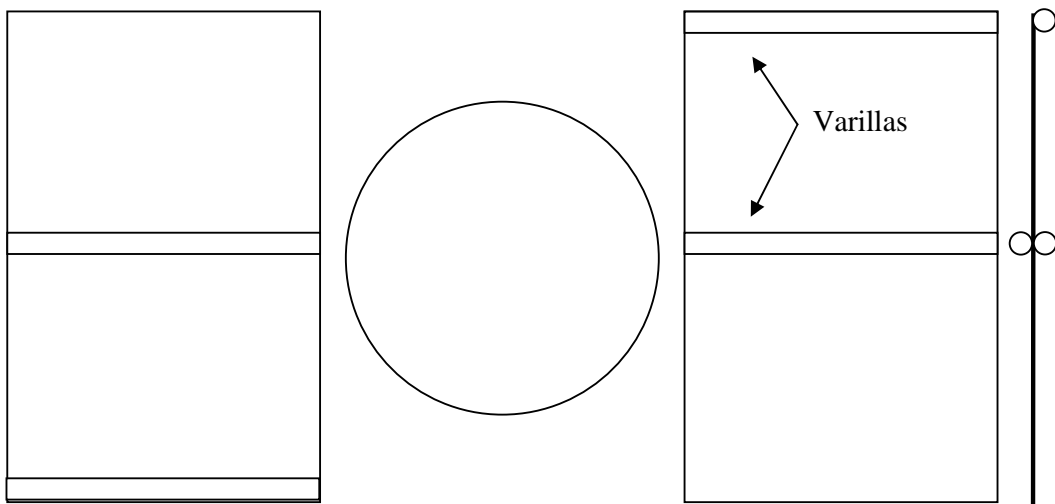


Fig. 3.7. Vista del intradós y lateral de la pala.

- Configuración con el borde de ataque redondeado

Código: C04

Posee una varilla con diámetro igual al espesor de la chapa de las palas, pegada a lo largo del borde de ataque. Con esta configuración se busca evitar el desprendimiento de la corriente en el borde de ataque.

- Configuración con placas en los cantos

Código: C05

A la configuración básica se añaden placas en los cantos, de 10 mm de ancho, según se ve en el esquema de la Fig. 3.8.

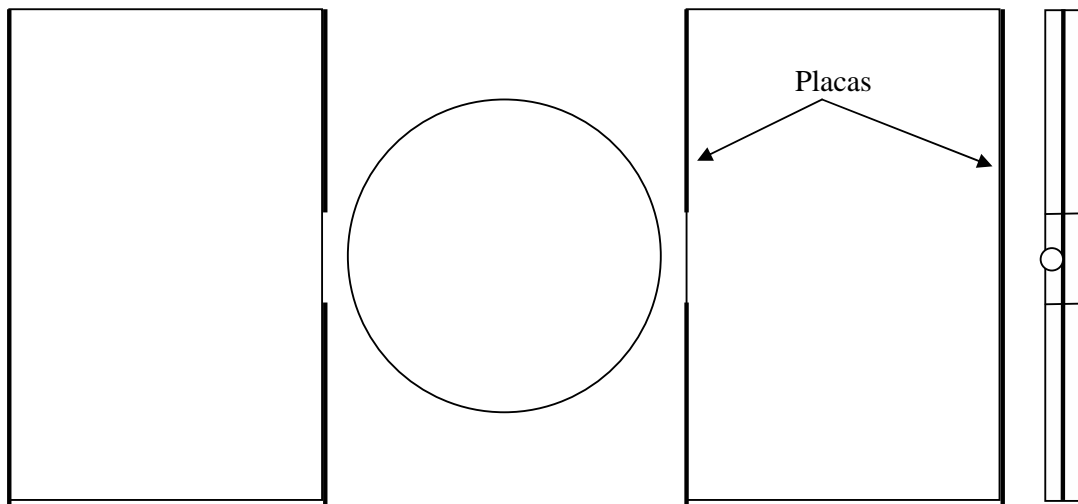


Fig. 3.8. Vista del intradós y lateral de la pala.

- Configuración con mayor diámetro del modelo

Código: C06

Se separaron las palas del cilindro, de forma que el diámetro del modelo pasó de 276 a 292 mm. Esta configuración no pudo ser ensayada ampliamente, por problemas técnicos.

- Configuración con mayor rugosidad

Código: C07

A la configuración básica se pega un papel de lija de graduación 80 granos por  $\text{cm}^2$  en toda la superficie del intradós de las palas. Se busca aumentar el coeficiente de resistencia de la pala.

- Configuración con dos varillas sobre el intradós

Código: C08

A la configuración básica se añaden dos varillas de 5 mm de diámetro sobre el intradós, según el esquema de la Fig. 3.9. La intención es disminuir la velocidad de giro de las palas, poniendo obstáculos en dirección normal a la del flujo.

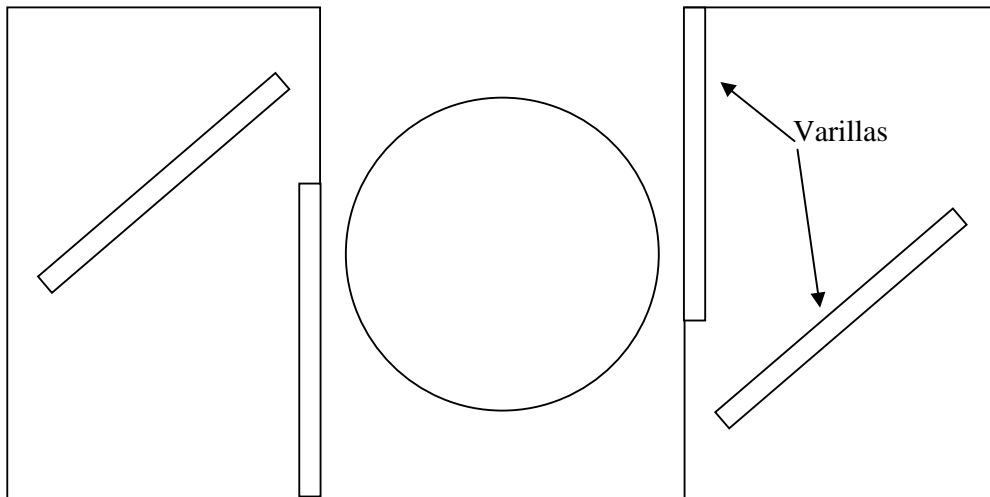


Fig. 3.9. Vista del intradós de la pala.

- Configuración con dos varillas sobre el intradós

Código: C09

A la configuración básica se añaden dos varillas de 5 mm de diámetro sobre el intradós (Fig. 3.10). La intención es disminuir la velocidad de giro de las palas.

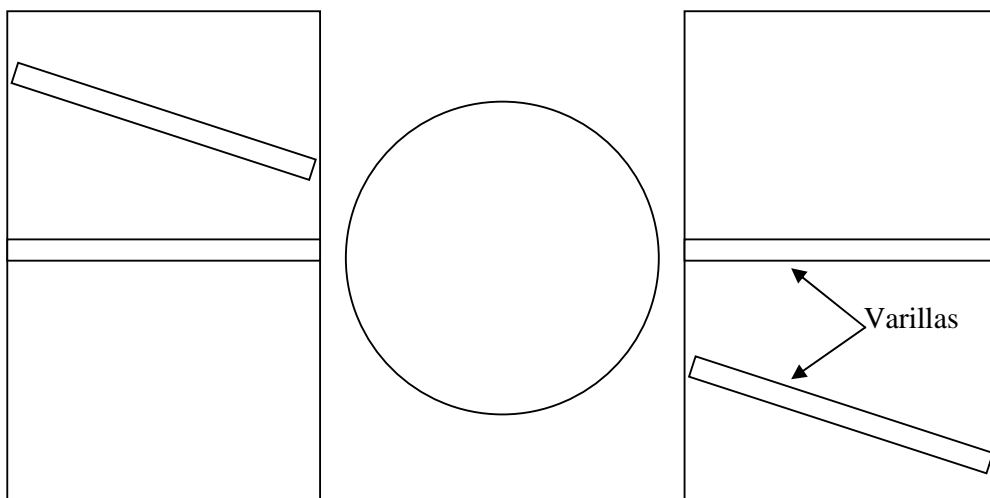


Fig. 3.10. Vista del intradós de la pala.

Además de las configuraciones descritas, se ensayaron las siguientes:

- Cilindro solo, sin las palas

Este ensayo se realizó para medir la resistencia aerodinámica del cilindro solo.

- Configuración básica, cilindro frenado, sin giro

Esta configuración se ensayó para conocer la resistencia del modelo sin girar.

Los ensayos realizados se resumen en la siguiente Tabla 3.1:

Tabla 3.1. Ensayos experimentales

Ensayo N°	Configuración	Código	Ángulo de paso (grados)
030326 (1)	Básica	C01	1,2 y 4
030807	Básica	C01	2 y 4
040420-1	Una varilla sobre intradós	C02	4
040420-2	Cilindro solo, sin las palas		
040420-3	Básica. Modelo frenado, sin giro		
040423	Una varilla sobre intradós	C02	4 y 6
040426-1	Dos varillas sobre intradós	C03	6 y 8
040428-1	Básica	C01	2, 4, 6 y 8
040428-2	Básica. Ángulo de guiñada de 10 y 20 grados	C01	4
040428-3	Borde de ataque redondeado	C04	4
040430	Palas con placas en los cantos	C05	2, 4 y 6
040503-1	Básica	C01	2, 4, 6 y 8
040503-2	Diámetro mayor	C06	2
040504-1	Básica	C01	4
040504-2	Con mayor rugosidad en intradós	C07	2, 4, 6 y 8
040506-1	Con mayor rugosidad en intradós	C07	2, 4, 6 y 8
040506-2	Con dos varillas sobre intradós	C08	2, 4 y 6
040426-2	Con dos varillas sobre intradós	C09	4, 6 y 8

Nota (1): Este ensayo no se tuvo en cuenta en los análisis, puesto que fue un ensayo de prueba, del cual surgió una modificación en la forma de montar las palas.

### 3.5. Análisis de los resultados

Los resultados fueron analizados de la siguiente manera:

- Los parámetros tomados para comparar los resultados de los ensayos son el coeficiente de resistencia aerodinámica del modelo,  $c_{DM}$ , y el parámetro de relación de velocidades,  $k$ .
- En primer lugar, se ha analizado la influencia de la velocidad de la corriente,  $V_v$ , y del ángulo de paso,  $\beta$ , en los parámetros  $c_{DM}$  y  $k$ .
- Seguidamente, se han comparado las actuaciones de las diferentes configuraciones con las de la configuración básica.

En virtud de ser las velocidades de interés para la aplicación del dispositivo mayores que 8 m/s y que, en general,  $c_{DM}$  y  $k$  presentan tendencias asintóticas para las velocidades grandes, se han tomado, como valor para los análisis, los correspondientes a la máxima velocidad ensayada, o bien el valor de  $c_{DM}$  o  $k$ , a la máxima velocidad ensayada, dado por una curva de ajuste. Dichos valores se presentan en la Tabla 3.2.

Asimismo se han repetido algunos ensayos a fin de comprobar la reproducibilidad, cuyos resultados también se presentan.

Los resultados de los ensayos se presentan en el Anexo 1.

#### 3.5.1. Análisis de la configuración básica

Analizados los promedios de los valores de  $c_{DM}$  y  $k$  de los ensayos realizados con la configuración básica (ver Tabla 3.2 y Anexo 1), se observan las siguientes tendencias generales:

- $k$  decrece (aumenta la velocidad de rotación) al aumentar el ángulo de paso y/o la velocidad de la corriente.
- $c_{DM}$  disminuye al aumentar el ángulo de paso, y presenta poca variación con la velocidad de la corriente, excepto para  $V_v = 5,4$  m/s y  $\beta = 8$  grados, donde cae abruptamente.

### 3.5.2. Análisis de las diferentes configuraciones

En la Tabla 3.3 se presentan las diferencias observadas para cada configuración ensayada con respecto a la básica, C01, en los parámetros  $k$  y  $c_{DM}$ . A continuación se comenta la variación de los valores asintóticos de estos parámetros.

De los resultados presentados en la Tabla 3.3, y dentro de las limitaciones del estudio, se observa que:

- En general, las variaciones en la rugosidad afectan más al parámetro  $k$  que al  $c_{DM}$ , es decir, afectan a la velocidad de giro, que, en general, cae, y producen poca variación en la tracción.
- A medida que aumenta el ángulo de guiñada, aumenta  $k$  y disminuye  $c_{DM}$  (ver Figuras 3.11 y 3.12).
- Redondear el borde de ataque no genera cambios (C04).
- La configuración con diámetro mayor genera aumento en  $c_{DM}$ , si bien no pudo ser ensayada en un rango más amplio.
- La mayor rugosidad sobre el intradós, generada por el papel de lija (C07), aumenta ligeramente  $c_{DM}$  cuando el ángulo de paso es pequeño o grande.
- La disposición con dos varillas sobre el intradós (C09) presenta el mayor aumento del parámetro  $k$  (125 %, para  $\beta = 4^\circ$ ). El  $c_{DM}$  presenta una disminución del 7 %.
- Las restantes configuraciones, con varillas, C02, C03, C08, y placas en los cantos, C05, presentan aumento de  $k$  entre el 21 y 87 %, y poca variación en el  $c_{DM}$ .

Como conclusión, se ve que, si se desea aumentar el parámetro  $k$  (disminuir la velocidad de giro) son apropiadas las configuraciones con varillas sobre el intradós y placas en los cantos, aunque debe observarse que el  $c_{DM}$  puede disminuir.

El aumento más importante en el  $c_{DM}$  se observa en la configuración con diámetro mayor.

Tabla 3.2. Valores asintóticos de los parámetros  $k$  y  $c_{DM}$

Configuración	Ensayo N°	$k$				$c_{DM}$			
		$\beta$ [grados]				$\beta$ [grados]			
		2	4	6	8	2	4	6	8
C01	030827	0,39	0,32	-	-	3,4	3,2	-	-
	040428-1	0,45	0,35	0,31	0,29	3,4	3,3	3,2	2,9
	040503-1	0,42	0,35	0,32	0,28	3,5	3,4	3,5	3,1
	040504-1	-	0,33	-	-	-	3,5	-	-
C02	040420-1	-	0,49	-	-	-	3,9	-	-
	040423	-	0,51	0,43	-	-	3,4	3,3	-
C03	040426-1	-	-	0,59	0,50	-	-	3,5	3,1
C01, guiñada 10°	040428-2	-	0,36	-	-	-	3,1	-	-
C01, guiñada 20°	040428-2	-	0,37	-	-	-	2,9	-	-
C04	040428-3	-	0,34	-	-	-	3,3	-	-
C05	040430	0,65	0,48	0,45	-	3,4	3,3	3,1	-
C06	040503-2	0,46	-	-	-	3,8	-	-	-
C07	040504-2	0,38	0,33	0,31	0,30	3,6	3,4	3,3	3,2
	040506-1	0,41	0,35	0,32	0,30	3,6	3,4	3,3	3,2
C08	040506-2	0,55	0,45	0,38	-	3,5	3,4	3,3	-
C09	040426-2	-	0,76	0,59	0,53	-	3,1	3,1	2,8

Tabla 3.3. Resumen de resultados. Variaciones con respecto a la configuración básica

Configuración	Variación de $k$ [%]				Variación de $c_{DM}$ [%]			
	$\beta$ [grados]				$\beta$ [grados]			
	2	4	6	8	2	4	6	8
C02 - Una varilla sobre extradós.	-	48	37	-	-	1	-1	-
C03 - Dos varillas sobre intradós.	-	-	87	75	-	-	4	3
C01 - Con ángulo de guiñada de 10 grados.	-	7	-	-	-	-7	-	-
C01 - Con ángulo de guiñada de 20 grados.	-	10	-	-	-	-13	-	-
C04 - Borde de ataque redondeado	-	1	-	-	-	-1	-	-
C05 - Con placas en los cantos.	55	42	43	-	-1	-1	-7	-
C06 - Diámetro mayor.	10	-	-	-	11	-	-	-
C07 - Mayor rugosidad (lija en intradós).	-6	1	0	5	5	1	-1	7
C08 - Dos varillas sobre intradós, próximas al borde de ataque.	31	33	21	-	2	1	-1	-
C09 - Dos varillas sobre intradós, próximas al borde de salida.	-	125	87	86	-	-7	-7	-7



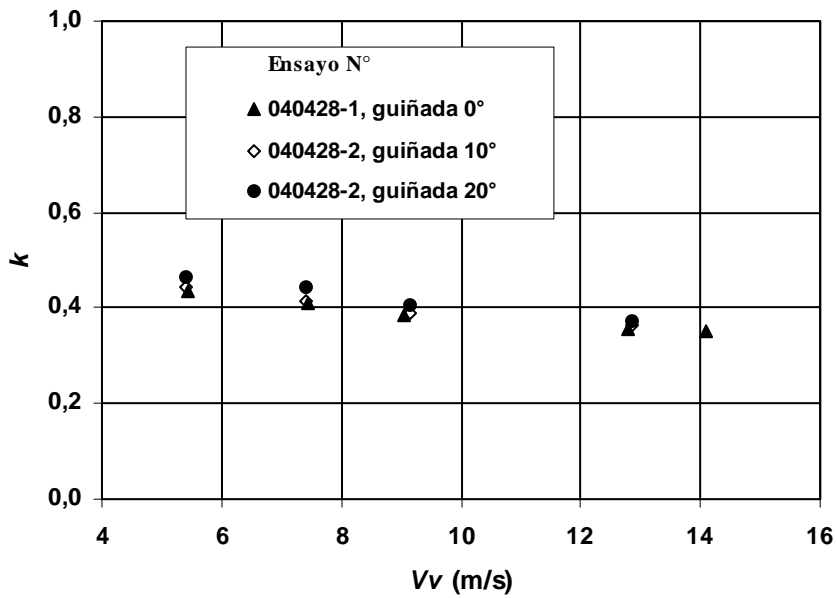


Fig. 3.11. Efecto del ángulo de guiñada en el parámetro  $k$ .

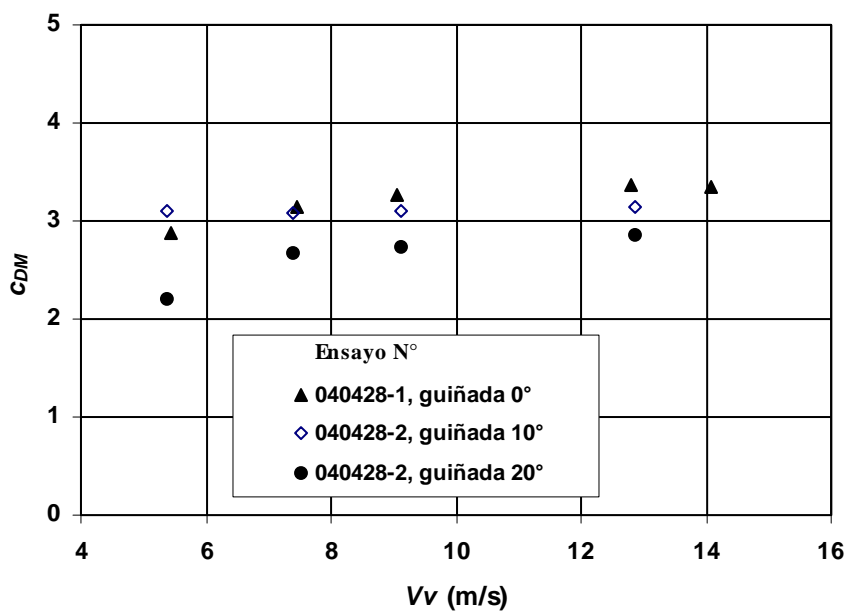


Fig. 3.12. Efecto del ángulo de guiñada en el parámetro  $C_{DM}$ .

### 3.5.3. Análisis de reproducibilidad

Para evaluar en forma global la incertidumbre en los resultados se ha considerado suficiente comparar los resultados obtenidos en tres de las configuraciones que han sido ensayadas entre dos y cuatro veces en condiciones similares. Para comparar se han utilizado las desviaciones estándar de las muestras. Se ha tomado este parámetro como idea del error máximo producido entre ensayos realizados en similares condiciones. Para estimar el error máximo porcentual de la muestra se considera el parámetro definido como la desviación estándar dividida por el valor medio de la muestra (en %). Los resultados de este análisis se presentan en las Tablas 3.4, 3.5 y 3.6. En las Figuras 3.13 a 3.20 se agrupan los resultados de los ensayos de la Configuración básica, C01. El análisis de estos resultados muestra que la reproducibilidad de los ensayos es aceptable (el máximo valor de la desviación estándar dividida por el valor medio es de 7 %).

Tabla 3.4. Análisis de reproducibilidad para la configuración C01

Parámetro	Ensayo N°	$k$				$c_{DM}$			
		$\beta$ [grados]				$\beta$ [grados]			
		2	4	6	8	2	4	6	8
Valor asintótico	030827	0,39	0,32	-	-	3,4	3,2	-	-
	040428-1	0,45	0,35	0,31	0,29	3,4	3,3	3,2	2,9
	040503-1	0,42	0,35	0,32	0,28	3,5	3,4	3,5	3,1
	040504-1	-	0,33	-	-	-	3,5	-	-
Valor medio		0,42	0,34	0,32	0,29	3,43	3,35	3,35	3,00
Desviación estándar		0,03	0,01	0,01	0,01	0,06	0,13	0,21	0,14
Desviación estándar dividida por el valor medio [%]		7,1	4,4	2,2	2,5	1,7	3,9	6,3	4,7

Tabla 3.5. Análisis de reproducibilidad para la configuración C02

Parámetro	Ensayo N°	<i>k</i>				<i>c<sub>DM</sub></i>			
		$\beta$ [grados]				$\beta$ [grados]			
		2	4	6	8	2	4	6	8
Valor asintótico	040420-1	-	0,49	-	-	-	3,4	-	-
	040423	-	0,51	0,43	-	-	3,4	3,3	-
Valor medio		-	0,50	0,43	-	-	3,40	3,30	-
Desviación estándar		-	0,01	-	-	-	0,00	-	-
Desviación estándar dividida por el valor medio [%]		-	2,8	-	-	-	0,0	-	-

Tabla 3.6. Análisis de reproducibilidad para la configuración C07

Parámetro	Ensayo N°	<i>k</i>				<i>c<sub>DM</sub></i>			
		$\beta$ [grados]				$\beta$ [grados]			
		2	4	6	8	2	4	6	8
Valor asintótico	040504-2	0,38	0,33	0,31	0,3	3,6	3,4	3,3	3,2
	040506-1	0,41	0,35	0,32	0,3	3,6	3,4	3,3	3,2
Valor medio		0,40	0,34	0,32	0,30	3,60	3,40	3,30	3,20
Desviación estándar		0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Desviación estándar dividida por el valor medio [%]		5,4	4,2	2,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

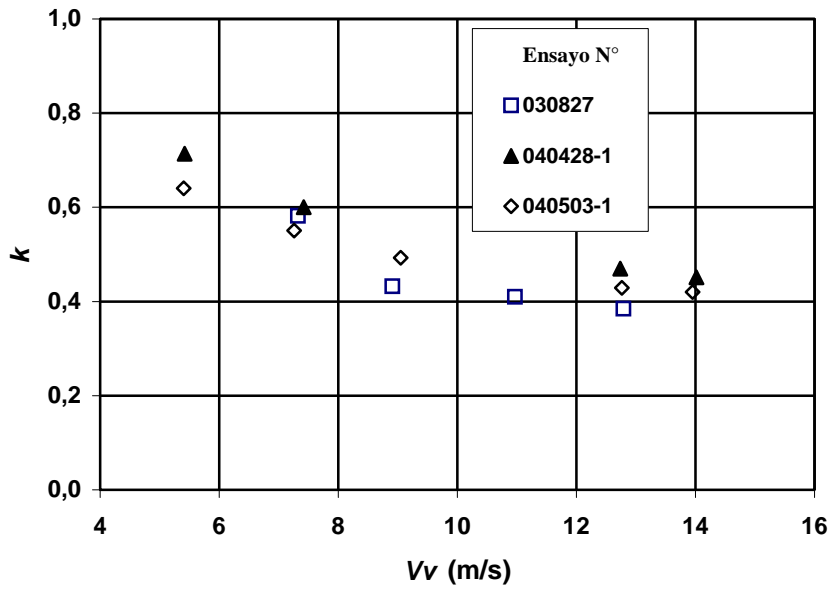


Fig. 3.13. Configuración básica, C01,  $\beta = 2^\circ$ .

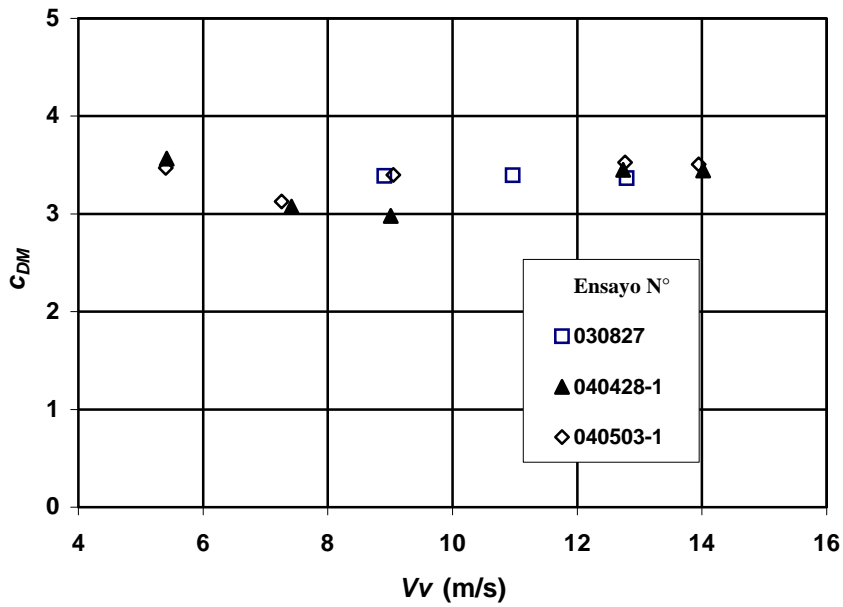


Fig. 3.14. Configuración básica, C01,  $\beta = 2^\circ$ .

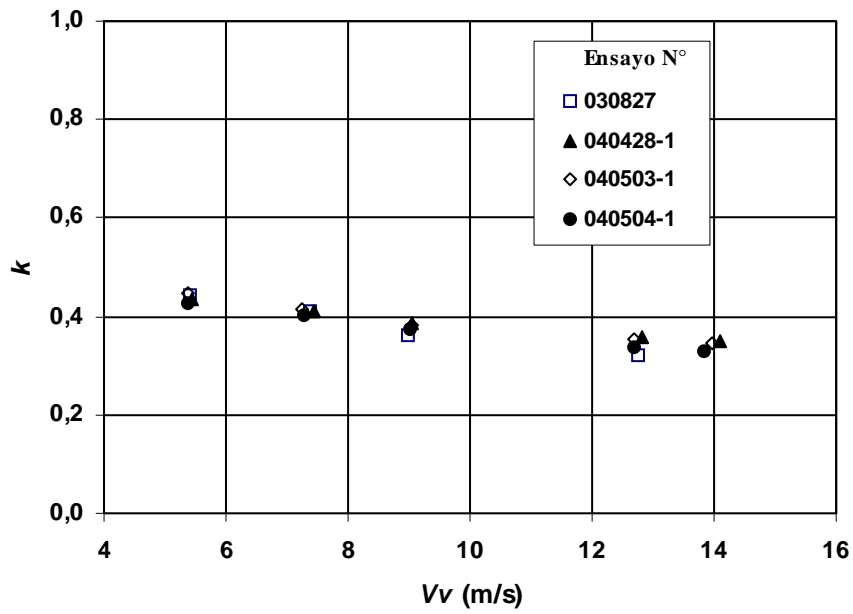


Fig. 3.15. Configuración básica, C01,  $\beta = 4^\circ$ .

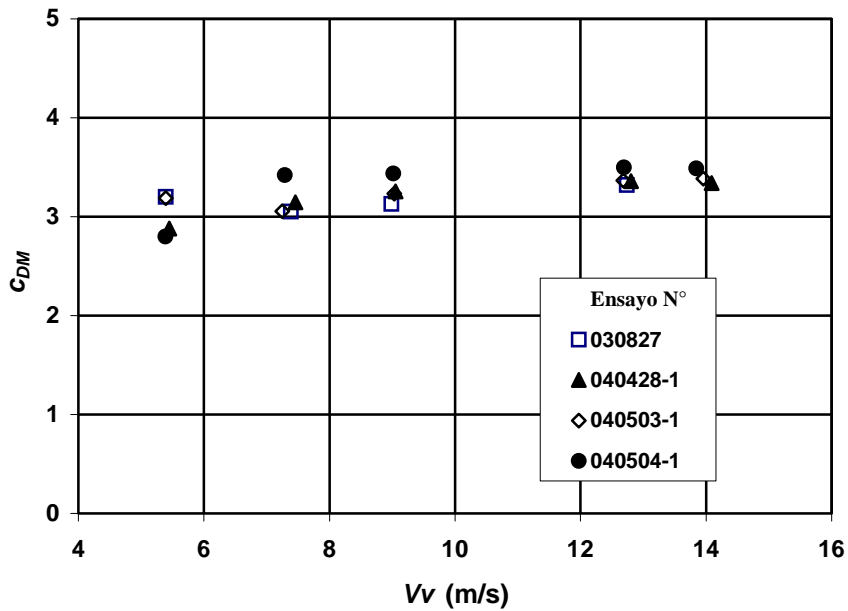


Fig. 3.16. Configuración básica, C01,  $\beta = 4^\circ$ .

