

UNA SOLUCION EXACTA EN *magnetogasdinámica* TRANSONICA

Por IGNACIO DA-RIVA

Ingeniero Aeronáutico
Sección de Estudios Aerodinámicos
I.N.T.A. Esteban Terradas

SE plantean las ecuaciones de la Magnetogasdinámica desde un punto de vista puramente macroscópico, bajo la hipótesis fundamental de que las ecuaciones de MAXWELL no son modificadas por el movimiento gasdinámico y de que el gas es un medio continuo que se comporta como un fluido neutro y no como una mezcla de partículas individuales positivas y negativas.

A continuación se consideran únicamente movimientos estacionarios y no disipativos (viscosidad $\mu = 0$, conductividad calorífica $k = 0$ y conductividad eléctrica $\sigma = \infty$).

Entre este tipo particular de corrientes se eligen aquellas en las que el campo magnético es, en

cada punto, paralelo al campo de velocidades; debiendo investigar *a posteriori* las condiciones de contorno que garanticen la existencia de tal tipo de soluciones.

Después de comprobar que, en nuestro caso particular, el problema magnetogasdinámico se puede plantear en una forma muy similar a la de ciertos problemas puramente gasdinámicos, se estudia el problema transónico de RINGLEB para un gas conductor.

La conclusión fundamental deducida de la solución obtenida, es la de que la presencia del campo magnético permite, bajo ciertas condiciones, obtener corrientes continuas isentrópicas a números de Mach mucho mayores que los que se obtienen en el problema gasdinámico clásico.

1. Ecuaciones fundamentales.

Suponiendo que el gas se comporta como un fluido neutro; tenemos una sola ecuación de continuidad, que es la clásica en la Mecánica de Flúidos

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad [1]$$

en la que ρ es la densidad del fluido; \vec{V} , el vector velocidad, y el operador $\frac{D}{Dt}$ indica derivación espacial y temporal.

Por otra parte, puesto que la ecuación del impulso expresa la igualdad entre las fuerzas aplicadas sobre un elemento fluido y la variación de la cantidad de movimiento que contiene, habrá que

tener en cuenta que aquéllas se ven incrementadas por la presencia: de una fuerza ponderomotriz debida a que el fluido transporta una corriente eléctrica de densidad j a través de un campo magnético de intensidad B y de una fuerza electrostática debida a la presencia de cargas eléctricas Q en el seno del fluido.

Tenemos, en definitiva, la ecuación siguiente:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{F} + \nabla \cdot \text{Tev} + j \wedge \vec{B} + Q \cdot \vec{E}, \quad [2]$$

en la que el primer miembro representa la variación de la cantidad de movimiento y el segundo las fuerzas de presión, gravitatoria, de viscosidad, ponderomotriz y electrostática.

Multiplicando escalarmente la ecuación del impulso por \vec{V} obtenemos la ecuación de la energía mecánica:

$$\rho \frac{D}{Dt} (1/2 V^2) = -(\vec{V} \cdot \nabla) p + \rho \vec{V} \cdot \vec{F} + \vec{V} \cdot (\nabla \cdot \text{Tev}) + \vec{V} \cdot [j \wedge \vec{B} + Q \cdot \vec{E}], \quad [3]$$

mientras que la de la energía interna es:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p(\nabla \cdot \vec{V}) + \Phi + \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{j^2}{\sigma}, \quad [4]$$

en la que u es la energía interna específica, y los términos del segundo miembro representan respectivamente: trabajo de compresión y dilatación, disipación debida a la viscosidad, calor transmitido por conductividad y, finalmente, energía disipada por el efecto JOULE. Todos los términos, salvo el último, son los familiares en Dinámica de Gases.

Fijemos ahora nuestra atención en las ecuaciones de MAXWELL (*).

La primera ecuación representa matemáticamente, y en forma diferencial, la ley de inducción de FARADAY:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \wedge \vec{E}, \quad [5]$$

y la segunda, la ley de AMPÈRE que relaciona el campo magnético y la corriente eléctrica:

$$j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \wedge \vec{H}, \quad [6]$$

en la que D y H representan, respectivamente, las excitaciones eléctrica y magnética, es decir, los "efectos" debidos a las "causas" E y B .

