

# EFECTOS DE DESEQUILIBRIO QUIMICO EN AERODINAMICA HIPERSONICA (\*)

Por A. LIÑAN e I. DA RIVA

Del I.N.T.A.

## Sumario.

Se considera la influencia del desequilibrio químico en las corrientes hipersónicas, en los dos casos siguientes:

a) *Recombinación y disociación en la capa límite.* — Se pone de manifiesto que, puesto que en el dominio de vuelo de máximo calentamiento convectivo la corriente anterior no viscosa está en equilibrio, el alejamiento del equilibrio tiene lugar únicamente cerca de la pared. Esto facilita la obtención de una solución analítica sencilla en la que se muestran claramente los efectos de las velocidades de reacción, forma del obstáculo y regímenes de vuelo.

b) *Reacciones químicas entre los constituyentes del aire y una substancia inyectada o vaporizada desde la pared.* — En este caso, se supone que la reacción química es tan rápida que tiene lugar en una zona muy estrecha. Esto simplifica la obtención de una solución analítica con velocidad de reacción finita, la cual también proporciona un criterio para la extinción de la llama.

(\*) Una parte de este trabajo ha sido parcialmente subvencionada por la USAF Office of Aerospace Research a través de su oficina europea, dentro del Contract AF 61(O52)-221 y del Grant AF EOAR 62-91.

## Introducción.

A los números de MACH hipersónicos que se encuentran los vehículos en su reentrada en la atmósfera, la deceleración del aire da lugar a temperaturas tan altas que se presentan fenómenos de disociación e ionización, así como reacciones químicas entre las componentes del aire y las substancias inyectadas o vaporizadas desde la superficie. Todos estos procesos tienen una gran influencia en el campo de velocidades, y especialmente en la transmisión de calor. La energía calorífica se transporta por convección a lo largo de las líneas de corriente, y además por radiación térmica, conducción y difusión de átomos portadores de energía química.

Sin embargo, para las alturas y regímenes de vuelo que producen los valores más elevados de flujo de calor, los números de Reynolds son suficientemente grandes para que los efectos de viscosidad, conducción y difusión únicamente tengan importancia en las ondas de choque y capas límites, de espesor despreciable comparado con cualquier dimensión característica del campo de corriente.

Para el estudio de los efectos químicos se hace usualmente una de las dos hipótesis siguientes:

a) corriente en equilibrio químico — velocidad de reacción infinita —; b) corriente congelada — ve-

locidad de reacción nula —. En este trabajo nos ocuparemos de aquella parte de la Aerotermodinámica [1], que se ocupa de los efectos del desequilibrio químico en la capa límite laminar.

Dejaremos aparte el estudio de corrientes no viscosas en desequilibrio, puesto que es un tema ya tratado por muchos autores; véase la referencia [2]. Además, como indica la figura 1 tomada de [3], la corriente exterior está en equilibrio en el dominio de vuelo de máximo calentamiento convectivo.

También han sido muy estudiadas las ondas de choque en desequilibrio, véanse, por ejemplo, las referencias [4] y [5].

En el estudio de la capa límite, la radiación térmica del aire relativamente frío por la presencia de la pared no tiene un efecto predominante y no será considerada. Sin embargo, la radiación debida a la capa de choque puede representar una contribución muy importante a la transmisión de calor a un cuerpo que se mueve a velocidades elevadas, véase figura 1 y [6], [7] y [8].

No se considerará la ionización, aunque es desde luego importante a velocidades extremas [9].

En el dominio de vuelo en que el calentamiento convectivo es más intenso, véase figura 2, tomada

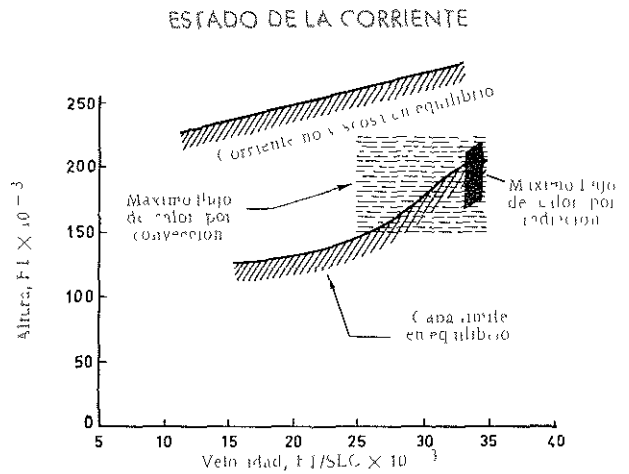


Figura 1

de [3], el número de REYNOLDS de interés es lo suficientemente grande para que la corriente esté en régimen continuo y además tenga sentido el concepto clásico de capa límite, véase [10]. FERRI, ZAKKAY y LU TING [11] han estudiado el régimen de interacción de la vorticidad exterior, y

### ZONA DE CALENTAMIENTO CONVECTIVO

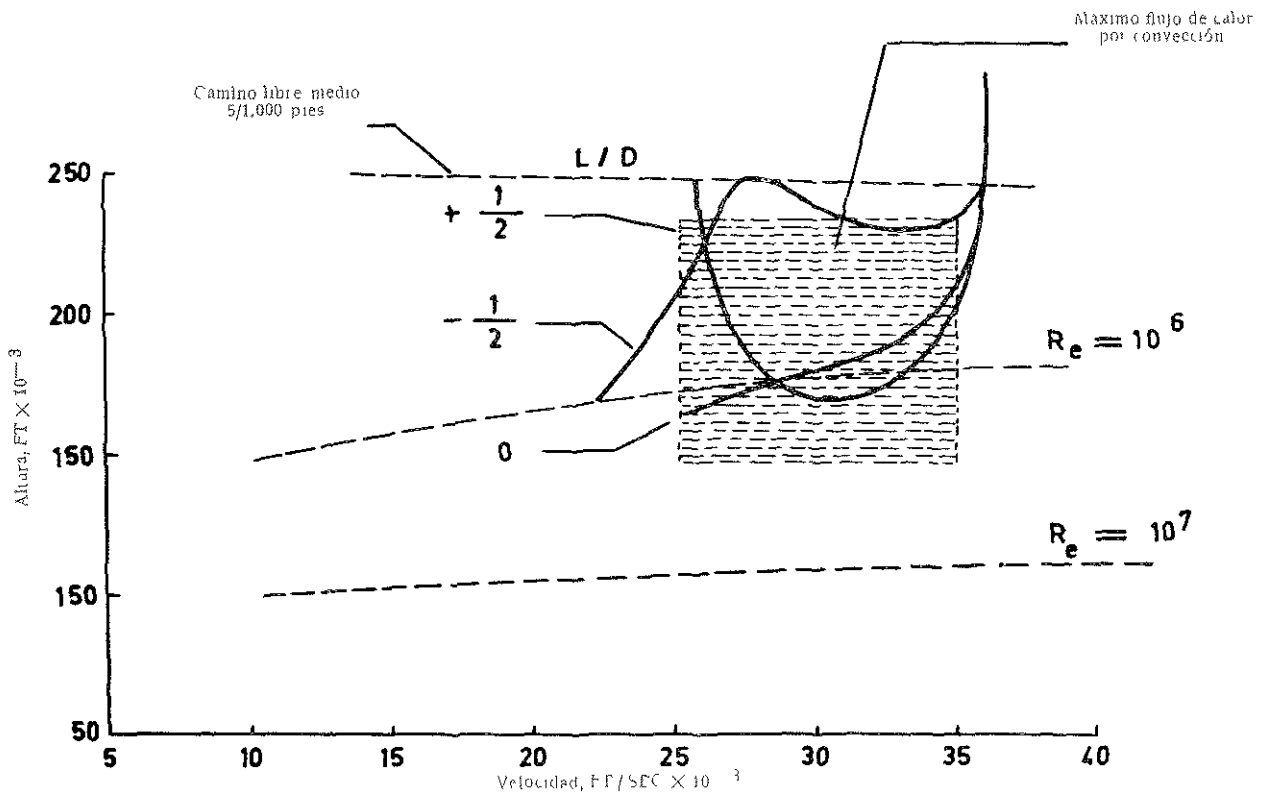


Figura 2

CHUNG [2] consideró el régimen de capa viscosa, regímenes que aparecen a alturas más elevadas.

Por otra parte, los números de REYNOLDS son lo suficientemente pequeños para asegurar que la capa límite es laminar sobre la mayor parte de la superficie del cuerpo.

En este trabajo se considerarán dos tipos de reacción química:

1. Reacciones de disociación y recombinación, tanto en fase homogénea como heterogénea.

2. Reacciones químicas entre los constituyentes del aire y una especie inyectada o vaporizada desde la pared.

Cuando estudiemos el primer tipo de reacción, haremos la hipótesis de que tiene lugar principalmente en una zona próxima a la pared, en la que se pueden desprestigiar los efectos de convección. Dado que la corriente exterior está en equilibrio químico, la corriente en la parte exterior de la capa límite también lo estará. Realmente, como ha sido puesto de manifiesto por LIGHTHILL [13], el tiempo característico de convección en la parte exterior de la capa límite, o tiempo que necesita el fluido para recorrer el cuerpo, es igual al tiempo característico de difusión a través de la capa límite; y siempre que estos tiempos característicos sean grandes comparados con el tiempo característico de disociación o recombinación, habrá equilibrio. Ahora bien, como ha demostrado CLARK [14], el tiempo característico químico aumenta cuando disminuye la temperatura. Por tanto, podemos esperar que para paredes muy refrigeradas el equilibrio aparecerá primero en las proximidades de la pared y luego, al aumentar la altura o velocidad de vuelo, se extenderá a la parte exterior de la capa límite y, finalmente, a la corriente no viscosa. Esto está de acuerdo con el comportamiento de la corriente presentado en la figura 1.