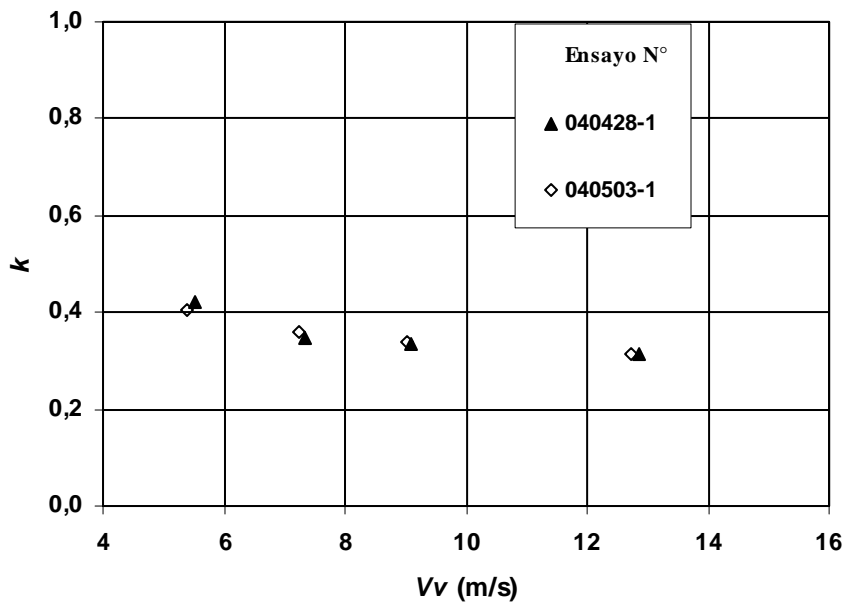


Fig. 3.17. Configuración básica, C01,  $\beta = 6^\circ$ .

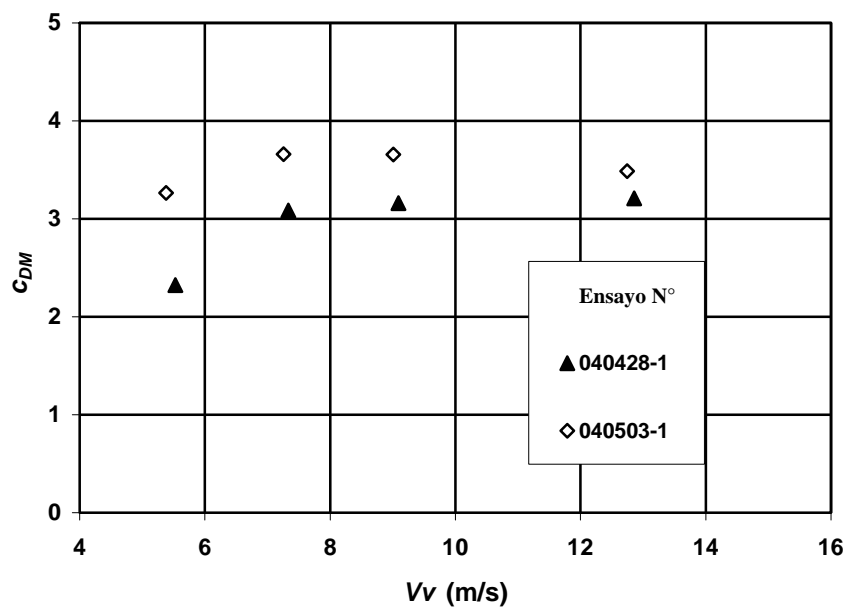


Fig. 3.18. Configuración básica, C01,  $\beta = 6^\circ$ .



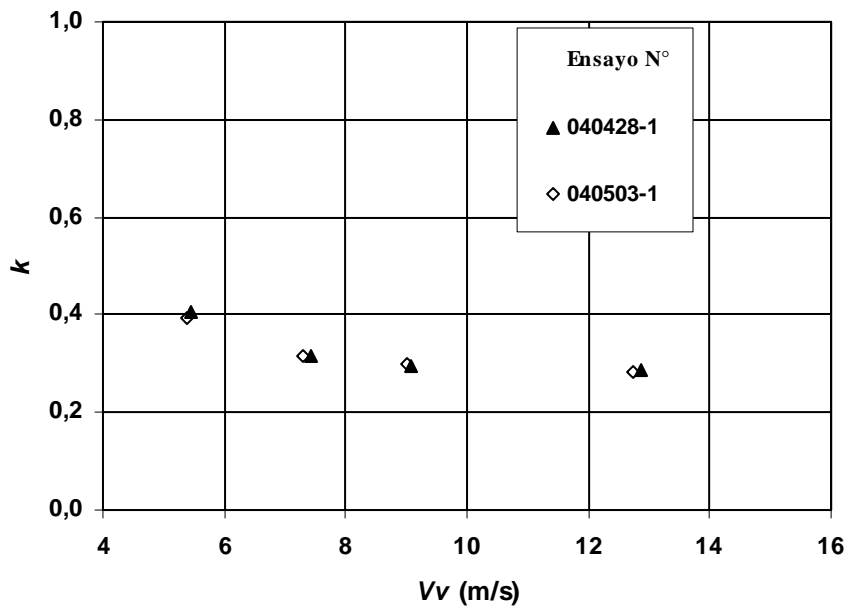


Fig. 3.19. Configuración básica, C01,  $\beta = 8^\circ$ .

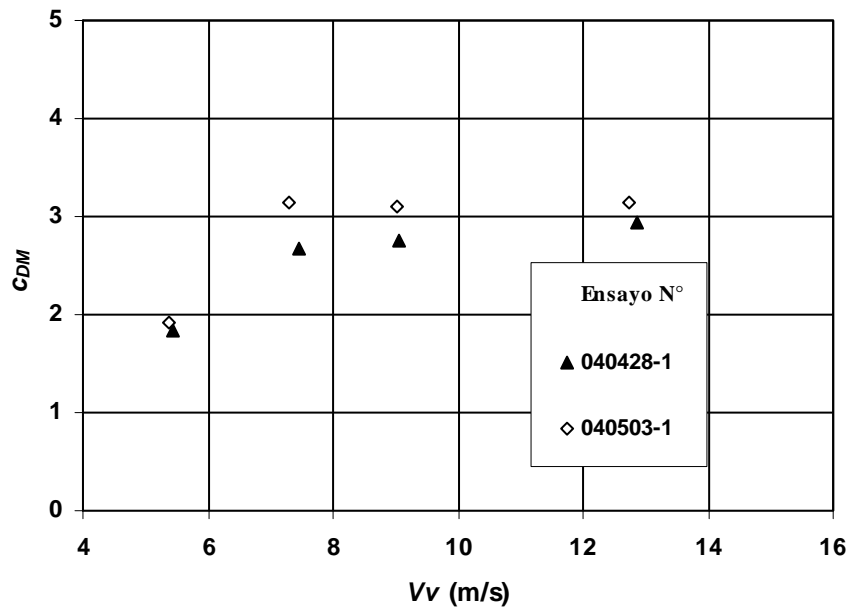


Fig. 3.20. Configuración básica, C01,  $\beta = 8^\circ$ .

#### 3.5.4. Visualización del flujo

Debido a que el flujo es aproximadamente estacionario cuando se describe en ejes cuerpo, y debido a la dificultad de montar un sistema de visualización fijo a dichos ejes, se ha optado por emplear un registro en fase con la rotación del cuerpo. El método más sencillo de realizar el concepto es el empleo de iluminación estroboscópica, que permite “congelar” la imagen del flujo en una determinada posición del cuerpo. El estudio se ha centrado en observar el flujo en las palas para determinar el grado de adherencia o desprendimiento de la capa límite, como elemento más significativo de la descripción del flujo sobre las palas. Para ello, se han dispuesto hilos de lana sobre las palas, se ha empleado una lámpara estroboscópica y se ha recogido la imagen con una cámara digital. La dificultad de obtener fotografías claras (ver Figuras. 3.21 y 3.22) ha aconsejado presentar los resultados en forma de esquemas que recogen la información presente en las fotografías.

Se ha observado que, independientemente de cuál fuera la configuración observada, el patrón general de flujo no varía con el ángulo de paso de las palas ni con la velocidad de la corriente. El flujo es estacionario, según un sistema de referencia fijo al modelo (ejes cuerpo).

Las visualizaciones del flujo se presentan en esquemas, con vistas desde corriente arriba del modelo (intradós de las palas) y desde corriente abajo del modelo (extradós de las palas).



Fig. 3.21. Flujo sobre el intradós durante un ensayo.

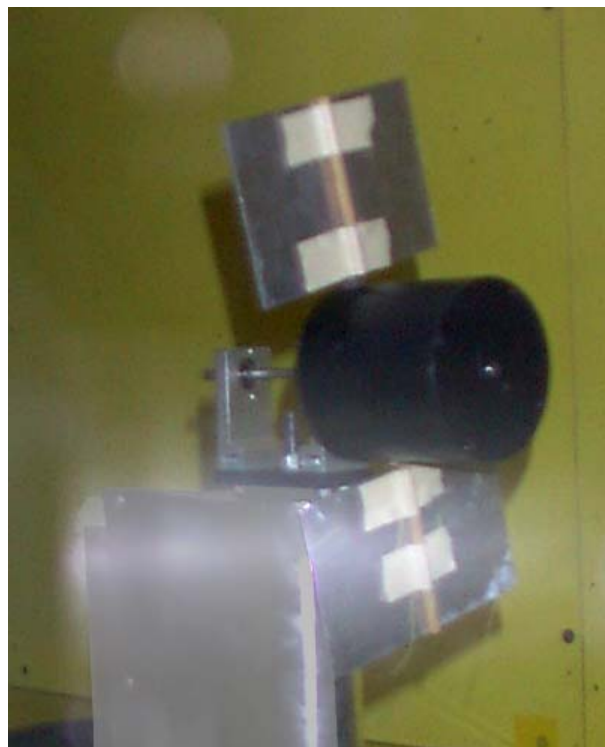


Fig. 3.22. Flujo sobre el intradós durante un ensayo de la configuración C02.

- Configuración básica, C01

Se ha observado flujo adherido tanto en extradós como en intradós, excepto a lo largo del borde de ataque del extradós, donde se ha apreciado la presencia de un vórtice, que crece en dirección de la envergadura. En el intradós, en el extremo del borde de ataque próximo al radio interno, se ha observado un exiguo flujo que se dirige hacia el extradós. El flujo es predominantemente radial en la zona del borde de salida y en la zona central de la pala forma un ángulo de unos 45 grados con la dirección radial. Este comportamiento está representado en el esquema de la Fig. 3.23.

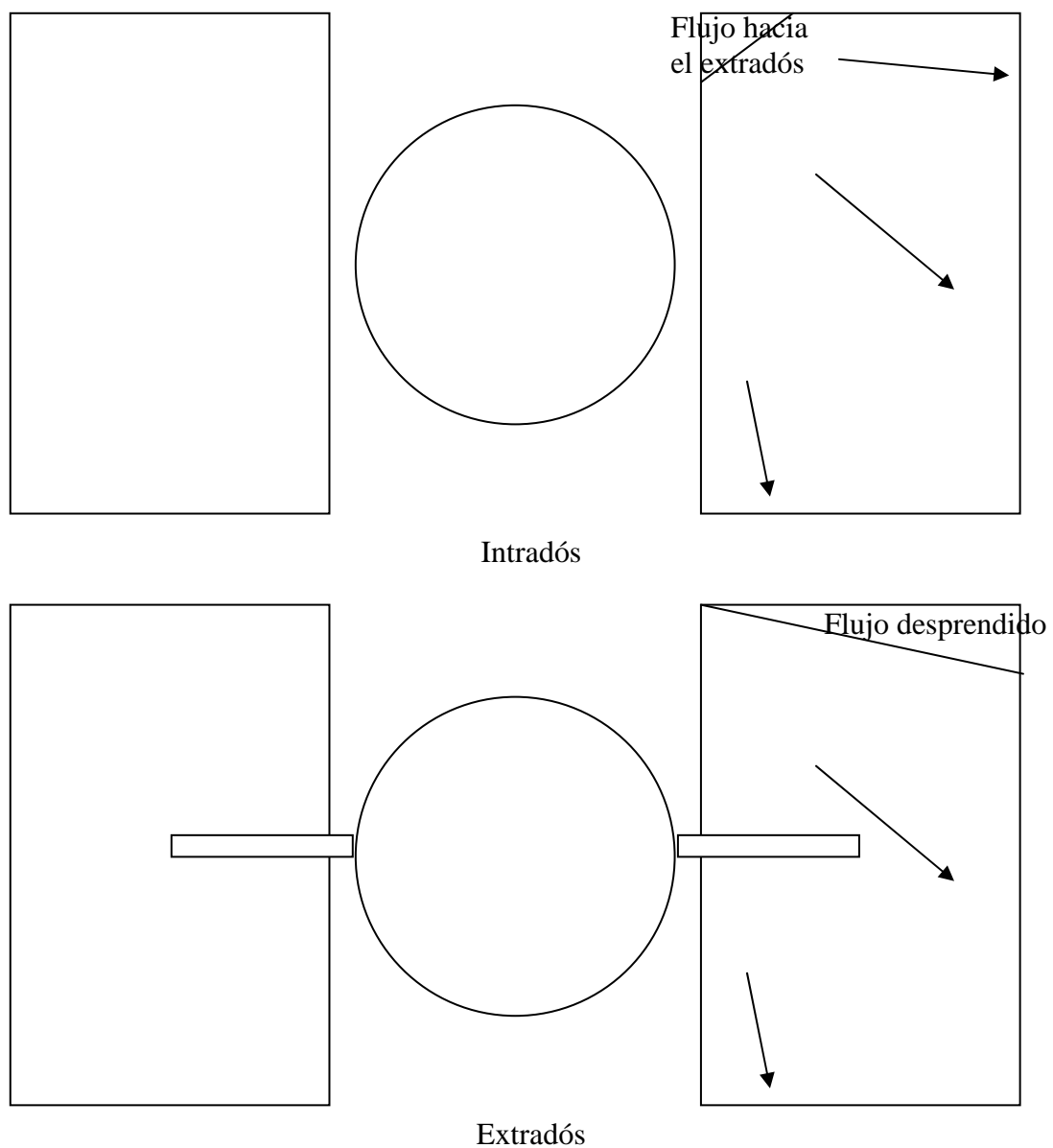


Fig. 3.23. Esquema del flujo en intradós y extradós para la configuración C01.

- Configuración con una varilla sobre intradós, C02

La configuración es similar a la anterior, C01, excepto en la zona central de la pala, donde se encuentra la varilla. Allí el flujo se orienta algo más en dirección radial, según la dirección de la varilla.

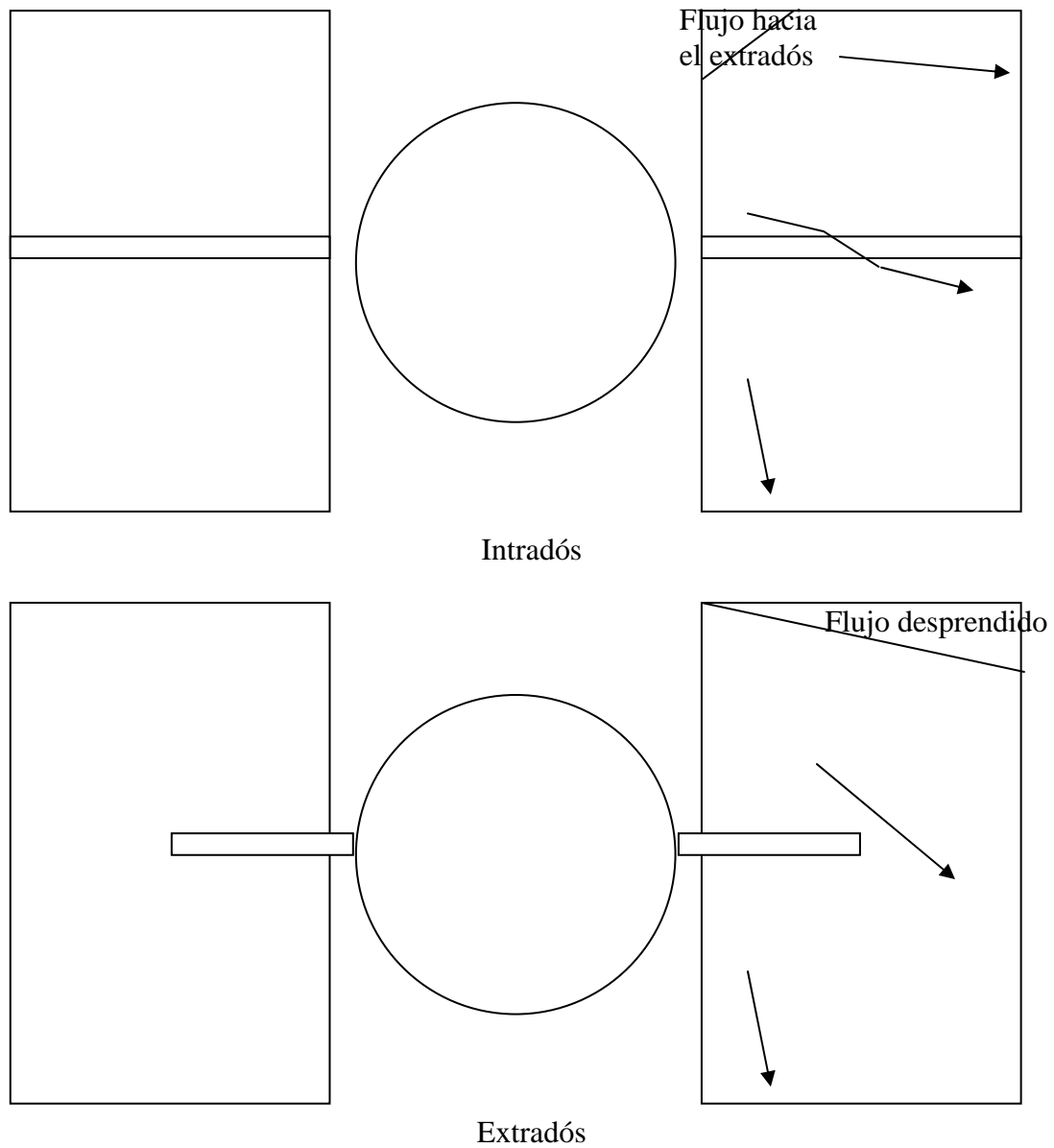


Fig. 3.24. Esquema del flujo en intradós y extradós para la configuración C02.

- Configuración con dos varillas sobre intradós, C03

La configuración es similar a la anterior, C02. La varilla, situada en el borde de ataque, no evita el desprendimiento del flujo allí.

- Configuración con el borde de ataque redondeado, C04

El borde de ataque redondeado no evita los desprendimientos de flujo observados en la Configuración básica, C01.

- Configuración con placas en los cantos, C05

Los desprendimientos de flujo en el borde de ataque, observados en la Configuración básica, C01, también aquí se mantienen.

En la zona de las placas de canto, el flujo las supera sin alterarse su dirección.

- Configuraciones C06, C07 y C08

No se ha visualizado el flujo.

- Configuración con dos varillas sobre intradós, C09

No se ha observado que la varilla situada en la zona del borde de fuga del intradós de la pala altere la configuración del flujo.

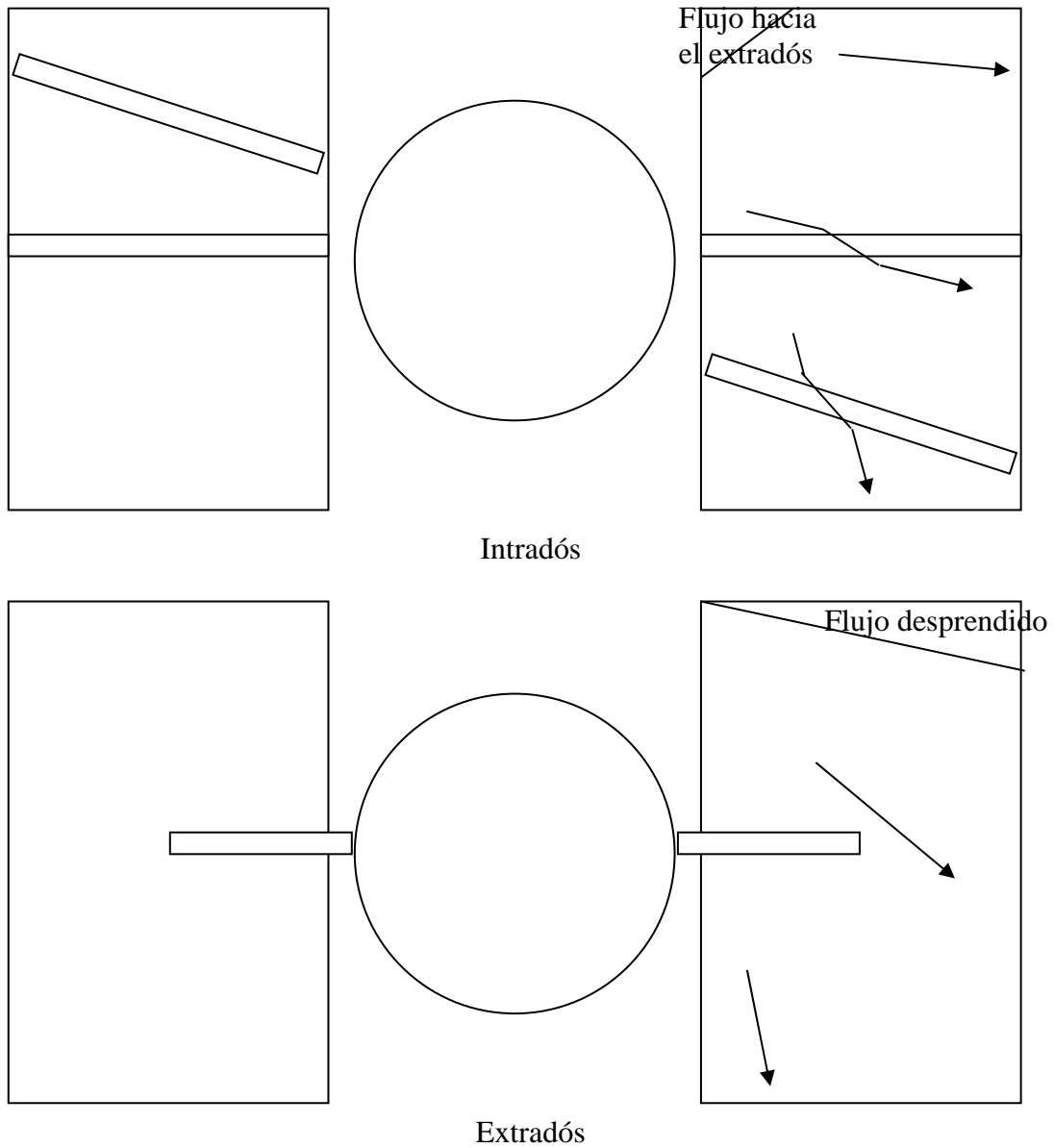


Fig. 3.25. Esquema del flujo en intradós y extradós para la configuración C09.

### 3.6. Observaciones referentes a los ensayos experimentales

- Respecto de la configuración básica, se ha observado que  $k$  decrece con el ángulo de paso y con la velocidad de la corriente; y que  $c_{DM}$  disminuye al aumentar el ángulo de paso, y presenta poca variación con la velocidad de la corriente, excepto para  $V_v = 5,4$  m/s y  $\beta = 8$  grados, donde cae abruptamente.
- En cuanto a la comparación de las restantes configuraciones con la básica, se ha observado un aumento del parámetro  $k$  para todas las configuraciones, excepto para algunos ensayos de la configuración C07 (papel de lija en el intradós). Respecto del  $c_{DM}$ , el comportamiento es dispar, en cuanto a variaciones respecto a la configuración básica. En general, este parámetro baja, excepto en casos puntuales: configuración con dos varillas sobre el extradós, C03; con diámetro mayor, C06, (esta configuración no fue ensayada en profundidad) y con mayor rugosidad en el intradós, C07.

Las variaciones máximas en el  $c_{DM}$  están en el orden del 10 %, mientras que en  $k$  alcanzan el 125 %.

- Respecto a la reproducibilidad de los ensayos, se considera buena.
- Respecto a las configuraciones del flujo, se ha observado que, independientemente de cuál es la configuración observada, el patrón de flujo no varía con el ángulo de paso de las palas ni con la velocidad de la corriente. Se ha observado flujo adherido tanto en extradós como en intradós, excepto a lo largo del borde de ataque del extradós, donde se aprecia la presencia de un vórtice, que crece en dirección de la envergadura. En el intradós, en la zona del borde de ataque próxima al radio interno, se ha observado un pequeño desprendimiento (ese flujo se dirige hacia el extradós). El flujo es predominantemente radial en la zona del borde de ataque, se orienta según la cuerda en la zona del borde de salida y en la zona central de la pala forma un ángulo de unos 45 grados con la dirección radial.

Los cambios introducidos en cada configuración solamente cambian localmente, en el entorno de esos obstáculos, la configuración del flujo.

El flujo es estacionario, en un sistema de referencia fijo al cuerpo, como se deduce de la buena definición de las imágenes.



### **3.7. Conclusiones referentes a los ensayos experimentales**

- Para obtener menores velocidades de giro (mayores valores del parámetro  $k$ ), aumentar la rugosidad en las palas es beneficioso, al igual que trabajar con ángulos de paso pequeños.
- Para obtener mayor tracción es conveniente trabajar con ángulos de paso pequeños.

## 4. COMPARACIÓN DEL MODELO TEÓRICO CON LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

### 4.1. Tratamiento de los datos experimentales

Para poder comparar los resultados experimentales con los modelos teóricos es necesario procesar adecuadamente los primeros. A los datos experimentales se les ha aplicado el siguiente tratamiento:

#### 4.1.1. Corrección de la tracción

Puesto que el modelo teórico no contempla la resistencia del cilindro, al valor de la tracción medido en los ensayos se resta la tracción correspondiente al cilindro:

$$T = T_{medida} - T_{cilindro} = T_M - \frac{1}{2} \rho V_v^2 c_{DC} S_c \quad (4.1)$$

La tracción del cilindro se calcula teóricamente a partir del coeficiente de resistencia de un cilindro que gira,  $c_{DC}$ , (Hoerner, 1965). Este coeficiente es prácticamente constante en el rango de velocidades de giro a que se ha ensayado el modelo.

#### 4.1.2. Velocidad inducida de referencia

La velocidad inducida de referencia se calcula a partir de la expresión (2.17), que surge de la teoría de cantidad de movimiento:

$$v_{io} = \sqrt{\frac{T}{2\rho S_D}} \quad (4.2)$$

Mediante las siguientes ecuaciones se obtienen las velocidades adimensionales de caída y de giro:

$$\overline{V}_v = \frac{V_v}{v_{i0}} \quad (4.3)$$

$$\overline{U_T} = \left( \frac{\Omega R}{v_{io}} \right) \quad (4.4)$$

#### 4.1.3. Corrección por ubicación del centro de presiones

En el análisis teórico se supuso que la posición del centro de presiones de la pala en el movimiento giratorio,  $r$ , está en la sección del extremo de la pala del modelo ( $r = R$ ). Esto no representa la realidad, puesto que se espera que esa sección esté situada en una posición más centrada de la envergadura de la pala. Por esto, se ha probado el ajuste del modelo para  $r$  variable. De esta forma la velocidad tangencial que incide sobre la pala se ha variado en función de  $r$ . Esta corrección se ha realizado sobre los datos de los ensayos, como se explica a continuación.

Se han considerado los datos experimentales adimensionales corregidos teniendo en cuenta los siguientes valores de  $r = 0,36 R$ ;  $0,55 R$ ;  $0,7 R$  y  $0,84 R$ . Esto corresponde a las secciones 0; 0,25; 0,5 y 0,75 de la envergadura de la pala. De aquí en adelante se denomina “radio equivalente”,  $r_e$ , a la relación de radios  $r/R$ .

Habiendo analizado los resultados de las comparaciones entre el modelo teórico y los experimentos, y las visualizaciones del flujo, se ha adoptado como posición radial del centro de presiones el 60 % de la envergadura de la pala (que se corresponde con la posición radial del centro de presiones  $r_e = 0,75$ ).

Los parámetros experimentales adimensionales se corrigen mediante las ecuaciones:

$$k_e = \frac{\overline{V_v}}{\overline{U_T}} \frac{1}{r_e} \quad (4.5)$$

$$\overline{V_{v_e}} = \overline{V_v} \quad (4.6)$$

$$\overline{U_{T_e}}^2 = \overline{U_T}^2 r_e^2 \quad (4.7)$$

donde  $k_e$  es la relación de velocidades equivalente,  $\overline{V}_v$  la velocidad de la corriente adimensional equivalente y  $\overline{U}_T$  la velocidad tangencial adimensional equivalente.

#### 4.2. Datos experimentales utilizados para la comparación

Para la comparación con los modelos teóricos se han tomado los valores medios de los parámetros  $k$ ,  $\overline{V}_v$  y  $\overline{U}_T^2$  de los ensayos realizados para las configuraciones C01, C03, C07 y C09. Se han elegido estas configuraciones para la comparación porque hay ensayos repetidos (lo que permite tener mayor certeza en los valores obtenidos) y porque presentan valores extremos de rugosidad (lo que es conveniente a la hora de validar el modelo teórico).

Para el análisis se han tomado los valores asintóticos (valores correspondientes a la máxima velocidad ensayada). Estos datos se muestran en las Tablas 4.1 a 4.4.