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_1} \nabla \wedge \vec{B} \\ D = K E. \quad [7]$$

Debemos expresar, además, que el flujo de D a través de una superficie se debe a las cargas eléctricas contenidas en el volumen encerrado por la superficie y que, por el contrario, no existen polos magnéticos aislados:

$$\nabla \cdot \vec{D} = Q \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad [8]$$

Las ocho ecuaciones hasta ahora planteadas no permiten poner de manifiesto la razón por la que el movimiento influye sobre el problema magnético. La explicación de tal interacción la proporciona la ley de OHM:

$$j = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}), \quad [9]$$

(*) La notación y forma de presentación ligeramente diferente de la usual, de las ecuaciones de MAXWELL, han sido tomadas del magnífico tratado de Electrodinámica de ARNOLD SOMMERFELD [1].

en la que el segundo sumando contenido en el paréntesis, representa la fuerza electromotriz inducida en el fluido conductor al atravesar las líneas del campo magnético.

De las ecuaciones [5] y [6], en la que suponemos despreciable el término debido a la excitación eléctrica, [7] y [9], deducimos, en el caso de que σ y μ_1 sean constantes, la ecuación de inducción siguiente:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{\sigma \mu_1} \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{B}). \quad [10]$$

Finalmente, se requiere una ecuación más para determinar p , la cual supondremos de la forma general:

$$p = f(\rho T). \quad [11]$$

2. Caso de movimientos estacionarios y no disipativos.

Si suponemos que $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\mu = 0$, $k = 0$ y $\sigma = \infty$, obtenemos el sistema siguiente: Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad [1,a]$$

Ecuación del impulso para fuerzas másicas que derivan de un potencial:

$$\rho \nabla (1/2 V^2 + P + U) = j \wedge \vec{B} + Q \cdot \vec{E} + \vec{V} \wedge (\nabla \wedge \vec{V}). \quad [2,a]$$

Siendo:

$$\nabla U = \vec{F}$$

y

$$P = \int \frac{dp}{\rho}.$$

Ecuación global de la energía:

$$\rho (\vec{V} \cdot \nabla) \left[1/2 V^2 + u + \frac{p}{\rho} + U \right] = \vec{V} \cdot [j \wedge \vec{B} + Q \cdot \vec{E}]. \quad [3,a]$$