FAY y RIDDEL [15], CHUNG [16] and CHUNG y ANDERSON [17], entre otros, han considerado ya el efecto de la velocidad de recombinación finita sobre la transmisión de calor; nosotros intentaremos obtener expresiones analíticas sencillas, que muestren claramente la influencia de la cinética química, forma del cuerpo y regímenes de vuelo arbitrarios sobre la transmisión de calor.

Para el segundo tipo de reacciones químicas supondremos, siguiendo el procedimiento habitual en el estudio de las llamadas de difusión [18] a [22], que la reacción química es tan rápida que tiene lugar únicamente en una zona muy estrecha. En dicha zona desprestigiamos los efectos de convección frente a los de conducción, difusión y químicos. Entonces, pueden resolverse las ecuaciones que

dan las distribuciones de temperatura y concentración en la zona de reacción, y se obtiene un parámetro que da el criterio de extinción de la llama.

## Nomenclatura

- $c_p$  = calor específico a presión constante.  
 $c_i$  = fracción másica de la especie  $i$ .  
 $D_{ij}$  = coeficiente binario de difusión.  
 $f$  = función adimensional de corriente. Definida en 1.2.  
 $g = h_s/h_{se} \gg g_T \approx h_f/h_{fe}$ .  
 $h$  = entalpía específica, incluyendo la química.  
 $h^0_i$  = calor de formación de la especie  $i$ .  
 $h_f = \sum c_i \int c_{pi} dT + u^2/2$ , entalpía específica total "congelada".  
 $h_s = \sum c_i h_i + u^2/2$ , entalpía específica total.  
 $h_T$  = entalpía específica térmica.  
 $Le = Pr/Sc$ , número de LEWIS.  
 $M$  = peso molecular medio.  
 $M_i$  = peso molecular de la especie  $i$ .  
 $Ma$  = número de Mach de la corriente no perturbada.  
 $p$  = presión.  
 $Pr$  = número de PRANDTL.  
 $q_s$  = flujo de calor a la pared.  
 $r$  = radio de la sección recta de un cuerpo con simetría de revolución.  
 $R$  = constante universal de los gases.  
 $R_0$  = radio de curvatura en el morro.  
 $Re$  = número de REYNOLDS.  
 $Sc = \mu/\rho D_{ij}$ , número de SCHMIDT.  
 $t_c$  = tiempo químico característico. Definido mediante la ecuación (31).  
 $t_m$  = tiempo mecánico característico. Definido en la sección 1.3.  
 $T$  = temperatura absoluta.  
 $u, v$  = componentes del vector velocidad paralela y normal a la superficie del cuerpo.  
 $w_i$  = velocidad de producción másica de la especie  $i$ .  
 $x, y$  = coordenadas de la capa límite paralela y normal a la superficie del cuerpo.  
 $z$  = definida en la ecuación (15).  
 $\alpha$  = definida en la ecuación (10).  
 $\beta$  = parámetro de gradiente de presión. Definido en la sección 1.3.  
 $\partial$  = rendimiento catalítico de la pared.  
 $\eta$  = coordenada adimensional que mide la distancia a la pared. Definida en la sección 1.2.  
 $\Theta$  = ángulo que forma la normal en cada punto de la superficie y la sección de vuelo.  
 $\mu$  = coeficiente de viscosidad.  
 $\nu$  = relación estequiométrica entre las especies 1 y 2.  
 $\xi$  = coordenada adimensional a lo largo de la superficie del cuerpo. Definida en la sección 1.2.  
 $\rho$  = densidad.  
 $\varphi$  = definida mediante la ecuación [15].

Subíndices.

- $e$  = condiciones en el borde exterior de la capa límite.
- $E$  = condiciones de equilibrio químico.
- $f$  = condiciones congeladas.
- $i$  = variables correspondientes a la especie  $i$ .
- $r$  = condiciones en la llama en el caso de que se suponga que la velocidad de reacción es infinita.
- $w$  = condiciones en la pared.
- $z$  = derivadas respecto a  $z$ .
- Las primas indican derivadas respecto a  $\eta$ .

1. Ecuaciones de la capa límite laminar.

1.1. ECUACIONES FUNDAMENTALES.

Comenzaremos por escribir las ecuaciones de la capa límite laminar para la corriente estacionaria bidimensional o axilsimétrica de una mezcla de gases reactantes. Los detalles de los razonamientos e hipótesis básicas que permiten obtener dichas ecuaciones pueden verse en [23], [15] y [19].

Utilizando el sistema de coordenadas de capa límite estas ecuaciones se convierten en:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r^k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r^k) = 0, \quad (1)$$

donde  $k = 0$  para corriente bidimensional y  $k = 1$  para corriente axilsimétrica.

Ecuación del impulso:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{d p_e}{d x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2)$$

Ecuación de la energía:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h_s}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_s}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2}{2} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho D_{ij} \left( 1 - \frac{1}{Le} \right) \sum h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Ecuación de continuidad para cada una de las especies:

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho D_{ij} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right] = w_i, \quad (4)$$

Ecuación de estado:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T \text{ donde } M^{-1} = \sum c_i M_i^{-1}. \quad (5)$$

Para el cálculo de las velocidades de difusión se ha supuesto que el gas se comporta como una mezcla binaria y, por lo tanto, se puede aplicar la ley de FICK. Se ha despreciado la difusión térmica y el tensor de esfuerzos de difusión.

La entalpía total, que incluye las entalpías térmica y química, está definida por la relación  $h_s = \frac{1}{2} u^2 + \sum h_i c_i$ , donde:

$$h_i = \int_0^T c_{p,i} dT + h_i^0.$$

Los coeficientes de transporte y las velocidades de producción másica de la especie  $i$  son funciones de las variables termodinámicas locales  $\rho$ ,  $T$  y  $c_i$ .

Las ecuaciones (1) a (5), en unión de las condiciones de contorno apropiadas, constituyen el conjunto de ecuaciones cuya solución hemos de obtener.

1.2. SEMEJANZA LOCAL Y CONDICIONES DE CONTOURNO.

Con el fin de simplificar la solución aproximada de las ecuaciones de la capa límite, las escribiremos en la forma llamada de "semejanza" introduciendo el cambio de variables propuesto por LEES [23], en la forma usada en [15], que combina las transformaciones de LEVY y MANGLER y HOWARTH-DORODNITZYN.

O sea,

$$\eta = \frac{u_e r^k}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy,$$

y

$$\xi = \int_0^x \rho_w \mu_w u_e r^{2k} dx.$$

Si introducimos la función de corriente  $\psi$ , definida por:

$$\rho u r^k = \frac{\rho \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad \rho v r^k = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

la ecuación de la continuidad queda automáticamente satisfecha.

Haciendo  $\psi = \sqrt{2\xi f(\eta, \xi)}$ , podemos poner  $u/u_e = f'(\eta, \xi)$  y las ecuaciones de la capa límite toman la forma:

Ecuación del impulso:

$$(C f''') + f f'' + \frac{2\xi}{u_e} \frac{d u_e}{d \xi} \left[ \frac{\rho_e}{\rho} - (f')^2 \right] = t. d. \quad (6)$$

Ecuación de la continuidad para cada una de las especies:

$$\left(\frac{C}{Sc} c'_i\right)' + f c'_i + \frac{2\xi}{\rho_w \nu_w u_e^2 r^{2k}} \frac{w_i}{\rho} = \text{t. d.} \quad (7)$$

Ecuación de la energía:

$$\left(\frac{C}{Pr} g'\right)' + f g' + \frac{u_e^2}{2h_{se}} \left[ 2C \left(1 - \frac{1}{Pr}\right) f f'' \right]' + \left[ \frac{C}{Pr} (Le - 1) \sum \frac{h_i c'_i}{h_{se}} \right]' = \text{t. d.}, \quad (8)$$

en las que los acentos indican derivación con respecto a  $\eta$ , y además  $h_s/h_{se} = g(\eta, \xi)$  y  $C = \rho \mu / \rho_w \nu_w$ . Las "t. d." en el segundo miembro de las ecuaciones, representan los términos en que aparecen derivadas de  $f$ ,  $g$  o  $c_i$  con respecto a  $\xi$ .

Si despreciamos las diferencias de entalpía térmica entre las componentes, comparadas con los calores de formación, el término  $\sum h_i c'_i$  de la ecuación de la energía, puede ser escrito en la forma siguiente:

$$\sum h_i h'_i = \sum h_i^0 c'_i.$$

Si definimos  $g_T = h_f/h_{fe}$ , donde

$$h_f = h_T + \frac{u^2}{2} = h_s - \sum c_i h_i^0,$$

multiplicando la ecuación (7) por  $h^0_i/h_{fe}$ , sumando para todas las especies, y restando el resultado de la ecuación (8) multiplicada por  $h_{se}/h_{fe}$ , se obtiene [19].

$$\left(\frac{C}{Pr} g'_T\right)' + f g'_T + \frac{u_e^2}{2h_{fe}} \left[ 2C \left(1 - \frac{1}{Pr}\right) f f'' \right]' - \frac{2\xi}{\rho_w \nu_w u_e^2 r^{2k}} \frac{\sum w_i h_i}{\rho h_{fe}} = \text{t. d.}, \quad (9)$$

que es otra forma de la ecuación de la energía.

Las condiciones de contorno son:

$$f(0, \xi) = f_w = -\frac{1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^x (\rho \nu)_w r^k dx, \quad f'(0, \xi) = 0;$$

$$f(\eta, \xi) \rightarrow 1 \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty;$$

$$g(0, \xi) = g_w \text{ y } g(\eta, \xi) \rightarrow 1 \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty;$$

$$g_T(0, \xi) = g_{T_w} \text{ y } g_T(\eta, \xi) \rightarrow 1 \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty.$$

Supondremos que la temperatura de la pared es una función conocida de  $\xi$ . Entonces, si despreciamos las diferencias de entalpía térmica entre los componentes, comparadas con los calores de formación, lo cual está justificado a elevadas temperaturas donde las  $c_{pi}$  son prácticamente iguales y constantes,  $g_{T_w}$  será una función conocida de  $\xi$ , mientras que  $g_w$  dependerá de los valores de  $c_{iw}$ .