Tabla 4.1. Parámetros experimentales. Configuración C01,  $r_e = 1$

$\beta$ [°]	$k$	$\overline{V}_v$	$\overline{U}_T^2$
2	0,42	1,74	16
4	0,34	1,76	26
6	0,32	1,77	31
8	0,29	1,86	42

Tabla 4.2. Parámetros experimentales. Configuración C03,  $r_e = 1$

$\beta$ [°]	$k$	$\overline{V}_v$	$\overline{U}_T^2$
6	0,61	1,74	9
8	0,52	1,85	14

Tabla 4.3. Parámetros experimentales. Configuración C07,  $r_e = 1$

$\beta$ [°]	$k$	$\bar{V}_v$	$\bar{U}_T^2$
2	0,41	1,72	19
4	0,36	1,76	27
6	0,33	1,8	33
8	0,31	1,82	37

Tabla 4.4. Parámetros experimentales. Configuración C09,  $r_e = 1$

$\beta$ [°]	$k$	$\bar{V}_v$	$\bar{U}_T^2$
4	0,79	1,85	6
6	0,62	1,86	10
8	0,56	1,96	14

### 4.3. Comparación de los resultados experimentales con los modelos teóricos

Por un lado, los resultados experimentales pueden transformarse en series de valores de los parámetros  $k_1$ ,  $-\bar{V}_v$  y  $\bar{U}_T^2$  en función de los valores del paso de las palas,  $\beta$ . Por otro lado, el modelo teórico incluye un conjunto de parámetros adimensionales que en principio son desconocidos ( $c_{D0}$ ,  $c_{L\alpha}$ ,  $a$ ). La manera de determinarlos es encontrar los valores que proporcionan un mejor ajuste entre los resultados teóricos y experimentales.

Solamente se mencionan los resultados de la comparación utilizando el modelo teórico más evolucionado, que tiene en cuenta la variación de  $c_D$  con el ángulo de ataque.

El tratamiento de datos y la determinación de los resultados teóricos se han obtenido mediante un programa de ordenador desarrollado en el lenguaje Matlab.

Para realizar la comparación se ha definido una distancia normalizada,  $B$ , entre los valores teóricos y los experimentales (que obviamente depende de los parámetros  $c_{D0}$ ,  $\alpha$  y  $c_{L\alpha}$ ) dada por la expresión:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^3 dif(p_i)}{3} \quad (4.8)$$

donde:

$$dif(p_i) [\%] = 100 \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N (p_{iexp}(\beta_j) - p_{iteo}(\beta_j))^2}}{\sum_{j=1}^N p_{iexp}(\beta_j)} \quad (4.9)$$

donde  $dif(p_i)$  es la diferencia entre los valores teóricos y experimentales para cada parámetro  $p_i$ ;  $p_i$  representa cada uno de los parámetros:  $p_1 = k$ ,  $p_2 = -\bar{V}_v$ ,  $p_3 = \bar{U}_T^2$ ;  $p_{iexp}(\beta_j)$  es el valor experimental del parámetro  $p_i$  para el ángulo de paso  $\beta_j$ ;  $p_{iteo}(\beta_j)$  es el valor teórico del parámetro  $p_i$  para el ángulo de paso  $\beta_j$  y  $N$  es el número de casos considerados para cada parámetro  $p_i$  (coincide con la cantidad de ángulos de paso ensayados experimentalmente para cada configuración).

Se ha determinado el conjunto de valores de los tres coeficientes que minimizan la distancia  $B$  y, por lo tanto, los resultados obtenidos son los que mejor ajustan el modelo teórico al conjunto de las configuraciones experimentales (de acuerdo a la medida de distancia empleada).

El resultado de la comparación entre el modelo teórico y los resultados experimentales se muestra en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5. Comparación entre el modelo teórico y los resultados experimentales para diversas configuraciones. Valores de  $c_{D0}$ ,  $a$  y  $c_{L\alpha}$  que minimizan la distancia normalizada  $B$ . Diferencia entre los valores teóricos y los experimentales, para el mejor ajuste,  $dif(k)$ ,  $dif(\bar{V}_v)$ ,  $dif(\bar{U}_T^2)$  de acuerdo a (4.9)

Configuración experimental	$c_{D0}$ (teórico)	$a$ (teórico)	$c_{L\alpha}$ (teórico)	$dif(k)$ [%]	$dif(\bar{V}_v)$ [%]	$dif(\bar{U}_T^2)$ [%]	$B$ [%]	$N$ Cantidad de ángulos de paso ensayados
C01	0,07	2,4	3,4	4,7	6,6	6	5,7	4
C03	0,35	2,3	4,8	4,7	8,4	12,3	8,4	2
C07	0,08	2	3,4	3	7	4	4,6	4
C09	0,38	2,7	4,6	7	3,7	14,5	8,4	3

Nota: (teórico), significa que esos valores usados en el modelo teórico fueron los que proporcionaron la mínima distancia normalizada en la comparación con los resultados experimentales.

En las Figs. 4.1 a 4.4 se muestran los resultados del modelo teórico, los resultados experimentales y las curvas de ajuste a los puntos experimentales, para los parámetros  $k$ ,  $\bar{V}_v$  y  $\bar{U}_T^2$ , para las configuraciones C01, C03, C07 y C09, para los valores de  $c_{D0}$ ,  $\alpha$  y  $c_{L\alpha}$  recogidos en la Tabla 4.5.

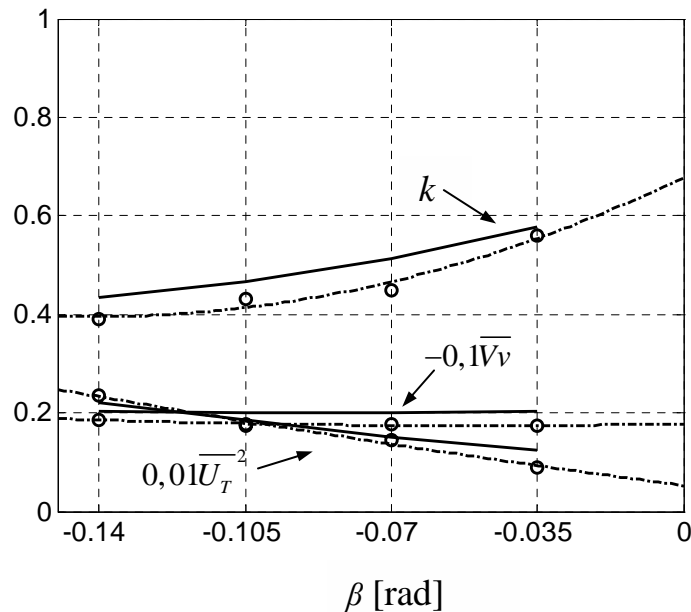


Fig. 4.1. Configuración C01. Curvas teóricas (línea continua), puntos experimentales (círculos) y curvas de ajuste a los puntos experimentales (línea punto-rama), para los parámetros  $k$ ,  $\bar{V}_v$  y  $\bar{U}_T^2$ .

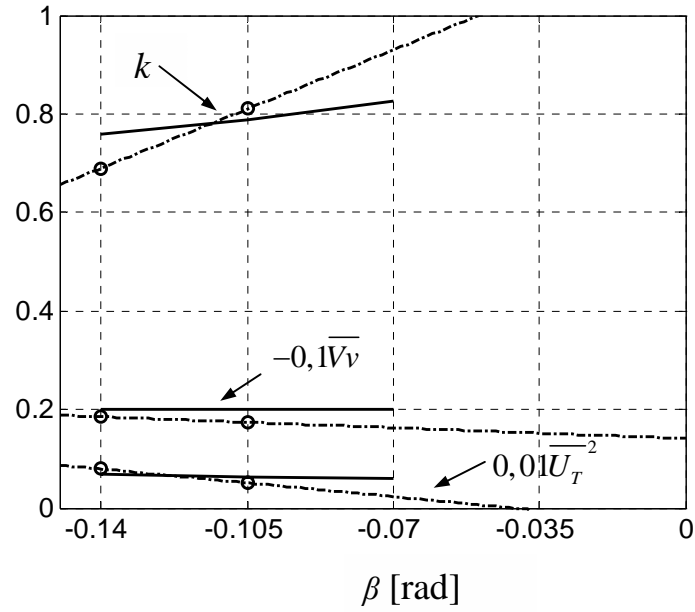


Fig. 4.2. Configuración C03. Curvas teóricas (línea continua), puntos experimentales (círculos) y curvas de ajuste a los puntos experimentales (línea punto-rama), para los parámetros  $k$ ,  $\overline{Vv}$  y  $\overline{U_T}^2$ .

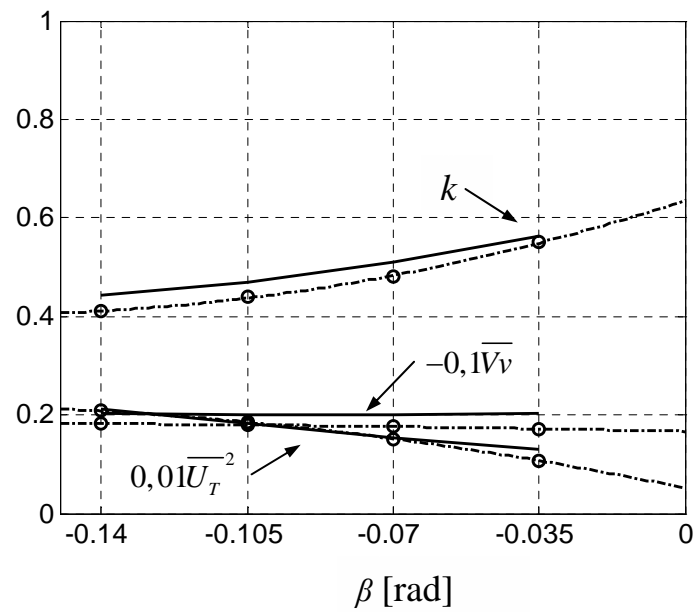


Fig. 4.3. Configuración C07. Curvas teóricas (línea continua), puntos experimentales (círculos) y curvas de ajuste a los puntos experimentales (línea punto-rama), para los parámetros  $k$ ,  $\overline{Vv}$  y  $\overline{U_T}^2$ .



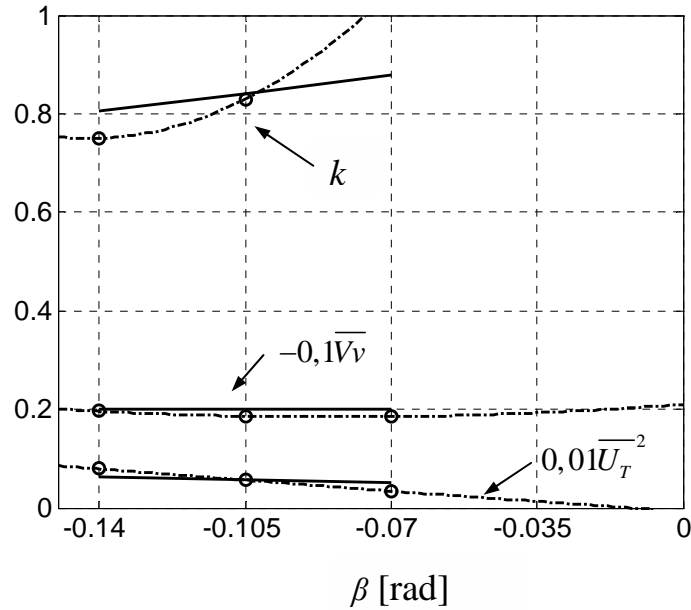


Fig. 4.4. Configuración C09. Curvas teóricas (línea continua), puntos experimentales (círculos) y curvas de ajuste a los puntos experimentales (línea punto-rayado), para los parámetros  $k$ ,  $\overline{Vv}$  y  $\overline{U_T}^{-2}$ .

#### 4.4. Observaciones y conclusiones referentes a la comparación

Como resumen de los datos presentados en este capítulo, pueden destacarse las siguientes conclusiones:

- Como es de esperar, la rugosidad de las palas se traduce en un aumento del coeficiente  $c_{D0}$ . Resulta ser 0,07 y 0,08, para las configuraciones con menor rugosidad, C01 y C07; y 0,35 y 0,38, para las configuraciones con mayor rugosidad, C03 y C09, respectivamente.
- El parámetro  $a$  varía entre 2 y 2,7. A modo de comentario, en el trabajo (Pelletier y Mueller, 2000), para una placa plana rectangular de alargamiento 3 el factor  $a$  tiene un valor de aproximadamente 2,9 (tomado del gráfico de los ensayos experimentales).
- Las diferencias en el parámetro  $k$  se encuentran entre el 3 % y 7 % aproximadamente.
- Las diferencias en el parámetro  $\overline{Vv}$  se sitúan entre el 4 % y 8 % aproximadamente.

- Las diferencias en el parámetro  $\overline{U_T}^2$  se sitúan entre el 4 % y 6 % para las configuraciones con menor rugosidad, C01 y C07; y entre el 12 % y 14 % aproximadamente para las configuraciones con mayor rugosidad, C03 y C09.
- Se considera que el modelo teórico se ajusta razonablemente bien a los resultados experimentales. Se han probado diversas posibilidades y se ha encontrado que no es posible mejorar el ajuste, por lo que las diferencias existentes se deben, por un lado, a los propios errores asociados a los resultados experimentales y, por otro lado, a la idoneidad de las hipótesis con que se ha elaborado el modelo.

## 5. ANÁLISIS DINÁMICO TEÓRICO

### 5.1. Caída simétrica de cuerpo simétrico

El objeto de este capítulo es presentar el estudio de la dinámica de la caída de un cuerpo provisto de palas o aletas. Al caer éste en la atmósfera se generan fuerzas aerodinámicas sobre las palas, que imprimen un movimiento de rotación al cuerpo. El objeto del presente apartado es obtener las ecuaciones que rigen el movimiento del cuerpo.

Considérese un cuerpo que cae a velocidad uniforme,  $U_\infty$ , según la vertical y girando con velocidad  $\bar{\omega}$ . La geometría está definida en las Figs. 5.1 y 5.2. Los ejes cuerpo se designan 1,2,3, con direcciones  $e_1, e_2, e_3$  y origen situado en el centro de masas. El sistema de referencia inercial es  $X, Y, Z$ , cuyos ejes poseen las direcciones  $i, j, k$ . El eje de simetría 3 es eje principal de inercia.

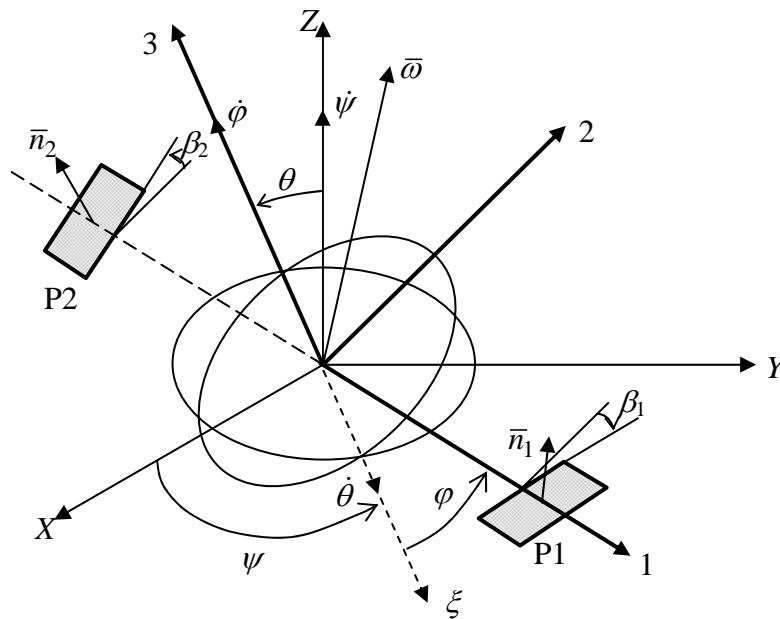


Fig. 5.1. Definición de la geometría.  $\psi$ , precesión;  $\theta$ , nutación;  $\phi$ , rotación propia.  $(X, Y, Z)$ : sistema de referencia inercial.  $(1, 2, 3)$ : sistema de referencia fijo al cuerpo.  $\bar{\omega}$ : velocidad angular.

Las palas P1 y P2 están a un ángulo de ataque compuesto por la incidencia del movimiento relativo con respecto al plano 1,2, más el producido por el giro de los ejes 1,2,3 con respecto a  $X, Y, Z$ , más el paso de las palas.

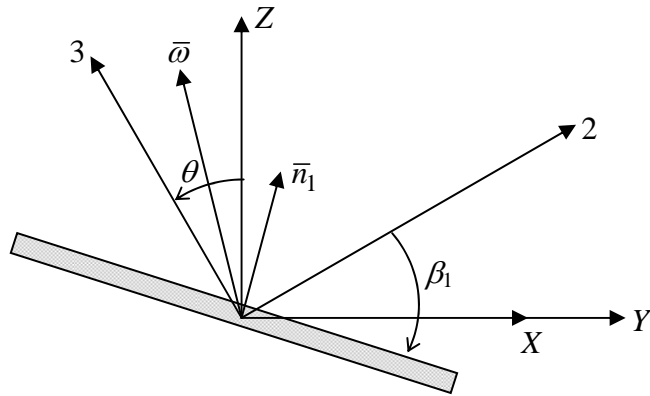


Fig. 5.2. Vista desde el eje 1 de la pala P1, con  $\varphi = 0$ .

El ángulo de ataque se deduce de la expresión:

$$\bar{V} \cdot \bar{n} = V_n = |V| \sin \alpha \quad (5.1)$$

donde  $\bar{n}$  es el versor normal a la pala.

### 5.1.1. Análisis para la pala P1

La pala P1 está situada sobre el lado positivo del eje 1. La velocidad relativa al viento de la pala P1, referida a ejes cuerpo, debida solamente a la rotación, suponiendo fijo el centro de masas y que éste está en el plano 1,2, viene dada por:

$$\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{P1} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ r_{p11} & r_{p12} & r_{p13} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_3 \\ -\omega_2 \end{Bmatrix} r_{p11} \quad (5.2)$$

donde  $\bar{r}_{P1} = (r_{p11}, 0, 0)$  designa la posición del punto representativo de la pala P1 en ejes cuerpo.

La velocidad del fluido relativa a la pala es, suponiendo  $\theta \ll 1$ :

$$\bar{V}_{rel1} = -\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{p1} + U_{\infty} \bar{k} = r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_3 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} + U_{\infty} \begin{Bmatrix} \theta \sin \varphi \\ \theta \cos \varphi \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{\infty} \theta \sin \varphi \\ -\omega_3 r_{p11} + U_{\infty} \theta \cos \varphi \\ \omega_2 r_{p11} + U_{\infty} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

donde  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\theta$  son los ángulos de precesión, rotación propia y nutación que definen el movimiento de los ejes cuerpo con respecto a los inerciales, según la Fig. 5.1.

En la expresión (5.3) se ha considerado que  $\bar{k}$  es la dirección de la corriente  $U_{\infty}$ , que en ejes cuerpo es:

$$\bar{k} = (k_1, k_2, k_3) \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{Bmatrix} \cong (\theta \sin \varphi, \theta \cos \varphi, 1) \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

La dirección del versor normal a la pala P1 es:

$$\bar{n}_1 = (0, \sin \beta, \cos \beta) \quad (5.5)$$

El módulo de la componente normal a la pala P1 de la velocidad relativa es:

$$\begin{aligned} V_{n1} &= \bar{V}_{rel1} \cdot \bar{n}_1 = [r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_3 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} + U_{\infty} \begin{Bmatrix} \theta \sin \varphi \\ \theta \cos \varphi \\ 1 \end{Bmatrix}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin \beta \\ \cos \beta \end{Bmatrix} \\ &= r_{p11} [-\omega_3 \sin \beta + \omega_2 \cos \beta] + U_{\infty} [\theta \cos \varphi \sin \beta + \cos \beta] \end{aligned} \quad (5.6)$$

que para  $\beta \ll 1$  resulta:

$$V_{n1} \approx r_{p11} [-\omega_3 \beta + \omega_2] + U_{\infty} [\theta \beta \cos \varphi + 1] \quad (5.7)$$

Como comprobación de la expresión (5.7) se consideran los casos siguientes:

$$\text{Caso 1: } \theta = 0, \beta = 0 \rightarrow V_{n1} = r_{p11} \omega_2 + U_{\infty} \quad (5.8)$$

$$\text{Caso 2: } (\theta = 0, \omega_2 = 0) \rightarrow V_{n1} = -r_{p11}\omega_3\beta + U_\infty \quad (5.9)$$

En la pala P1 el ángulo de ataque (Fig. 5.3) viene dado por:

$$\sin\alpha_1 = \frac{V_{n1}}{V_{rel1}} = \frac{r_{p11}(-\omega_3\beta + \omega_2) + U_\infty(\theta\beta\cos\varphi + 1)}{V_{rel1}} \quad (5.10)$$

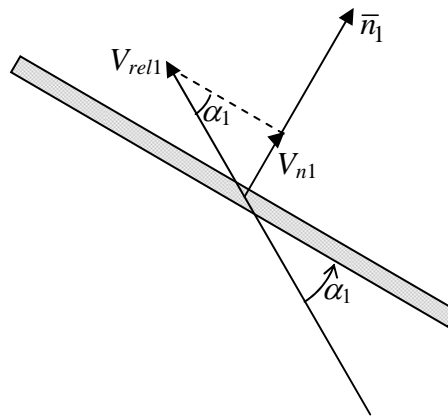


Fig. 5.3. Determinación del ángulo de ataque,  $\alpha_1$ .

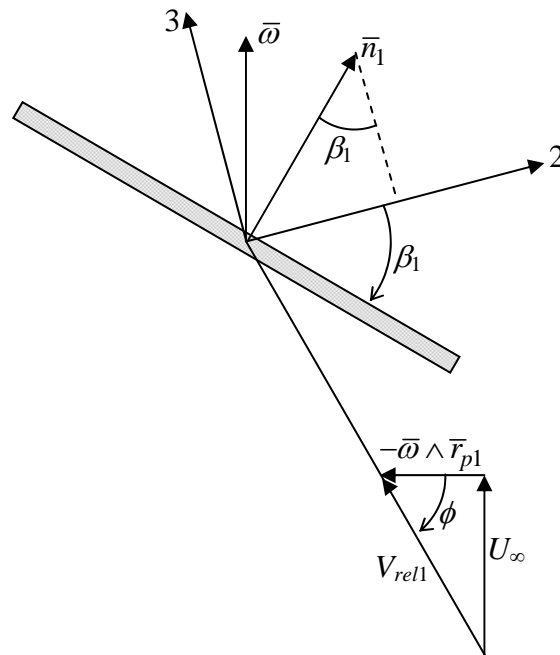


Fig. 5.4. Velocidad relativa a la pala P1. La velocidad relativa no tiene componente a lo largo de la envergadura de la pala (es decir, en la dirección del eje 1).

Para determinar  $\alpha_1$ , por tanto, se necesita determinar  $V_{rel1}$ . Para ello, de (5.3) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V_{rel1}^2 &= U_\infty^2 \theta^2 \sin^2 \varphi + (U_\infty \theta \cos \varphi - \omega_3 r_{p11})^2 + (U_\infty + \omega_2 r_{p11})^2 = \\
 &= U_\infty^2 \theta^2 \sin^2 \varphi + U_\infty^2 \theta^2 \cos^2 \varphi + (\omega_3 r_{p11})^2 - 2U_\infty \theta \omega_3 r_{p11} \cos \varphi + U_\infty^2 + 2\omega_2 r_{p11} U_\infty + (\omega_2 r_{p11})^2 = \\
 &= U_\infty^2 \theta^2 + (\omega_3 r_{p11})^2 + U_\infty^2 + (\omega_2 r_{p11})^2 + 2U_\infty r_{p11} (\omega_2 - \theta \omega_3 \cos \varphi)
 \end{aligned}$$

donde se supone que  $\theta \ll 1$ . Despreciando términos de orden  $\theta^2$ , resulta:

$$V_{rel1}^2 = (\omega_3 r_{p11})^2 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 + \phi^2 + \frac{2U_\infty}{\omega_3 r_{p11}} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \theta \cos \varphi \right) \right] \quad (5.11)$$

donde se ha llamado  $\phi = \frac{U_\infty}{\omega_3 r_{p11}}$ , que es la tangente del ángulo de incidencia del flujo.

En primera aproximación, y siendo  $\phi \ll 1$  y  $\left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \ll 1$ , el módulo de la velocidad relativa a la pala P1 queda:

$$V_{rel1} = \omega_3 r_{p11} \left[ 1 + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 + \phi \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \theta \cos \varphi \right) \right] = \omega_3 r_{p11} \left( 1 + \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right) \quad (5.12)$$

donde se ha tomado:

$$v = \frac{\omega_2}{\omega_3} - \theta \cos \varphi$$

Por lo tanto, reemplazando (5.7) y (5.12) en (5.10), se obtiene:

$$\sin \alpha_1 = \frac{r_{p11} (-\omega_3 \beta + \omega_2) + U_\infty (\theta \beta \cos \varphi + 1)}{\omega_3 r_{p11} \left( 1 + \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right)} \square \left[ -\beta + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \right] \left[ 1 - \phi v - \frac{1}{2} \phi^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right] \quad (5.13)$$

donde se ha considerado  $\theta\beta \ll 1$  y  $\left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2 \ll 1$ . Finalmente, se obtiene:

$$\sin\alpha_1 \approx \alpha_1 \approx -\beta + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \quad (5.14)$$

Como comprobación de la expresión (5.13) se considera el caso  $\theta = \omega_2 = 0$  (ejes 3 y Z coincidentes) y se llega a:  $\sin\alpha_1 = \phi - \beta$  (el ángulo de ataque es la diferencia entre el ángulo inducido y el paso de la pala).

La dirección del vector resistencia aerodinámica se obtiene a partir de la velocidad relativa a la pala:

$$\bar{U}_{D1} = \bar{V}_{rel1}$$

De la ecuación (5.3), se obtiene:

$$U_{D1} = \begin{Bmatrix} U_\infty \theta \sin\phi \\ -\omega_3 r_{p11} + U_\infty \theta \cos\phi \\ \omega_2 r_{p11} + U_\infty \end{Bmatrix} \approx \omega_3 r_{p11} \begin{Bmatrix} \phi \theta \sin\phi \\ -1 + \phi \theta \cos\phi \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \end{Bmatrix} \propto \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \end{Bmatrix} \quad (5.16a)$$

Entonces, el versor en la dirección de la resistencia para la pala P1 es:

$$\bar{e}_{D1} = \left(0, -1, \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi\right) \quad (5.16b)$$

### 5.1.2. Análisis para la pala P2

Siguiendo un desarrollo análogo que para la pala P1, considerando para la pala P2 que el vector posición es (Fig. 5.5):



$$\bar{r}_{p2} = (-r_{p11}, 0, 0) \quad (5.17)$$

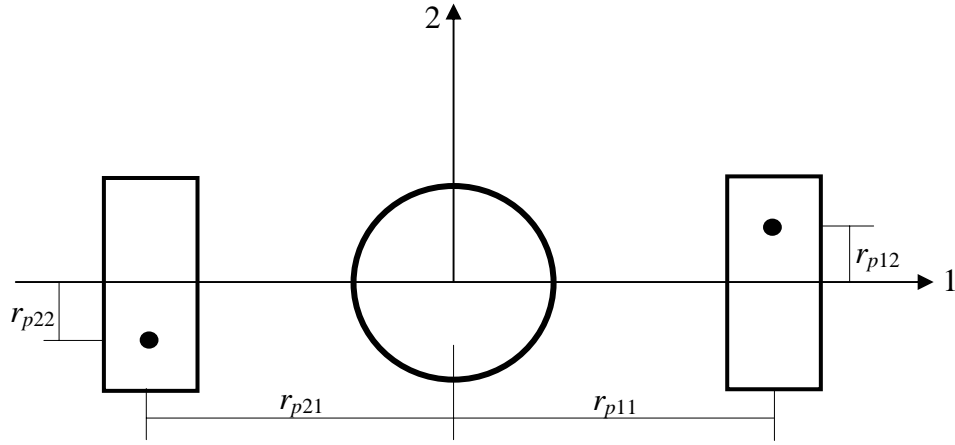


Fig. 5.5. Esquema de la posición de las palas.

y se obtienen las expresiones correspondientes para la velocidad de la pala debida a la rotación:

$$\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{p2} = -r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_3 \\ -\omega_2 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

y la velocidad relativa total:

$$\bar{V}_{rel2} = -r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_3 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} + U_\infty \begin{Bmatrix} \theta \sin \varphi \\ \theta \cos \varphi \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

El módulo de la velocidad relativa se obtiene a partir de (5.19):

$$\begin{aligned} V_{rel2}^2 &= U_\infty^2 \theta^2 \sin^2 \varphi + (U_\infty \theta \cos \varphi + \omega_3 r_{p11})^2 + (U_\infty - \omega_2 r_{p11})^2 = \\ &= U_\infty^2 \theta^2 \sin^2 \varphi + U_\infty^2 \theta^2 \cos^2 \varphi + (\omega_3 r_{p11})^2 + 2U_\infty \theta \omega_3 r_{p11} \cos \varphi + U_\infty^2 - 2\omega_2 r_{p11} U_\infty + (\omega_2 r_{p11})^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U_\infty^2 \theta^2 + (\omega_3 r_{p11})^2 + U_\infty^2 + (\omega_2 r_{p11})^2 + 2U_\infty r_{p11}(-\omega_2 + \theta \omega_3 \cos \varphi) \\
&= (\omega_3 r_{p11})^2 \left[ 1 + \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 + \phi^2 + \frac{2U_\infty}{\omega_3 r_{p11}} \left( -\frac{\omega_2}{\omega_3} + \theta \cos \varphi \right) \right] \tag{5.20}
\end{aligned}$$

es decir,

$$V_{rel2} = \omega_3 r_{p11} \left[ 1 + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 + \phi \left( -\frac{\omega_2}{\omega_3} + \theta \cos \varphi \right) \right] = \omega_3 r_{p11} \left( 1 - \phi \nu + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right)$$

Teniendo en cuenta la normal  $\bar{n}_2$ :

$$\bar{n}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.21}$$

se puede calcular  $V_{n2}$ :

$$\begin{aligned}
V_{n2} &= \bar{V}_{rel2} \cdot \bar{n}_2 = \left[ -r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_3 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} + U_\infty \begin{Bmatrix} \theta \sin \varphi \\ \theta \cos \varphi \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \cdot \bar{n}_2 = \left[ -r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_3 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} + U_\infty \begin{Bmatrix} \theta \sin \varphi \\ \theta \cos \varphi \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ -\beta \\ 1 \end{Bmatrix} = \\
&= -r_{p11} [\omega_3 \beta + \omega_2] + U_\infty [-\theta \beta \cos \varphi + 1] \tag{5.22}
\end{aligned}$$

para llegar a  $\sin \alpha_2$ :

$$\begin{aligned}
\sin \alpha_2 &= \frac{V_{n2}}{V_{rel2}} = \frac{-r_{p11}(\omega_3 \beta + \omega_2) + U_\infty(-\theta \beta \cos \varphi + 1)}{\omega_3 r_{p11} \left( 1 - \phi \nu + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right)} = \\
&= \left[ -\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \right] (1 + \phi \nu) \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Se observa la influencia opuesta del término  $\omega_2/\omega_3$  con respecto a la pala P1. Finalmente, en su forma idónea para el desarrollo posterior, se obtienen las expresiones:

$$V_{rel2} \cong \omega_3 r_{p11} (1 - \phi v) \quad (5.24)$$

$$\alpha_2 = \left[ -\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \right] (1 + \phi v) \square -\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \quad (5.25)$$

La velocidad relativa a la pala es la componente de la velocidad según la dirección del vector resistencia aerodinámica (Fig. 5.6), es decir,

$$U_{D2} = \left\{ \begin{array}{l} U_\infty \theta \sin \varphi \\ \omega_3 r_{p11} + U_\infty \theta \cos \varphi \\ -\omega_2 r_{p11} + U_\infty \end{array} \right\} \square \omega_3 r_{p11} \left\{ \begin{array}{l} \phi \theta \sin \varphi \\ 1 + \phi \theta \cos \varphi \\ \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3} \end{array} \right\} \propto \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3} \end{array} \right\} \quad (5.26)$$

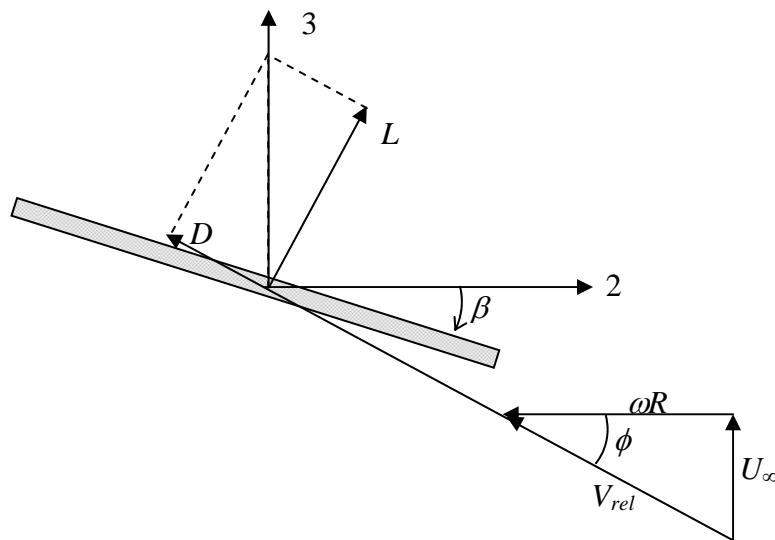


Fig. 5.6. Dirección de los vectores  $D$ ,  $L$  y  $V_{rel}$ .