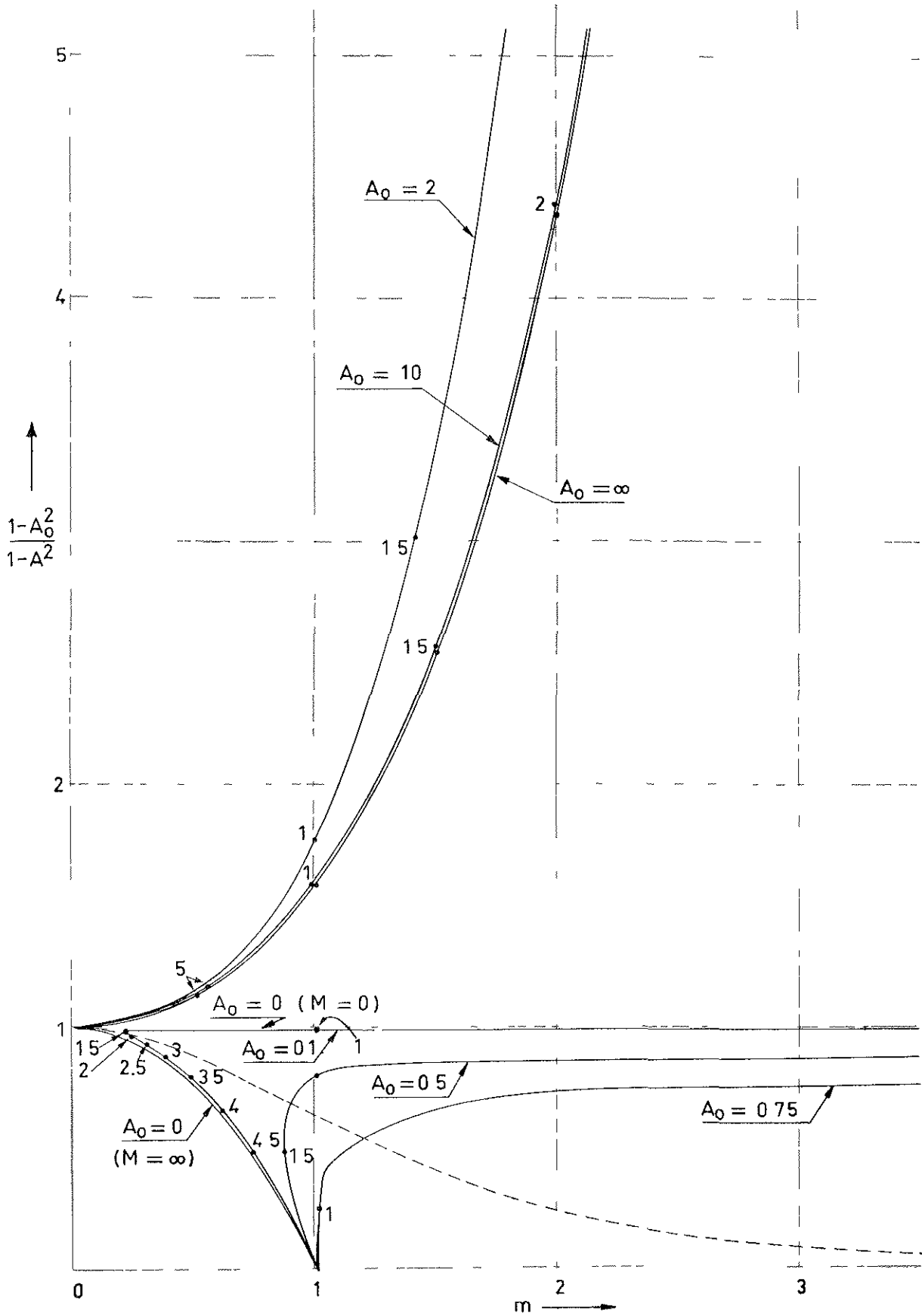


Fig 1

Ecuaciones de MAXWELL:

$$\nabla \wedge \vec{E} = 0, \quad [5,a]$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 j, \quad [6,a]$$

Siendo:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \vec{E}) = Q, \quad [7,a]$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad [8,a]$$

Ley de OHM:

$$\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} = 0, \quad [9,a]$$

Ecuación de inducción:

$$\nabla \wedge (\vec{V} \wedge \vec{B}) = 0, \quad [10,a]$$

Ecuación de estado del gas:

$$p = f(\rho, T), \quad [11,a]$$

3. Caso de movimientos estacionarios no disipativos y paralelos.

Se entiende por campos paralelos [2], [3] aquellos en los que se cumple la igualdad

$$\vec{V} \wedge \vec{B} = 0, \quad [12]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\rho \vec{V} = \lambda \vec{B}, \quad [13]$$

siendo λ una función escalar de posición.

De la ecuación [13], teniendo en cuenta [1, a] y la segunda de las [8, a], deducimos que λ es constante, al menos sobre cada línea de corriente. En lo que sigue supondremos que las condiciones en el infinito garantizan la constancia de λ en todo el campo.

La ecuación [10, a] se cumple automáticamente. La [9, a] se reduce a $\vec{E} = 0$ y la [5, a] es una identidad, mientras que la primera de la [8, a] muestra que no existen cargas eléctricas en el fluido.

La ecuación del impulso se reduce fácilmente a la siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla (1/2 V^2 + P + U) = \\ = \frac{\vec{B}}{\rho} \wedge [\lambda \nabla \wedge \vec{V} - \vec{j}], \quad [2,b] \end{aligned}$$

y la de la energía, teniendo en cuenta que $\vec{j} \wedge \vec{B}$ es perpendicular a \vec{V} , se convierte en la clásica ecuación de BERNOULLI:

$$1/2 V^2 + h + U = \text{constante}, \quad [3,b]$$

siendo $h = u + \frac{p}{\rho}$ la entalpía específica del gas considerado.

Podemos avanzar un paso más si suponemos que el gas es barótrópico, en cuyo caso la ecuación [3, b] implica la anulación del primer miembro de [2, b] y, en definitiva, que se cumpla la igualdad siguiente:

$$\lambda \nabla \wedge \vec{V} = \vec{j}, \quad [14]$$

que a la vista de [6, a] y [13] se reduce a:

$$\nabla \wedge \left(1 - \frac{\mu_0 \lambda^2}{\rho} \right) \vec{B} = 0, \quad [15]$$

Representaremos mediante una A el número adimensional $\frac{\lambda \sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\rho}}$ (número de ALFVEN).

