

## Determinación de las tensiones en las cabezas de anclaje.

José Domínguez Abascal y

Enrique Alarcón Álvarez

Cátedra de Estructuras de la E.T.S.I. Industriales de Madrid

### INTRODUCCION

El problema de la concentración de tensiones en las proximidades de las cabezas de anclaje ha sido tratado utilizando diversos procedimientos basados en la teoría de la elasticidad, tanto en el caso de anclajes en bloques extremos de vigas pretensadas (1 a 3), como en

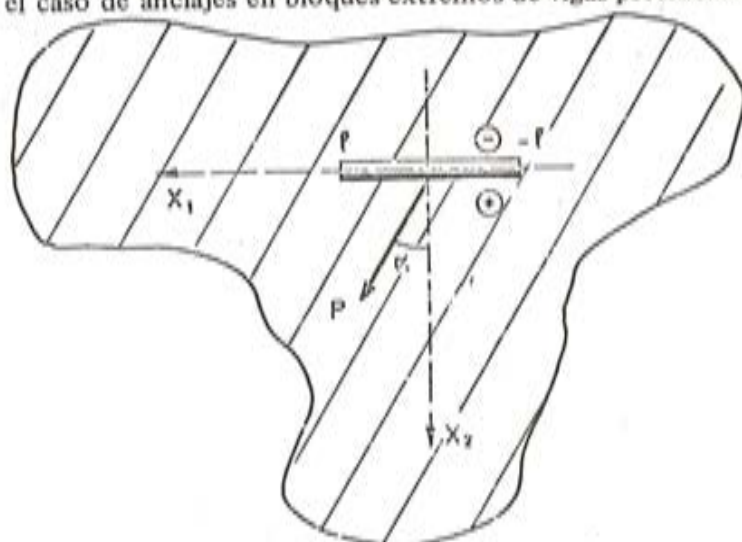


Fig. 1. Fisura semi-rígida cargada.

anclajes pasivos incluidos dentro del material, ya sea este hormigón o suelo en el caso de tablestacas (4). Los procedimientos más utilizados envuelven un elevado grado de aproximación ante la necesidad de reducir un problema de esta complejidad a los niveles normales en la ingeniería.

La distribución de tensiones también ha sido estudiada basándose en resultados obtenidos mediante experiencias fotoelásticas (3).

El presente trabajo analiza el problema bajo dos ópticas diferentes:

- Primero un estudio analítico de las tensiones en las proximidades de un anclaje sumergido dentro de un medio cuyos contornos libres se encuentran alejados de él.

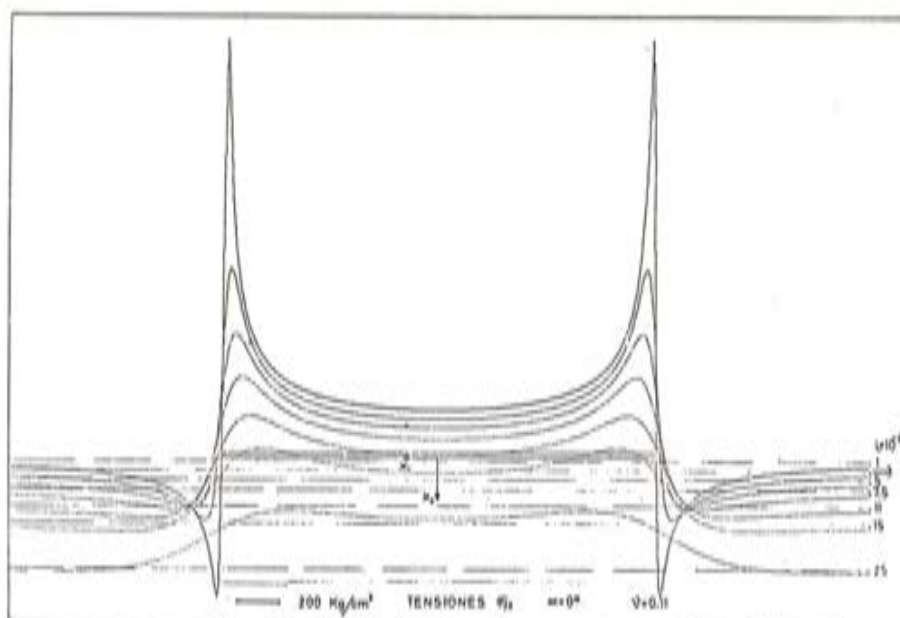


Fig. 2.

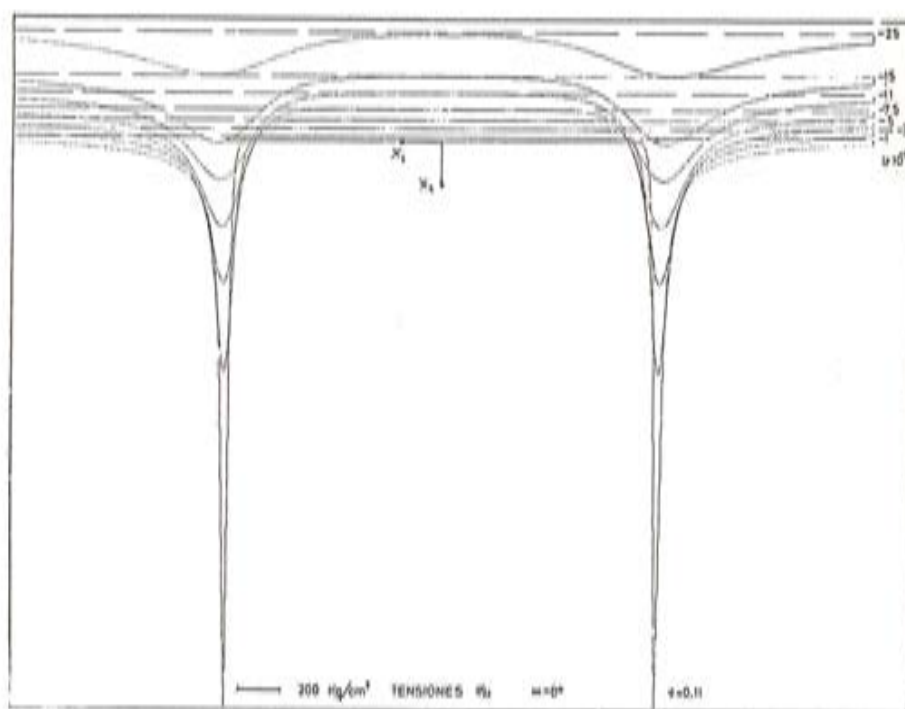


Fig. 3.