El módulo de ese vector es:

$$|U_{D2}| \square 1 + (\phi - \omega_2/\omega_3)^2 \square 1 \quad (5.27a)$$

y su dirección:

$$\bar{e}_{D2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3} \end{Bmatrix} \quad (5.27b)$$

### 5.1.3. Cálculo de la dirección de la sustentación para la pala P1

La sustentación es perpendicular a la envergadura ( $\bar{r}_{pi}$ ) y a la velocidad relativa,  $V_{reli}$ .

( $i=1,2$ ).

De (5.3):

$$\bar{V}_{rel1} = -\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{p1} + U_{\infty} \bar{k} \quad (5.28)$$

La velocidad en la dirección de la sustentación es:

$$\bar{U}_{L1} = -\bar{r}_{p1} \wedge \bar{V}_{rel1} = \bar{r}_{p1} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{p1}) - (\bar{r}_{p1} \wedge \bar{k}) U_{\infty} \quad (5.29)$$

El primer término del segundo miembro, aprovechando (5.2), es:

$$\bar{r}_{p1} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}_{p1}) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3 & -\omega_2 \end{vmatrix} r_{p11}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} r_{p11}^2 \quad (5.30)$$

Esta componente de la sustentación es paralela a la velocidad de rotación (salvo en la componente según  $\bar{e}_1$ ).

El segundo término de (5.29) es:

$$\bar{r}_{p1} \wedge \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \theta \sin \varphi & \theta \cos \varphi & 1 \end{vmatrix} r_{p11} = r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

por lo que la dirección de la sustentación es:

$$\bar{U}_{L1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} r_{p11}^2 - \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} U_{\infty} r_{p11} = r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 r_{p11} + U_{\infty} \\ \omega_3 r_{p11} - U_{\infty} \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Como sólo interesa la dirección del vector:

$$\bar{U}_{L1} = r_{p11}^2 \omega_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \\ 1 - \phi \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \propto \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \\ 1 - \phi \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

cuyo módulo se obtiene con ayuda de:

$$U_{L1}^2 = \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 + \phi^2 + 2 \frac{\omega_2}{\omega_3} \phi + 1 - 2 \phi \theta \cos \varphi + (\phi \theta \cos \varphi)^2 \square 1 + 2 \phi \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \theta \cos \varphi \right) = 1 + 2 \phi \nu \quad (5.34)$$

es decir,

$$U_{L1} = |\bar{U}_{L1}| \square 1 + \phi \nu \quad (5.35a)$$

para llegar a la expresión:

$$\bar{e}_{L1} = \frac{1}{1 + \phi \nu} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \\ 1 - \phi \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \square (1 - \phi \nu) \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi + \omega_2 / \omega_3 \\ 1 - \phi \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.35b)$$

#### 5.1.4. Cálculo de la dirección de la sustentación para la pala P2

Para la pala P2 ( $\bar{r}_{p2} = -\bar{r}_{p1}$ ), con (5.19), la velocidad en la dirección de la sustentación es:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{L2} &= -\bar{r}_{p2} \wedge \bar{V}_{rel2} = \bar{r}_{p1} \wedge \bar{V}_{rel2} = r_{p11} \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ U_\infty \theta \sin \varphi & r_{p11} \omega_3 + U_\infty \theta \cos \varphi & -r_{p11} \omega_2 + U_\infty \end{vmatrix} = \\ &= r_{p11} \begin{Bmatrix} 0 \\ r_{p11} \omega_2 - U_\infty \\ r_{p11} \omega_3 + U_\infty \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} = r_{p11}^2 \omega_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi \\ 1 + \phi \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.36)$$

La componente según  $\bar{e}_2$  debida a  $U_\infty$  (los términos que contienen  $\phi$ ) está cambiada de signo en una pala respecto a la otra (una avanza según  $\bar{e}_2$  y la otra va en sentido contrario).

El módulo de  $\bar{U}_{L2}$  se obtiene a partir de la expresión:

$$|\bar{U}_{L2}|^2 = \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi \right)^2 + (1 + \phi \theta \cos \varphi)^2 \square 1 + 2\phi(\theta \cos \varphi - \frac{\omega_2}{\omega_3}) = 1 - 2\phi \nu \quad (5.37)$$

es decir,

$$|\bar{U}_{L2}| = 1 - \phi \nu \quad (5.38a)$$

para llegar a la expresión:

$$\bar{e}_{L2} \cong (1 + \phi \nu) \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi \\ 1 + \phi \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (5.38b)$$

### 5.1.5. Resumen

En este apartado se agrupan las expresiones obtenidas para presentar de forma resumida el planteamiento del problema.

$$\alpha_1 \square -\beta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \quad (5.14)$$

$$\bar{e}_{L1} \square \frac{1}{1+\phi\nu} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \\ 1 - \phi\theta \cos\varphi \end{array} \right\} \square (1-\phi\nu) \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \phi + \omega_2/\omega_3 \\ 1 - \phi\theta \cos\varphi \end{array} \right\} \quad (5.35b)$$

$$\bar{e}_{D1} \square \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \end{array} \right\} \quad (5.16b)$$

$$\alpha_2 \square -\beta_2 - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \quad (5.25)$$

$$\bar{e}_{L2} \square (1+\phi\nu) \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi \\ 1 + \phi\theta \cos\varphi \end{array} \right\} \quad (5.38b)$$

$$\bar{e}_{D2} \square \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3} \end{array} \right\} \quad (5.27b)$$

Ahora bien, la presión dinámica debida a la velocidad tangencial de la pala es:

$$q_0 = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \quad V_0 = \omega_3 r_{p11}$$

La presión dinámica debida a la velocidad relativa a la pala P1, relacionada con la anterior, es:

$$q_1 = q_0 \left( \frac{V_{rel1}}{V_0} \right)^2 \square q_0 \left( 1 + \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right) \quad \text{de (5.12)}$$

$$q_2 = q_0 \left( \frac{V_{rel2}}{V_0} \right)^2 \square q_0 \left( 1 - \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right) \quad \text{de (5.24)}$$

La sustentación generada por la pala P1 es:

$$L_1 = q_1 S c_{L\alpha} \alpha_1 = q_0 S c_{L\alpha} \alpha_1 \left( 1 + \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right)$$

Sea la sustentación:

$$\bar{L}_1 = L_1 e_{L1},$$

entonces, de (5.14) y (5.35b), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{L}_1}{q_0 S c_{L\alpha}} &\cong \left( -\beta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \right) \left( 1 + \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \right) (1 - \phi v) \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi + \omega_2/\omega_3 \\ 1 - \phi \theta \cos \varphi \end{Bmatrix} \\ &\square \left( -\beta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi + \omega_2/\omega_3 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde  $S$  es el área de una sola pala (las dos palas son iguales).

Análogamente, para la pala P2 se obtiene:



$$\frac{\bar{L}_2}{q_0 S c_{L\alpha}} \cong \left(-\beta_2 - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi\right) \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2/\omega_3 - \phi \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

La resistencia de la pala P1 es:

$$D_1 = q_1 S c_D(\alpha_1) = q_0 S c_D(\alpha_1) \left(1 + \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2\right)$$

siendo, además:

$$\bar{D}_1 = D_1 \bar{e}_{D1}$$

$$\frac{\bar{D}_1}{q_0 S} \cong \left(1 + \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2\right) c_D(\alpha_1) \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \end{Bmatrix} \square c_D(\alpha_1) \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

Y la resistencia de la pala P2 es:

$$\frac{\bar{D}_2}{q_0 S} \cong \left(1 - \phi v + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2\right) c_D(\alpha_2) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3} \end{Bmatrix} \square c_D(\alpha_2) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3} \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

La suma de las fuerzas generadas por las palas P1 y P2 es:

$$\frac{\sum \bar{F}_i}{S q_0} = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \bar{D}_1 + \bar{D}_2 \quad (5.43)$$

$$\frac{\sum \bar{F}_i}{S q_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ (-\beta_1 + \phi + \frac{\omega_2}{\omega_3})(\phi + \frac{\omega_2}{\omega_3})c_{L\alpha} + (-\beta_2 + \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3})(\frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi)c_{L\alpha} - c_D(\alpha_1) + c_D(\alpha_2) \\ (-\beta_1 + \phi + \frac{\omega_2}{\omega_3})c_{L\alpha} + (-\beta_2 + \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3})c_{L\alpha} + c_D(\alpha_1)(\phi + \frac{\omega_2}{\omega_3}) + c_D(\alpha_2)(\phi - \frac{\omega_2}{\omega_3}) \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

y por componentes, según los ejes 1,2,3, resultan:

$$\sum F_1 = 0 \quad (5.44a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum F_2}{S q_0} &= c_{L\alpha} \left\{ (\phi - \beta_1)(\phi + \frac{\omega_2}{\omega_3}) + (\phi - \beta_2)(\frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi) + \frac{\omega_2}{\omega_3}(\phi + \frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi) \right\} - c_D(\alpha_1) + c_D(\alpha_2) = \\ &= c_{L\alpha} \left\{ (\phi - \beta_1)(\phi + \frac{\omega_2}{\omega_3}) + (\phi - \beta_2)(\frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi) + 2\phi \frac{\omega_2}{\omega_3} \right\} - c_D(\alpha_1) + c_D(\alpha_2) \end{aligned} \quad (5.44b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum F_3}{S q_0} &= c_{L\alpha} \left\{ \phi - \beta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi - \beta_2 - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right\} + \phi [c_D(\alpha_1) + c_D(\alpha_2)] + \frac{\omega_2}{\omega_3} [c_D(\alpha_1) - c_D(\alpha_2)] = \\ &= c_{L\alpha} \{ (\phi - \beta_1) + (\phi - \beta_2) \} + \phi [c_D(\alpha_1) + c_D(\alpha_2)] + \frac{\omega_2}{\omega_3} [c_D(\alpha_1) - c_D(\alpha_2)] \end{aligned} \quad (5.44c)$$

Por comodidad se introduce la notación siguiente:

$$\beta_1 = \beta_0 + \delta_\beta \quad \beta_2 = \beta_0 - \delta_\beta \quad (5.45)$$

que se utilizará de aquí en adelante.

Para la componente según el eje 2 se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S q_0} \sum F_2 &= c_{L\alpha} \left\{ (\phi - \beta_0) \frac{2\omega_2}{\omega_3} - 2\delta_\beta \phi + 2\phi \frac{\omega_2}{\omega_3} \right\} - c_D(\alpha_1) + c_D(\alpha_2) = \\ &= c_{L\alpha} \left\{ (2\phi - \beta_0) \frac{2\omega_2}{\omega_3} - 2\delta_\beta \phi \right\} - c_D(\alpha_1) + c_D(\alpha_2) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Del equilibrio según  $\bar{e}_2$  no se deduce nada, aparentemente. Si no hubiera equilibrio, habría una fuerza en la dirección 2 que generaría una aceleración del centro de masas en esa dirección. No obstante, como en las situaciones de interés el giro alrededor del eje 3 es muy rápido, el promedio a lo largo de una revolución sobre ese eje se anularía.

Para la componente según el eje 3, se tiene:

$$\frac{1}{Sq_0} \sum F_3 = C_{l\alpha} 2(\phi - \beta_0) + O[\phi C_D(\alpha)] \quad (5.47)$$

y del equilibrio según la vertical (como  $\theta \ll 1$ ,  $\bar{e}_3 \square \bar{k}$ ), se obtiene:

$$\sum F_3 = mg$$

$$2C_{L\alpha}(\phi - \beta_0) = \frac{mg}{Sq_0} = \frac{mg}{S \frac{1}{2} \rho (r_{p11} \omega_3)^2} \quad (5.48)$$

ecuación que relaciona la velocidad de giro,  $\omega_3$ , con la de caída,  $U_\infty$  (que aparece dentro de  $\phi$ ). No aparece la diferencia de pasos,  $\delta_\beta$ , sólo  $\beta_0$ , que es el valor medio de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

## 5.2. Dinámica rotacional

La segunda ecuación de la mecánica rotacional se expresa en la forma:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{M} \quad (5.49)$$

donde  $\bar{H}$  es el momento cinético,  $\bar{M}$  el momento de las fuerzas exteriores y  $t$  el tiempo.

Si el origen de coordenadas de los ejes cuerpo coincide con el centro de masas y los ejes de este sistema de referencia coinciden con los principales de inercia, para cada componente referido a ejes cuerpo, se obtiene:

$$\dot{\omega}_1 - \frac{B-C}{A}\omega_2\omega_3 = \frac{1}{A}M_1 \quad (5.50a)$$

$$\dot{\omega}_2 + \frac{A-C}{B}\omega_1\omega_3 = \frac{1}{B}M_2 \quad (5.50b)$$

$$\dot{\omega}_3 - \frac{A-B}{C}\omega_1\omega_2 = \frac{1}{C}M_3 \quad (5.50c)$$

donde  $A, B, C$  son los momentos principales de inercia y  $M_1, M_2, M_3$  las componentes de los momentos de las fuerzas exteriores.

### 5.2.1. Movimiento de giro del cuerpo alrededor del centro de masas

Se considera en este apartado el movimiento del cuerpo alrededor del centro de masas. Un ejemplo es el caso en que el cuerpo se sujeta mediante una rótula situada en el centro de masas del cuerpo en el seno de una corriente fluida.

El momento sobre el cuerpo,  $\bar{M} = (M_1, M_2, M_3)$ , es:

$$\bar{M} = \bar{M}_a + \bar{M}_f \quad (5.51)$$

donde  $\bar{M}_a$  es el momento de las fuerzas aerodinámicas y  $\bar{M}_f$  es el de la fricción que se produce en la rótula.

El momento aerodinámico es la suma de los momentos aerodinámicos de las fuerzas que actúan en cada pala:

$$\bar{M}_a = \bar{M}_{ap1} + \bar{M}_{ap2} = \bar{r}_{p1} \wedge \bar{F}_{p1} + \bar{r}_{p2} \wedge \bar{F}_{p2} \quad (5.52)$$

Considerando que las palas están situadas en el plano perpendicular al eje 3 que pasa por el centro de masas, es decir,

$$r_{p13} = r_{p23} = 0$$

el momento aerodinámico resultante es:

$$\bar{M}_a = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ r_{p11} & r_{p12} & 0 \\ F_{p11} & F_{p12} & F_{p13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ r_{p21} & r_{p22} & 0 \\ F_{p21} & F_{p22} & F_{p23} \end{vmatrix} \quad (5.53)$$

donde  $(r_{p11}, r_{p12}, 0)$  y  $(r_{p21}, r_{p22}, 0)$  son las posiciones de los centros aerodinámicos de las palas P1 y P2, respectivamente. Los momentos de las fuerzas respecto a los centros aerodinámicos se contrarrestan (son iguales y de signo contrario), por eso no están contemplados en la expresión anterior.

Como:

$$r_{p21} = -r_{p11} \text{ y } r_{p22} = -r_{p12} \quad (5.54)$$

se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \bar{M}_a &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ r_{p11} & r_{p12} & 0 \\ F_{p11} - F_{p21} & F_{p12} - F_{p22} & F_{p13} - F_{p23} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} r_{p12}(F_{p13} - F_{p23}) \\ -r_{p11}(F_{p13} - F_{p23}) \\ r_{p11}(F_{p12} - F_{p22}) - r_{p12}(F_{p11} - F_{p21}) \end{array} \right\} = \\ &= \begin{Bmatrix} r_{p12}(F_{p13} - F_{p23}) \\ -r_{p11}(F_{p13} - F_{p23}) \\ r_{p11}(F_{p12} - F_{p22}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{p12}(L_{13} + D_{13} - L_{23} - D_{23}) \\ -r_{p11}(L_{13} + D_{13} - L_{23} - D_{23}) \\ r_{p11}(L_{12} + D_{12} - L_{22} - D_{22}) \end{Bmatrix} \quad (5.55) \end{aligned}$$

Se consideran a continuación los momentos respecto a cada uno de los ejes en el orden que parece más conveniente.

- Momento aerodinámico respecto al eje 3

De (5.55) y de (5.39), (5.40), (5.41) y (5.42), se obtiene:

$$\begin{aligned}
c_{ma3} &= \frac{M_{a3}}{q_0 S r_{p11}} = \\
&= c_{L\alpha} \left[ \left( -\beta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \right) \left( \phi + \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) - \left( -\beta_2 - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \right) \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi \right) \right] + c_D(\alpha_1)(-1) - c_D(\alpha_2)(1) = \\
&= c_{L\alpha} \left[ \phi \left( -\beta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi - \beta_2 - \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi \right) + \frac{\omega_2}{\omega_3} \left( -\beta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} + \phi + \beta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_3} - \phi \right) \right] - c_D(\alpha_1) - c_D(\alpha_2) = \\
&= c_{L\alpha} \left[ 2\phi(\phi - \beta_0) + 2\frac{\omega_2}{\omega_3} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \delta_\beta \right) \right] - c_D(\alpha_1) - c_D(\alpha_2) \tag{5.56}
\end{aligned}$$

La solución de equilibrio para el caso sin fricción y paso igual ( $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$ ,  $\delta_\beta = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 = \phi - \beta_0$ ,  $M_{a3} = 0$ ), es:

$$c_{L\alpha} 2\phi(\phi - \beta_0) = 2c_D(\alpha_0) = c_{L\alpha} 2\phi\alpha_0 \rightarrow \phi\alpha_0 = \frac{c_D(\alpha_0)}{c_{L\alpha}} \tag{5.57}$$

que es la solución de equilibrio en autorrotación (dentro del régimen de sustentación lineal). Es coincidente con la solución hallada al desarrollar el modelo teórico, a partir de las teorías aplicables a alas giratorias.

En un caso general, según el eje 3, de (5.50c), teniendo en cuenta que experimentalmente se comprueba que  $\omega_3 = \omega_0$  (cte),  $\dot{\omega}_3 = 0$  (es decir, hay equilibrio según el eje 3, es decir,  $M_3 = 0$ ). Suponiendo  $\omega_1, \omega_2 \ll 1$ , de (5.50c), se obtiene:

$$\dot{\omega}_3 - \frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{C} M_3 = \frac{1}{C} (M_{3a} + M_{3f}) \tag{5.58}$$

Si  $M_3 = 0$ , de (5.56), se tiene:

$$M_{3a} + M_{3f} = 0 ; c_{ma3} = c_{L\alpha} \left[ 2\phi\alpha_0 + 2\frac{\omega_2}{\omega_3} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \delta_\beta \right) \right] - c_D(\alpha_1) - c_D(\alpha_2) = -\frac{M_{3f}}{q_0 S r_{p11}} \tag{5.59}$$

siendo:

$$\alpha_0 = \phi - \beta_0 \quad (5.60)$$

$$\alpha_1 = \phi - \beta_1 = \phi - \beta_0 - \delta_\beta = \alpha_0 - \delta_\beta \quad (5.61)$$

$$\alpha_2 = \phi - \beta_2 = \phi - \beta_0 + \delta_\beta = \alpha_0 + \delta_\beta \quad (5.62)$$

$$c_D(\alpha_1) = c_D(\alpha_0 - \delta_\beta) \cong c_D(\alpha_0) - c_{D\alpha}(\alpha_0)\delta_\beta \quad (5.63a)$$

$$c_D(\alpha_2) = c_D(\alpha_0) + c_{D\alpha}(\alpha_0)\delta_\beta \quad (5.63b)$$

Las expresiones anteriores son válidas para valores de  $\alpha$  en un entorno de pequeña amplitud de  $\alpha_0$ . Entonces, reemplazando las expresiones anteriores en (5.59), se obtiene:

$$c_{L\alpha} \left[ 2\phi\alpha_0 + 2\frac{\omega_2}{\omega_3} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \delta_\beta \right) \right] - 2c_D(\alpha_0) = -\frac{M_{3f}}{q_0 Sr_{p11}} \quad (5.64)$$

Para determinar el efecto de la fricción es necesario conocer  $\frac{\omega_2}{\omega_3}$  en función de  $\delta_\beta$  y de la fricción.

En el caso de pasos iguales ( $\delta_\beta = 0$ ), se tiene:

$$c_{L\alpha} \left[ 2\phi\alpha_0 + 2\left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2 \right] - 2c_D(\alpha_0) = -\frac{M_{3f}}{q_0 Sr_{p11}} \quad (5.65)$$

Al actuar la fricción cambian  $\omega_3$  y  $\alpha_0$  con respecto al caso sin fricción para conseguir un nuevo equilibrio;  $c_{ma3}$  aumenta cuando  $\omega_3$  disminuye. Esto es de esperar, pues a causa de la fricción la velocidad de giro disminuye y, en consecuencia, aumenta el ángulo de ataque.

- Momento aerodinámico respecto al eje 2

De (5.55) y de (5.39), (5.40), (5.41) y (5.42), se tiene:

$$\begin{aligned}
 -c_{ma2} &= -\frac{M_{a2}}{r_{p11}q_0S} = c_{L\alpha} \left[ \left( \phi - \beta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) - \left( \phi - \beta_2 - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) \right] + c_D(\alpha_1) \left( \phi + \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) - c_D(\alpha_2) \left( \phi - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) = \\
 &= c_{L\alpha} \left[ \beta_2 - \beta_1 + 2\frac{\omega_2}{\omega_3} \right] + O(\phi^2) \cong c_{L\alpha} \left[ -2\delta_\beta + 2\frac{\omega_2}{\omega_3} \right] \quad (5.66)
 \end{aligned}$$

$$c_{ma2} = 2c_{L\alpha} \left( \delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) \quad (5.67)$$

El momento aerodinámico respecto al eje 2 en orden cero lo produce la diferencia de sustentación entre las palas (despreciando el efecto de la resistencia aerodinámica proyectada según el eje 3). Ese momento se manifiesta a través de la magnitud de  $(\delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3})$ .

En el caso del equilibrio sin fricción  $\sum M_2 = 0$ , entonces,  $c_{ma2} = 0$ , por lo que de (5.67), se obtiene:

$$\delta_\beta = \frac{\omega_2}{\omega_3} \quad (5.68)$$

y la componente de giro  $\omega_2$  compensaría la diferencia de paso de las palas,  $\delta_\beta$ . En este caso, el vector  $\bar{\omega}$  estaría situado en el plano (2,3) formando un ángulo  $\gamma \square \frac{\omega_2}{\omega_3}$ .

- Momento aerodinámico respecto al eje 1:

También de (5.55) se deduce:

$$M_{a1} = r_{p12}(L_{13} + D_{13} - L_{23} - D_{23})$$



$$M_{a2} = -r_{p11}(L_{13} + D_{13} - L_{23} - D_{23}) \quad (5.69)$$

y, por lo tanto, es:

$$c_{ma1} = \frac{M_1}{r_{p11}q_0S} = \frac{r_{p12}}{r_{p11}}(-c_{ma2}) = -\frac{r_{p12}}{r_{p11}}c_{ma2} \quad (5.70)$$

por lo que son aplicables las consideraciones realizadas en el caso del apartado anterior para  $c_{ma2}$ .

### 5.2.2. Movimiento sin fricción

Se consideran los parámetros adimensionales definidos en la forma:

$$k_A = \frac{A}{C} ; k_B = \frac{B}{C} ; k_{21} = \frac{r_{p12}}{r_{p11}} ; t_c^2 = \frac{C}{2c_{L\alpha}r_{p11}q_0S} = \frac{C}{2c_{L\alpha}r_{p11}S\frac{1}{2}\rho(r_{p11}\omega_0)^2} = \frac{C}{c_{L\alpha}I_a\omega_0^2} \quad (5.71)$$

$$t_c = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{C}{c_{L\alpha}I_a}}$$

donde  $I_a = \rho S r_{p11}^3$  es un parámetro que representa el momento de inercia de la masa de aire que se mueve como consecuencia del movimiento de las palas. El tiempo característico,  $t_c$ , asociado al momento de las fuerzas aerodinámicas (momento de las fuerzas aerodinámicas comparado con el momento de inercia), indica que la evolución para una misma configuración es tanto más rápida cuanto mayor es  $\omega_0$ .

Las ecuaciones (5.50) quedan como sigue:

$$\dot{\omega}_1 - \frac{B-C}{A}\omega_2\omega_3 = \frac{1}{A}r_{p11}q_0Sc_{ma1} = k_A^{-1}\frac{1}{t_c^2 2c_{L\alpha}}c_{ma1} = -\frac{k_A^{-1}}{t_c^2}k_{21}\left(\delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \quad (5.72a)$$

$$\dot{\omega}_2 + \frac{A-C}{B}\omega_1\omega_3 = \frac{1}{B}r_{p11}q_0Sc_{ma2} = k_B^{-1}\frac{1}{t_c^2 2c_{L\alpha}}c_{ma2} = \frac{k_B^{-1}}{t_c^2}\left(\delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \quad (5.72b)$$

$$\dot{\omega}_3 - \frac{A-B}{C}\omega_1\omega_2 = \frac{1}{C}r_{p11}q_0Sc_{ma3} = \frac{1}{t_c^2 2c_{L\alpha}}c_{ma3} = \frac{1}{t_c^2}\left[\phi\alpha_0 + \frac{\omega_2}{\omega_3}\left(\frac{\omega_2}{\omega_3} - \delta_\beta\right) - \frac{c_D(\alpha_0)}{c_{L\alpha}}\right] \quad (5.72c)$$

Cuando la fricción es suficientemente pequeña y el paso de las palas es adecuado, la velocidad de giro  $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$ , siendo  $\omega_3 = \text{cte.} = \omega_0$ . Afortunadamente, no aparecen los ángulos de orientación ( $\phi, \psi, \theta$ ), por lo que la solución del problema se simplifica.

Además, en las configuraciones de interés ocurre:

$$\frac{A-B}{C}\omega_1\omega_2t_c^2 \ll 1$$

Como en régimen estacionario y sin fricción,  $\dot{\omega}_3 = c_{ma3} = 0$ , la ecuación (5.72c) resulta:

$$c_{ma3} = 0 \rightarrow c_{L\alpha} \left[ \phi\alpha_0 + \frac{\omega_2}{\omega_3} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \delta_\beta \right) \right] - c_D(\alpha_0) = 0 \quad (5.73)$$

que permite encontrar, con ayuda de las relaciones presentadas en el Capítulo 4, los valores  $\phi$  y  $\alpha_0$ , en el caso que se conociera  $\omega_2/\omega_3$ .