Resumimos en el siguiente cuadro las fórmulas de que disponemos:

Fórmula	Numero	Observaciones
$\rho \vec{V} = \lambda \vec{B}$	[13]	λ es constante sobre cada línea de corriente, ρ es variable.
$1/2 V^2 + P = \text{constante}$	[2, b]	La constante puede variar de una a otra línea de corriente $P = \int \frac{d p}{\rho}$ Las fuerzas másicas son despreciables.
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	[8, a]	
$\nabla \wedge (1 - A^2) \vec{B} = 0$	[15]	El número de ALFVEN es variable si el fluido es compresible.
$\frac{p}{\rho \gamma} = \text{constante}$		Sustituye a la [3, a] si el gas es perfecto y el proceso isentrópico.

La tercera y cuarta ecuaciones del presente cuadro son sumamente interesantes, pues indican que

$(1 - A^2) \vec{B}$ y $\frac{1}{1 - A^2}$ son equivalentes a la velocidad y densidad en el movimiento estacionario irrotacional de un gas no conductor.

Si en la gasdinámica clásica la velocidad de propagación c de las pequeñas perturbaciones viene dada por la igualdad

$$c^2 = \frac{d p}{d \rho} = \frac{\rho}{d \rho} = - \frac{\rho V d V}{d \rho}, \quad [16]$$

en nuestro problema "análogo" tendremos:

$$\begin{aligned} c^2 &= - \frac{1/2 d [(1 - A^2) B^2]}{d [\log (1 - A^2)]} = \\ &= (1 - A^2) B^2 \frac{A^2 + M^2 - 1}{A^2 M^2}. \quad [17] \end{aligned}$$

Siendo M el número de Mach del problema magnetogasdínámico que to, el seudo número de Mach del problema magnetogasdínámico que representaremos por m , v e n d r á dado por la expresión siguiente:

$$m^2 = \frac{A^2 M^2}{A^2 + M^2 - 1}. \quad [18]$$

En la figura 1 se representa la variación de la seudo densidad

adimensional en función del pseudo número de Mach para diferentes valores del número de ALFVEN de remanso A_0 , en el caso de un gas ideal que evoluciona isentrópicamente. Los números que figuran a lo largo de las curvas corresponden a valores del número de Mach M .

Los casos límites correspondientes son: para $A_0 = 0$ una curva formada por la parábola:

$$\frac{1 - A_0^2}{1 - A^2} = 1 - m^2,$$

y la recta:

$$\frac{1 - A_0^2}{1 - A^2} = 1,$$

y para $A_0 = \infty$ la curva de ecuación:

$$\frac{1 - A_0^2}{1 - A^2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

La curva de trazos de la figura 1 corresponde a la relación entre la densidad adimensional y el número de Mach en el movimiento isentrópico de un gas no conductor ($\gamma = 1.4$).

4. Corriente con un cambio de dirección de 180°. Problema de Ringleb.

En el año 1940 publicó RINGLEB una solución exacta de la ecuación diferencial del potencial de velocidades del movimiento compresible de un gas en el plano hodógrafo. Dicha solución corresponde en el plano físico a una corriente con cambio de dirección de 180° análoga a la estudiada para un fluido incompresible por KUTTA y CISOTTI, entre otros.

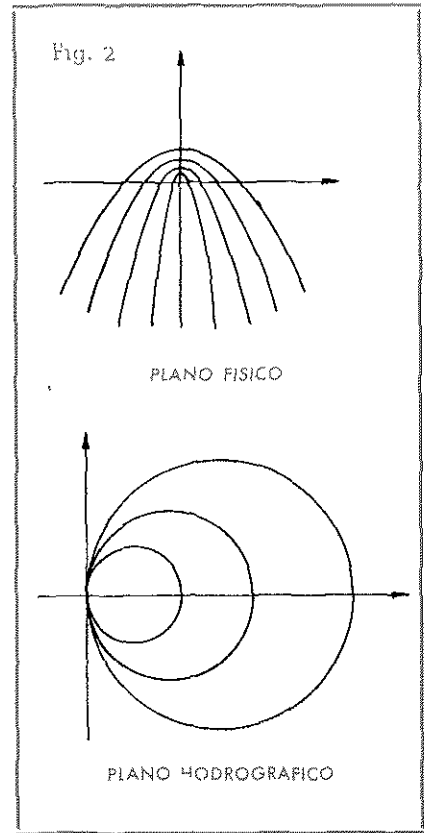
La consecuencia fundamental que se deduce de la solución de RINGLEB, se pone de manifiesto comparando las figuras 2 y 3. En ellas se representan las líneas de corriente en los planos hodó-