El procedimiento utiliza la teoría de los potenciales complejos de Muskhelishvili (5) en elasticidad plana y generaliza los resultados obtenidos por aquél; incluyéndose aquí el caso en que la carga transmitida por el cable a la placa de anclaje no lo sea según la dirección normal a esta. La placa ha de suponerse perfectamente rígida y de espesor despreciable frente a su anchura.

- En segundo lugar se estudia el problema utilizando un método numérico, el Método de los Elementos de Contorno, que hace posible la obtención de la solución no sólo en tensiones sino en desplazamientos y permite tener en cuenta el espesor real de la placa de anclaje, la existencia de bordes libres próximos a un anclaje incluido en el material o el caso de anclajes en los bloques extremos de vigas.

El método de los elementos de contorno está siendo objeto de atención en los últimos

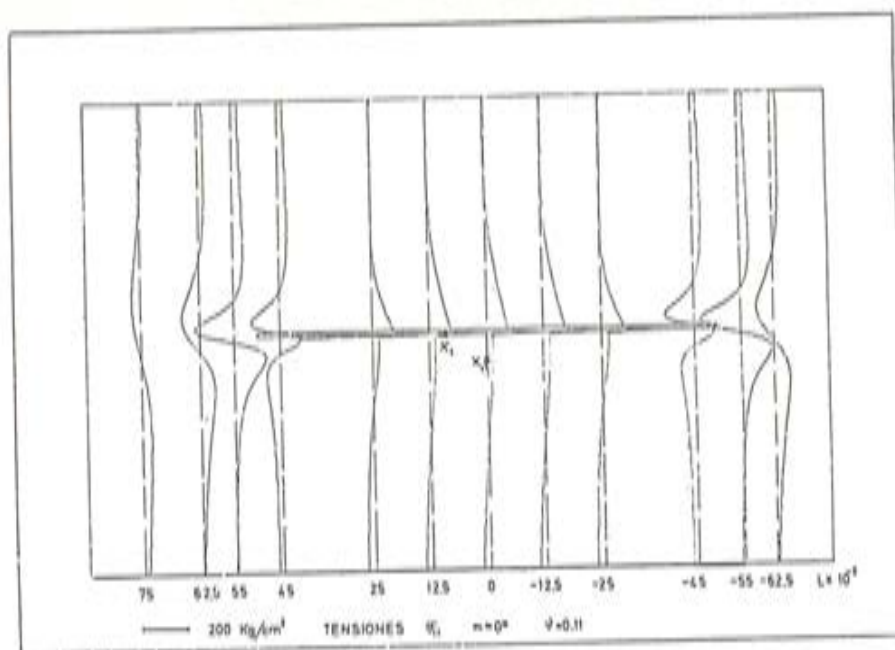


Fig. 4.

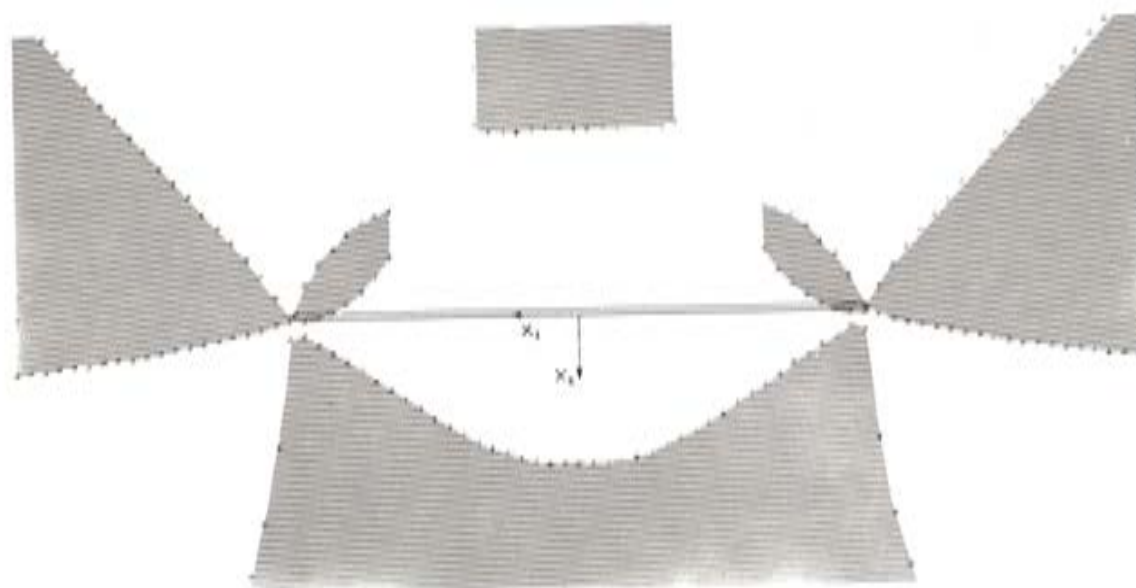


Fig. 5. Zonas de secciones transversales.  $\alpha = 0^0$   $\nu = 0,11$

años por parte de investigadores de muchos países (6 a 8) y sus características lo hacen muy indicado frente al método de los Elementos Finitos para problemas como este donde existen zonas de concentración de tensiones o grandes zonas que modelar.

### SOLUCION ANALITICA EN EL PLANO COMPLEJO

El estudio analítico del medio alrededor del anclaje requiere la idealización de él según la forma de la figura 1. El problema es estudiado como plano y placa de anclaje representada por una línea que va de  $-1$  a  $+1$  y cuyo borde inferior  $\oplus$  se desplaza con un valor constante a lo largo de su longitud, ante la acción de la carga  $P$ .