A continuación se estudiarán primero las soluciones estacionarias y después se analizará su estabilidad.

De las ecuaciones de la dinámica rotacional (5.72a) y (5.72b), y considerando:

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = 0 \quad (5.74)$$

se obtiene:

$$-\frac{B-C}{A}\omega_2\omega_0 = -\frac{k_A^{-1}}{t_c^2}k_{21} \left( \delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) \quad (5.75a)$$

$$\frac{A-C}{B}\omega_1\omega_0 = \frac{k_B^{-1}}{t_c^2} \left( \delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) \quad (5.75b)$$

que, dividiendo por  $\omega_0^2$ , se pueden escribir:

$$\frac{B-C}{A} \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{k_A^{-1} k_{21}}{t_c^2 \omega_0^2} \left( \delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) \quad (5.76a)$$

$$\frac{A-C}{B} \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{k_B^{-1}}{t_c^2 \omega_0^2} \left( \delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) \quad (5.76b)$$

Si se definen los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 & a_{12} &= \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} = \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21} c_{L\alpha} I_a}{A} \\ a_{21} &= \frac{A-C}{B} & a_{22} &= \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} = \frac{I_a c_{L\alpha}}{B} \\ b_1 &= \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \delta_\beta = \frac{I_a c_{L\alpha} k_{21}}{A} \delta_\beta & b_2 &= \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} \delta_\beta = \frac{I_a c_{L\alpha}}{B} \delta_\beta \end{aligned} \quad (5.77)$$

y se consideran las variables  $x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$  y  $x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$ , el sistema (5.76) se transforma en:

$$\begin{cases} a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases} \quad (5.78)$$

Si son  $\dot{\omega}_1 \neq 0$  y  $\dot{\omega}_2 \neq 0$ , el sistema formado por las ecuaciones (5.72a) y (5.72b) queda:

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}_1}{\omega_0} - a_{12} x_2 = -b_1 \\ \frac{\dot{x}_2}{\omega_0} + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases} \quad (5.79)$$

Se define el tiempo adimensional,  $T$ , mediante la expresión:

$$t = \frac{1}{\omega_0} T,$$

y se obtiene:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega_0 \frac{dx}{dT} = \omega_0 x'$$

Con esta definición, el sistema (5.79) se transforma en:

$$\begin{cases} x_1' - a_{12}x_2 = -b_1 \\ x_2' + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (5.80)$$

De (5.78) se puede obtener la solución de equilibrio  $x_1 = x_{1e}$ ,  $x_2 = x_{2e}$ :

$$x_{2e} = \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{N_e}{N_e - 1} \delta_\beta \quad (5.81)$$

$$x_{1e} = \frac{b_2}{a_{21}} \left( 1 - \frac{a_{22} b_1}{a_{12} b_2} \right) = \frac{c_{L\alpha} I_a \delta_\beta}{A - C} \left( -\frac{1}{N_e - 1} \right) = -\frac{\delta_\beta}{k_{21}} \frac{C - B}{C - A} \frac{N_e}{1 - N_e} \quad (5.82)$$

donde a  $N_e = \frac{I_a c_{L\alpha} k_{21}}{C - B}$  se lo denomina “número de estabilidad”.

Por lo tanto, conociendo la geometría y distribución de masas del cuerpo y las características aerodinámicas de las palas, y junto a la ecuación (5.73), se pueden determinar los valores de las componentes de la velocidad de rotación de equilibrio  $\omega_{1e}$ ,  $\omega_{2e}$  y  $\omega_{0e} = \omega_{3e}$ .

Se observa que cuando  $N_e \rightarrow 1$  aparece una divergencia en la posición de equilibrio, excepto que sea  $\delta_\beta = 0$ .

### 5.2.3. Análisis de la estabilidad del equilibrio para el movimiento sin fricción

El análisis de la estabilidad consiste en el estudio de las soluciones de las ecuaciones del movimiento para el sistema sin fricción (5.80):

$$x'_1 = a_{12}x_2 - b_1 \quad (5.83a)$$

$$x'_2 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2 \quad (5.83b)$$

La estabilidad en el entorno del punto de equilibrio se estudia definiendo unas nuevas variables que describen el movimiento alrededor del punto de equilibrio (definido por (5.81) y (5.82)):

$$x_1 = x_{1e} + X_1$$

$$x_2 = x_{2e} + X_2$$

que introducidas en (5.83) permiten obtener el sistema autónomo:

$$\begin{cases} X'_1 - a_{12}X_2 = 0 \\ X'_2 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = 0 \end{cases} \quad (5.84)$$

que se puede expresar también como:

$$\frac{X'_1}{X'_2} = \frac{\frac{dX_1}{dT}}{\frac{dX_2}{dT}} = \frac{-a_{12}X_2}{a_{21}X_1 + a_{22}X_2} \quad (5.85)$$

Las soluciones del sistema (5.84) tendrán la forma:

$$\begin{cases} X_1 = \alpha_1 e^{kT} \\ X_2 = \alpha_2 e^{kT} \end{cases} \quad (5.86)$$

El sistema (5.84) tiene soluciones cuando:

$$\begin{vmatrix} k & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{vmatrix} = 0 \quad (5.87)$$

de donde:

$$k^2 + a_{22}k + a_{12}a_{21} = 0 \quad (5.88)$$

Las raíces se obtienen de:

$$k_{1,2} = \frac{-a_{22} \pm \sqrt{a_{22}^2 - 4a_{12}a_{21}}}{2} \quad (5.89)$$

$\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se determinan de:

$$\begin{cases} k\alpha_1 - a_{12}\alpha_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} + k)\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (5.90)$$

De acuerdo a los valores que adopten las raíces  $k_1$  y  $k_2$  el sistema evolucionará siguiendo trayectorias espirales, nodos o focos, estables o inestables.

Reemplazando los coeficientes  $a_{ij}$  en la ecuación (5.89), se obtiene:

$$k_{1,2} = \frac{-\frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0}\right)^2 - 4\left(\frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2}\right)\left(\frac{A-C}{B}\right)}}{2} \quad (5.91)$$

El mismo resultado se obtiene si en el sistema (5.84), se reemplazan  $X_{1,2}$  por sus respectivas soluciones (5.86) y se establece la matriz característica, cuya traza es

$$Tr = -\frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0} = -a_{22} \text{ y cuyo determinante es } Det = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2}\right)\left(\frac{A-C}{B}\right).$$

El estudio de la estabilidad está basado en el análisis de la ecuación característica del sistema:

$$k^2 - Tr \cdot k + Det = 0$$

donde las raíces son  $k_{1,2} = \frac{1}{2}[Tr \pm \sqrt{\Delta}]$ , siendo el discriminante  $\Delta = Tr^2 - 4Det$ .

Del análisis de los signos del discriminante, traza y determinante se obtienen los diferentes tipos de trayectorias que pueden producirse, que se resumen en la Fig. 5.7 (Hirsch, M., Smale, S., 1983).

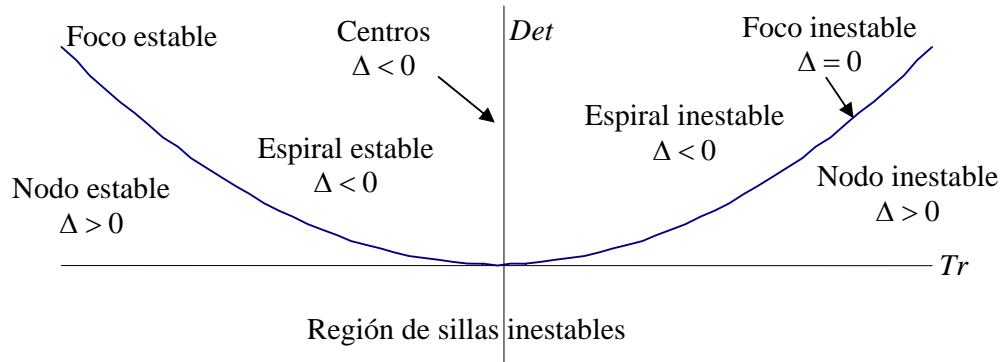


Fig. 5.7. Tipos de trayectorias en función de los valores de la traza  $Tr$  y del determinante  $Det$  de la ecuación característica.

Para que el sistema sea estable debe ocurrir que (Elsgolzt, L., 1977):

- 1) Si las raíces son reales y diferentes, sean  $k_1 < 0$  y  $k_2 < 0$  (nodo estable).  $Tr < 0$ ,  $Det > 0$ ,  $\Delta > 0$ .
- 2) Si las raíces son complejas, sean  $k_{1,2} = p \pm qi$ ,  $p < 0$ ,  $q \neq 0$  (espiral estable).  $Tr < 0$ ,  $Det > 0$ ,  $\Delta < 0$ .
- 3) Si las raíces son iguales, sean  $k_1 = k_2 < 0$  (foco estable).  $Tr < 0$ ,  $Det = 0$ .

Los límites de estabilidad son  $Tr = 0$  y  $Det = 0$ .

#### 1) NODO ESTABLE

Para que las dos raíces sean reales y negativas se debe cumplir el criterio de Routh-Hurwitz (Guzmán, M. de, 1987), en este caso:



$$-Tr = a_{22} = \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} = \frac{c_{L\alpha} I_a}{B} > 0 \quad (5.92)$$

$$Det = a_{12} a_{21} = \left( \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \right) \left( \frac{A-C}{B} \right) > 0 \quad (5.93)$$

siempre que  $\Delta > 0$ . Como siempre se cumple que es  $A, B > 0$ , (5.93) puede escribirse como:

$$(C-B)(C-A)(1-N_e) > 0 \quad (5.94)$$

Si  $C > A, B$ , debe ser  $N_e < 1$ , para que se cumpla la condición (5.93). Como  $I_a \ll C, B$ , entonces  $N_e \ll 1$ , y la condición (5.94) se cumple en una amplia generalidad de casos, exceptuando aquellos en que el valor de  $C$  esté muy próximo al de  $B$  y entonces sea  $I_a \cong C-B$  y  $N_e = O(1)$ .

La desigualdad (5.92) se cumple siempre. En el límite de estabilidad  $Tr = 0$  la trayectoria es un centro y se produce cuando  $\frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} = \frac{c_{L\alpha} I_a}{B} = 0$ , para lo que debería ser  $c_{L\alpha} = 0$ , condición que no es de interés, salvo para comprobar que se recupera la solución clásica del sólido aislado (sin palas). En efecto, reemplazando  $a_{22} = 0$  en el sistema de ecuaciones (5.84), se obtiene:

$$\begin{cases} X_1' - a_{12} X_2 = 0 \\ X_2' + a_{21} X_1 = 0 \end{cases}$$

cuya integral es:

$$\frac{X_1^2}{a_{12}} + \frac{X_2^2}{a_{21}} = \frac{X_1^2}{\frac{B-C}{A}} + \frac{X_2^2}{\frac{A-C}{B}} = cte$$

que representa una trayectoria elíptica de la proyección del vector de rotación en el plano 1,2. Si  $A = B$ , entonces, la trayectoria es una circunferencia, como corresponde a la solución clásica de la rotación de un sólido aislado con tensor cilíndrico.

Analizando la desigualdad (5.93), se alcanza el límite de estabilidad frontera con la región de sillas inestables cuando se cumple:

$$Det = \left( \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \right) \left( \frac{A-C}{B} \right) = 0$$

Se estudiarán a continuación las dos posibilidades:  $A = C$ , o bien  $\frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} = 0$ .

Si  $a_{21} = \frac{A-C}{B} = 0$ , el sistema (5.84) queda:

$$\begin{cases} X_1' - a_{12} X_2 = 0 \\ X_2' + a_{22} X_2 = 0 \end{cases}$$

cuya integral es:

$$\frac{X_1}{a_{12}} + \frac{X_2}{a_{22}} = cte = \frac{X_{10}}{a_{12}} + \frac{X_{20}}{a_{22}}$$

con  $X_2 = X_{20} e^{-a_{22}T}$ . Los subíndices "0" indican condiciones iniciales. La trayectoria es una recta (nodo degenerado).

Si  $a_{12} = 0$ , la primera ecuación del sistema (5.84) queda:  $X_1' = 0$ ; entonces un límite sería  $X_1 = cte$ , con  $X_2 = X_{20} e^{-a_{22}T}$ .

## 2) ESPIRAL ESTABLE

Este caso ocurre cuando el discriminante es:

$$\Delta = Tr^2 - 4Det = \left( \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0} \right)^2 - 4 \left( \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \right) \left( \frac{A-C}{B} \right) < 0.$$

Esta condición puede escribirse en la forma:

$$\frac{(C-B)^2}{k_{21}^2 B^2} [N_e^2 - k_e (1 - N_e)] < 0$$

donde  $k_e = 4k_{21}^2 \frac{B}{A} \frac{C-A}{C-B}$  se denomina “relación de momentos de inercia”.

Siempre se cumple que  $\frac{(C-B)^2}{k_{21}^2 B^2} > 0$ , por lo que, para que aparezca una trayectoria espiral, debe ser:

$$N_e^2 - k_e (1 - N_e) < 0 \tag{5.95}$$

### 3) FOCO ESTABLE

La trayectoria tipo foco aparece cuando el primer miembro de la desigualdad (5.95) se anula y, por lo tanto, las dos raíces son iguales,  $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2k_B t_c^2 \omega_0}$ , que coincide con la solución en el límite (5.95)  $\Delta = 0$ .

#### 5.2.4. Análisis de casos

En la dinámica del pararrotor estudiada ocurre que siempre es  $Tr < 0$ , y la expresión (5.94) marca el límite de estabilidad ( $Det > 0$ ). La condición (5.95) define el límite de la región de espirales. En ambas expresiones aparecen las diferencias de los momentos de inercia  $C - A$ ,  $C - B$ , etc..., por lo que es necesario analizar las posibilidades que aparecen, lo que se realiza a continuación. Una forma apropiada de hacerlo es presentar los resultados en el plano  $(N_e, k_e)$ .

- Estabilidad inercial. Eje principal mayor próximo al eje de giro

En este caso  $A, B < C$ . Entonces, de acuerdo a (5.94) debe ser  $N_e < 1$  para que el sistema sea estable. Además, como  $B < C$ , es  $N_e > 0$ , y como  $B < C$  y  $A < C$ , es  $k_e > 0$ , por lo tanto, sólo es accesible el primer cuadrante del plano  $(N_e, k_e)$ . En estas condiciones, la orientación del vector de rotación respecto a los ejes cuerpo está dada por las componentes adimensionales del vector de rotación  $(x_{1e}, x_{2e})$ , que son  $x_{1e} < 0$  y  $x_{2e} < 0$  para  $\delta_\beta > 0$ .

El límite de la región de espirales (focos) está dado por:

$$N_e^2 - k_e(1 - N_e) = 0 \quad (5.96)$$

es decir,  $k_e = \frac{N_e^2}{1 - N_e}$ , y la región de espirales es  $k_e > \frac{N_e^2}{1 - N_e}$ .

Estas condiciones pueden verse representadas en la Fig. 5.8.

Cuando  $N_e > 1$  (acciones aerodinámicas grandes comparadas con  $(C - B)$ ), el sistema resulta inestable, lo que no ocurre en el caso clásico (sin fuerzas aerodinámicas).

- Estabilidad inercial. Eje principal menor próximo al eje de giro

En este caso,  $A, B > C$ ; en consecuencia, por definición  $N_e < 0$  y  $k_e > 0$ . Por lo tanto, sólo es accesible el segundo cuadrante del plano  $(N_e, k_e)$ . La región estable es  $N_e < 1$  (por la condición 5.94), como se indica en la Fig. 5.9. En estas condiciones, la orientación del vector de rotación respecto a los ejes cuerpo está dada por las componentes adimensionales del vector de rotación  $(x_{1e}, x_{2e})$ , que son  $x_{1e} < 0$  y  $x_{2e} < 0$  para  $\delta_\beta > 0$ .

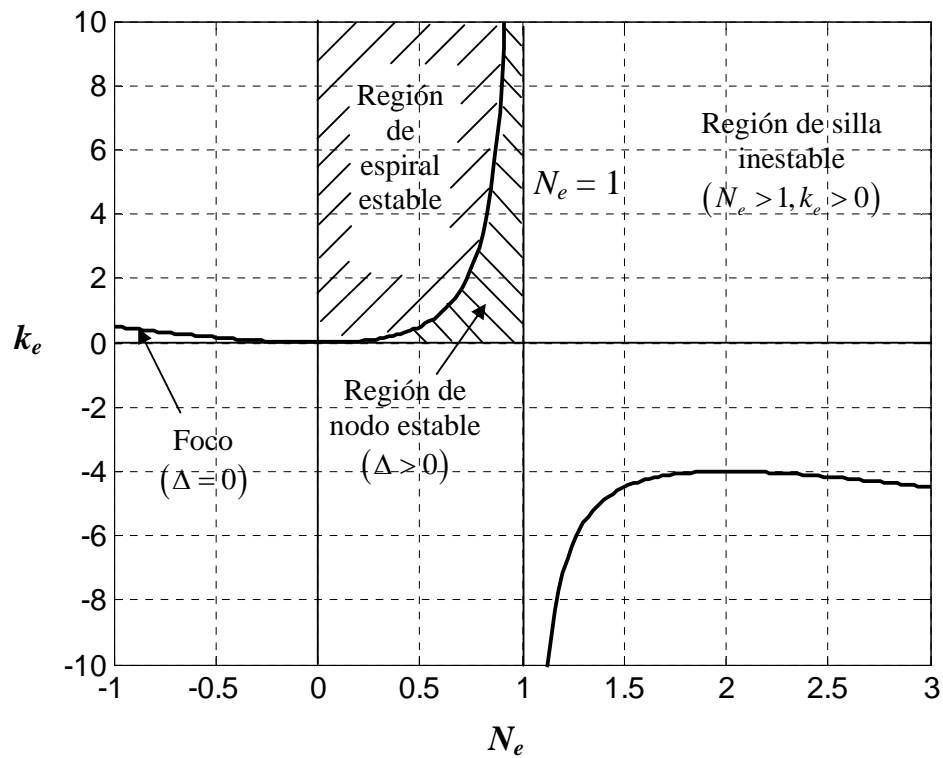


Fig. 5.8. Tipos de trayectorias para el caso  $A, B < C$ . Sólo es accesible el primer cuadrante

Cuando  $N_e = 0$ , la evolución del sistema sigue una trayectoria tipo centro. Esta condición se corresponde con  $c_{L\alpha} = 0$ , que es el caso de un sistema sin fuerzas aerodinámicas. En ese caso, se demuestra que la disipación interna de energía mecánica hace que el giro alrededor del eje de menor inercia se vuelva inestable (Thomson, W. T., 1986). En caso de no tener en cuenta tal disipación de energía, el sistema sería estable para  $N_e = 0$ .

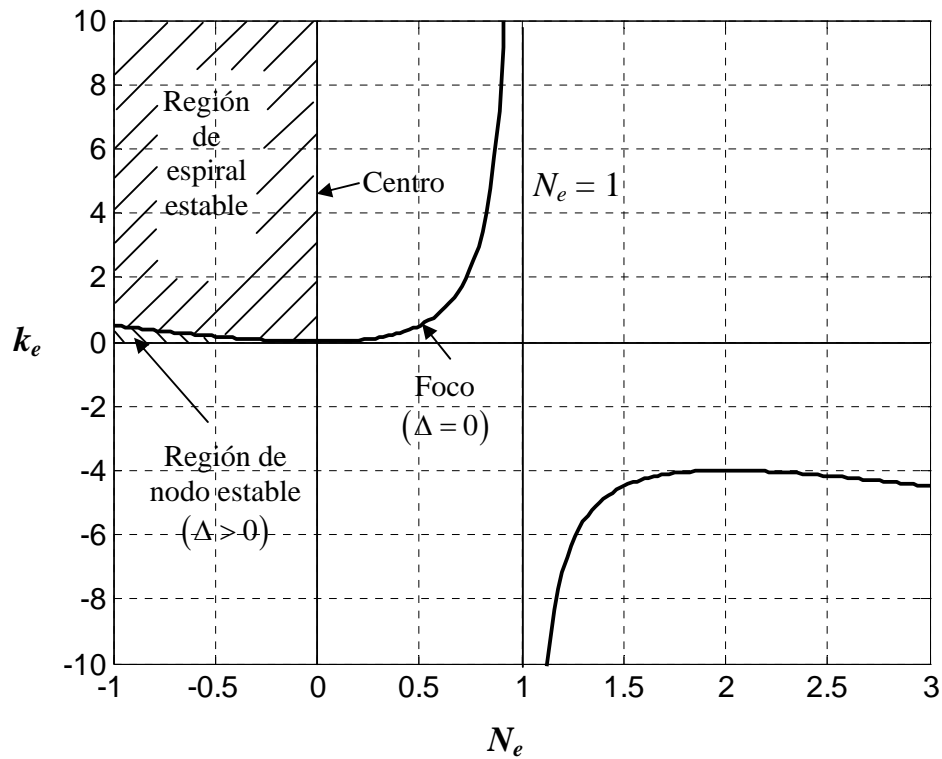


Fig. 5.9. Tipos de trayectorias para  $A, B > C$ . Sólo es accesible el segundo cuadrante.

- Estabilización aerodinámica. Eje principal intermedio próximo al eje de giro. Caso a)  $B < C < A$

En este caso, los momentos de inercia están ordenados de la siguiente forma:  $B < C < A$ . Entonces, de acuerdo a (5.94) debe ser  $N_e > 1$  para que el movimiento sea estable. Además, como  $B < C$ , por definición es  $N_e > 0$  y  $k_e < 0$ , y sólo es accesible el cuarto cuadrante del plano  $(N_e, k_e)$ . En estas condiciones, la orientación del vector de rotación respecto a los ejes cuerpo esta dada por las componentes adimensionales del vector de rotación  $(x_{1e}, x_{2e})$ , que son  $x_{1e} < 0$  y  $x_{2e} > 0$  para  $\delta_\beta > 0$ .

La región de espirales es  $k_e < -\frac{N_e^2}{N_e - 1}$ , como se indica en la Fig. 5.10. Para el límite de

la región de espirales, el valor máximo de  $k_e$  ocurre cuando  $N_e = 2$  (ecuación (5.96)), y vale  $k_e = -4$ .

La condición  $N_e > 1$  se da si  $B$  es menor y muy próximo a  $C$ , dependiendo de las magnitudes de los otros parámetros que intervienen en esa ecuación.

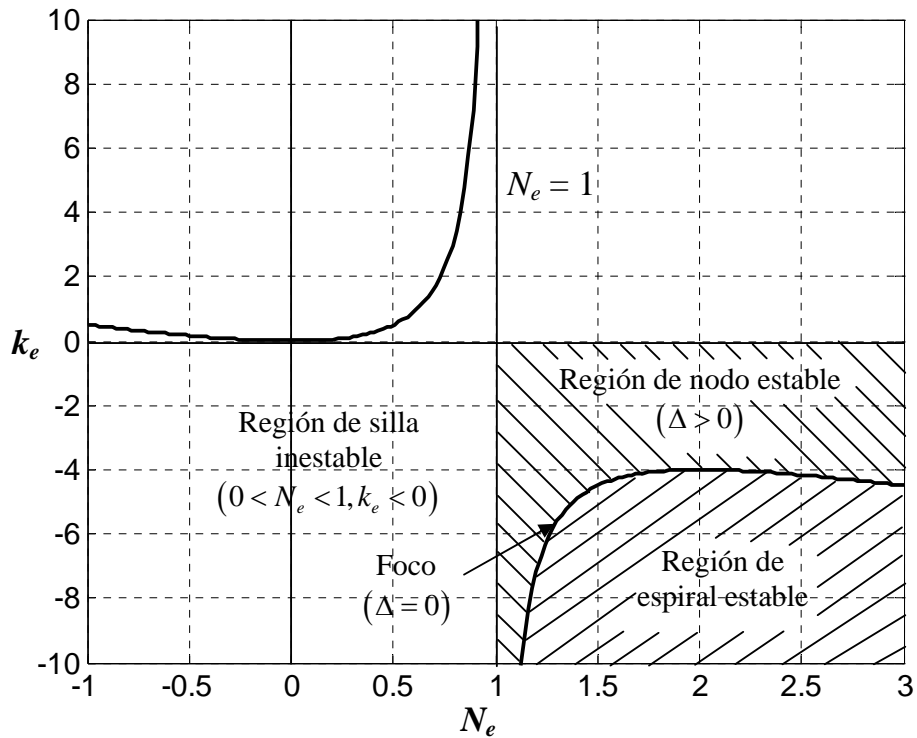


Fig. 5.10. Tipos de trayectorias para el caso  $B < C < A$ . Sólo es accesible el cuarto cuadrante.

Se ve que bajo determinadas condiciones el sistema puede ser estable al girar alrededor de un eje próximo a un eje principal intermedio. Esto se debe al efecto estabilizador de las fuerzas aerodinámicas generadas por las palas. Si el cuerpo no tiene tal aporte, su movimiento alrededor del eje de inercia intermedia es inestable.

- Estabilización aerodinámica. Eje principal intermedio próximo al eje de giro. Caso b)  $A < C < B$

En este caso, la región accesible es  $N_e < 0$  y  $k_e < 0$  (es decir, el tercer cuadrante). De acuerdo a la condición (5.94), debe ser  $N_e > 1$ , por lo que no aparece ninguna región estable que sea accesible.

### 5.2.5. Movimiento con fricción

Si suponemos que el cuerpo está articulado en una rótula situada en el centro de masas, coincidente con el origen (por ejemplo, para hacer ensayos en túnel aerodinámico), puede aparecer fricción mecánica en la rótula. En este caso, las ecuaciones (5.50) quedan:

$$\dot{\omega}_1 - \frac{B-C}{A} \omega_2 \omega_3 = -\frac{1}{k_A t_c^2} k_{21} \left( \delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) + \frac{1}{A} M_{f1} \quad (5.97a)$$

$$\dot{\omega}_2 + \frac{A-C}{B} \omega_1 \omega_3 = \frac{1}{k_B t_c^2} \left( \delta_\beta - \frac{\omega_2}{\omega_3} \right) + \frac{1}{B} M_{f2} \quad (5.97b)$$

$$\dot{\omega}_3 - \frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{t_c^2} \left[ \phi \alpha_0 + \frac{\omega_2}{\omega_3} \left( \frac{\omega_2}{\omega_3} - \delta_\beta \right) - \frac{c_D(\alpha_0)}{c_{L\alpha}} \right] + \frac{1}{C} M_{f3} \quad (5.97c)$$

En primer lugar, se busca la solución estacionaria, que se obtiene considerando:

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0 \quad (5.98)$$

Siguiendo el procedimiento del caso sin fricción, se podría suponer:

$$\omega_3 = \omega_0 \quad (5.99)$$

$$\omega_1, \omega_2 \ll \omega_0 \quad (5.100)$$

$$\delta_\beta \approx \frac{\omega_2}{\omega_0} \quad (5.101)$$

El momento de fricción se opone al giro, por tanto:



$$\bar{M}_f = -k_f \bar{\omega} - \bar{M}_{f0} \quad (k_f > 0) \quad (5.102)$$

donde  $\bar{M}_{f0}$  es el momento de fricción estática.

Con las consideraciones realizadas, las ecuaciones (5.97a) y (5.97b) se pueden escribir en la forma:

$$-\frac{k_f}{A\omega_0} \frac{\omega_1}{\omega_0} + \left( \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \right) \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \delta_\beta + \frac{1}{A} \frac{M_{f01}}{\omega_0^2} \quad (5.103)$$

$$\left( \frac{A-C}{B} \right) \frac{\omega_1}{\omega_0} + \left( \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} + \frac{k_f}{B\omega_0} \right) \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \delta_\beta - \frac{1}{B} \frac{M_{f02}}{\omega_0^2} \quad (5.104)$$

Utilizando el subíndice  $f$  para la contribución de la fricción, definiendo los parámetros:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 & a_{11f} &= \frac{k_f}{A\omega_0} & a_{12} &= \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \\ a_{21} &= \frac{A-C}{B} & a_{21f} &= 0 & a_{22} &= \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} & a_{22f} &= \frac{k_f}{B\omega_0} \\ b_1 &= \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \delta_\beta & b_{1f} &= \frac{1}{A} \frac{M_{f01}}{\omega_0^2} & b_2 &= \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} \delta_\beta & b_{2f} &= \frac{1}{B} \frac{M_{f02}}{\omega_0^2} \end{aligned} \quad (5.105)$$

y designando a las nuevas variables adimensionales:

$$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

el sistema queda:

$$\begin{cases} -a_{11f} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 + b_{1f} \\ a_{21} x_1 + (a_{22} + a_{22f}) x_2 = b_2 - b_{2f} \end{cases} \quad (5.106)$$

Suponiendo la fricción despreciable, la solución de equilibrio es la obtenida para el caso sin fricción (5.80).

El efecto de la fricción puede representarse como una perturbación de la solución de equilibrio a través de los términos  $x_{1f}$  y  $x_{2f}$ , es decir,

$$x_1 = x_{1e} + x_{1f}$$

$$x_2 = x_{2e} + x_{2f}$$

donde  $x_{1e}$ ,  $x_{2e}$  son las soluciones sin fricción y se supone pequeño el efecto de la fricción,  $x_{1f}, x_{2f} \ll x_{1e}, x_{2e}$ .