Las condiciones de contorno para las fracciones másicas en la pared, dependen de que haya o no inyección de masa desde la pared y de las particularidades de la reacción química en la superficie.

Podemos escribir estas condiciones en la forma general siguiente:

$$c'_i(0) = F[c_i(0), \xi].$$

Supondremos que la corriente exterior a la capa límite está en equilibrio químico, y escribiremos:

$$c_i(\eta, \xi) \rightarrow c_{ie}(\xi) \text{ cuando } \eta \rightarrow \infty.$$

### 1.3. APROXIMACIÓN DE SEMEJANZA LOCAL.

Existe una solución de semejanza del sistema antes escrito, en el caso sencillo de corriente en el punto de remanso. En esta solución  $f$ ,  $c_i$  y  $g$  son funciones solamente de la variable de semejanza  $\eta$ .

Para velocidades de recombinación finitas, el caso anterior parece ser el único en el que puede encontrarse una variable de semejanza. Las funciones  $f$ ,  $c_i/c_{ie}$  y  $g$  dependerán, en general, de la variable  $\xi$  debido a la variación a lo largo del obstáculo de los siguientes parámetros:

$$\beta = \frac{2\xi}{u_e} \frac{d u_e}{d \xi}, \quad \frac{u_e^2}{2h_{se}}, \quad \frac{h^0_i}{h_{se}}, \quad f_m = \frac{2\xi}{\rho_w \nu_w u_e^2 r^{2k}}$$

y de las condiciones de contorno.

Para la placa plana y la cuña, las condiciones en el borde exterior de la capa límite son constantes a lo largo de la superficie y, por lo tanto, se pueden encontrar soluciones de semejanza cuando la corriente en la capa límite está en equilibrio congelado o en equilibrio químico.

A velocidades de vuelo hipersónico, para paredes muy refrigeradas  $\rho_w/\rho_e \gg 1$  y como sugirió LEES [23], el término debido al gradiente de presiones en la ecuación (6) será pequeño; por lo tanto, el despreciar este término, tendrá un efecto muy pequeño en el perfil de velocidades y aún menor en los perfiles de concentraciones y entalpía.

Para números de LEWIS próximos a la unidad o para valores pequeños de  $h^0_i/h_{se}$ , se puede des-

preciar el último término del primer miembro de la ecuación de la energía, frente a los otros términos de la ecuación.

El tercer término de las ecuaciones (8) y (9) es numéricamente pequeño para cuerpos romos a altas velocidades y puede ser igualmente despreciado.

Si se eliminan todos los términos mencionados, es posible obtener una solución de semejanza, como la obtenida por LEES [23], que da valores para el flujo de calor en la pared que están cuantitativamente de acuerdo con los resultados experimentales y soluciones más exactas, tanto en corriente congelada como en equilibrio químico.

Con el fin de resolver aproximadamente las ecuaciones de la capa límite para velocidades de recombinación finitas, se usará la llamada "aproximación de semejanza local", que parece una extensión lógica del método utilizado por LEES para resolver los casos de corriente congelada o en equilibrio químico.

En esta aproximación, sugerida por LEES y usada por KEMP, ROSE y DETRA [25], para el estudio del caso de equilibrio químico, los parámetros  $\beta$ ,  $u^2_e/h_{s,e}$ , etc., antes mencionado y las condiciones de contorno, se supone que son funciones lentamente variables de  $\xi$ . Entonces, los términos que contienen derivadas con respecto a  $\xi$ , se desprecian frente a los otros términos de las ecuaciones (6), (7), (8) y (9). Sin embargo, se conservan los términos numéricamente pequeños, responsables de la falta de semejanza en los casos de corriente congelada o en equilibrio químico.

Con el fin de comprobar la validez de esta aproximación, se pueden estimar, mediante esta solución, los términos despreciados en la obtención de la solución de semejanza local, y compararlos entonces con los otros términos de la ecuación.

Como han demostrado KEMP, ROSE y DETRA, la semejanza local proporciona una buena aproximación, al menos para corrientes en equilibrio químico, excepto en las zonas donde tienen lugar expansiones rápidas.

En lo que sigue, se supone que los términos de producción de masa no tiene una influencia muy grande sobre la aproximación de semejanza local. Esta hipótesis se basa en el hecho de que cerca del punto de remanso, donde los términos de producción de masa pueden ser muy importantes, existe semejanza local, y en las zonas alejadas de dicho punto (valores grandes de  $\xi$ ) los términos de pro-

ducción de masa tienden a ser numéricamente pequeños.

Una vez despreciados los términos que contienen derivadas con respecto a  $\xi$ , para resolver las ecuaciones (6) a (9) tomaremos un valor constante para C. Eligiendo  $C = C_0 (\rho_w \mu_w / \rho_e \mu_e)^{0,8}$ , obtenemos los valores para el flujo de calor deducidos por FAY y RIDDELL correspondientes a la capa límite en el punto de remanso. El uso del valor de C correspondiente al punto de remanso, está justificado por el hecho de que KEMP, ROSE y DETRA, integrando numéricamente las ecuaciones (6) a (8) en el caso límite de equilibrio químico, encontraron que, al menos en lo que respecta al cálculo de  $g'_w / (1 - g_w)$ , el término de disipación que aparece en la ecuación (8) es despreciable, si se toma para C a lo largo de toda la pared el valor correspondiente al punto de remanso.

Siguiendo una sugerencia de MOORE [26], aproximaremos el término debido al gradiente de presiones por  $\alpha \beta f f''$ , a la vista de que  $f f''$  y  $\frac{\rho_e}{\rho} - f'^2$  presentan cierta semejanza, pudiendo elegir  $\alpha$  de forma tal que la diferencia entre el término debido al gradiente de presiones y su expresión aproximada tenga una media nula a través de la capa límite; es decir;

$$\alpha \int_0^\infty f f'' d\eta = \int_0^\infty \left( \frac{\rho_e}{\rho} - f'^2 \right) d\eta.$$

MOORE encontró que:

$$\alpha \approx 1 + 2.6 \frac{T_w}{T_e}. \quad (10)$$

Supondremos, además, que los números de PRANDTL y LEWIS son constantes.

Una vez introducidas estas aproximaciones en las ecuaciones (6) a (9), éstas adoptan la forma siguiente:

$$f''' + \frac{1 + \alpha \beta}{C_0} f f'' = 0, \quad (11)$$

$$c_i'' + \frac{Sc}{C_0} f c_i' = - \frac{Sc}{C_0} t_m \frac{w_i}{\rho}, \quad (12)$$

$$g_T'' + \frac{Pr}{C_0} f g_T' + (Le - 1) \Sigma \frac{h_i^0 c_i}{h_{s,e}} = 0, \quad (13)$$

$$g_T'' + \frac{Pr}{C_0} f g_T' = \frac{Pr}{C_0} t_m \frac{\Sigma w_i h_i^0}{\rho h_{f,e}}. \quad (14)$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas en forma más conveniente utilizando el siguiente cambio de variables:

$$f = \sqrt{\frac{C_0}{1 + \alpha\beta}} \varphi(z) \text{ donde } z = \sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{C_0}} \eta. \quad (15)$$

Entonces, las ecuaciones (11) a (14) se convierten en las siguientes:

$$\varphi_{zzz} + \varphi \varphi_{zz} = 0, \quad (16)$$

$$c_{izz} + \frac{Sc}{1 + \alpha\beta} \varphi c_{iz} = \frac{Sc}{1 + \alpha\beta} t_m \frac{w_i}{\rho}, \quad (17)$$

$$g_{zzz} + \frac{Pr}{1 + \alpha\beta} \varphi g_{zz} + (Le - 1) \Sigma \frac{h^0_i c_{izz}}{h_{s,e}} = 0, \quad (18)$$

$$g_{Tzz} + \frac{Pr}{1 + \alpha\beta} \varphi g_{Tz} = \frac{Pr}{1 + \alpha\beta} t_m \frac{\Sigma w_i h^0_i}{h_{fe}}. \quad (19)$$

Las ecuaciones (16), (17), (18), ó (19), deberán resolverse con las siguientes condiciones de contorno.

Para  $z = 0$ :

$$\varphi = \varphi_w, \varphi_z = 0, T = T_w, c_{iz} = F(c_i, T_w, \rho, \varphi_w),$$

y para:

$$z \rightarrow \infty \varphi_z = g = g_T = 1 \text{ y } c_i = c_{ie},$$

donde  $\varphi_w$  depende de la velocidad de inyección en la pared y la función F del tipo de reacción química en la pared.

## 2. Capa límite con reacción química, sin inyección.

La ecuación (16) es la conocida ecuación de BLASIUS para la capa límite de una placa semi-infinita.

La solución de esta ecuación se puede escribir en forma de serie de potencias como sigue:

$$\varphi(z) = a \frac{z^2}{2!} - a^2 \frac{z^5}{5!} + 11 a^3 \frac{z^8}{8!}. \quad (20)$$

MEKSYN [27] sugirió que las ecuaciones (16) a (19) se pueden resolver sustituyendo en (16) (19),  $\varphi$  por el desarrollo en serie (20), manteniendo invariable  $\varphi_{zzz}$  y  $\varphi_{zz}$ .

Nótese que la aproximación sugerida por FAGE y FALKNER y utilizada por LIDTHILL [28], de que al menos, cuando se trata de calcular efectos de convección, la velocidad en la capa límite aumen-

ta linealmente con la distancia a la pared, es equivalente a conservar únicamente el primer término de la serie (20).