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de un medio elástico plano e infinito son establecidas en forma compleja y haciendo uso de los potenciales de Muskhelishvili (5). So-

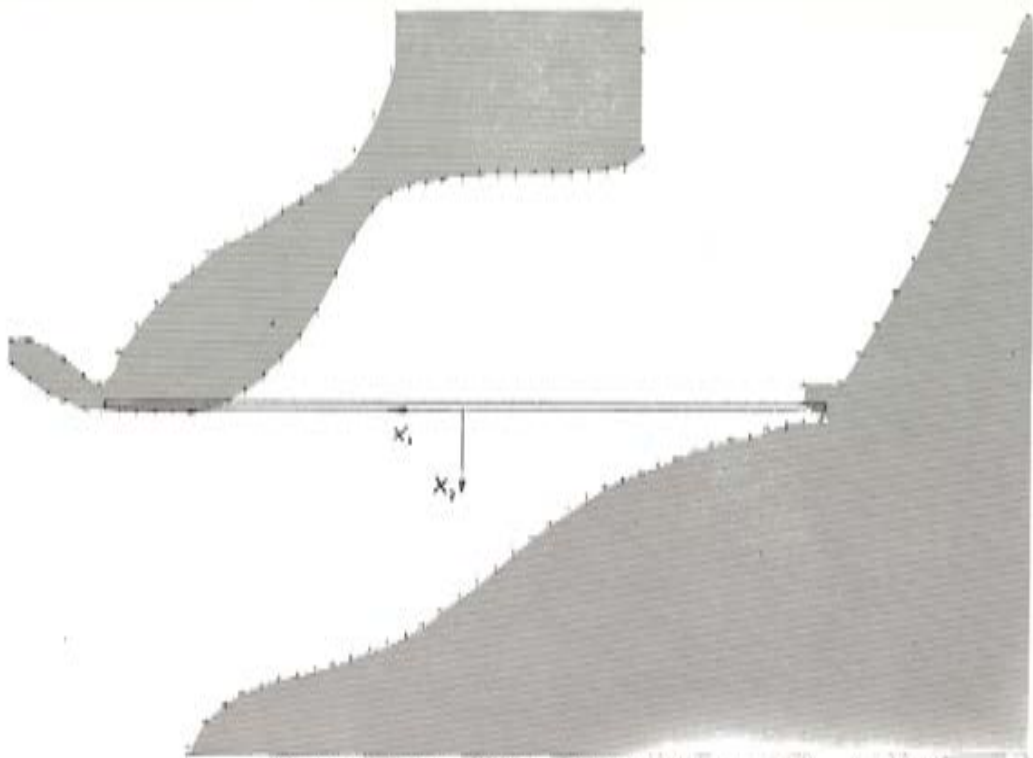


Fig. 6. Zonas de tracciones transversales  $\alpha = 20^\circ$   $\nu = 0,11$

bre ellas son aplicadas las condiciones de la placa de anclaje; y en función de las componentes de  $P$  según las direcciones normal y tangencial a la fisura son obtenidas las tensiones en

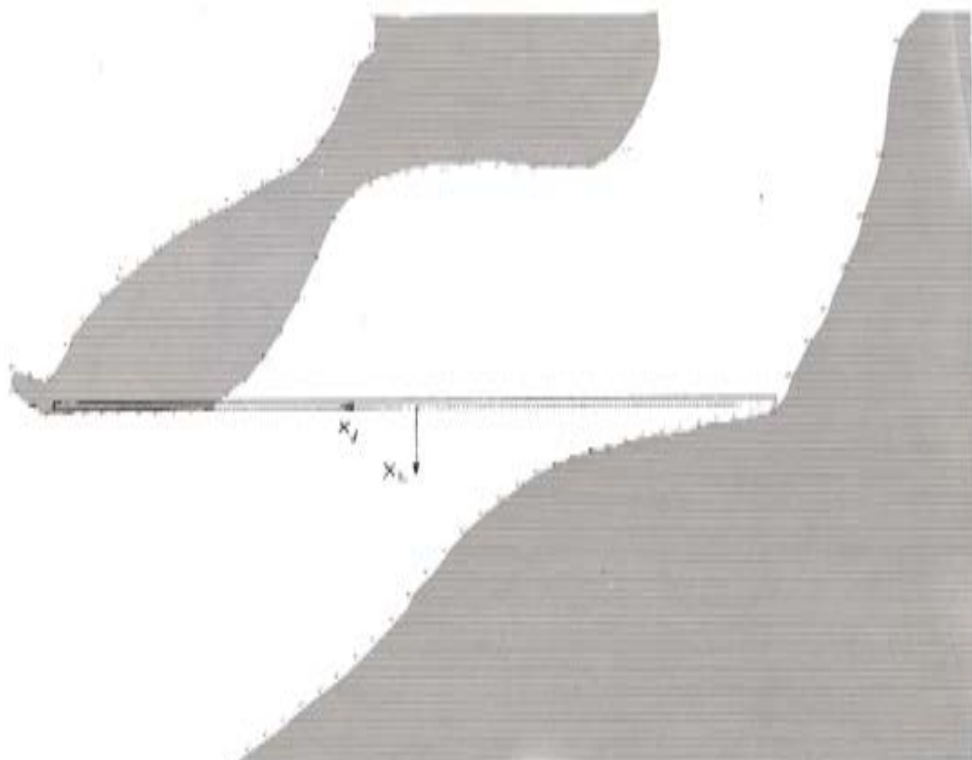


Fig. 7. Zonas de tracciones transversales  $\alpha = 30^\circ$   $\nu = 0,11$

cualquier punto del plano (9). Esta solución analítica se exploró aquí con el fin de obtener las ecuaciones de un elemento de plano dentro del cual hay una fisura semirígida y que pueda ser acoplada a otros elementos para el eventual estudio por un método numérico de