El sistema (5.106) se transforma en:

$$-a_{11f}(x_{1e} + x_{1f}) + a_{12}(x_{2e} + x_{2f}) = b_1 + b_{1f} \quad (5.107a)$$

$$a_{21}(x_{1e} + x_{1f}) + (a_{22} + a_{22f})(x_{2e} + x_{2f}) = b_2 - b_{2f} \quad (5.107b)$$

de donde se obtiene, eliminando la solución de orden cero (caso sin fricción) y despreciando términos de orden superior:

$$\begin{cases} -a_{11f}x_{1e} + a_{12}x_{2f} = b_{1f} \\ a_{21}x_{1f} + a_{22}x_{2f} + a_{22f}x_{2e} = -b_{2f} \end{cases} \quad (5.108)$$

De la primera ecuación, se obtiene:

$$x_{2f} = x_{2fe} = \frac{1}{a_{12}} [b_{1f} + a_{11f}x_{1e}] = \frac{1}{C-B} \frac{1}{N_e - 1} \left[ \frac{M_{f01}}{\omega_0^2} + \frac{k_f}{\omega_0} x_{1e} \right] \quad (5.109a)$$

y de la segunda, se obtiene:

$$\begin{aligned}
x_{1f} = x_{1fe} &= \frac{1}{a_{21}} \left[ -b_{2f} - a_{22f} x_{2e} - \frac{a_{22}}{a_{12}} (b_{1f} + a_{11f} x_{1e}) \right] = \\
&= \frac{1}{A-C} \left[ -\frac{M_{f02}}{\omega_0^2} - \frac{k_f}{\omega_0} x_{2e} - \frac{N_e}{N_e - 1} \left( \frac{M_{f01}}{\omega_0^2} + \frac{k_f}{\omega_0} x_{1e} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.109b}$$

expresiones que muestran las contribuciones del efecto de la fricción a las soluciones de equilibrio.

Se ve que en el caso con fricción puede no haber diferencia de paso,  $\delta_\beta = 0$ , y de todos modos existir velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

Aunque parece deducirse del modelo que a velocidades pequeñas la fricción estática daría lugar a que la posición de equilibrio fuera divergente, debido al término  $\frac{M_{f0i}}{\omega_0^2}$ , hay que recordar que la validez del modelo está restringida a que las desviaciones sean pequeñas.

En resumen, a partir de los valores de los coeficiente de fricción,  $M_{f0i}$  y  $k_f$ , de los momentos principales de inercia del cuerpo,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de la pendiente de la curva de sustentación,  $c_{L\alpha}$ , de la ubicación de las palas,  $r_{p11}$  y  $r_{p21}$ , de la presión dinámica,  $q_0$ , y de la diferencia de pasos,  $\delta_\beta$ , se pueden determinar las relaciones  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$  y  $\frac{\omega_2}{\omega_0}$ .

### 5.2.6. Análisis de la estabilidad del equilibrio para el movimiento con fricción

De las ecuaciones de movimiento para el caso con fricción (5.97a) y (5.97b), dividiendo por  $\omega_0$  y reemplazando (5.105), se obtiene:

$$\begin{cases} x_1' = -a_{11f}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 - b_1f \\ x_2' = -a_{21}x_1 - (a_{22} + a_{22f})x_2 + b_2 - b_2f \end{cases} \quad (5.110)$$

Análogamente al caso sin fricción, se estudia la estabilidad en el entorno del punto de equilibrio definiendo nuevas variables que describen el movimiento alrededor del punto de equilibrio:

$$x_1 = x_{1e} + x_{1fe} + X_1 \quad (5.111a)$$

$$x_2 = x_{2e} + x_{2fe} + X_2 \quad (5.111b)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.111) en (5.110), y utilizando (5.108), se obtiene:

$$X_1' + a_{11f}X_1 - a_{12}X_2 = 0$$

$$X_2' + a_{21}X_1 + (a_{22} + a_{22f})X_2 = 0$$

que se pueden expresar como:

$$\frac{X_1'}{X_2'} = \frac{dX_1}{dX_2} = \frac{a_{11f}X_1 - a_{12}X_2}{a_{21}X_1 + (a_{22} + a_{22f})X_2}$$

Análogamente al caso sin fricción, se buscan soluciones de la forma:

$$\begin{cases} X_1 = \alpha_1 e^{kT} \\ X_2 = \alpha_2 e^{kT} \end{cases}$$

donde  $k$  se obtiene de:

$$\begin{vmatrix} a_{11f} + k & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + a_{22f} + k \end{vmatrix} = 0$$

de donde:

$$k^2 - Trk + Det = 0 \quad Tr = a_{11f}a_{22} + a_{22f} \quad Det = a_{11f}(a_{22} + a_{22f}) + a_{12}a_{21} \quad (5.112)$$

Entonces, las raíces se obtienen de:

$$k_{1,2} = \frac{-a_{11f} - a_{22} - a_{22f} \pm \sqrt{(a_{11f} + a_{22} + a_{22f})^2 - 4(a_{11f}a_{22} + a_{11f}a_{22f} + a_{12}a_{21})}}{2} \quad \square$$

$$\square \frac{-a_{11f} - a_{22} - a_{22f} \pm \sqrt{a_{22}^2 + 2a_{22}(a_{11f} + a_{22f}) - 4(a_{11f}a_{22} + a_{12}a_{21})}}{2}$$

donde se han despreciado términos de orden superior.

Para que el sistema sea estable las raíces de (5.112) deben cumplir alguna de las condiciones indicadas para el caso sin fricción. Los límites de estabilidad se desplazarán debido a la presencia de los términos de fricción.

#### 1) NODO ESTABLE

Para que las dos raíces sean reales y negativas deben ser:

$$-Tr = a_{11f} + a_{22} + a_{22f} > 0$$

$$Det = a_{11f}a_{22} + a_{12}a_{21} > 0$$

siempre que el discriminante sea  $\Delta > 0$ .

Para la primera ecuación resulta:

$$\frac{1}{k_B I_c^2 \omega_0^2} + \frac{k_f}{A \omega_0} + \frac{k_f}{B \omega_0} > 0$$

es decir,

$$\frac{c_{L\alpha} I_a}{B} + \frac{k_f}{\omega_0} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) > 0$$

que se cumple siempre.

Para la segunda ecuación resulta:

$$\frac{k_f}{A\omega_0} \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} + \left( \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \right) \left( \frac{A-C}{B} \right) > 0$$

que, al ser  $A, B > 0$ , puede escribirse como:

$$\frac{k_f c_{L\alpha} I_a}{\omega_0} + (C-B)(C-A)(1-N_e) > 0 \quad (5.113)$$

El primer término del primer miembro es siempre positivo. Para un sistema inestable sin fricción (p.e.  $A, B < C$ ) puede ocurrir que al añadir fricción el sistema sea estable aunque  $N_e > 1$ , si cumple (5.113). Cuanto mayor sea la fricción, mayor podrá ser el valor de  $N_e$  y el sistema seguir siendo estable.

La ecuación (5.113) se puede describir en la forma:

$$(C-B)(C-A) \left[ 1 - N_e (1 - \mu_f) \right] > 0 \quad (5.114)$$

donde 
$$\mu_f = \frac{k_f}{k_{21} \omega_0 (C-A)}.$$

Se observa que el efecto de la fricción puede ser estabilizador o no, dependiendo de los signos de  $(C-B)$  y  $(C-A)$ .

## 2) ESPIRAL ESTABLE

Para que las raíces sean complejas,  $k_{1,2} = p \pm qi$ ,  $p < 0$ ,  $q \neq 0$ , debe ocurrir que el discriminante sea negativo:

$$\Delta = a_{22}^2 + 2a_{22}(a_{11f} + a_{22f}) - 4(a_{11f}a_{22} + a_{12}a_{21}) < 0$$

que, reemplazando los coeficientes, resulta:

$$\frac{(C-B)^2}{k_{21}^2 B^2} [N_e^2 - k_e(1-N_e) + \nu_f N_e] < 0$$

donde  $\nu_f = \frac{2k_{21}k_f}{A\omega_0} \frac{A-B}{C-B}$ , es el término que concentra la contribución de la fricción.

Este límite queda en la forma:

$$N_e^2 - k_e(1-N_e) + \nu_f N_e < 0$$

Obsérvese que no hay efecto de la fricción en la determinación del límite de la región de trayectorias espirales si  $A = B$ . Si  $A \neq B$  el efecto puede ser positivo o negativo según el signo de  $(A-B)$  y  $(C-B)$ .

El límite de la región de trayectorias espirales está definido por la curva

$$k_e = \frac{N_e^2 + \nu_f N_e}{1 - N_e}, \text{ que presenta mínimos en } N_e = 1 \pm \sqrt{1 + \nu_f}.$$

De este análisis surgen las regiones estables indicadas en la Fig. 5.11. La ubicación precisa de las curvas límite y de que una región sea un espiral estable o inestable depende de los valores de los parámetros aerodinámicos, geométricos, de inercia y de fricción del modelo.

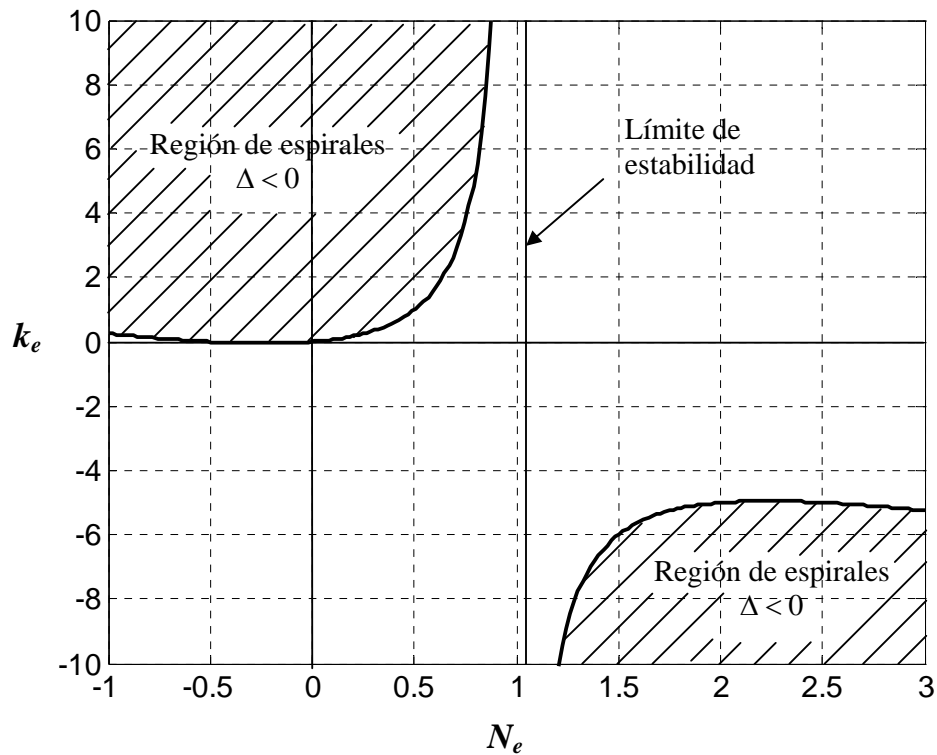


Fig. 5.11. Regiones de espirales para el caso con fricción, para  $\nu_f = 0,5$ .

### 3) FOCO ESTABLE

Para este caso ( $\Delta = 0$ ) se obtiene que:

$$k_1 = k_2 = -a_{11f} - a_{22} - a_{22f} = -\frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} - \frac{k_f}{\omega_0} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right).$$

#### 5.2.7. Determinación de los ángulos de nutación y rotación propia del cuerpo

En el presente apartado se plantean las ecuaciones que permiten determinar los ángulos de nutación,  $\theta$  (inclinación del eje 3 de la terna ejes cuerpo, respecto del eje Z de la terna inercial), y de rotación propia,  $\varphi$  (ángulo formado entre la proyección del eje Z en el plano 1-2 y el eje 2), de acuerdo con la geometría mostrada en la Fig. 5.12.



Las componentes de la velocidad angular,  $\bar{\omega}$ , en ejes cuerpo son:

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \quad (5.115a)$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \quad (5.115b)$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (5.115c)$$

En el caso estacionario no se observa movimiento de nutación ( $\dot{\theta} = 0$ ), por lo tanto las ecuaciones se reducen a:

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \quad (5.116a)$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \quad (5.116b)$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (5.116c)$$

Si se define  $\omega_{12} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ . Combinando (5.115a) y (5.115b), se tiene que:

$$\omega_{12} = \dot{\psi} \sin \theta \quad (5.117)$$

y también se tiene:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \tan \varphi \quad (5.118)$$

En el caso estacionario, obviamente  $\omega_1 = \text{cte}$  y  $\omega_2 = \text{cte}$ . Por lo tanto, de (5.118), se obtiene que:

$$\varphi = \text{cte} \rightarrow \dot{\varphi} = 0 \quad (5.119)$$

y, por lo tanto, de (5.116c), se deduce que:

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta \quad (5.120)$$

De (5.117) y (5.120), resulta que:

$$\tan \theta = \frac{\omega_{12}}{\omega_3} \quad (5.121)$$

De (5.118) y (5.121) se concluye que  $\bar{\omega}$  es un vector que sigue la dirección del eje Z (eje inercial de referencia), como se muestra en la Fig. 5.12, y el giro del cuerpo es precesión pura ( $\dot{\psi} \neq 0$ ,  $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ ), a velocidad constante  $\dot{\psi} = \omega_3 / \cos \theta$ .

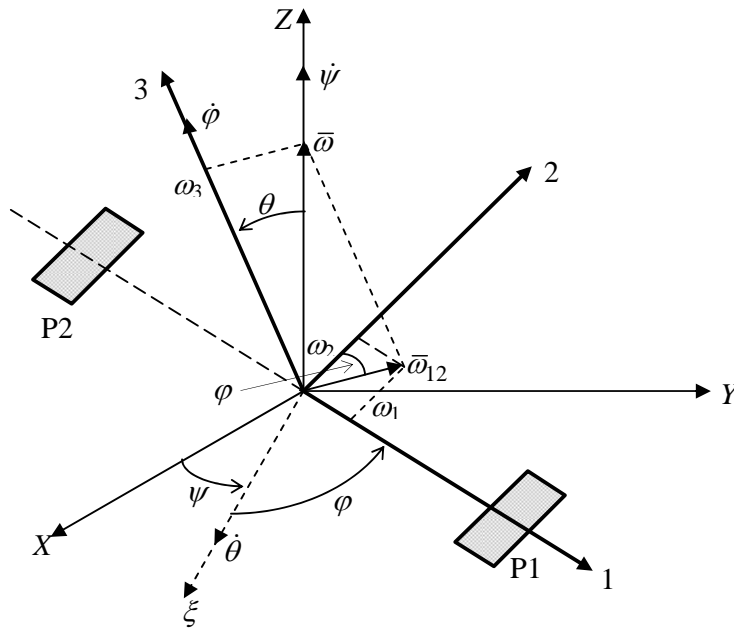


Fig. 5.12. Orientación del cuerpo.  $(X, Y, Z)$ : sistema de referencia inercial.  $(1, 2, 3)$ : sistema fijo al cuerpo.  $\psi$ , precesión;  $\theta$ , nutación;  $\phi$ , rotación propia. La velocidad angular,  $\bar{\omega}$ , está dirigida según el eje Z.

- Caso sin fricción

Las ecuaciones del movimiento para el caso sin fricción son las (5.76), siendo  $\omega_3 = \omega_0$ .

Dividiendo (5.76a) por (5.76b) y reemplazando en (5.118), se tiene:

$$\tan \varphi = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{k_{21}} \frac{B-C}{A-C} \quad (5.122)$$

donde también se ve que el ángulo de rotación propia es constante y solamente depende de las distribuciones máxicas y de la ubicación de las palas, y es independiente de la diferencia de pasos.

Por otra parte, de las ecuaciones de equilibrio (5.81) y (5.82), se tiene:

$$\tan\theta = I_a c_{L\alpha} \frac{\delta_\beta}{N_e - 1} \sqrt{\frac{1}{(C-A)^2} + \frac{k_{21}^2}{(C-B)^2}} = -\left(\frac{N_e}{1-N_e}\right) \delta_\beta \sqrt{1 + \frac{1}{k_{21}^2} \left(\frac{C-B}{C-A}\right)^2} \quad (5.123)$$

de donde se deduce que, para ángulos de nutación pequeños, la tangente de este ángulo es proporcional a la diferencia de ángulos de paso de las palas,  $\delta_\beta$ .

- Caso con fricción

Las ecuaciones de movimiento para el caso con fricción son (5.103) y (5.104).

La solución del caso en que el efecto de la fricción es pequeño se ha presentado en (5.109). Suponiendo el caso opuesto, aunque  $\frac{k_f}{A\omega_0} \ll 1$ , pero el efecto de  $\delta_\beta$  es despreciable, de (5.103) se obtiene:

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = -\frac{M_{f01}}{(C-B)\omega_0^2} \quad (5.124)$$

y de (5.104) se deduce, despreciando términos:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{M_{f02}}{(C-A)\omega_0^2} \quad (5.125)$$

Por lo tanto, los pares de fricción generan componentes de velocidad de rotación  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

En equilibrio es  $\dot{\omega}_3 = 0$ , que reemplazando en la ecuación (5.97c), y despreciando la diferencia de pasos,  $\delta_\beta$ , queda:

$$-\frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{t_c^2} \left[ \phi \alpha_0 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^2 - \frac{c_D(\alpha_0)}{c_{L\alpha}} \right] + \frac{1}{C} M_{f03} \quad (5.126)$$

De esta ecuación se deduciría la velocidad de rotación,  $\omega_0 = \omega_3$ .

En cuanto a los ángulos de giro propio,  $\varphi$ , y de nutación,  $\theta$ , se obtiene:

$$\left(\frac{\omega_{12}}{\omega_3}\right)^2 = \frac{1}{\omega_0^4} \left[ \frac{M_{f01}^2}{(C-B)^2} + \frac{M_{f02}^2}{(C-A)^2} \right] \quad (5.127)$$

$$\tan \theta = \frac{\omega_{12}}{\omega_3} = \frac{1}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{M_{f01}^2}{(C-B)^2} + \frac{M_{f02}^2}{(C-A)^2}} \quad (5.128)$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{M_{f02}}{M_{f01}} \frac{C-B}{C-A} \quad (5.129)$$

Se observa que a medida que aumenta la fricción aumenta la nutación. En cuanto al ángulo de giro propio, su signo depende de los signos de  $(C-B)$  y  $(C-A)$ .

#### 5.2.8. Ejemplo numérico

A continuación se realiza un ejemplo numérico basado en las características del modelo con que se realizaron los ensayos experimentales, que es un cilindro hueco de PVC con tapas de aluminio y palas rectangulares de aluminio fijadas al cilindro mediante varillas de acero.

Para el cálculo de los momentos de inercia se han considerado: el cilindro, las dos tapas, las dos varillas de acero y las dos palas. Se considera que el eje de las palas pasa por el centro de masas.

Para la determinación de  $k_{21}$  se ha supuesto que la resultante de la sustentación se sitúa en el 25 % de la cuerda y en el 60 % de la envergadura (Ver 4.1.3).

Se han tomado los valores del ensayo N° 040428-1, correspondientes a la Configuración básica, C01,  $\beta = 4^\circ$ ,  $V_v = 14,1$  m/s. Se ha supuesto una diferencia de paso entre las palas de  $2^\circ$ .

- Características del modelo

$$A = 6,31 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

$$B = 22,06 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

$$C = 22,25 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

$$k_A = \frac{A}{C} = 0,28$$

$$k_B = \frac{B}{C} = 0,99$$

$$S = 0,012 \text{ m}^2 \text{ (superficie de una sola pala)}$$

$$r_{p11} = 0,1 \text{ m}$$

$$r_{p12} = 0,034 \text{ m}$$

$$k_{21} = 0,34$$

$$c_{L\alpha} = 3,4$$

$$\omega_0 = 291,4 \text{ rad/s}$$

$$\rho = 1,21 \text{ kg/m}^3$$

$$\delta_\beta = 2^\circ = 0,035 \text{ rad}$$

$$t_c = \sqrt{\frac{C}{2c_{L\alpha}r_{p11}S\frac{1}{2}\rho(r_{p11}\omega_0)^2}} = 2,3 \times 10^{-2} \text{ s}$$

$$t_c^2 = 0,00053 \text{ s}^2$$

$$I_a = \rho S r_{p11}^3 = 14,52 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$$

- Análisis de la estabilidad del equilibrio para el movimiento sin fricción

Se determinan los coeficientes según las ecuaciones (5.77):

$$a_{11} = 0$$

$$a_{12} = \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} = -3,12 \times 10^{-3}$$

$$a_{21} = \frac{A-C}{B} = -0,722$$

$$a_{22} = \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} = 0,0224$$

$$b_1 = \frac{k_{21}}{k_A t_c^2 \omega_0^2} \delta_\beta = 9,4 \times 10^{-4}$$

$$b_2 = \frac{1}{k_B t_c^2 \omega_0^2} \delta_\beta = 7,8 \times 10^{-4} \quad (5.130)$$

Reemplazando los coeficientes en las ecuaciones de equilibrio (5.81) y (5.82), se tiene:

$$x_{2e} = \frac{\omega_{2e}}{\omega_0} = \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{N_e}{N_e - 1} \delta_\beta = -0,30 \quad (5.131)$$

$$x_{1e} = \frac{\omega_{1e}}{\omega_0} = \frac{b_2}{a_{21}} \left( 1 - \frac{a_{22} b_1}{a_{12} b_2} \right) = -\frac{\delta_\beta}{k_{21}} \frac{C - B}{C - A} \frac{N_e}{1 - N_e} = -0,01$$

Por lo que resulta:  $\omega_{1e} = -3,04 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{2e} = -87,42 \text{ rad/s}$ .

Las raíces del sistema (5.84) se calculan mediante la expresión (5.89), resultando:  $k_1 = -0,011 + 0,046 i$  y  $k_2 = -0,011 - 0,046 i$ . El sistema cumple la condición 2) del apartado 5.2.3. El sistema presenta un espiral estable.

Además,  $N_e = 0,88 < 1$  y  $k_e = 135,6$ . El punto de equilibrio se encuentra en el primer cuadrante del gráfico  $(N_e, k_e)$  (Fig. 5.8). Es el caso donde el eje principal mayor está próximo al eje de giro ( $A, B < C$ ).

- Determinación de los ángulos de nutación y rotación propia para el movimiento sin fricción

El ángulo de nutación,  $\theta$ , se obtiene de la ecuación (5.121):

$$\tan \theta = \frac{\omega_{12}}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_0} = \sqrt{x_{1e}^2 + x_{2e}^2} = 0,3$$

por lo que  $\theta = 16,7^\circ$ .

Mediante la ecuación (5.122), se tiene:

$$\tan \varphi = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{k_{21}} \frac{B - C}{A - C} = 0,035, \text{ por lo que el ángulo de rotación propia vale } \varphi = 2^\circ.$$

- Movimiento con fricción

Se recuerda que la fricción la produce una rótula situada en el centro de masas. Las restantes consideraciones son las mismas que para el caso sin fricción (ubicación del centro de presiones, datos del ensayo N° 040428-1).

Suponiendo que las características de la rótula utilizada son:  $k_f = 1,34 \times 10^{-6} \text{ Nm/(rad/s)}$  (pendiente de la curva del momento de fricción en función de la velocidad de giro para el rodamiento utilizado en el modelo) y  $M_{f01} = M_{f02} = 0,05 \text{ Nm}$  (coeficiente de fricción de un rodamiento esférico SKF GE5E (www.skf.com)), los coeficientes, según las ecuaciones (5.105), son:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0 & a_{11f} &= \frac{k_f}{A\omega_0} = 7,28 \times 10^{-6} \\
 a_{12} &= \frac{B-C}{A} + \frac{k_{21}}{k_{A_t c}^2 \omega_0^2} = -3,12 \times 10^{-3} & a_{21} &= \frac{A-C}{B} = -0,72 \\
 a_{22} &= \frac{1}{k_{B_t c}^2 \omega_0^2} = 0,0224 & a_{22f} &= \frac{k_f}{B\omega_0} = 2,08 \times 10^{-6} \\
 b_1 &= \frac{k_{21}}{k_{A_t c}^2 \omega_0^2} \delta_\beta = 9,4 \times 10^{-4} & b_{1f} &= \frac{1}{A} \frac{M_{f01}}{\omega_0^2} = 9,33 \times 10^{-4} \\
 b_2 &= \frac{1}{k_{B_t c}^2 \omega_0^2} \delta_\beta = 7,8 \times 10^{-4} & b_{2f} &= \frac{1}{B} \frac{M_{f02}}{\omega_0^2} = 2,66 \times 10^{-4}
 \end{aligned} \tag{5.132}$$

Reemplazando en el sistema (5.106):

$$\begin{cases} -a_{11f}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 + b_{1f} \\ a_{21}x_1 + (a_{22} + a_{22f})x_2 = b_2 - b_{2f} \end{cases}$$

se obtiene:

$$\begin{cases} -7,28 \times 10^{-6}x_1 - 0,00312x_2 = 0,00187 \\ -0,72x_1 + 0,0224x_2 = 5,2 \times 10^{-4} \end{cases} \tag{5.133}$$

Obsérvese que los coeficientes de las ecuaciones (5.133) son muy similares a los que aparecen en el caso sin fricción, salvo los términos independientes, ya que  $b_1$ ,  $b_{1f}$ ,  $b_2$  y  $b_{2f}$  son del mismo orden.

De (5.133) resultan:

$$x_1 = \frac{\omega_{1ef}}{\omega_0} = -0,01936 \text{ y } x_2 = \frac{\omega_{2ef}}{\omega_0} = -0,5993. \quad (5.134)$$

Es decir,  $\omega_{1ef} = -5,64 \text{ rad/s}$  y  $\omega_{2ef} = -174,64 \text{ rad/s}$ .

Se ve que en el caso con fricción,  $\omega_{2ef}$  es del mismo orden de magnitud que  $\omega_0$ .

- Análisis de la estabilidad del equilibrio para el movimiento con fricción

Las raíces del sistema se calculan mediante la ecuación:

$$k_{1,2} = \frac{-a_{11f} - a_{22} - a_{22f} \pm \sqrt{a_{22}^2 + 2a_{22}(a_{11f} + a_{22f}) - 4(a_{11f}a_{22} + a_{12}a_{21})}}{2}$$

resultando:  $k_1 = -0,011 + 0,046i$  y  $k_2 = -0,011 - 0,046i$ . El sistema cumple la condición 2) del apartado 5.2.3. El sistema presenta un espiral estable.

Los valores de  $k_{1,2}$  son iguales a los obtenidos para el caso sin fricción debido a que los términos correspondientes a la fricción ( $a_{11f}$  y  $a_{22f}$ ) son de órdenes de magnitud menores a los otros términos que intervienen en esa ecuación.

Además,  $N_e = 0,88$  y  $k_e = 135,6$ , igual al caso sin fricción. El punto de equilibrio se encuentra en el primer cuadrante del gráfico ( $N_e$ ,  $k_e$ ).

- Determinación de los ángulos de nutación y rotación propia para el movimiento con fricción

El ángulo de nutación se determina a partir de la ecuación (5.128):



$$\tan\theta = \frac{\omega_{12}}{\omega_3} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \approx 0,6$$

entonces, es  $\theta = 31^\circ$ .

El ángulo de rotación propia del cuerpo se determina a partir de la ecuación (5.129):

$$\tan\varphi = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_{1ef}}{\omega_{2ef}} = 0,031$$

resultando  $\varphi = 1,81^\circ$ .

El ángulo de nutación aumenta en módulo respecto al caso sin fricción. Cabe señalar que para el caso con fricción se ha utilizado la misma velocidad de giro,  $\omega_0$ , que para el caso sin fricción. Aunque es de esperar que ésta sea algo menor en presencia de la fricción, puesto que las fuerzas y momentos de fricción son contrarios a las fuerzas aerodinámicas que producen el movimiento de rotación del cuerpo. En efecto, se ha visto en el Capítulo 2 que el efecto de la fricción es reducir la velocidad de rotación, pero el efecto es muy pequeño, por lo que se ha despreciado en el modelo desarrollado en dicho capítulo.

## 6. CONCLUSIONES

El trabajo presentado ha consistido fundamentalmente en el análisis desde el punto de vista aerodinámico de un decelerador basado en el concepto de pararrotor. Puede dividirse la tesis en cuatro partes principales, que aportan aspectos novedosos: el desarrollo de un modelo teórico de la caída en autorrotación del pararrotor, la realización de ensayos experimentales, la validación del modelo teórico y el análisis dinámico del pararrotor.

El modelo teórico de la caída del pararrotor y los ensayos experimentales se han desarrollado con una fuerte influencia de los últimos sobre el primero. Esto es, para el desarrollo del modelo teórico se han tomado elementos de los experimentos que han sido importantes para que este modelo pudiera predecir adecuadamente el comportamiento del pararrotor. Por ejemplo, las visualizaciones del flujo han permitido deducir que el flujo sobre las palas no se corresponde con un ala rectangular sino, más bien, con un ala triangular. Esto ha permitido tomar elementos de la teoría de alas esbeltas y entender y explicar comportamientos de ciertos parámetros en los experimentos, como por ejemplo, la variación de  $c_{L\alpha}$  con  $\alpha$ .

El modelo teórico se basa en la teoría de la cantidad de movimiento y en el análisis de las fuerzas resultantes sobre cada pala. Al ser el alargamiento pequeño, para relacionar las características geométricas de las palas con las fuerzas aerodinámicas sobre ellas no es posible utilizar la teoría del elemento de pala, que es la teoría clásica utilizada en alas rotatorias de gran alargamiento. Alrededor de estos conceptos se centra una de las aportaciones originales de este trabajo: el análisis de un ala rotatoria en régimen de autorrotación, donde las palas son de bajo alargamiento por lo que no son aplicables las teorías de flujos bidimensionales.