De las ecuaciones (16), (17) y (19) deducimos:

$$\varphi_z(z) = \varphi_{zz}(0) \int_0^z e^{-\left[\frac{1}{6} \varphi_{zz}(0) z^2\right]} dz, \quad (21)$$

$$c_i(z) - c_i(0) = c_{iz}(0) \int_0^z e^{-\frac{Sc}{1 + \alpha\beta} \left[\frac{1}{6} \varphi_{zz}(0) z^2 + \dots\right]} - \frac{Sc}{1 + \alpha\beta} t_m \int_0^z \frac{w_i}{\rho c_{iz}} dz dz, \quad (22)$$

$$g_T(z) - g_T(0) = g_{Tz}(0) \int_0^z e^{-\frac{Pr}{1 + \alpha\beta} \left[\frac{1}{6} \varphi_{zz}(0) z^2 + \dots\right]} - \frac{Pr}{1 + \alpha\beta} t_m \Sigma \frac{h^0_i}{h_{fe}} \int_0^z \frac{w_i}{c g_{Tz}} dz dz. \quad (23)$$

En la ecuación (21), haciendo  $z \rightarrow \infty$ , se obtiene  $\varphi_{zz} = 0,47$ .

En los casos que consideramos,  $\frac{w_i}{\rho}$  es una función rápidamente decreciente en  $z$ . Suponiendo que el espesor de la zona necesaria para que  $w_i/\rho$  se haga despreciable, es mucho más pequeño que el espesor de la capa límite térmica, podemos escribir las ecuaciones (22) y (23) en la forma aproximada siguiente:

$$c_i(z) - c_i(0) = c_{iz}(0) \int_0^z e^{-\frac{Sc}{1 + \alpha\beta} \left[\frac{1}{6} \varphi_{zz}(0) z^2 + \dots\right]} \cdot \left(1 - \frac{\frac{Sc}{1 + \alpha\beta} t_m \int_0^z \frac{w_i}{\rho} dz}{c_{iz}(0)}\right) dz, \quad (22, a)$$

$$g_T(z) - g_T(0) = g_{Tz}(0) \int_0^z e^{-\frac{Pr}{1 + \alpha\beta} \left[\frac{1}{6} \varphi_{zz}(0) z^2 + \dots\right]} \cdot \left(1 + \frac{\frac{Pr}{1 + \alpha\beta} t_m \Sigma \frac{h^0_i}{h_{fe}} \int_0^z \frac{w_i}{\rho} dz}{g_{Tz}(0)}\right) dz. \quad (23, a)$$

Para el cálculo de las segundas expresiones exponenciales que aparecen en las ecuaciones (22) y (23) hemos tenido en cuenta el hecho de que en las zonas próximas a la pared, donde dichas expre-

siones difieren poco de sus valores límites, pueden despreciarse los efectos de convección. Con ello se obtienen las siguientes relaciones:

$$c_{iz} = c_{iz}(0) - \frac{Sc}{1 + \alpha\beta} t_m \int_0^z \frac{w_i}{\rho} dz,$$

$$g_{Tz} = g_{Tz}(0) + \frac{Pr}{1 + \alpha\beta} t_m \Sigma \frac{h_i^0}{h_{fe}} \int_0^z \frac{w_i}{\rho} dz.$$

Las condiciones en la pared que aparecen en las ecuaciones (22, a) y (23, a), se pueden calcular fácilmente de la forma siguiente:

1. Si despreciamos los términos del orden de  $z^5$  en el desarrollo en serie de  $\varphi$  y tenemos en cuenta las condiciones en el borde exterior de la capa límite obtenemos:

$$\frac{1}{\varphi_{zz}(0)} = \int_0^\infty e^{-\frac{\varphi_{zz}(0)}{6} z^2} dz. \quad (24)$$

2. El término de reacción química lo escribimos en la forma:

$$\frac{w_i}{\rho} = \left(\frac{w_i}{\rho}\right)_w e^{-(\Lambda_1 z + \Lambda_2 z^2 + \dots)} \quad (25)$$

donde

$$\Lambda_{i1} = - \left\{ \frac{(w_i/\rho)_z}{(w_i/\rho)_w} \right\}, \text{ etc.}$$

Dado el conocimiento que actualmente se tiene sobre las velocidades de reacción química, se obtiene una suficiente aproximación cuando se conserva únicamente el primer término en la serie (25), y se desprecia en lo que sigue los términos del orden de  $\Lambda_1^{-2}$ . Por lo tanto:

$$c_{ie} - c_i(0) = \frac{1}{\varphi_{zz}(0) \left(\frac{Sc}{1 + \alpha\beta}\right)^{1/3}} \left[ c_{iz}(0) - \frac{Sc}{1 + \alpha\beta} t_m \left(\frac{w_i}{\rho}\right)_w \frac{1}{\Lambda_{i1}} \right], \quad (26)$$

$$1 - g_T(0) = \frac{1}{\varphi_{zz}(0) \left(\frac{Pr}{1 + \alpha\beta}\right)^{1/3}} \left[ g_{Tz}(0) + \frac{Pr}{1 + \alpha\beta} t_m \Sigma \frac{h_i^0}{h_{fe}} \left(\frac{w_i}{\rho}\right)_w \frac{1}{\Lambda_{i1}} \right]. \quad (27)$$

La concentración en la pared puede obtenerse

mediante la ecuación (26). En esta ecuación aparece la influencia de la reacción heterogénea en el primer término entre corchetes, mientras que la influencia de la reacción homogénea aparece en el segundo término.

Utilizando los valores de  $c_i(0)$  calculados a partir de la ecuación (26), puede obtenerse el flujo de calor a la pared mediante la siguiente expresión:

$$q_s = 0,47 Pr^{-\frac{2}{3}} \sqrt[6]{1 + \alpha\beta} \left(\frac{\rho_e \mu_e}{\rho_w \mu_w}\right)^{0,4} \frac{\rho_w \mu_w u_e r^k}{\sqrt{2\xi}} \times \left[ h_{se} - h_w + \left[ L_e^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \Sigma h_i^0 (c_{ie} - c_i(0)) \right]. \quad (28)$$

Por haber utilizado la aproximación de MOORE para el término debido al gradiente de presiones,

aparece en la ecuación (28) el factor  $\sqrt[6]{1 + \alpha\beta}$  en lugar del  $1 + 0,096 \sqrt{\beta}$  dado en (25). En el intervalo de valores de  $\beta$  de interés y para pequeños valores de  $T_w/T_e$ , ambas expresiones son aproximadamente iguales; la primera, sin embargo, da mejor aproximación para valores de  $T_w/T_e$  próximos a 1.

La influencia del número de PRANDTL en la transmisión de calor, viene dada aquí por  $Pr^{-2/3}$  en lugar de  $Pr^{-0,6}$  obtenida en [15] mediante correlación de resultados numéricos.

La influencia del número de LEWIS está dada por el factor

$$1 + [L e^{2/3} - 1] \Sigma \frac{h_i^0 [c_{ie} - c_i(0)]}{h_{se} - h_w}.$$

Es interesante poner de manifiesto que el exponente del número de LEWIS es aquí 0.67 en lugar de los valores 0.63 (para corriente congelada) y 0.52 (para equilibrio químico) obtenidos por FAY y RIDDELL mediante correlación de sus resultados numéricos.

Suponiendo que la influencia del número de PRANDTL está dada por  $Pr^{-0,6}$ , el exponente del número de LEWIS en la ecuación (28) sería 0,6.

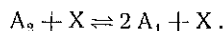
El número de LEWIS tiene una influencia adicional indirecta sobre los valores de  $c_i(0)$  y, por tanto, sobre  $h_w$ .

## 2.2. VELOCIDADES DE REACCIÓN.

Como aplicación del método de solución expuesto, consideraremos el movimiento de un gas que se disocia y recombina. Lo supondremos formado



por moléculas diatómicas  $A_2$ . La ecuación que describe la reacción homogénea es:



Supondremos que las constantes de velocidad de reacción son las correspondientes a la reacción de disociación y recombinación del oxígeno (\*).

La velocidad de producción másica de oxígeno atómico viene dada por:

$$\frac{w_1}{M_1} = k_d \left( \frac{p}{RT} \right)^2 \frac{1 - c_1}{2} - k_r \left( \frac{p}{RT} \right)^3 \frac{2 c_1^2}{1 + c_1}. \quad (29)$$

Existe una gran incertidumbre sobre los valores de las constantes de reacción. Utilizaremos los valores presentados por DEMETRIADES y FARBBER [29]:

$$k_r = 3,10^{16} \left( \frac{300}{T} \right)^{1,5} \text{ cm.}^6 \text{ mol.}^{-2} \text{ seg.}^{-1},$$

$$\frac{k_d}{k_r} = 24,5 e^{-\frac{59.000}{T}} \text{ mol.cm.}^{-3}.$$

Llevando la relación (29) a la ecuación (12), obtenemos la ecuación siguiente:

$$c_{1z} + \frac{Sc}{1 + \sigma\beta} \varphi c_{1z} = \frac{Sc}{1 + \alpha\beta} \frac{t_m}{t_c} (c_1 - c_{1E}), \quad (30)$$

donde:

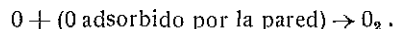
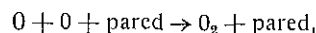
$$t_c = \frac{(1 + c_1)(1 - c_{1E})}{c_1 + c_{1E}} \left( \frac{RT}{p} \right)^2 \frac{1}{2k_r}, \quad (31)$$

es un tiempo químico característico que, debido al factor  $1 - c_{1E}^2$ , disminuye muy rápidamente cuando aumenta la temperatura. Entonces, como se ha indicado en la Introducción, la relación  $t_m/t_c$ , que aparece en (30), aumenta con la distancia a la pared y  $c_1$  tiende a su valor de equilibrio. Esto no ocurrirá en la región próxima a la pared, donde la relación entre el tiempo mecánico y el químico puede ser pequeña, presentándose desviación del estado de equilibrio.