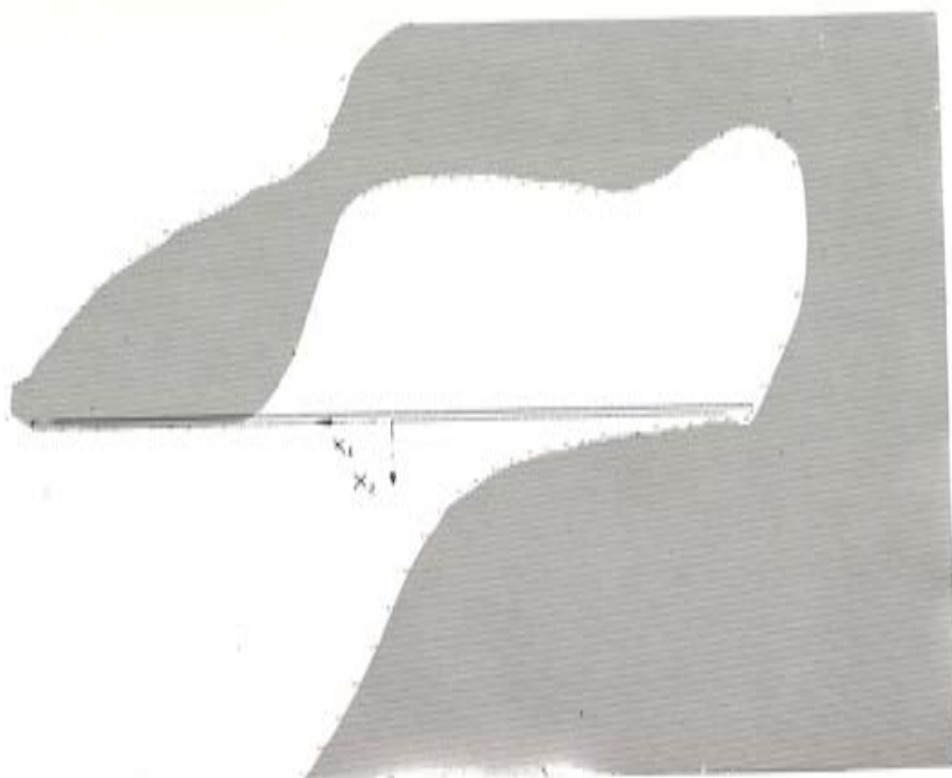


Fig. 8. Zonas de tracciones transversales  $\alpha = 45^\circ$   $\nu = 0,11$

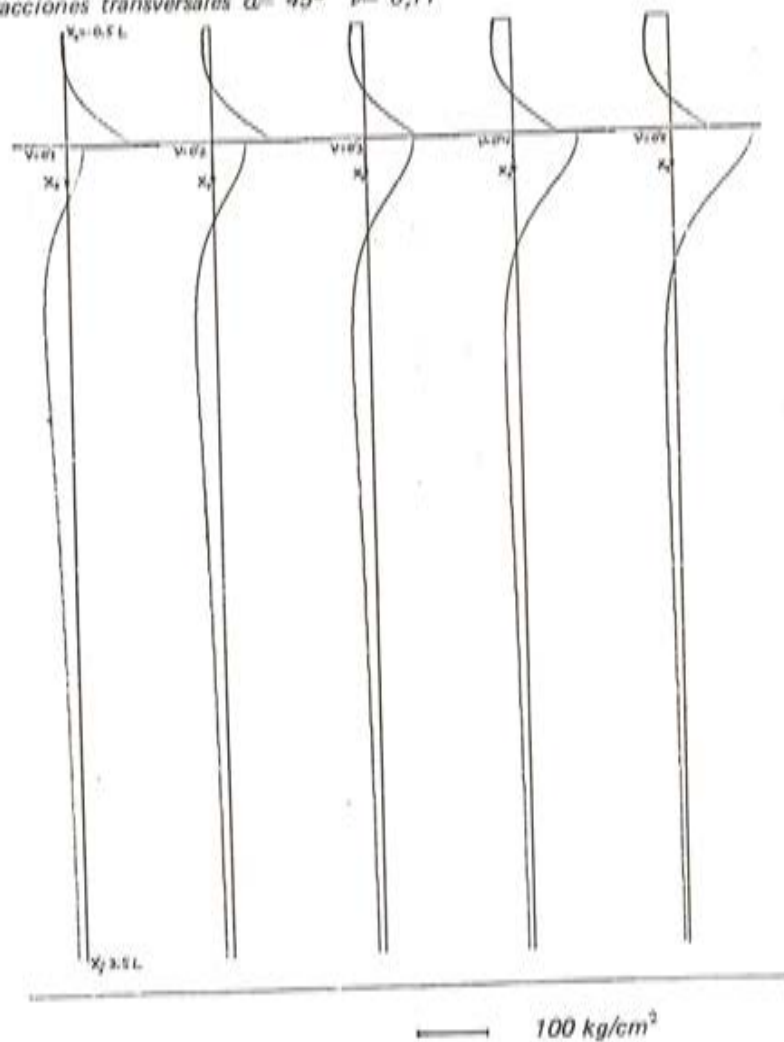


Fig. 9. Tensiones  $\delta_{11}$   
en la línea  $X_1 = 0$ .

un cuerpo que tenga dentro de sí la fisura. La solución obtenida queda indeterminada en movimientos lo que la hace inútil para tal propósito; sin embargo la solución en sí reviste interés y además ha sido utilizada como referencia para comparar con los resultados obtenidos mediante el Método de los Elementos de Contorno.

La figura 2 representa las tensiones  $\sigma_{22}$  obtenidas mediante la solución analítica en siete planos situados bajo la fisura cuando P está dirigida según la normal a la placa. Cada tensión está referida al plano a que corresponde como eje de abscisas. La figura 3 corresponde a planos por encima de la placa y la 4 a las tensiones  $\sigma_{11}$  para planos normales a la fisura. La figura 5 representa rayadas las zonas donde las tensiones  $\sigma_{11}$  son de tracción. En las figuras 6 a 8 se representan estas zonas para diversos ángulos formados por la carga P. La figura 9 representa la variación de las tensiones  $\sigma_{11}$  a lo largo del eje  $X_2$  cuando varía el módulo de Poisson.