El análisis de las ecuaciones que conforman el modelo teórico ha permitido observar cuáles son los parámetros que afectan al comportamiento del pararrotor (la solidez, el coeficiente de resistencia de las palas, la pendiente de la curva de sustentación de las palas) y de qué manera se manifiesta su influencia. Por ejemplo, un aumento de  $c_D$  produce una disminución de la pendiente de la curva de  $\overline{U_T}^2$ , es decir, disminuye la

velocidad de giro del modelo, lo que lleva asociado también el aumento del mínimo de  $k$ ; desplaza los mínimos de las curvas de  $k$ ,  $-\overline{Vv}$  y  $\phi_{\beta 0}$  hacia la derecha, hacia valores grandes de  $\phi$ ; para igual ángulo de paso,  $\beta$ , aumentan los valores de  $\phi$  y, por tanto, los ángulos de ataque,  $\alpha$ , deberían disminuir, si no fuera porque la curva  $\alpha(\phi)$  también se desplaza hacia valores crecientes de  $\alpha$ , dando como resultado neto un aumento de  $\alpha$  (ver Apartado 2.7). También se ha deducido que el valor máximo del coeficiente de resistencia del modelo resulta ser  $c_{DM \max} = \frac{1}{\sigma}$ , es decir, sólo depende de la solidez.

Asimismo se ha visto de qué manera varía  $c_{DM}$  en función de  $\beta$ . Todas estas conclusiones permiten identificar la influencia de cada parámetro en el comportamiento aerodinámico del pararrotor, con lo cual se sabe como hay que modificarlos para obtener las actuaciones deseadas y es posible predecir el comportamiento de un pararrotor de características definidas.

Además, en el desarrollo del modelo teórico se ha estudiado la influencia del coeficiente de resistencia aerodinámica de las palas, del alargamiento, de la pendiente de la curva de sustentación, de la solidez, de la fricción de la superficie lateral del cilindro y de los rodamientos.

Otra de las aportaciones novedosas es la caracterización de un modelo típico de pararrotor mediante ensayos en túnel aerodinámico. No se han localizado en la bibliografía ensayos semejantes. El modelo consiste en un cuerpo principal cilíndrico y dos palas de planta rectangular, sobre la base del cilindro situada a sotavento. Se ha ensayado una configuración aerodinámica, aquí denominada “Configuración básica”, consistente en un ala de planta rectangular, de dimensiones fijas y ángulo de paso variable. Sobre esta configuración se han estudiado los efectos de la velocidad de la corriente y el ángulo de paso de las palas sobre la tracción y la velocidad de giro. En una segunda etapa, se han ensayado variaciones a la Configuración básica (introducción de varillas, placas, rugosidad, etc. sobre las palas). Estas variaciones han sido realizadas sobre las superficies de las palas, sin modificar el cilindro, ni el perfil ni la forma en planta de las palas. Se ha observado y concluido lo siguiente:

- Respecto de la Configuración básica, se ha observado que  $k$  decrece con el ángulo de paso y con la velocidad de la corriente; y que  $c_{DM}$  disminuye al aumentar el ángulo de paso, y presenta poca variación con la velocidad de la corriente, excepto para  $V_v = 5,4$  m/s y  $\beta = 8$  grados, donde cae abruptamente. Al aumentar la velocidad  $k$  alcanza un valor estacionario.
- En cuanto a la comparación de las restantes configuraciones con la básica, se ha observado un aumento del parámetro  $k$  para todas las configuraciones, excepto para algunos ensayos de la configuración C07 (papel de lija en el intradós). Respecto del  $c_{DM}$ , el comportamiento es dispar, en cuanto a variaciones respecto a la configuración básica. En general, este parámetro baja, excepto en casos puntuales: configuración con dos varillas sobre el extradós, C03; con diámetro mayor, C06, (esta configuración no fue ensayada en profundidad) y con mayor rugosidad en el intradós, C07.

Las variaciones máximas en el  $c_{DM}$  están en el orden del 10 %, mientras que en  $k$  alcanzan el 125 %.

- Respecto a la reproducibilidad de los ensayos, se considera buena.
- Respecto a las configuraciones del flujo, se ha observado que, independientemente de cuál es la configuración observada, el patrón de flujo no varía con el ángulo de paso de las palas ni con la velocidad de la corriente. Se ha observado flujo adherido tanto en extradós como en intradós, excepto a lo largo del borde de ataque del extradós, donde se aprecia la presencia de un vórtice, que crece en dirección de la envergadura. En el intradós, en la zona del borde de ataque próxima al radio interno, se ha observado un pequeño desprendimiento (ese flujo se dirige hacia el extradós). El flujo es predominantemente radial en la zona del borde de ataque, se orienta según la cuerda en la zona del borde de salida y en la zona central de la pala forma un ángulo de unos 45 grados con la dirección radial.

Los cambios introducidos en cada configuración solamente cambian localmente, en el entorno de esos obstáculos, la configuración del flujo.

El flujo es estacionario, en un sistema de referencia fijo al cuerpo, como se deduce de la buena definición de las imágenes.

- Para obtener menores velocidades de giro (mayores valores del parámetro  $k$ ), aumentar la rugosidad en las palas es beneficioso, al igual que trabajar con ángulos de paso pequeños.

- Para obtener mayor tracción (es decir, mayor resistencia aerodinámica del modelo) es conveniente trabajar con ángulos de paso pequeños.

De la comparación del modelo teórico con los resultados experimentales se deducen los valores de  $c_{L\alpha}$ ,  $\alpha$  y  $c_{D0}$  que intervienen en el modelo teórico.

Estos y otros aspectos se detallan a continuación:

- Los valores de  $c_{L\alpha}$  obtenidos de la comparación se adecuan a los que se deducen de las expresiones obtenidas para las alas esbeltas teniendo en cuenta la expresión no lineal sugerida por K. W. Mangler y J. H. B. Smith (Stahl, W. H., 1979) (ver Apartado 2.9.3).
- Como es de esperar, la rugosidad de las palas se traduce en un aumento del  $c_{D0}$ . Se obtienen valores de 0,07 y 0,08, para las configuraciones con menor rugosidad, C01 y C07, respectivamente; y de 0,35 y 0,38, para las configuraciones con mayor rugosidad, C03 y C09, respectivamente.
- El parámetro  $a$  varía entre 2 y 2,7. Como se comenta en el Apartado 4.4, en el trabajo (Pelletier y Mueller, 2000), para una placa plana rectangular de alargamiento 3 el factor  $a$  tiene un valor de aproximadamente 2,9 (tomado del gráfico de los ensayos experimentales).
- Las diferencias entre los valores del parámetro  $k$  resultante del ajuste y el medido se encuentran entre el 3 y 7 % aproximadamente.
- Las diferencias entre los valores del parámetro  $\overline{Vv}$  resultante del ajuste y el medido se sitúan entre el 4 y 8 % aproximadamente.
- Las diferencias entre los valores del parámetro  $\overline{U_T^2}$  resultante del ajuste y el medido se sitúan entre el 4 y 6 %, para las configuraciones con menor rugosidad, C01 y C07; y entre el 12 y 14 % aproximadamente, para las configuraciones con mayor rugosidad, C03 y C09.
- A la vista de los resultados anteriores se considera que los resultados experimentales y el modelo teórico se ajustan razonablemente bien. Por otra parte, a raíz de las pruebas realizadas no se ha encontrado una forma sencilla de mejorar el ajuste, ya que las diferencias que aparecen se atribuyen a los errores asociados a los resultados experimentales y a las hipótesis con que se ha elaborado el modelo.

Seguidamente, según se presenta en el Capítulo 5, se ha estudiado la dinámica del sistema. Al caer el pararrotor en la atmósfera se generan fuerzas aerodinámicas sobre las palas, que imprimen un movimiento de rotación al cuerpo. Se han determinado las fuerzas que actúan sobre esas palas. Se ha planteado y desarrollado la ecuación de conservación del momento cinético y se han obtenido las ecuaciones que rigen el movimiento del cuerpo cuando el eje de rotación se aparta de la vertical. Durante este desarrollo se han introducido las hipótesis y simplificaciones que se han juzgado apropiadas y justificadas en los casos de interés práctico, tanto en el vuelo libre como cuando se ensaya en túnel aerodinámico sujetando el modelo mediante una rótula (que añade fricción al movimiento).

El modelo ha permitido deducir, por ejemplo, que al cambiar la fricción pueden cambiar la velocidad de rotación,  $\omega_3$ , y el ángulo de ataque medio,  $\alpha_0$ , para conseguir un nuevo equilibrio;  $M_{3a}$  aumenta cuando  $\omega_3$  disminuye.

Una vez determinadas las características de la caída del pararrotor en lo que se considera una configuración de equilibrio, se ha analizado su estabilidad en el entorno del punto de equilibrio para los casos sin y con fricción. Se han hallado las regiones estables e inestables, los límites de estabilidad y las condiciones de estabilidad para el giro alrededor de un eje próximo a uno de los ejes principales de mayor, menor e intermedio valor del momento de inercia, gracias a que no aparecen los ángulos de nutación, precesión ni rotación propia en la formulación. Se trata de una modificación del caso clásico de rotación de un cuerpo libre en el vacío. Aparecen dos nuevos parámetros: el de estabilidad  $N_e$  y la relación de momentos de inercia  $k_e$ , que ayudan a estudiar el problema. Se ha encontrado lo que se resume a continuación:

a) Caso sin fricción

- Estabilidad inercial. Eje principal mayor próximo al eje de giro

En este caso, debe ser  $N_e < 1$  para que el sistema sea estable. Además, es  $N_e > 0$  y  $k_e > 0$ ; por lo tanto, sólo es accesible el primer cuadrante del plano  $(N_e, k_e)$ . El límite de

la región de espirales (focos) está dado por  $k_e = \frac{N_e^2}{1-N_e}$ , y la región de espirales se encuentra cuando  $k_e > \frac{N_e^2}{1-N_e}$ . Es de notar que cuando  $N_e > 1$  (acciones aerodinámicas grandes comparadas con  $(C-B)$ ), el sistema resulta inestable, lo que no ocurre en el caso clásico (sin fuerzas aerodinámicas).

- Estabilidad inercial. Eje principal menor próximo al eje de giro

En este caso,  $N_e < 0$  y  $k_e > 0$ ; por lo tanto, sólo es accesible el segundo cuadrante del plano  $(N_e, k_e)$ . La región estable es  $N_e < 1$ .

- Estabilización aerodinámica. Eje principal intermedio próximo al eje de giro. Caso a)  $B < C < A$

En este caso, debe ser  $N_e > 1$  para que el movimiento sea estable. Además, es  $N_e > 0$  y  $k_e < 0$  y sólo es accesible el cuarto cuadrante del plano  $(N_e, k_e)$ . La región de espirales es  $k_e < -\frac{N_e^2}{N_e-1}$ . Para el límite de la región de espirales el valor máximo de  $k_e$  ocurre

cuando  $N_e = 2$ , y vale  $k_e = -4$ . Se ve que bajo determinadas condiciones el sistema puede ser estable al girar alrededor de un eje próximo a un eje principal intermedio. Esto se debe al efecto estabilizador de las fuerzas aerodinámicas generadas por las palas. Si el cuerpo no tiene tal aporte, su movimiento alrededor del eje de inercia intermedia es inestable (caso del giro de un cuerpo en ausencia de fuerzas aerodinámicas).

- Estabilización aerodinámica. Eje principal intermedio próximo al eje de giro. Caso b)  $A < C < B$

En este caso, la región accesible es el tercer cuadrante. Además, debe ser  $N_e > 1$ , por lo que no aparece ninguna región estable que sea accesible.

- b) Caso con fricción

Lógicamente, en las ecuaciones del movimiento con fricción aparecen términos debidos a ella, que, al analizar la estabilidad del equilibrio, desplazan los límites de estabilidad. Se han analizado los siguientes casos:

- Nodo estable

Se ha arribado a una ecuación de la que se deduce que para un sistema inestable sin fricción (p.e.  $A, B < C$ ), puede ocurrir que al añadir fricción el sistema sea estable aunque  $N_e > 1$ , si cumple (5.113). Cuanto mayor sea la fricción, mayor podrá ser el valor de  $N_e$  y el sistema seguir siendo estable.

También se ha observado que el efecto de la fricción puede ser estabilizador o no, dependiendo de los signos de  $(C - B)$  y  $(C - A)$ .

- Espiral estable

Se han encontrado dos regiones de espirales. Que éstas sean estables o inestables dependen de los valores de los parámetros aerodinámicos, geométricos, de inercia y de fricción del modelo.

- Foco estable

También en este caso, la ubicación precisa de las curvas límite de las regiones de estabilidad o de tipo de trayectoria depende de los valores de los parámetros aerodinámicos, geométricos, de inercia y de fricción del modelo.

Respecto a trabajos futuros, debido a la novedad del tema considerado en esta Tesis, aparece un amplio número de ellos, tanto en el terreno experimental como en el teórico. Entre los primeros, hay que considerar la realización de experimentos sobre un modelo que se mueva en caída libre para medir ciertos parámetros como la velocidad de giro y el ángulo de nutación, y estudiar su estabilidad. También habría que añadir la realización de experimentos en túnel aerodinámico sobre un modelo sujeto mediante una rótula situada en el centro de masas. Con los resultados de estos ensayos se podría



determinar la bondad del modelo teórico del análisis dinámico y analizar el impacto de las simplificaciones e hipótesis realizadas.

En el terreno teórico, se podría ampliar el modelo para tener en cuenta el efecto de parámetros tales como diferencias en las superficies aerodinámicas (área, curvatura, posición del centro de presiones, etc...), en su posición relativa al centro de masas (palas situadas en un plano distinto del que contiene al centro de masas), en su número (tres, cuatro o un número grande palas), así como el efecto de un viento lateral y del ángulo del diedro de las palas.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

Anderson, J., "Fundamentals of aerodynamics", Mc. Graw Hill, 1984.

Bastianón, R., "Energía del viento y diseño de turbinas eólicas", Tiempo de cultura ediciones, Buenos Aires, 1994.

Cockrell, D. J., "The aerodynamics of parachutes", AGARD-AG-295, 1987.

Crimi, P., "Analysis of samara-wing decelerator steady-state characteristics", Journal of Aircraft, pp. 41-47, January 1988.

Cuerva, A., Espino, J., Meseguer, J., "Helicópteros y aeronaves diversas: Teoría de cantidad de movimiento, Teoría del elemento de pala en vuelo axial, Combinación de la teoría de cantidad de movimiento y teoría del elemento de pala", ETSI Aeronáuticos, UPM.

Doherr, K-F. and Schilling, H., "Nine-degree-of-freedom simulation of rotating parachute systems", Journal of Aircraft, Vol. 29, No. 5, pp. 774-781, Sept-Oct. 1992.

Elsgolts, L., "Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional", MIR, 1977.

Gerhart, P., Gross, R., Hochstein, J., Mecánica de fluidos, Allison Wesley Iberoamericana, 1995.

Glauert, H., "The elements of airfoil and airscrew theory", Cambridge University Press, 2 ed., 1947.

Guzmán, M. de, "Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control", Editorial Alambra, 1987.

Hirsch, M., Smale, S., "Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal", Alianza Editorial, 1983.

Hoerner, "Fluid-dynamic lift", Published by L. Hoerner, 1975.

Hoerner, "Fluid-dynamic drag", Published by L. Hoerner, 1965.

Karlsen, L., Borgström, D. and Paulsson, L., "Aerodynamics of a rotating body descending from the separation position of an artillery munition shell", 11th AIAA Aerodynamic Decelerator Systems Technology Conference, San Diego, CA, April 9-11, 1991.

Levin, D. and Shpund, Z., "Dynamic investigation of the angular motion of a rotating body-parachute system", Journal of Aircraft, Vol. 32, No. 1, 1995.

Levin, D. and Shpund, Z., "Canopy geometry effect on the aerodynamic behaviour of cross-type parachutes", Journal of Aircraft, Vol. 34, No. 5, 1997.

López Ruiz, J. L., "Helicópteros. Teoría y Diseño Conceptual", Editorial ETSI Aeronáuticos, 1993.

Lugt, H., "Autorotation", Annual Review Fluid Mechanics, pp. 123-147, 1983.

Mahapatra, P., "Aviation weather surveillance systems. Advanced radar and surface sensors for flight and air traffic management", AIAA, 1999.

Parkinson, G. V., "On the performance of Lanchester's Aerial Tourbillion", J. Royal Aeronautical Society, Vol. 68, pp. 561-564, 1964.

Pelletier, A. and Mueller, T. J., "Low Reynolds Number Aerodynamics of Low-Aspect-Ratio, Thin/Flat/Cambered-Plate Wings", Journal of Aircraft, Vol. 37, No. 5, September-October 2000.

Pepper, W., "A new rotating parachute design having high performance", J. Spacecraft, Vol. 23, No. 2, 1986.

Rosen, A. and Seter, D., “Vertical autorotation of a single winged samara”, Transactions of the ASME, Vol. 58, December 1991.

Rosen, A. and Seter, D., “Stability of the vertical autorotation of a single winged samara”, Transactions of the ASME, Vol. 59, December 1992.

Shpund, Z. and Levin, D., “Measurement of the static and dynamic coefficients of a cross-type parachute in subsonic flow”, AIAA, 1991.

Shpund, Z. and Levin, D., “Forebody influence on rotating parachute aerodynamic properties”, Journal of Aircraft, Vol. 34, No. 2, 1997.

SKF, [www.skf.com](http://www.skf.com).

Stahl, W. H., “Aerodynamics of low aspect ratio wings”, AGARD Lecture Series No. 98, Missile aerodynamics, 1979.

Thomson, W. T., “Introduction to space dynamics”, Dover Publications, 1986.

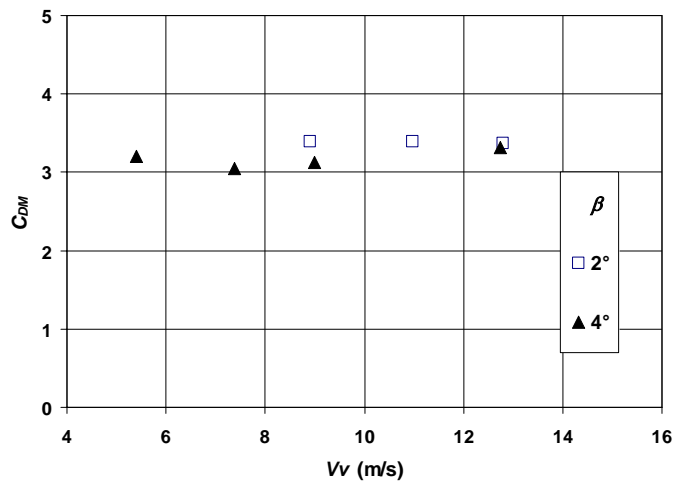
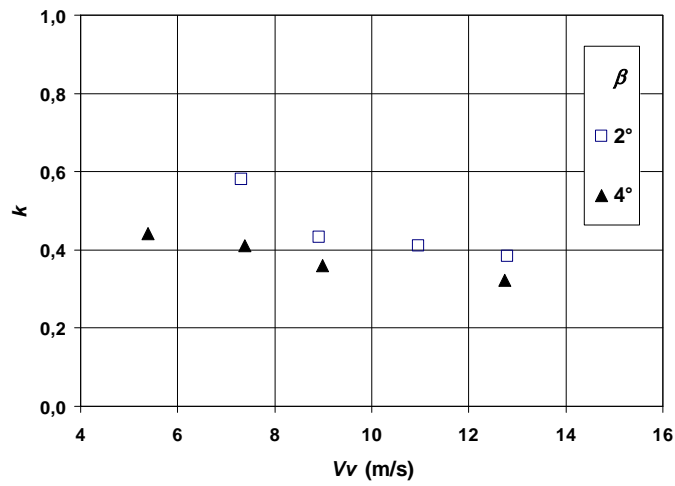
## **ANEXO 1**

### **RESULTADOS EXPERIMENTALES**

En este anexo se presentan los resultados de los ensayos realizados en el túnel aerodinámico del Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, sobre el modelo del pararrotor. El análisis de estos datos se encuentra descrito en el Capítulo 3.

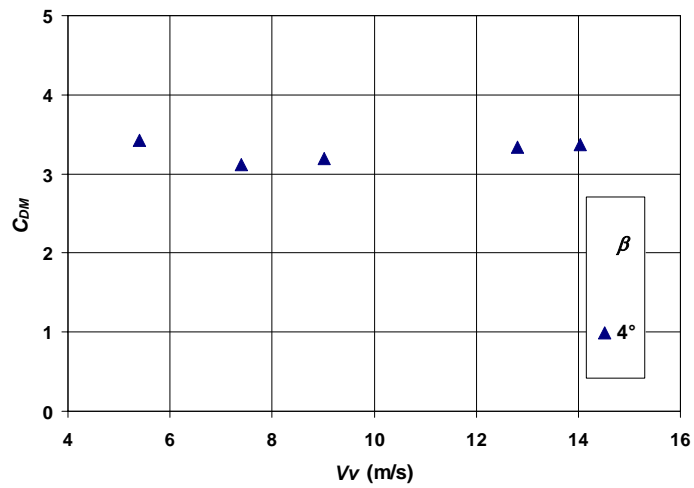
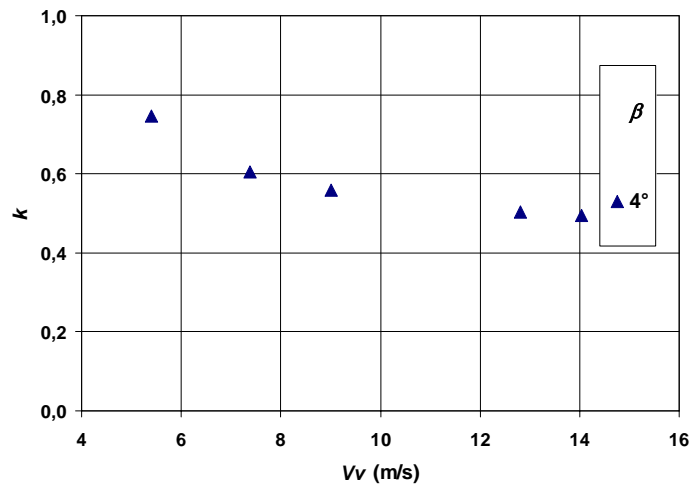
Ensayo N° 030827  
Configuración: C01

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
2	7,3	91	-	-	0,58
2	8,9	149	4,0	3,4	0,43
2	11,0	194	6,0	3,4	0,41
2	12,8	241	8,1	3,4	0,39
4	5,4	88	1,4	3,2	0,44
4	7,4	130	2,5	3,1	0,41
4	9,0	180	3,7	3,1	0,36
4	12,7	287	7,9	3,3	0,32



Ensayo N° 040420-1  
Configuración: C02

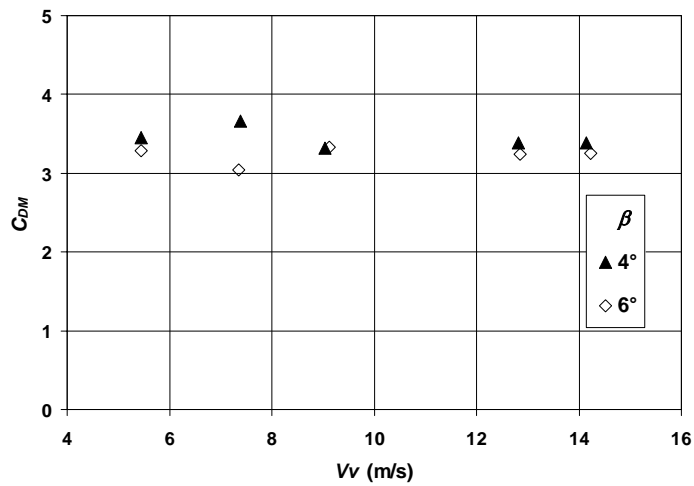
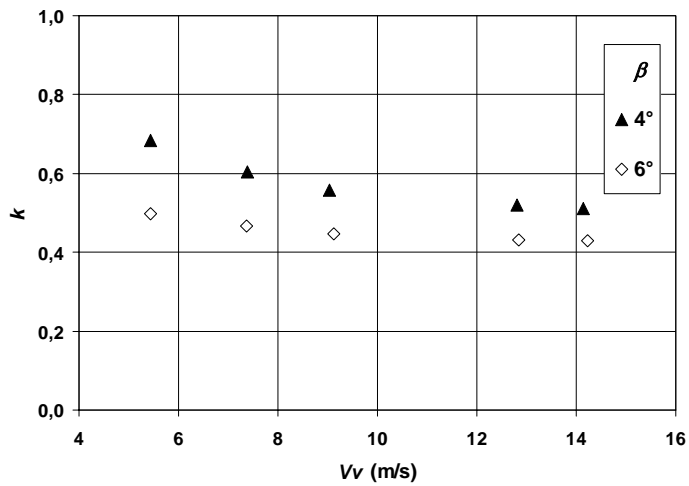
$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
4	5,4	52	1,5	3,4	0,75
4	7,4	88	2,5	3,1	0,61
4	9,0	117	3,8	3,2	0,56
4	12,8	184	8,1	3,3	0,50
4	14,0	206	9,8	3,4	0,49



Ensayo N° 040423  
Configuración: C02

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
4	5,4	58	1,5	3,5	0,68
4	7,4	89	2,9	3,7	0,61
4	9,0	118	3,9	3,3	0,56
4	12,8	179	8,0	3,4	0,52
4	14,1	200	9,8	3,4	0,51

6	5,4	79	1,4	3,3	0,50
6	7,4	114	2,4	3,0	0,47
6	9,1	148	4,0	3,3	0,45
6	12,8	216	7,8	3,2	0,43
6	14,2	240	9,5	3,3	0,43

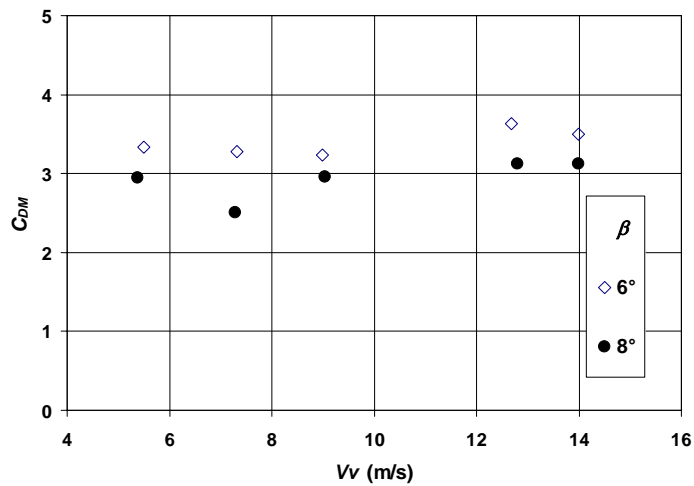
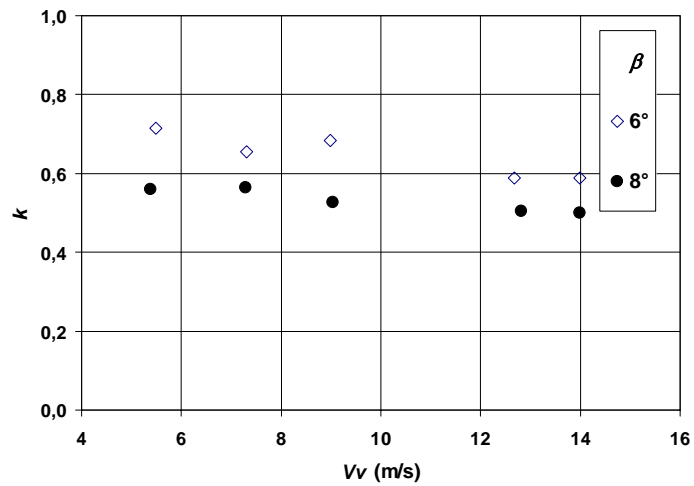




Ensayo N° 040426-1  
Configuración: C03

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
6	5,5	56	1,5	3,3	0,72
6	7,3	81	2,6	3,3	0,65
6	9,0	95	3,9	3,2	0,68
6	12,7	156	8,6	3,6	0,59
6	14,0	173	10,1	3,5	0,59

8	5,4	70	1,3	2,9	0,56
8	7,3	94	2,0	2,5	0,56
8	9,0	124	3,6	3,0	0,53
8	12,8	184	7,6	3,1	0,50
8	14,0	203	9,1	3,1	0,50

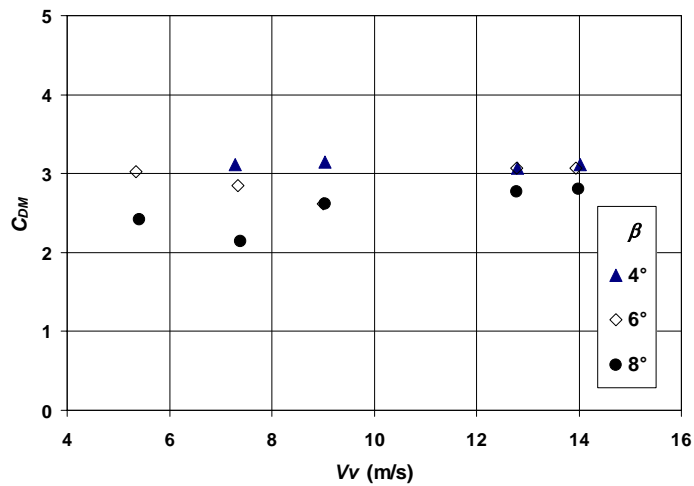
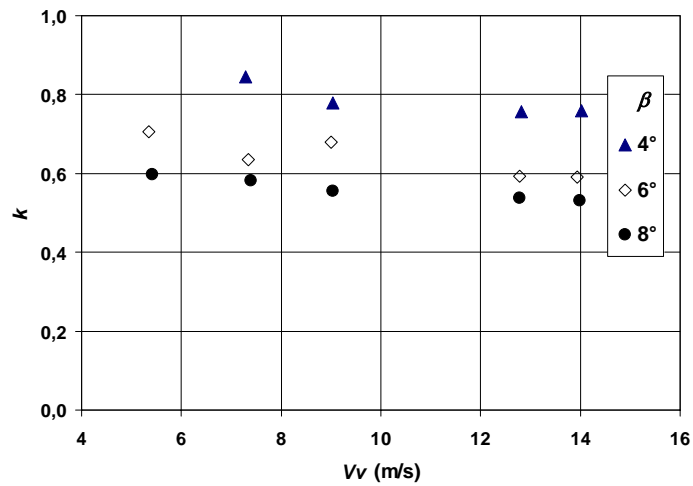