Para la velocidad de reacción heterogénea del oxígeno, usaremos los valores dados en [29].

(\*) Aunque el ozono se encuentra presente como especie intermedia, en la producción de oxígeno y la cinética química no es tan sencilla como la descrita en la ecuación anterior, su concentración es despreciable. La razón está en que el ozono se encuentra en equilibrio químico excepto en una capa muy delgada próxima a la pared, y que la concentración de equilibrio del ozono es muy pequeña.

Se han propuesto los dos mecanismos siguientes de recombinación superficial:



La velocidad total de producción másica  $m_2$  de oxígeno por unidad de superficie es:

$$\frac{m_2}{M_2} = k_1 \rho^2 \frac{c_1^2}{M_1^2} T^{0,5} + k_2 \vartheta \rho \frac{c_1}{M_1} T^{0,5},$$

donde  $k_1 = 1,5 \cdot 10^5$  y  $k_2 = 9 \cdot 10^2$  (unidades cegsimales).

El factor  $\vartheta$  que aparece en el último término, que mide el rendimiento del segundo mecanismo, oscila desde valores tan bajos como  $10^{-5}$  para cristal "envenenado", hasta valores próximos a 1 para metales nobles y óxidos metálicos.

El envenenamiento de la pared disminuye el flujo de calor al cuerpo y, sin embargo, no tiene influencia sobre el primer mecanismo, que puede ser predominante para valores pequeños de  $\vartheta$ .

Las condiciones de contorno para  $c_1$  en la pared serán:

$$\begin{aligned} c_{1z}(0) \sqrt{1 + \alpha\beta} \left( \frac{\rho_e v_e}{\rho_w v_w} \right)^{0,4} \frac{\rho_w v_w u_e r^k}{\sqrt{2\xi}} = \\ = Sc M_2 \left( \frac{p}{RT_w} \right)^2 T_w^{0,5} \frac{2c_1(0)}{[1 + c_1(0)]^2} \left\{ \frac{k_2 RT_w \vartheta}{p} + \right. \\ \left. + \left( k_1 + \frac{k_2 RT_w \vartheta}{p} \right) c_1(0) \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

### 2.3. DISCUSIÓN.

La ecuación (28) indica que el flujo de calor depende de las concentraciones en la pared. Estas se pueden calcular mediante (26) una vez obtenidos los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $t_m$  a partir de la corriente exterior. Su cálculo puede realizarse utilizando el método expuesto en [23].

El parámetro  $\beta$ , debido al gradiente de presiones, es función de la inclinación de la superficie con respecto a la corriente no perturbada, y a su vez el tiempo mecánico se puede escribir en la forma:

$$t_m = \beta R_0 l \left( \frac{d u_e}{d \Theta} \right)_{\Theta=0}.$$

En las figuras 3 a 5 se muestra la distribución de fracción másica de átomos a lo largo de la

pared (en función de  $u_e$ ) para diferentes temperaturas de la pared y a dos alturas y números de MACH de vuelo. La fracción másica de átomos en la pared se ha calculado a partir de la relación (26) que escribimos en la forma siguiente:

$$c_{1e} - c_1 = A \frac{c_1}{1 + c_1} + B \frac{c_1^2}{1 + c_1} \left[ 1 - \frac{A}{L e^{1/3}} \left\{ \frac{h_1^0}{h_{se}} + \frac{c_p T_w}{3 \cdot 5 h_{se}} \frac{2 + c_1}{c_1(1 + c_1)} \right\} \frac{c_1}{1 + c_1} \right]^{-1}, \quad (33)$$

donde:

$$A = 2 k_1 \delta \frac{S c}{\sqrt{1 + \sigma \beta}} \left( \frac{\rho_w v_w}{\rho_e v_e} \right)^{0.4} \frac{\sqrt{2\xi} p M_\infty}{\rho_w v_w u_e r^k R T_w^{0.5}}, \quad (34)$$

$$B = 2.6 k_r t_m \left( \frac{P r}{1 + \alpha \beta} \right)^{1/3} L e^{-2/3} \frac{c_p T_w}{h_{se}} \left( \frac{p}{R T_w} \right)^2.$$

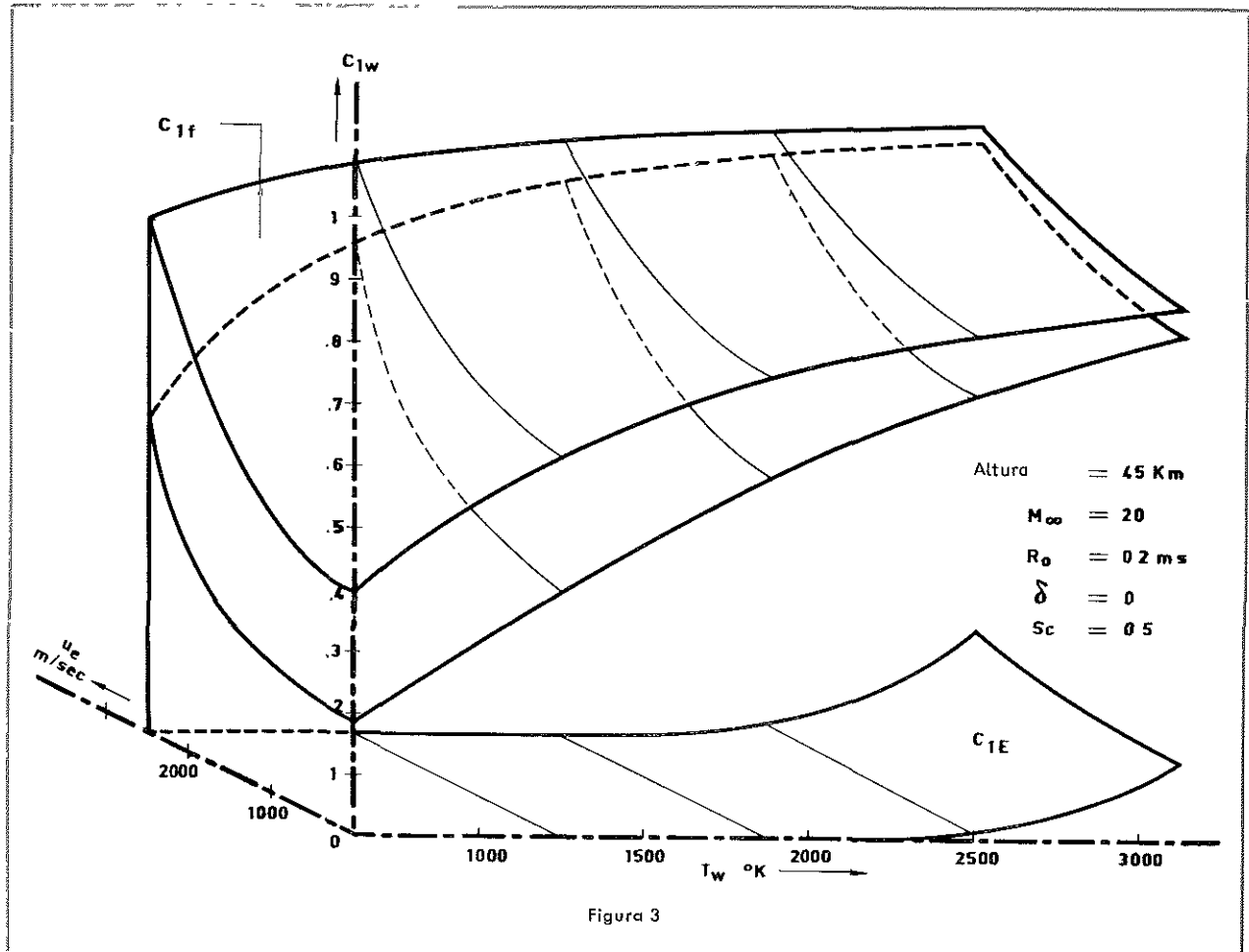
En estas relaciones no se ha tenido en cuenta ni el mecanismo de triple colisión en la recombinación en la pared ni la reacción homogénea de disociación.

El parámetro B representa la velocidad de reacción homogénea, y A la actividad catalítica de la pared. El parámetro B es semejante al parámetro de velocidad de recombinación utilizado por FAY y RIDDEL [15].

Para  $B = 0$ , se obtienen resultados muy semejantes a los dados por GOULARD para la corriente congelada en el punto de remanso.

Para valores grandes de A, la fracción másica de átomos en la pared es próxima a 0. El mismo valor límite se obtiene para temperaturas bajas de la pared cuando el parámetro de velocidad de recombinación homogénea B es grande (corriente en equilibrio químico).