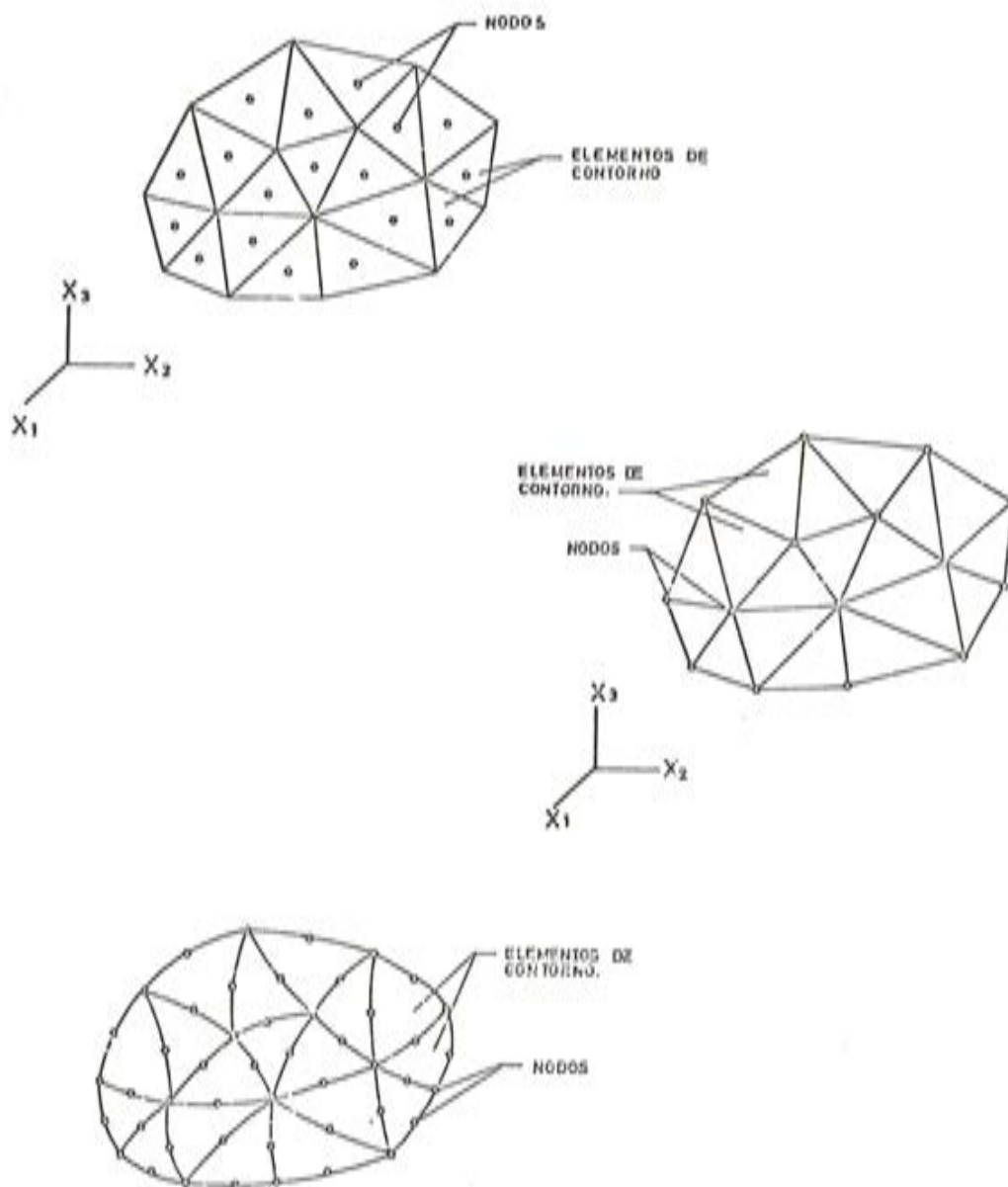


Fig. 10. Cuerpo tridimensional.

## SOLUCION NUMERICA MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

El método de los elementos de contorno puede ser formulado en elasticidad en su forma más intuitiva partiendo del teorema de reciprocidad de Betti-Maxwell entre dos estados, uno el real  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $u_i$ , y otro virtual  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\epsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ; siendo además  $b_i$ ,  $b_i^*$  y  $t_i$ ,  $t_i^*$  las cargas por unidad de volumen y las tracciones sobre el contorno respectivamente.

$$\int_S t_i u_i^* ds + \int_{\Omega} b_i u_i^* dv = \int_S t_i^* u_i ds + \int_{\Omega} b_i^* u_i dv$$

Suponiendo que las fuerzas  $b_i$  son nulas y que el estado virtual es el correspondiente a una carga unidad concentrada en un punto P (problema de Kelvin) la ecuación fundamental puede ser escrita para el punto P en la forma:

$$u_j^P + \int_S t_i^* u_i ds = \int_S t_i u_i^* ds$$

Esta ecuación expresa el desplazamiento en cualquier punto en función de los desplazamientos y tracciones en el contorno S del cuerpo. Si el punto P se encuentra sobre el contorno, las integrales a través del contorno S, incluyen un punto singular y la ecuación después de excluir este punto de las integrales puede ser escrita de la forma:

$$\frac{1}{2} u_i^P + \int_S t_i^* u_i ds = \int_S t_i u_i^* ds$$

donde  $P \ni S$  y S es suave en el punto P.

La ecuación anterior establece una relación entre tracciones y desplazamientos en el contorno S. Las condiciones de contorno siempre nos darán una de estas dos variables en cada punto y por tanto se podrá determinar la otra.

La ecuación integral anterior puede transformarse en un sistema de ecuaciones que relaciona desplazamientos y tracciones en puntos del contorno, si se considera este discretizado en elementos (figura 10) y ambas variables aproximadas en cada elemento por sus valores nodales. En cada nodo podrá ser entonces establecida la relación que da el desplazamiento según una coordenada del nodo, en función de los desplazamientos y tracciones en todos los nodos del contorno. Actuando así se obtiene un sistema de la forma:

$$\underline{G} \cdot \underline{t} = \underline{H} \cdot \underline{u}$$

donde  $\underline{t}$  y  $\underline{u}$  son los vectores de tracciones y desplazamientos en los nodos y  $\underline{G}$  y  $\underline{H}$  son unas matrices cuadradas cuyos términos se obtienen por integración a través de los elementos de la solución de Kelvin para el caso en que la carga concentrada unidad se va aplicando sobre cada una de las coordenadas de los nodos del contorno.

En cualquier problema son conocidas las tracciones o desplazamientos en todos los nodos y por tanto el sistema puede ser escrito en forma:

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{X} &= \underline{B} \cdot \underline{Y} \\ \underline{A} \cdot \underline{X} &= \underline{F} \end{aligned}$$

donde en  $X$  se han introducido todas las incógnitas y en  $Y$  todos los valores conocidos.  $\underline{A}$  y  $\underline{B}$  son obtenidas a partir de  $\underline{G}$  y  $\underline{H}$  por intercambio de columnas.

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones y conocidas tracciones y desplazamientos sobre todo el contorno, el desplazamiento en cualquier punto interno del cuerpo puede ser obtenido a partir de la ecuación fundamental que para el caso del contorno discretizado queda en la forma:

$$\underline{u}^p = \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{S_n} \underline{t}^n \underline{u}^n ds - \int_{S_n} \underline{u}^n \underline{t}^n ds \right\}$$

y donde  $\underline{t}$  y  $\underline{u}$  serán expresados en función de sus valores nodales.