grafo y físico para un fluido incompresible (fig. 2) y uno compresible (fig. 3).

En el plano hodógrafo los dos casos son similares. No ocurre lo mismo en el plano físico, pues si en el líquido no viscoso pueden obtenerse líneas de corriente continuas y con derivada continua en las que la velocidad máxima sea tan grande como queramos, en el gas existe una línea continua de corriente límite, y si queremos dibujar otra cuya velocidad máxima sea mayor, nos encontramos con la presencia de los puntos de retroceso indicados en la figura 3. Por tanto, será posible obtener una corriente transónica continua alrededor de un cuerpo cuyo contorno coincida, a lo sumo, con la línea límite, pero la continuidad desaparecerá si sustituimos el cuerpo por otro más afilado.

Si mediante la aplicación de un campo magnético podemos retrasar la presencia de la línea de corriente límite, llegamos a la importante conclusión de que es posible obtener corrientes transónicas continuas en casos en los que con un gas no conductor no sería posible.

Trataremos en lo que sigue de resolver el problema magnético utilizando en lo posible los resultados obtenidos por RINGLEB en



la forma expuesta en la referencia [4]. Si las líneas de fuerza del campo magnético son continuas y con derivada continua, la condición del paralelismo de los campos de velocidades y magnético exigirá que también sean continuas y con derivada continua las líneas de corriente.