Siempre que la fracción másica de átomos en el



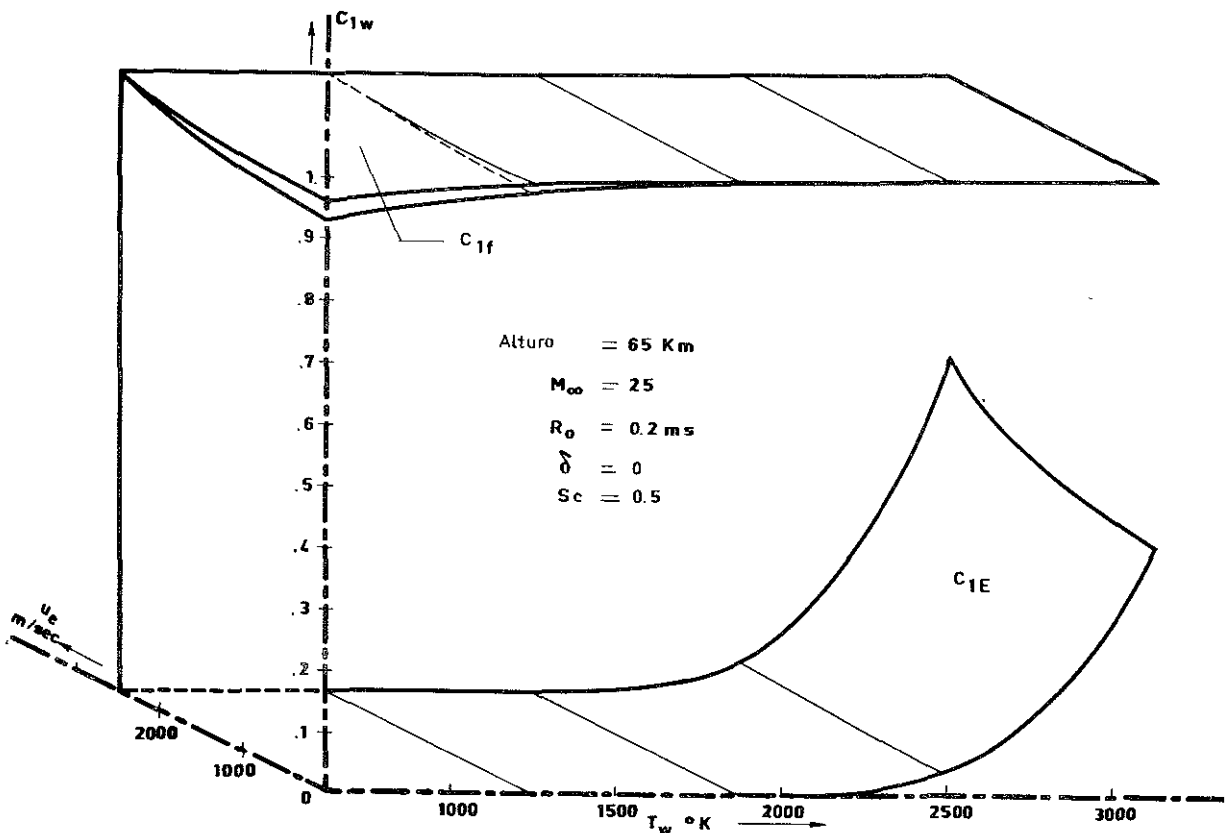


Figura 4

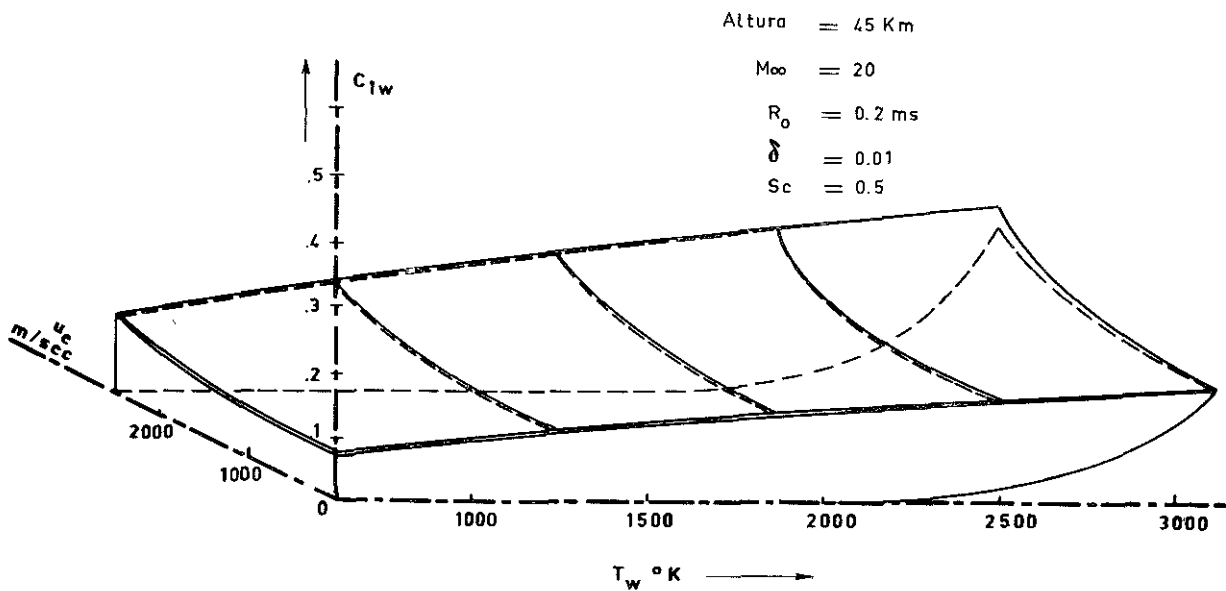


Figura 5

borde exterior de la capa límite sea pequeña, también lo será en la pared.

La figura 6 representa la relación (33) para  $c_{1e} = 1$ . Puede observarse que cuando  $c_1$  (o) pasa de 0,9 a 0,1, el valor de  $\Lambda$  se hace  $10^2$  veces mayor. Sin embargo, el aumento que debe experimentar  $B$  para obtener los mismos resultados es mucho mayor, como ya puso de manifiesto CHUNG [16].

Cuando  $Le = 1$ , la relación  $c_1/c_{1e}$  coincide con la relación  $(q_{sE} - q_s)/(q_{sE} - q_{sf})$ , entre la disminución del flujo de calor debida a los efectos de desequilibrio y la que se obtiene en el caso límite de corriente congelada y pared no catalítica. Esta relación se muestra en la figura 7 en función de  $B$  para pared no catalítica ( $A = 0$ ) y diferentes valores de  $c_{1e}$ .

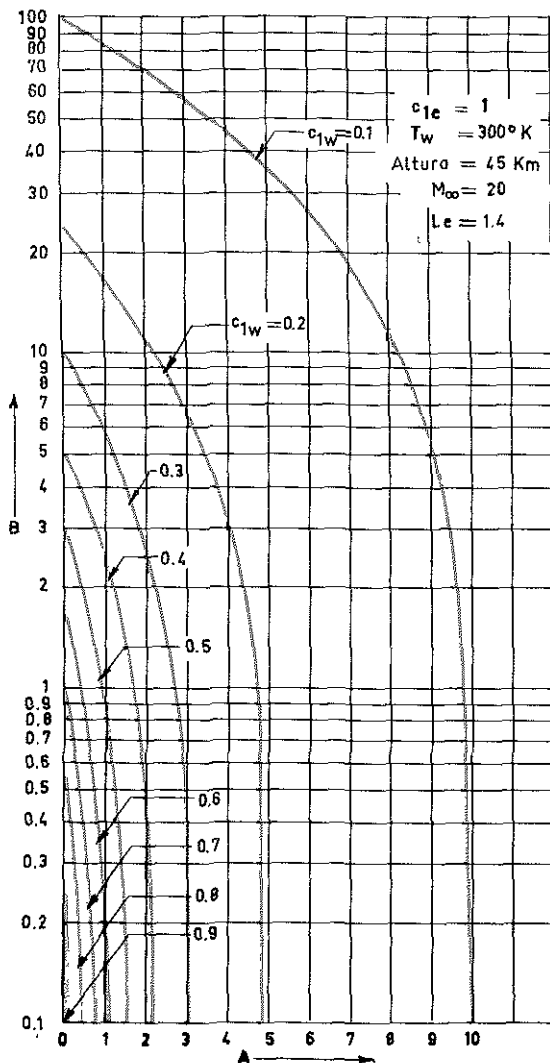


Figura 6

### 3. Capa límite con reacción química y adición de masa.

#### 3.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y SOLUCIÓN CON VELOCIDAD DE REACCIÓN INFINITA.

Debido al "efecto del bloqueo" de la adición de masa, se puede obtener una gran disminución en el flujo de calor, ya sea inyectando en la capa límite un gas, o bien provocando procesos de evaporación o sublimación. Sin embargo, como pueden tener lugar reacciones químicas entre los constituyentes del aire (normalmente oxígeno) y la especie inyectada o transportada por ablación, será necesario tener en cuenta que el calor desarrollado en esta reacción química modifica el flujo de calor transmitido a la superficie del cuerpo.

Puede obtenerse el flujo de calor sin necesidad de conocer la cinética de la reacción química, cuando el número de LEWIS es igual a 1 y la reacción química se realiza completamente, [19], [21]. Si, de acuerdo con BURKE y SCHUMANN [18] se introduce la hipótesis de que la velocidad de reacción es infinita, se puede calcular la posición de la llama, la temperatura y la distribución de concentraciones [20], [22].

En lo que sigue estudiaremos la estructura de la zona de reacción y el grado al que se han completado las reacciones químicas, considerando los efectos de la velocidad de reacción finita.

Suponemos que se inyecta en la capa límite la especie 2, la cual reacciona con la especie 1 del aire y produce la especie 3. Los gases inertes constituyen la especie 4. Tomaremos  $\rho \mu$  constante y  $Le = 1$ . Se supondrá, además, que la velocidad de inyección es pequeña, de forma que puedan utilizarse las ecuaciones (11) a (14) ó (16) a (19). En estas ecuaciones, las  $w_i$  son como sigue:

$$\nu w_2 = w_1 \quad \rightarrow \quad w_3 = -(1 + \nu) w_2 \quad \rightarrow \quad w_4 = 0,$$

y

$$w_2 = -K \rho^2 c_1 c_2 e^{-\frac{E}{RT}},$$

donde  $\nu$  es la relación estequiométrica entre la especie 2 y la 1.

Se supone que la reacción química es del tipo de ARRHENIUS, con cinética química de segundo orden.