Las tensiones en cualquier punto interno son obtenidas por una expresión similar deducida de la anterior por derivación:

$$\sigma_{ij}^p = \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{S_n} D_{ij}^n \underline{u}^n ds - \int_{S_n} S_{ij}^n \underline{t}^n ds \right\}$$

donde  $D_{ij}$  y  $S_{ij}$  son obtenidos directamente por derivación de los desplazamientos  $\underline{u}$  de la solución fundamental<sup>1</sup>.

El estudio del problema de los anclajes se ha hecho utilizando este método. El primer problema estudiado ha sido el de una placa rígida sometida a una carga  $P$ , normal o no a ella, e incluida dentro de un material cuyos contornos exteriores se encuentran alejados del anclaje. El problema se ha estudiado en dos dimensiones y la placa, cuyo espesor es un décimo de su longitud, ha sido modelada con setenta y cuatro elementos (figura 11) en los que se supone que el desplazamiento y resultante de tensiones toman un valor constante igual al valor en el nodo supuesto en su punto medio.

Se aplican unas condiciones de contorno de desplazamiento constante en el borde inferior cargado y resultante de tensiones nula en los otros tres lados del rectángulo.

Con las condiciones anteriormente citadas se han obtenido unas tensiones, cuya componente  $\sigma_{22}$  se dibuja en la figura 12 en dos planos por debajo de la placa y en el caso de que esta se encuentre cargada según su normal. Como comparación se han dibujado también los valores que se obtuvieron por el procedimiento analítico en estos mismos planos. Hemos de considerar que el problema resuelto ahora difiere del analítico en que el espesor toma un valor finito de un décimo de la longitud. No obstante esto no influye prácticamente en las tensiones en la zona por debajo de la placa. Por el contrario si dibujamos las tensiones  $\sigma_{22}$



Fig. 11. Discretización del contorno de la placa de anclaje.

<sup>1</sup> Una más amplia exposición del método para problemas elásticos puede ser encontrada en referencias (8 y 9).



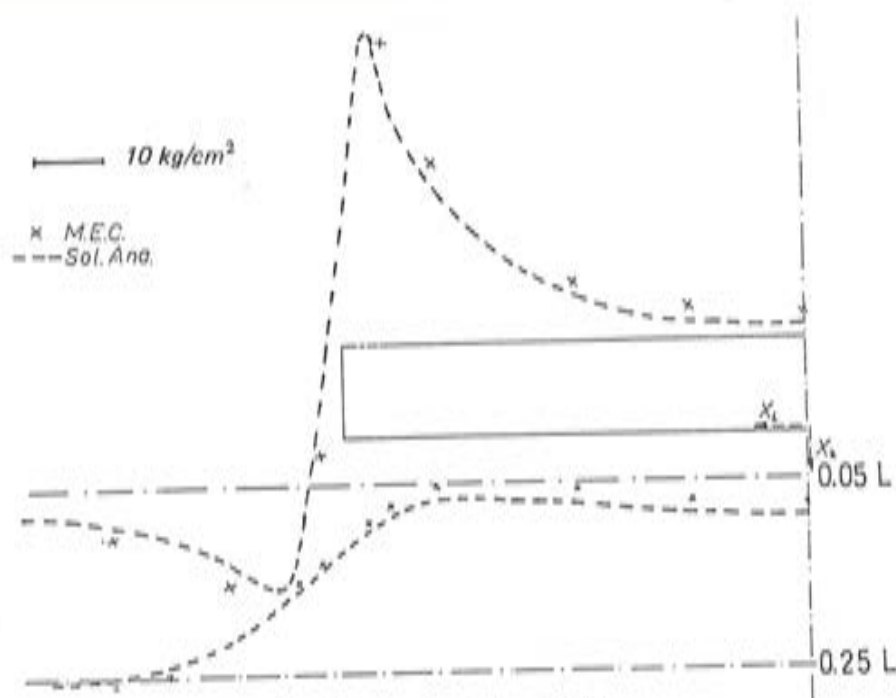


Fig. 12. Tensiones  $\delta_{22} \alpha=0^\circ$

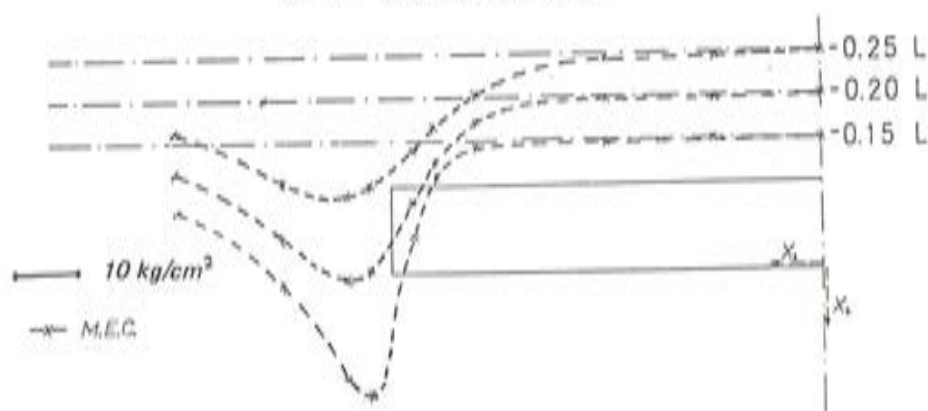


Fig. 13. Tensiones  $\delta_{22} \alpha=0^\circ$

en planos por encima de la placa la comparación es aquí más difícil ya que estas tensiones están muy influenciadas tanto por el borde cargado como por la proximidad de borde libre de tensiones y estos dos, en el caso de la solución analítica, estaban a la misma distancia del plano considerado pero cuando se considera un cierto espesor de la placa no lo están.

Teniendo en cuenta las diferencias geométricas se puede ver que las curvas de la figura 13 tienen la misma forma que las de la figura 3 y sus valores, para cada plano por encima de la placa, están comprendidos entre los valores que allí se obtendrían para planos que distasen a la fisura lo que los aquí considerados al borde inferior y al borde superior de la placa respectivamente.

En la figura 14 pueden verse los valores de las tensiones  $\sigma_{11}$  en planos transversales a la placa de anclaje cuando la carga es normal a ella. En la zona positiva del eje  $X_2$  se han dibujado también los valores obtenidos mediante la solución analítica. La Figura 15 representa la influencia del módulo de Poisson sobre el punto de  $\sigma_{11} = 0$  en la zona positiva de  $X_2$ .