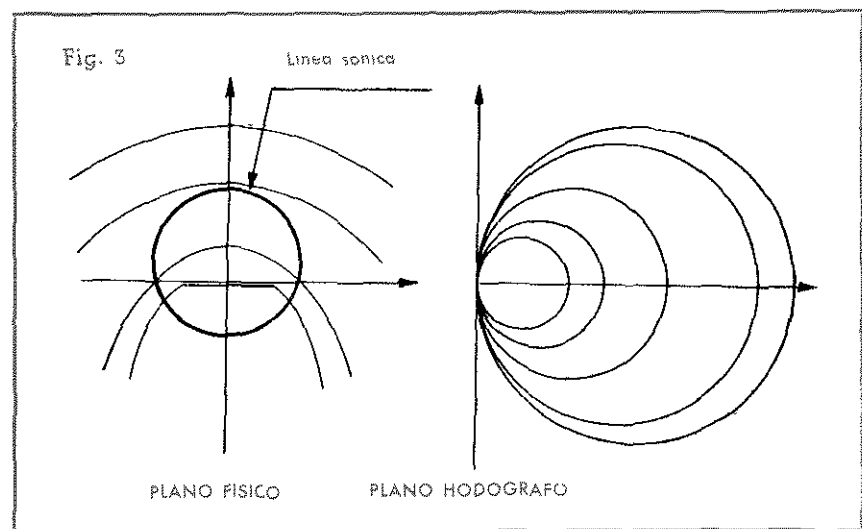
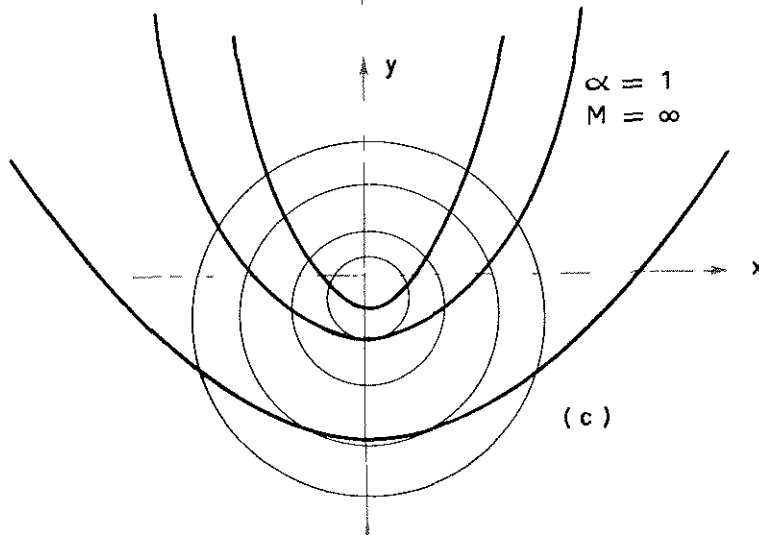
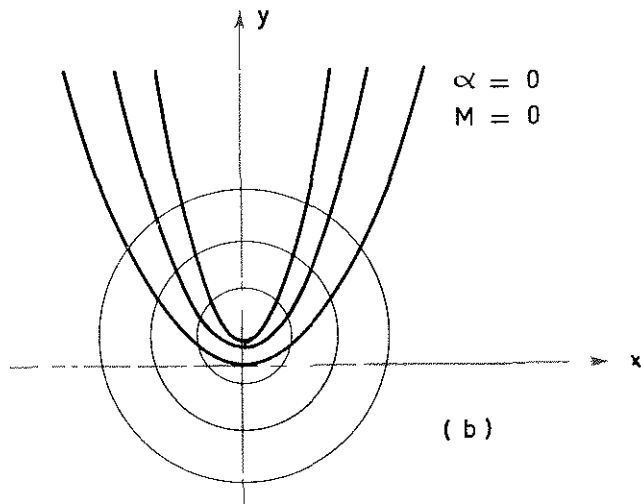
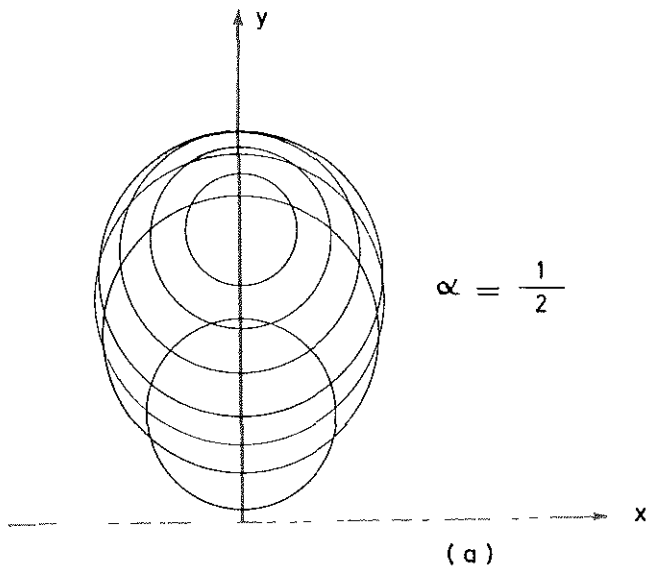


Fig 4



5. Solución del problema de Ringleb magnético.

La ecuación diferencial que liga las coordenadas x, y de un punto situado sobre una línea de corriente en el plano físico con las coordenadas V y θ del punto homólogo del plano hodógrafo es [4]:

$$dx + i dy = n \frac{\rho_0}{\rho} \frac{e^{i\theta}}{V} \left\{ - \left[(1 - M^2) \frac{\sin \theta}{V^2} - i \frac{\cos \theta}{V^2} \right] dV + \left[\frac{\cos \theta}{V} + i \frac{\sin \theta}{V} \right] d\theta \right\}; \quad [19]$$

la cantidad n es constante para cada problema, sus dimensiones son $L^3 T^{-2}$. La ecuación [19] es la solución general del problema de RINGLEB y es válida cualquiera que sea la relación que ligue $\frac{\rho}{\rho_0}$ con V y M . Su integración en el caso de que el gas evolucione isentrópicamente puede verse en la citada referencia [4].

En nuestro caso particular el problema es ligeramente más difícil, ya que la relación que liga la pseudo densidad adimensional con el pseudo número de Mach es en general muy complicada. Sin embargo, el conocimiento de una solución exacta en un caso límite puede ser en algunos casos de gran utilidad.