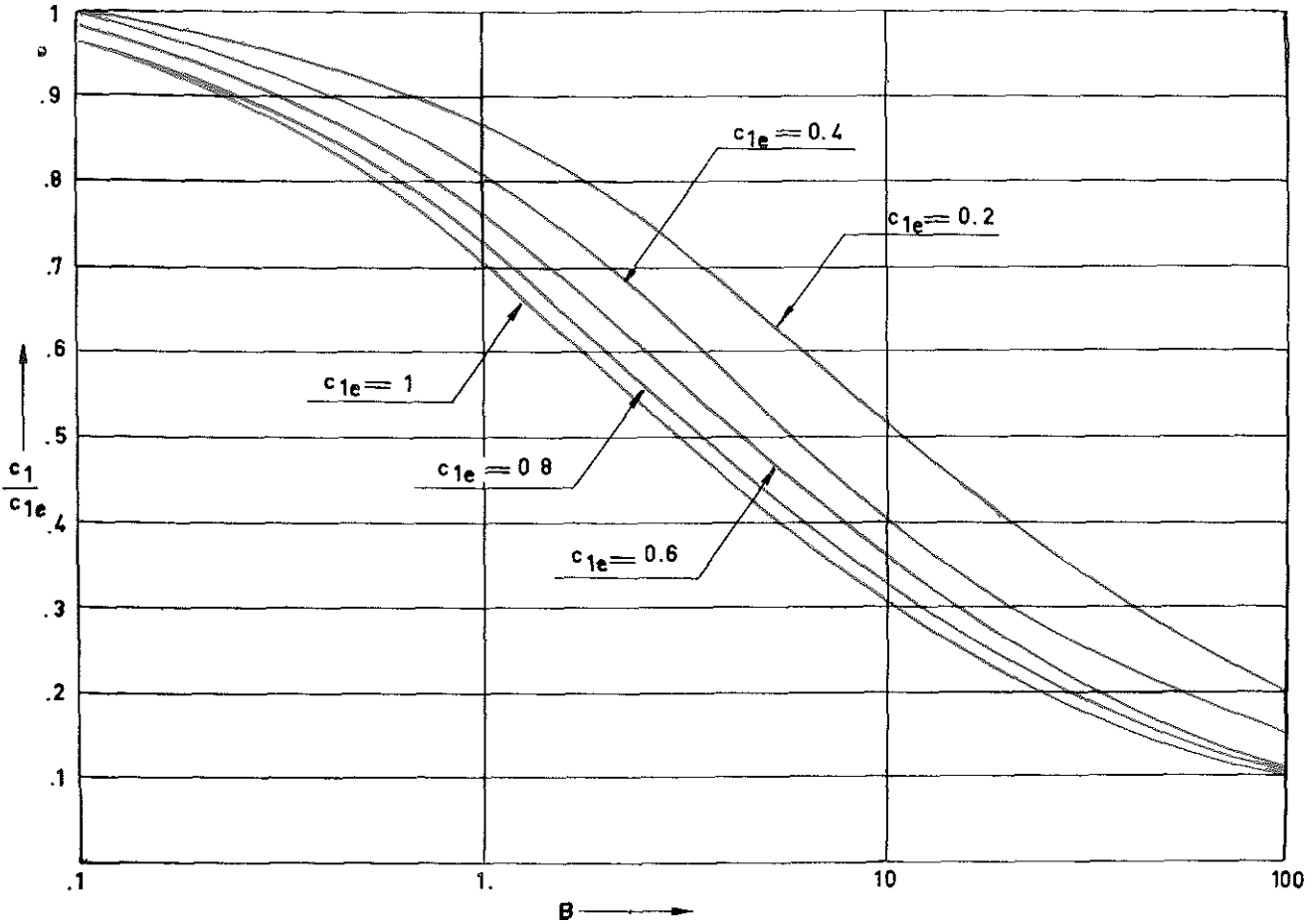


Figura 7

Las ecuaciones de contorno serán (fig. 8) :

$$c_2 = c_3 = 0 \quad \gg \quad c_1 = c_{1e} \quad \gg \quad c_4 = c_{4e} \quad \text{cuando } \eta \rightarrow \infty.$$

y

$$(\rho \nu c_{i,w}) = \frac{1}{Sc} c'_i(0) \frac{\rho_e \nu_e u_e r^k}{\sqrt{2\xi}} \quad , \quad i = 1, 3 \text{ y } 4.$$

Cuando existe ablación,  $f_w$  queda determinado mediante un balance de calor en la pared.

Suponiendo conocidas  $f_w$  y  $g_w$ , pueden resolverse las ecuaciones (11) y (13), usando los métodos propuestos en [27]. Los detalles del cálculo se publicarán en otro lugar. Para valores pequeños de  $f_w$ , podremos escribir:

$$g'(0) = 0,47 Pr^{1/3} \sqrt{1 + \alpha\beta} (1 - g_w) \Gamma$$

donde:

$$\Gamma = 1 + 1,8 \left( \frac{Pr}{1 + \alpha\beta} + 0,5 \right) \sqrt{1 + \alpha\beta} f_w,$$

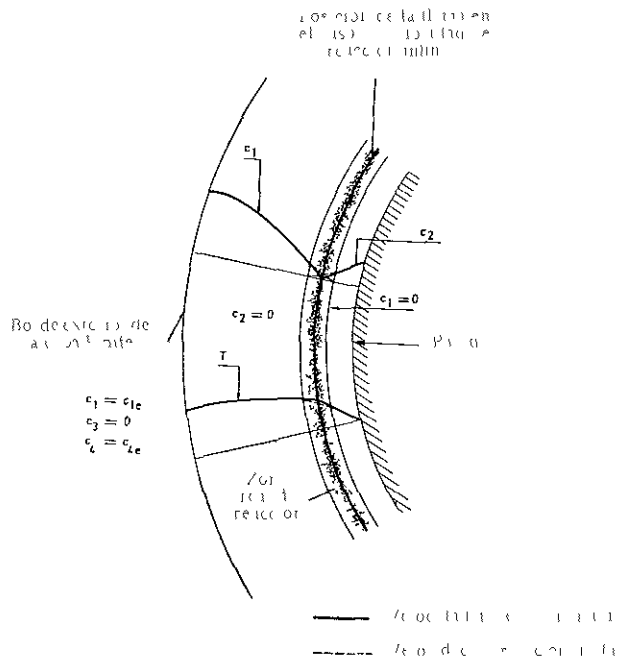


Figura 8

es igual (salvo la pequeña variación del factor  $(1 - g_w)$ ) a la relación entre la transmisión de calor con inyección y la correspondiente sin inyección.

Para  $L_e = 1$ , existe completa semejanza entre las funciones:

$$g, c_1, c_1 - \nu c_2, c_3 + (1 + \nu)c_2 \text{ y } g_T + \frac{q}{h_{fe}} - c_2,$$

donde:

$$q = \nu h^0_1 + h^0_2 - (1 + \nu)h^0_3$$

es el calor de reacción por unidad de masa de la especie 2.

Si la velocidad de reacción es suficientemente grande, sólo coexistirán las especies 1 y 2 en una zona muy estrecha o frente de llama. Por lo tanto, en un lado de la zona de reacción  $c_1 = 0$ , mientras en el otro  $c_2 = 0$ .  $c_1$  y  $c_2$  serán muy pequeños en la zona de reacción (nulos para velocidad de reacción infinita) (fig. 8).

Se puede determinar la posición de la llama poniendo  $c_1 = \nu c_2$ .

Para valores suficientemente grandes de  $f_w$ , la zona de reacción estará en el interior de la capa límite, y por lo tanto, podrá escribirse una relación semejante a la (34):

$$-\nu c'_2(0) = 0,47 S c^{1/3} \sqrt[6]{1 + \alpha \beta} \Gamma [c_{1e} + \nu c_2(0)] \quad (35)$$

Esta relación, junto con las condiciones de contorno, determina  $c_2(0)$ .

La reacción tendrá lugar en la pared para valores de  $f_w$  menores que:

$$f_w = \frac{-0,47 S c^{-2/3} \frac{c_{1e}}{\nu} \sqrt[6]{1 + \alpha \beta}}{1 + 1,18 \left( \frac{S c}{1 + \alpha \beta} + 0,5 \right) 0,47 S c^{-2/3} \frac{c_{1e}}{\nu} (1 + \alpha \beta)^{2/3}}$$

donde:

$$f_w = - \sqrt{\frac{2x}{\rho_e \nu_e u_e}} (\rho \nu)_w,$$

para la placa plana y:

$$f_w = - \frac{(\rho \nu)_w}{\sqrt{2 \rho_e \nu_e \left( \frac{du_e}{dx} \right)_0}},$$

para el punto de remanso.

Existe una gran concordancia entre los valores obtenidos en el caso de la placa plana y los resultados numéricos dados en [31].

### 3.2. ESTRUCTURA INTERNA DE LA ZONA DE REACCIÓN.

Para reacciones suficientemente rápidas, los gradientes de concentración y temperatura, varían muy rápidamente en la estrecha zona de reacción. Por lo tanto, se pueden despreciar allí los efectos de convección y químicos [32], que son mucho más importantes.

Como ejemplo, escribiremos, dentro de la zona de reacción, las ecuaciones (12) y (14) en la forma siguiente:

$$g_{Tzz} = t_m \frac{Pr}{1 + \alpha \beta} \frac{q}{h_{fe}} \frac{w_2}{\rho}; \quad (36)$$

$$c_{2zz} = -t_m \frac{Pr}{1 + \alpha \beta} \frac{w_2}{\rho}, \quad (37)$$

de donde:

$$\frac{h_{fe}}{q} g_T + c_2 = A_{22} + A_{21} z_1,$$

e igualmente:

$$\frac{h_{fe}}{q} \nu g_T + c_1 = \nu A_{22} + A_{12} z_1,$$

donde  $z_1 = z - z_r$ ;  $z_r$  da la posición de la llama para velocidad de reacción infinita, y las constantes  $A$  se han elegido de modo que estas expresiones coincidan con las relaciones de semejanzas obtenidas para velocidad de reacción infinita. (Estas relaciones son válidas siempre que la reacción química haya terminado antes de alcanzar el borde exterior de la capa límite).