Cuando existe un contorno libre de tensiones próximo a la placa de anclaje este influye sobre la variación de tensiones en la zona próxima al anclaje. En la figura 16 se ve la discre-

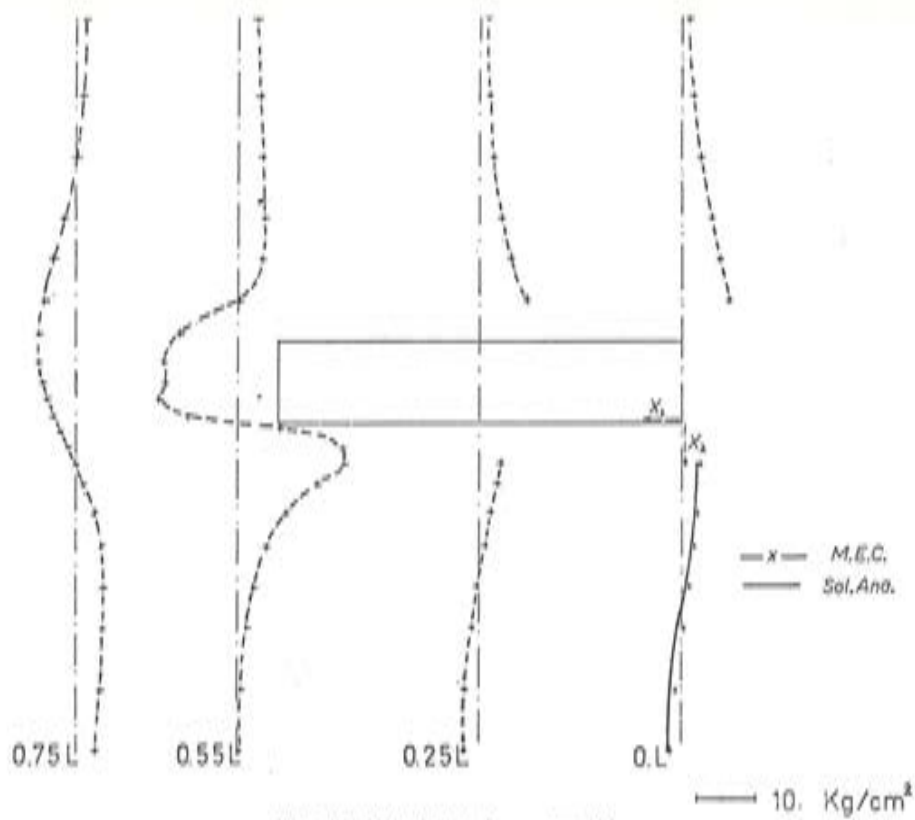


Fig. 14. Tensiones  $\delta_{11}$ ,  $\alpha = 0^\circ$

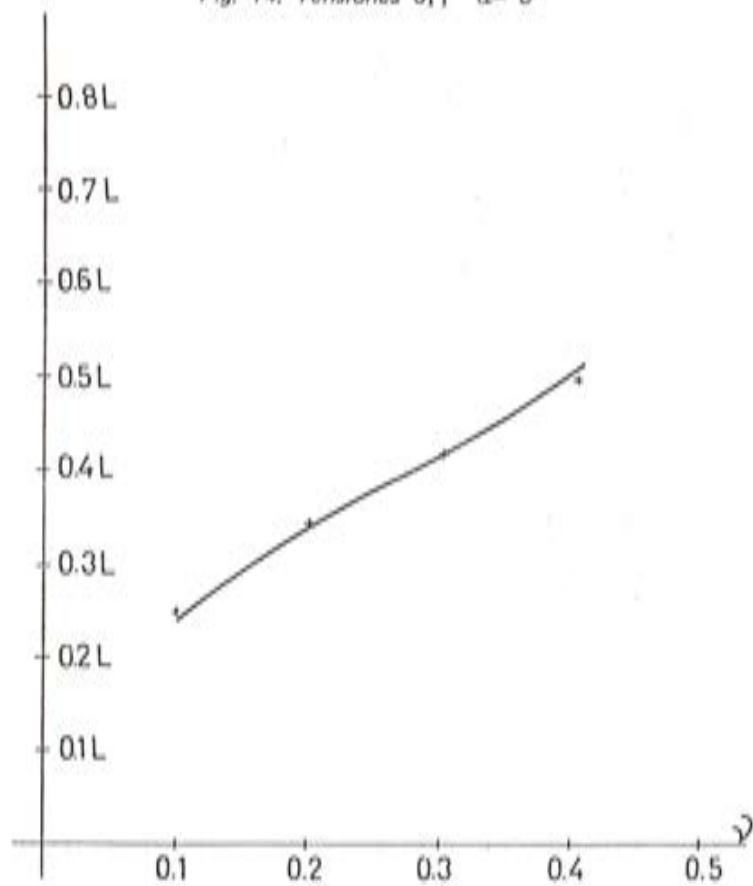


Fig. 15. Influencia de  $\nu$  sobre la distancia del punto  $\delta_{11} = 0$  al eje  $X_1$