Ensayo N° 040426-2  
Configuración: C09

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
4	7,3	62	2,4	3,1	0,85
4	9,0	84	3,8	3,1	0,78
4	12,8	123	7,5	3,1	0,76
4	14,0	134	9,1	3,1	0,76

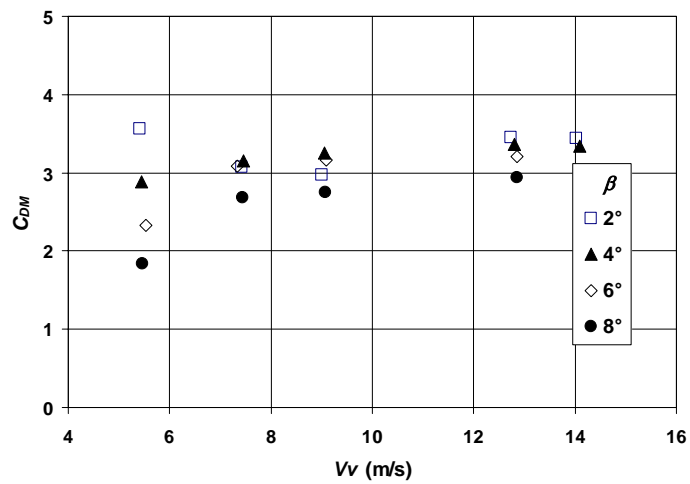
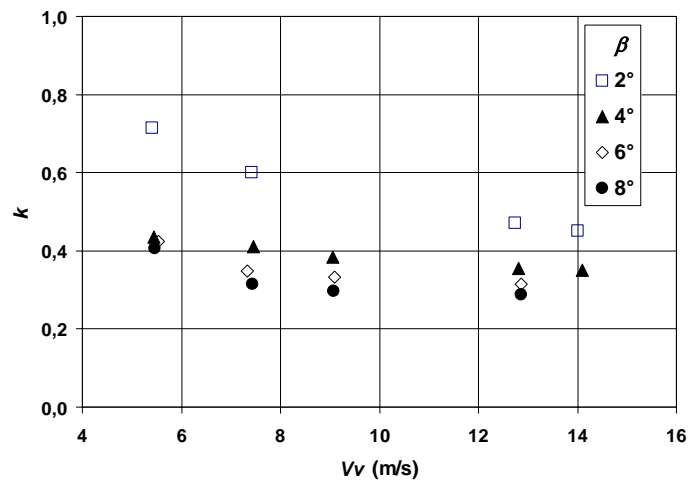
6	5,3	55	1,3	3,0	0,71
6	7,3	84	2,3	2,8	0,64
6	9,0	96	3,1	2,6	0,68
6	12,8	156	7,4	3,1	0,59
6	13,9	171	8,8	3,1	0,59

8	5,4	66	1,0	2,4	0,60
8	7,4	92	1,7	2,1	0,58
8	9,0	118	3,2	2,6	0,56
8	12,8	172	6,7	2,8	0,54
8	14,0	191	8,1	2,8	0,53



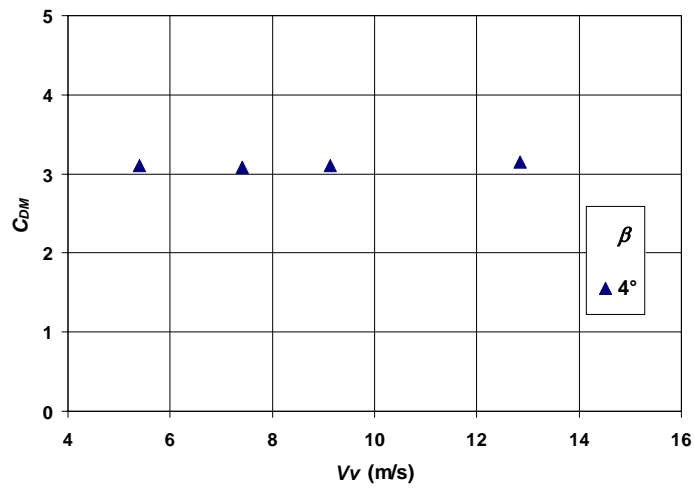
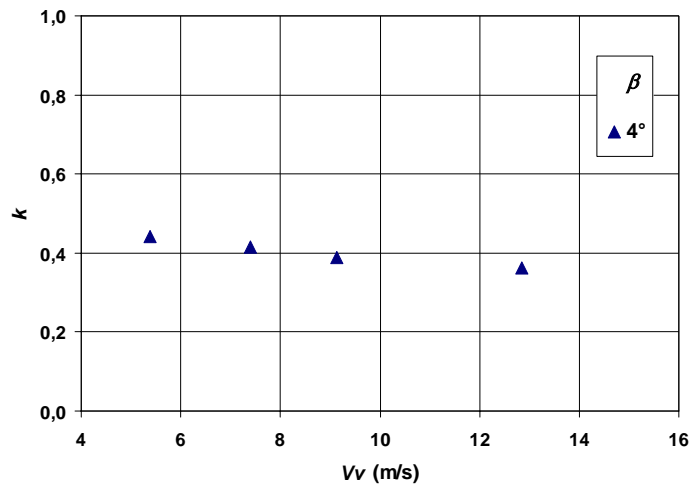
**Ensayo N° 040428-1**  
**Configuración: C01**

$\beta$ [°]	$V_v$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
2	5,4	55	1,6	3,6	0,71
2	7,4	90	2,5	3,1	0,60
2	9,0	-	3,6	3,0	
2	12,7	196	8,3	3,5	0,47
2	14,0	225	10,0	3,4	0,45
<hr/>					
4	5,4	91	1,3	2,9	0,44
4	7,5	131	2,6	3,1	0,41
4	9,1	171	3,9	3,3	0,38
4	12,8	261	8,1	3,4	0,36
4	14,1	291	9,7	3,3	0,35
<hr/>					
6	5,5	95	1,0	2,3	0,42
6	7,3	152	2,4	3,1	0,35
6	9,1	198	3,8	3,2	0,33
6	12,9	296	7,8	3,2	0,31
<hr/>					
8	5,5	97	0,8	1,8	0,41
8	7,4	171	2,2	2,7	0,31
8	9,1	222	3,3	2,8	0,30
8	12,9	323	7,1	2,9	0,29



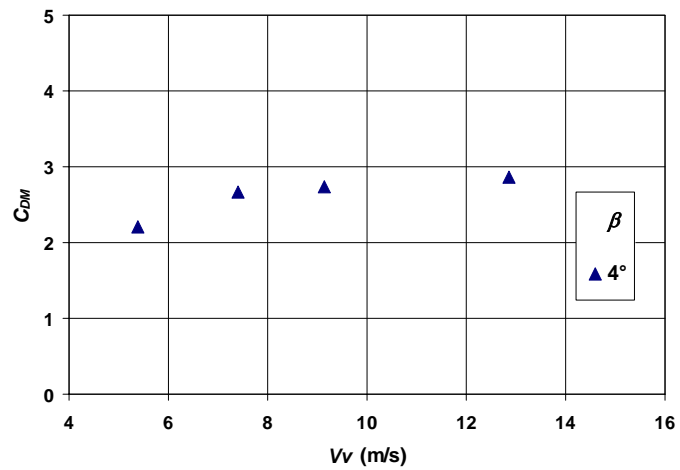
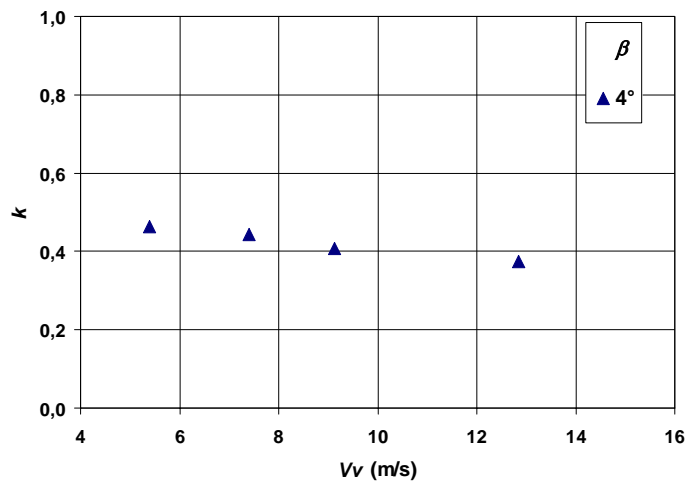
**Ensayo N° 040428-2**  
**Configuración: C01 - Angulo de guiñada 10°**

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
4	5,4	88	1,3	3,1	0,44
4	7,4	129	2,5	3,1	0,42
4	9,1	170	3,8	3,1	0,39
4	12,9	257	7,6	3,1	0,36



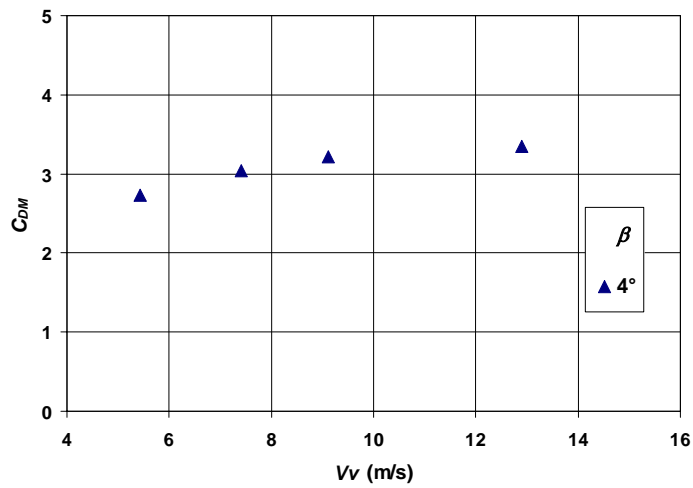
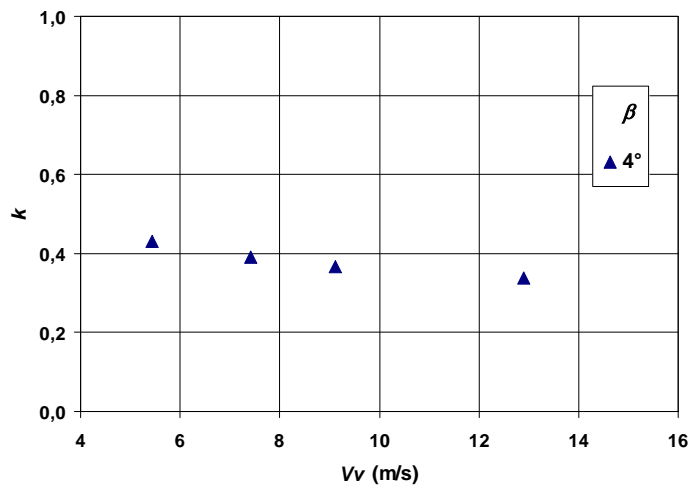
**Ensayo N° 040428-2**  
**Configuración: C01 - Angulo de guiñada 20°**

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
4	5,4	84	0,9	2,2	0,46
4	7,4	121	2,1	2,7	0,44
4	9,1	162	3,3	2,7	0,41
4	12,9	249	6,9	2,9	0,37



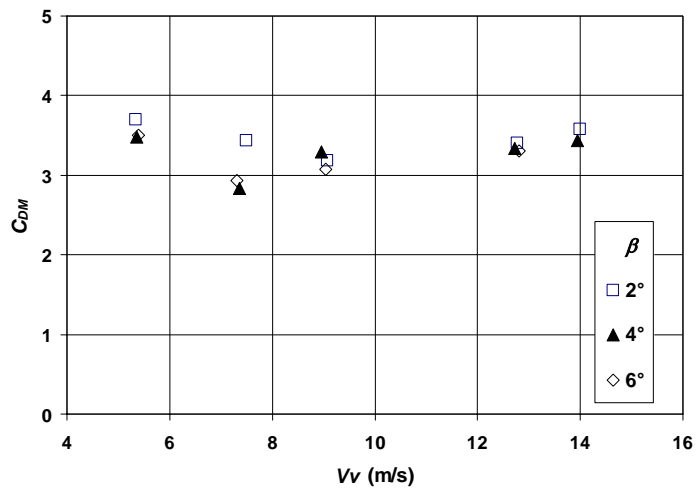
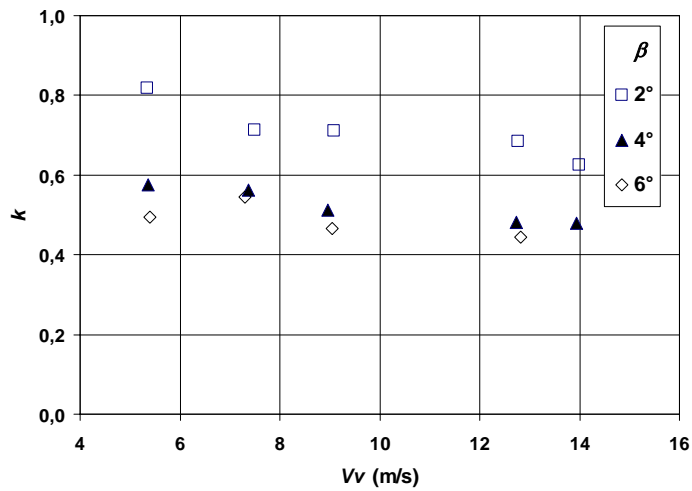
Ensayo N° 040428-3  
Configuración: C04

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
4	5,4	92	1,2	2,7	0,43
4	7,4	137	2,4	3,0	0,39
4	9,1	181	3,9	3,2	0,37
4	12,9	277	8,1	3,3	0,34



Ensayo N° 040430  
Configuración: C05

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
2	5,3	47	1,6	3,7	0,82
2	7,5	76	2,9	3,4	0,71
2	9,1	92	3,9	3,2	0,71
2	12,8	135	8,2	3,4	0,69
2	14,0	162	10,4	3,6	0,63
4	5,4	68	1,5	3,5	0,57
4	7,4	95	2,3	2,8	0,56
4	9,0	126	3,9	3,3	0,51
4	12,7	192	8,1	3,3	0,48
4	13,9	211	10,0	3,4	0,48
6	5,4	79	1,5	3,5	0,50
6	7,3	97	2,3	2,9	0,54
6	9,0	140	3,7	3,1	0,47
6	12,8	209	8,0	3,3	0,45



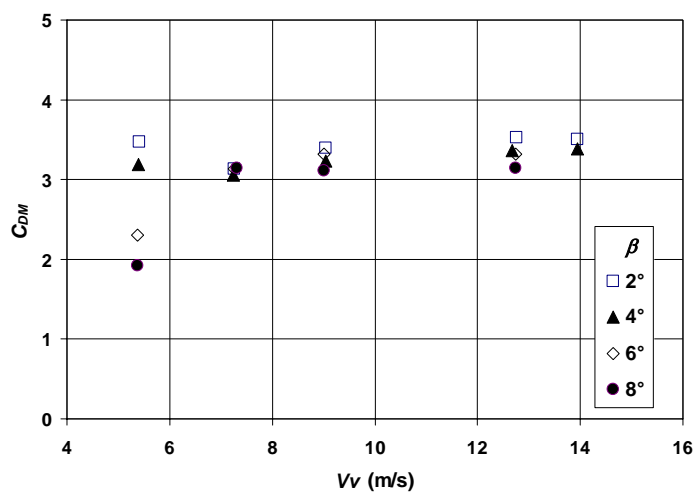
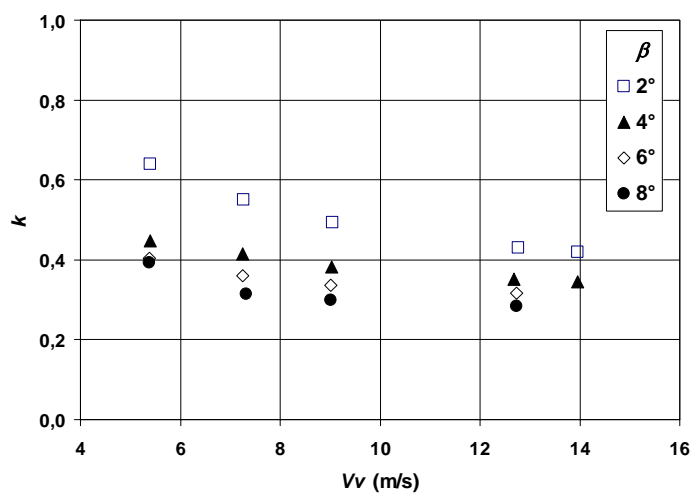
Ensayo N° 040503-1  
Configuración: C01

$\beta$ [°]	$V_v$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
2	5,4	61	1,5	3,5	0,64
2	7,3	95	2,5	3,1	0,55
2	9,0	133	4,1	3,4	0,49
2	12,8	215	8,6	3,5	0,43
2	13,9	241	10,2	3,5	0,42

4	5,4	87	1,4	3,2	0,45
4	7,2	127	2,4	3,1	0,41
4	9,0	171	3,9	3,2	0,38
4	12,7	261	8,1	3,4	0,35
4	14,0	293	9,9	3,4	0,35

6	5,4	97	1,0	2,3	0,40
6	7,3	146	2,5	3,1	0,36
6	9,0	194	4,0	3,3	0,34
6	12,7	293	8,1	3,3	0,32

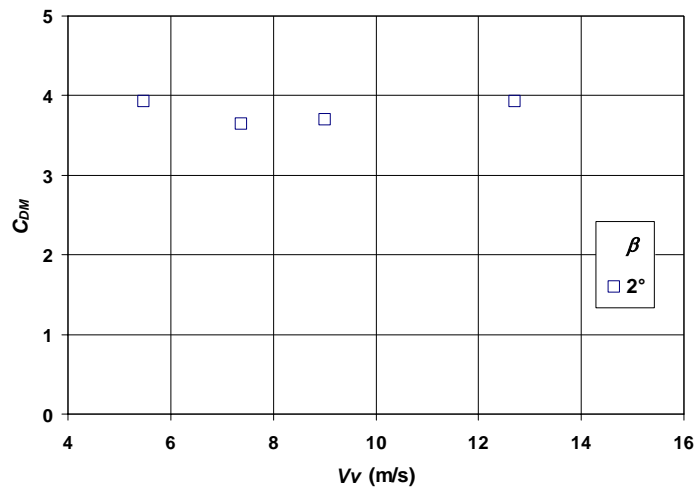
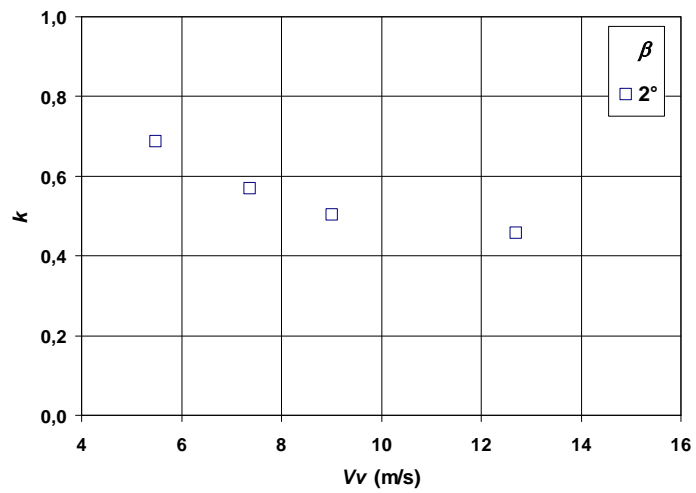
8	5,4	99	0,8	1,9	0,39
8	7,3	169	2,5	3,1	0,31
8	9,0	219	3,8	3,1	0,30
8	12,7	326	7,7	3,1	0,28





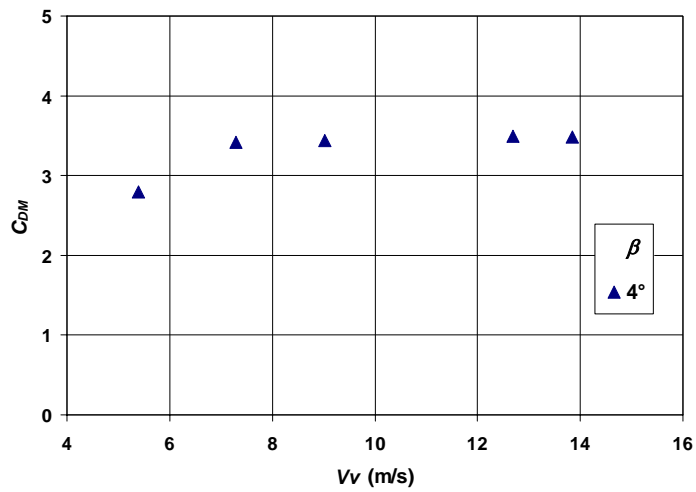
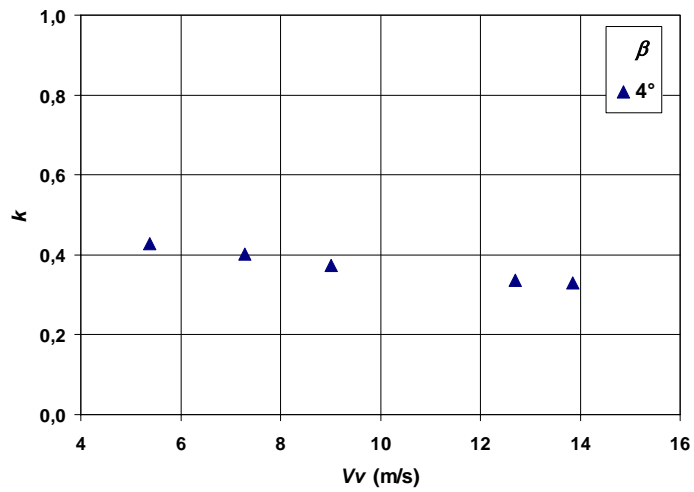
Ensayo N° 040503-2  
Configuración: C06

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
2	5,5	58	1,8	3,9	0,69
2	7,4	94	3,0	3,6	0,57
2	9,0	130	4,5	3,7	0,50
2	12,7	201	9,5	3,9	0,46



Ensayo N° 040504-1  
Configuración: C01

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
4	5,4	91	1,2	2,8	0,43
4	7,3	132	2,7	3,4	0,40
4	9,0	175	4,2	3,4	0,37
4	12,7	273	8,4	3,5	0,34
4	13,8	304	10,0	3,5	0,33



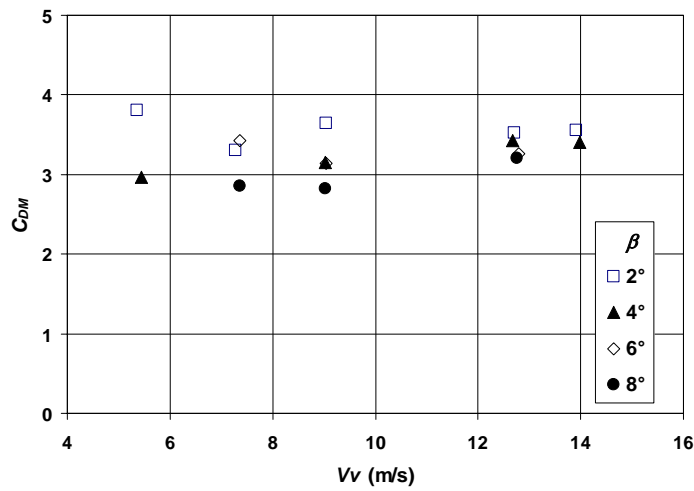
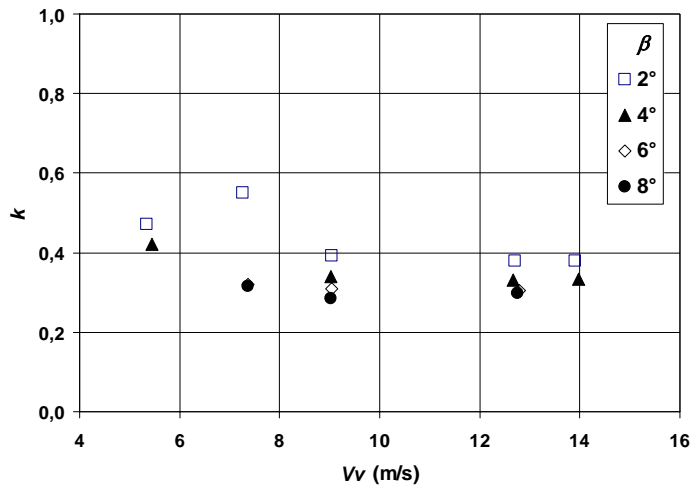
Ensayo N° 040504-2  
Configuración: C07

$\beta$ [°]	Vv [m/s]	$\omega$ [rad/s]	T [N]	$C_{DM}$	k
2	5,4	82	1,6	3,8	0,47
2	7,3	96	2,6	3,3	0,55
2	9,0	167	4,5	3,6	0,39
2	12,7	242	8,5	3,5	0,38
2	13,9	265	10,3	3,6	0,38

4	5,4	94	1,3	3,0	0,42
4	9,0	192	3,8	3,2	0,34
4	12,7	278	8,2	3,4	0,33
4	14,0	303	9,9	3,4	0,33

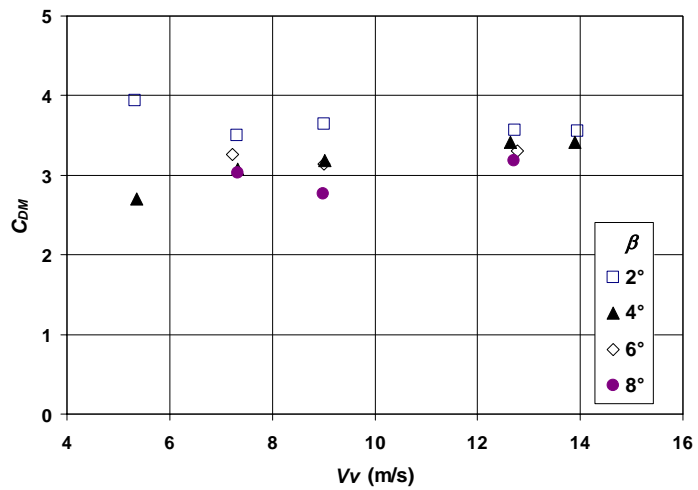
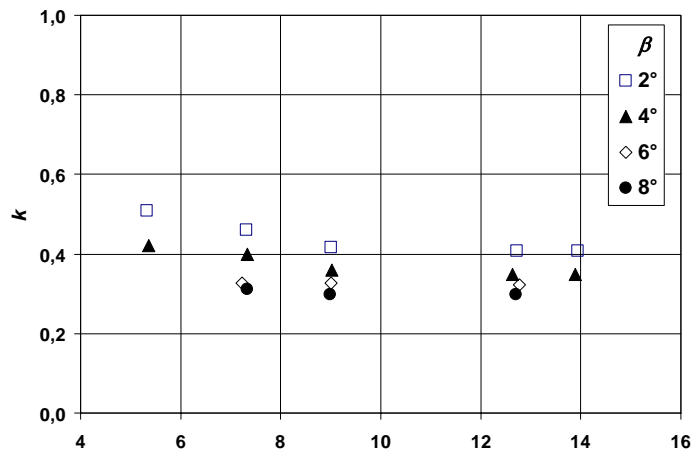
6	7,4	167	2,8	3,4	0,32
6	9,0	211	3,8	3,1	0,31
6	12,8	303	7,9	3,3	0,31

8	7,4	169	2,3	2,9	0,31
8	9,0	229	3,4	2,8	0,29
8	12,8	311	7,8	3,2	0,30



Ensayo N° 040506-1  
Configuración: C07

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
2	5,3	76	1,7	3,9	0,51
2	7,3	115	2,8	3,5	0,46
2	9,0	157	4,4	3,6	0,42
2	12,7	226	8,6	3,6	0,41
2	13,9	248	10,3	3,6	0,41
4	5,4	92	1,2	2,7	0,42
4	7,3	133	2,5	3,1	0,40
4	9,0	182	3,9	3,2	0,36
4	12,6	262	8,2	3,4	0,35
4	13,9	289	9,9	3,4	0,35
6	7,2	160	2,6	3,3	0,33
6	9,0	200	3,8	3,1	0,33
6	12,8	288	8,1	3,3	0,32
8	7,3	170	2,5	3,0	0,31
8	9,0	218	3,4	2,8	0,30
8	12,7	308	7,7	3,2	0,30



Ensayo N° 040506-2  
Configuración: C08

$\beta$ [°]	$Vv$ [m/s]	$\omega$ [rad/s]	$T$ [N]	$C_{DM}$	$k$
2	5,4	53	1,6	3,6	0,74
2	7,3	87	2,7	3,4	0,61
2	9,0	95	4,1	3,4	0,69
2	12,8	169	8,5	3,5	0,55
2	13,9	184	9,9	3,5	0,55
4	5,4	73	1,5	3,4	0,54
4	7,3	95	2,5	3,2	0,55
4	9,0	132	3,9	3,2	0,50
4	12,7	204	8,1	3,3	0,45
4	14,0	226	9,8	3,4	0,45
6	14,0	267	9,5	3,3	0,38