Si la velocidad de reacción es grande, las concentraciones serán pequeñas en la zona de reacción y la temperatura será próxima a su valor límite  $T_r$ . Podremos, por lo tanto, sustituir la ecuación (36) por:

$$g_T = -G \left( 1 + \frac{A_{21}}{A_{22}} z_1 - \frac{h_{fe}}{q A_{22}} g_T \right) \left( 1 + \frac{A_{12}}{\nu A_{22}} - \frac{h_{fe}}{q A_{22}} g_T \right), \quad (38)$$

donde:

$$G = t_m \frac{Pr}{1 + \alpha \beta} \frac{q}{h_{fe}} B \rho_r e^{-\frac{E}{RT_r}} A_{22}^2 \nu.$$

Introduciendo las variables:

$$\psi = \sqrt[3]{A} \left[ 1 - \frac{h_f e}{q A_{22}} g_r + \frac{A_{21} v + A_{12}}{2 v A_{22}} z_1 \right],$$

$$\xi = \sqrt[3]{A} \frac{A_{21} v - A_{12}}{2 v A_{22}} z_1,$$

donde:

$$A = 4 t_m \frac{P r}{1 + \alpha \beta} B \rho_r e^{-\frac{E}{R T_r}} \frac{v^3 A_{22}^3}{(A_{21} v - A_{12})^2}.$$

La ecuación (38) toma la forma:

$$\frac{d^3 \psi}{d \xi^3} = \psi^2 - \xi^2. \quad (39)$$

Esta ecuación se ha resuelto en [32]. Su solución aproximada se puede escribir en la forma siguiente:

$$\psi = [\xi^2 + 0,76 e^{-(0,67 \xi)^2}]^{1/2}.$$

En particular, para  $z_1 = 0$ , o sea, en el frente de llama ideal, podremos escribir:

$$g_T = g_{T_r} \left[ 1 - \frac{0,87}{\sqrt[3]{A}} \right], \quad (40)$$

o

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2_r = \left[ c_p T_r + \frac{1}{2} u^2_r \right] \left( 1 - \frac{0,87}{\sqrt[3]{A}} \right). \quad (41)$$

Esta relación entre  $T$  y  $A$  es válida para valores de  $A$  lo suficientemente grandes que hagan  $T$  próximo a  $T_r$ . En realidad  $T$  disminuye muy rápidamente y la llama se extingue, debido a los grandes valores de la energía de activación, cuando  $A$  se hace más pequeño que el valor correspondiente a  $T \approx 0,8 T_r$ .

Por lo tanto, se puede obtener un valor aproximado del parámetro  $A$  para el que se presenta la extinción, poniendo en la relación (41)  $T = 0,8 T_r$ . Si se desprecia  $u^2_r$ ;  $A_{ext} \approx 80$ .

La solución descrita proporciona las distribuciones de temperatura y concentración en el interior de la zona de reacción y se aproxima a la solución correspondiente a velocidad de reacción infinita en los bordes exteriores de dicha zona.

#### Referencias.

- VON KÁRMÁN, Th.: "Sorbonne Lectures", 1951-1952. Véase también "Aerothermochemistry" (informe basado en el curso dirigido por el Prof. Th. von

KÁRMÁN en la Universidad de París), por G. MILLÁN. INTA ARDC Contract No. AF 61 (514), 441, 1958.

- LI, T. Y.: "Recent Advances in Non-equilibrium Dissociating Gasdynamics", *ARS Journal*, vol. 31, número 2, febrero 1961, págs. 170-178.
- WONG, T. T.; GOODWIN, G., and SLVE, R. E.: "Motion and Heating during Atmosphere Reentry of Space Vehicles". NASA TN D-334, septiembre 1960.
- FREEMAN, N. C.: "Non-equilibrium Flow of and Ideal Dissociating Gas". *J. Fluid Mechanics*, vol. 4, parte 4, agosto 1958, págs. 407-425.
- DORRANCE, W. H.: "On the approach to Chemical and Vibrational Equilibrium Behind a Strong Normal Shock Wave". *J. Aerospace Sci.*, vol. 28, núm. 1, enero 1961, págs. 43-50.
- LIGHTHILL, M. J.: "Dynamics of a Dissociating Gas. Part 2. Quasiequilibrium Transfer Theory". *J. Fluid Mechanics*, vol. 8, part. 2, junio 1960, páginas 161-182.
- KIVEL, B.: "Radiation from Hot Air and its Effect of Stagnation-Point Heating". *J. Aerospace Sciences*, vol. 28, núm. 2, febrero 1961, págs. 96-107.
- BRUNNER, M. J.: "Aerodynamic and Radiant Heat Input to Space Vehicles which Re-Enter at Satellite and Escape Velocity". *ARS Journal*, vol. 31, número 8, agosto 1961, págs. 1.102-1.111.
- ESCHENROEDER, A. Q.: "Ionization Non-equilibrium in Expanding Flows". *ARS Journal*, vol. 32, número 2, febrero 1962, págs. 196-203.
- PROBSTEIN, R. F., and KEMP, N. H.: "Viscous Aerodynamic Characteristics in Hypersonic Rarefied Gas Flow". *J. Aerospace Sciences*, vol. 27, núm. 3, marzo 1960, págs. 174-192, 218.
- FERRI, A.; ZAKKAY, V., and LU TING: "Blunt Body Heat Transfer at Hypersonic Speed and Low Reynolds Numbers". *J. Aerospace Sciences*, vol. 28, número 12, diciembre 1961, págs. 962-971, 991.
- CHUNG, P. M.: "Hypersonic Viscous Shock Layer of Nonequilibrium Dissociating Gas". *NASA TR*, R-109, 1961.
- LIGHTHILL, M. J.: "Dynamics of a Dissociating Gas. Part. 1. Equilibrium Flow". *Journal Fluid Mechanics*, vol. 2, parte 1, enero 1957, págs. 1-32.
- CLARKE, J. F.: "Energy Transfer through a Dissociated Diatomic Gas in Couette flow". *J. Fluid Mechanics*, vol. 4 parte 5, septiembre 1958, páginas 441-465.
- FAY, J. A., y RIDDELL, F. R.: "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air". *J. Aeronautical Sciences*, vol. 25, núm. 2, febrero 1958, páginas 73-85, 121.
- CHUNG, P. M.: "A simplified Study on the Nonequilibrium Couette and Boundary Layer Flows with Air Injection". *NASA TN D-306*, febrero 1960.
- CHUNG, P. M., y ANDERSON, A. D.: "Heat Transfer around Blunt Bodies with Nonequilibrium Boundary Layer". *Proceeding of the 1960 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute*, Stanford University, 1960.

18. BURKE, S. P., and SCHUMANN, T. E. W.: "Diffusion Flames". *Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 20, número 10, págs. 998-1054, octubre 1928.
19. LÉES, L.: "Convective Heat Transfer with Mass Addition and Chemical Reactions" Third AGARD Combustion and Propulsion Panel Colloquium. Palermo, Sicily, marzo 17-21. *Pergamon Press*, 1958, págs. 441-498.
20. COHEN, C. B.; BROMBERG, R., and LIPKIS, R. P.: "Boundary Layer with Chemical Reactions Due to mass Addition" *Jet Propulsion*, vol. 28, núm. 10, octubre 1958, págs. 659-868.
21. BROMBERG, R., and LIPKIS, R. P.: "Heat Transfer in Boundary Layer with Chemical Reactions due to Mass Addition". *Jet Propulsion*, vol. 28, núm. 10, octubre 1958, págs. 668-674.
22. MOORE, J. A., y ZLOTNICK, M.: "Combustion in an Air Stream". *ARS Journal*, vol. 31, núm. 10, octubre 1951, págs. 1388-1397.
23. LÉES, L.: "Laminar Heat Transfer over Blunt-Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds". *Jet Propulsion*, vol. 26, núm. 4, abril 1956, págs. 259-269.
24. SCALA, S. M., y BAULKNIGHT, CH. W.: "Transport and Thermodynamic Properties of the Pure Species". *ARS Journal*, vol. 29, núm. 1, enero 1959, páginas 34-35.
25. KEMP, N. II.; ROSE, P. H., y DETRA, R. W.: "Laminar Heat Transfer around Blunt Bodies in Dissociated Air". *J. Aerospace Sciences*, vol. 26, número 7, julio 1959, págs. 421-430.
26. MOORE, F. K.: "On Local Flat-Plate Similarity in the Hypersonic Boundary Layer". *J. Aerospace Sciences*, vol. 28, núm. 10, octubre 1961, págs. 753-762.
27. MEKSYN, D.: "New Methods in Laminar Boundary-Layer Theory". *Pergamon Press*, 1961.
28. LIGHTILL, M. J.: "Contributions to the Theory of Heat Transfer through a Laminar Boundary Layer". *Royal Society of London*, vol. 202 A, páginas 359-377, 1950.
29. DEMETRIADES, S. T., y FARBER, M.: "Theoretical Study of Recombination Kinetics of Atomic Oxygen". *ARS Journal*, vol. 29, núm. 7, julio 1959, páginas 528-530.
30. GOULARD, R.: "On Catalytic Recombination Rates in Hypersonic Stagnation Heat Transfer", *Jet Propulsion*, vol. 28, núm. 11, noviembre 1958, páginas 737-745.
31. ECKERT, E. R. G., y HARNEY, J. B.: "Einfluss eines Worbrennungsvorganges auf den Wärme- und Stoffaustausch in einer laminaren Grenzschicht". *ZAMP*, vol. IX, b, marzo 1958, págs. 259-273.
32. LIÑAN, A.: "On the Internal Structure of Laminar Diffusion Flames". O S R / E O A R T N 62-64 INTAET. Madrid, 1961.