Supongamos que dicha relación es de la forma:

$$\frac{1 - A_0^2}{1 - A^2} = 1 + \alpha m^2. \quad [20]$$

Es fácil comprobar que para diferentes valores de α , la relación [20] representa un caso real. Por ejemplo: si es $\alpha = \frac{1}{2}$, tenemos el caso correspondiente a $A_0 = \infty$, en un gas en el que la relación de calores específicos es $\gamma = 2$. Para $\alpha = 0$, el caso de un gas incompresible. Para $\alpha = -1$ el caso límite de un gas que se mueve a nú-

meros de Mach infinitamente grandes, etc.

Llevando la expresión [20] a la ecuación [19] y teniendo en cuenta la analogía existente entre $\frac{1}{1-A^2}$ y ρ , entre m^2 y M^2 , obtenemos la ecuación diferencial siguiente:

$$d\left(\frac{x}{\rho}\right) + i d\left(\frac{y}{\rho}\right) = \tau(1-\tau)^{2\alpha} e^{i\theta} \left\{ - \left[1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \sin \theta - i \cos \theta \right] - \frac{\alpha d\tau}{(1-\tau)} + e^{i\theta} d\theta \right\}; \quad [21]$$

en ella se ha hecho

$$\frac{1-A^2}{1-A_0^2} = \tau$$

El valor de V de la ecuación [19] ha sido sustituido por la expresión

$$V = V_0 \left(\frac{1}{1-\tau} \right)^\alpha,$$

siendo V_0 una constante de integración.

Finalmente la constante ρ , que figura en el primer miembro de la ecuación [21], está relacionado con la n de la [19] mediante la expresión

$$\rho = \frac{n}{V_0^\alpha};$$

su efecto sobre la ecuación [21] se limita a una contracción y di-

latación de escalas, por lo que, en adelante, no la consideramos.

La integración de la ecuación [21] permite expresar x e y en función de τ y θ en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\tau(1-\tau)^{2\alpha}}{2} \sin 2\theta, \\ y &= \frac{1-(1-\tau)^{2\alpha+1}}{2(2\alpha+1)} - \frac{\tau(1-\tau)^{2\alpha}}{2} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad [22]$$

La ecuación [22] muestra que las líneas de pseudo número de Mach constante sobre el plano físico son círculos definidos por su centro

$$x = 0,$$

$$y = \frac{1-(1-\tau)^{2\alpha+1}}{2(2\alpha+1)};$$

y su radio

$$r = \frac{\tau(1-\tau)^{2\alpha}}{2}.$$

La figura 4 resume los resultados obtenidos en tres casos típicos. Los círculos dibujados corresponden a líneas sobre las que τ es constante, salvo en el caso *b*, en el que τ es constante en todo el plano y corresponden a líneas de velocidad constante. La tangencia o intersección de dos círculos indica la existencia de dos valores diferentes de τ en un mismo punto y, por tanto, la no existencia de una solución continua isentrópica.

La figura 4, *a*, muestra un caso en el que no existe solución distinta de la trivial $x=0$ en ningún dominio del plano físico. En la 4, *b*, la solución coincide con la del caso incompresible de la Hidrodinámica clásica. Finalmente, en el caso 4, *c*, tenemos una solución límite correspondiente a números de Alfvén de remanso muy pequeños; la solución es continua a pesar de que el número de Mach es muy grande.

El señor D. AMABLE LIÑÁN revisó este trabajo concienzudamente e hizo acertadas sugerencias que el autor agradece.

Referencias.

1. SOMERFEL, A.: "Electrodynamics. Lectures on Theoretical Physics", vol. III. Traducido al inglés por E. G. RAMBERG. Academic Press Inc. New York, 1952.
2. GRAD, H.: "Reducible Problems in Magneto-Fluid Dynamic Steady Flows". Trabajo presentado al Symposium Internacional sobre Magnetofluidodinámica. Washington, 1960. No publicado.
3. IMAI, I.: "Some Remarks of Flows of Conducting Fluids past Bodies". Trabajo presentado al Symposium Internacional sobre Magnetofluidodinámica. Washington, 1960. No publicado.
4. PAI, S.-I.: "Introduction to the Theory of Compressible Flow". Van Nostrand Company. New York, 1959.