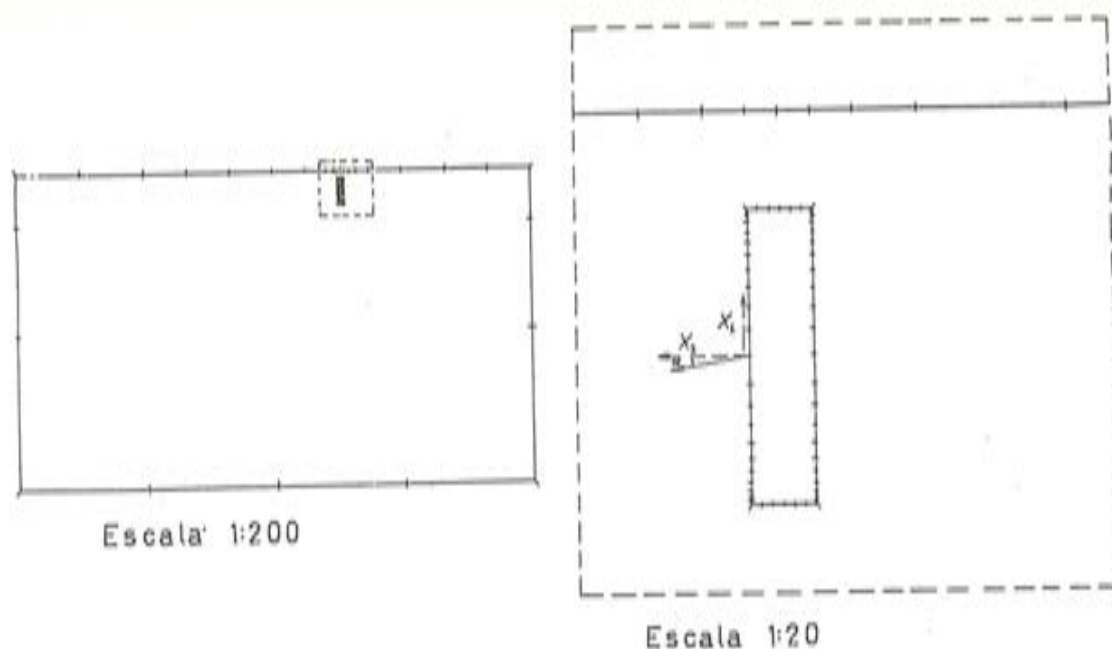


Fig. 16. Discretización del contorno. Anclaje superficial.

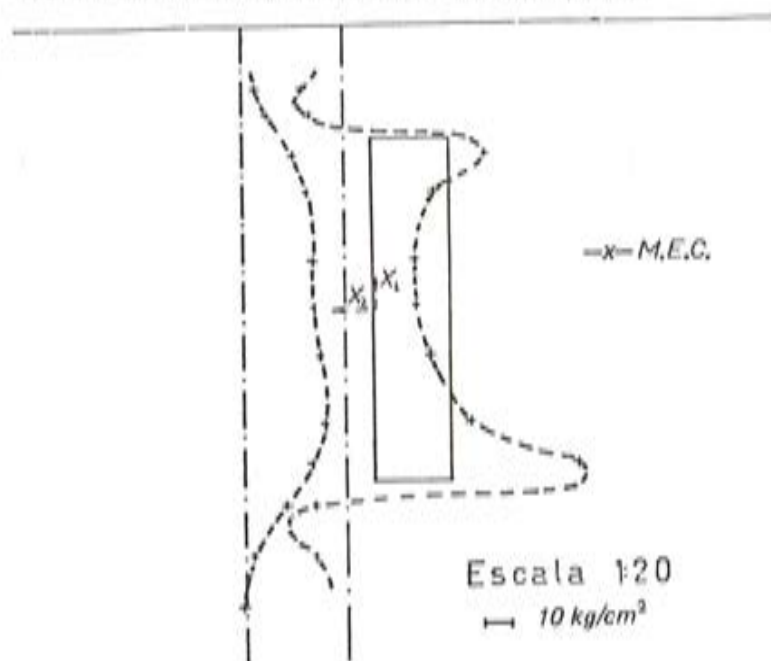


Fig. 17. Tensiones  $\sigma_{22}$  a  $O'$

tización utilizada para este problema y en la figura 17 las tensiones  $\sigma_{22}$  en dos planos de la zona bajo la carga. Se puede apreciar como la presencia del borde libre hace que la distribución de tensiones bajo la placa no sea ya simétrica respecto de  $X_2$ . La figura 18 representa las mismas tensiones en los mismos planos pero cuando el borde libre se encuentra más alejado de la placa, con lo cual su influencia prácticamente ha desaparecido.

Dada la generalidad del procedimiento, este puede ser empleado para obtener la solución de otros problemas más particulares y así en el caso del anclaje en la cabeza de una viga se puede obtener la solución del problema en tensiones y desplazamientos suponiendo una discretización del contorno del tipo de la figura 19. Aplicando un desplazamiento uniforme a toda la placa, se obtienen las tensiones principales que se han dibujado en la figura 20. La magnitud del segmento es proporcional al valor de la tensión y su dirección la de aquella.

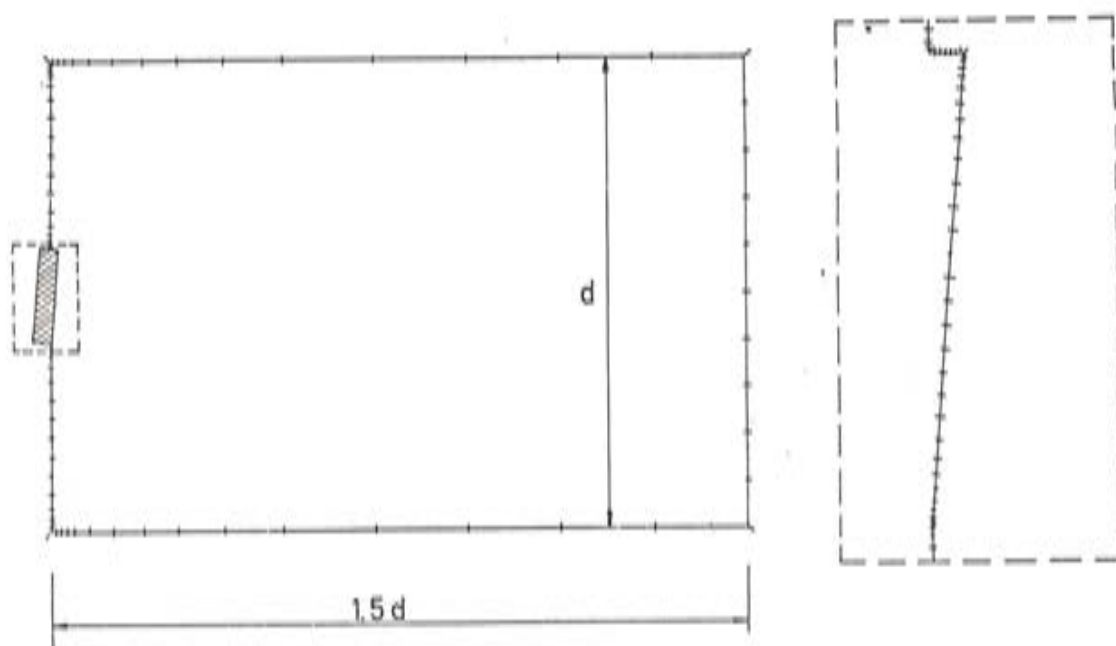
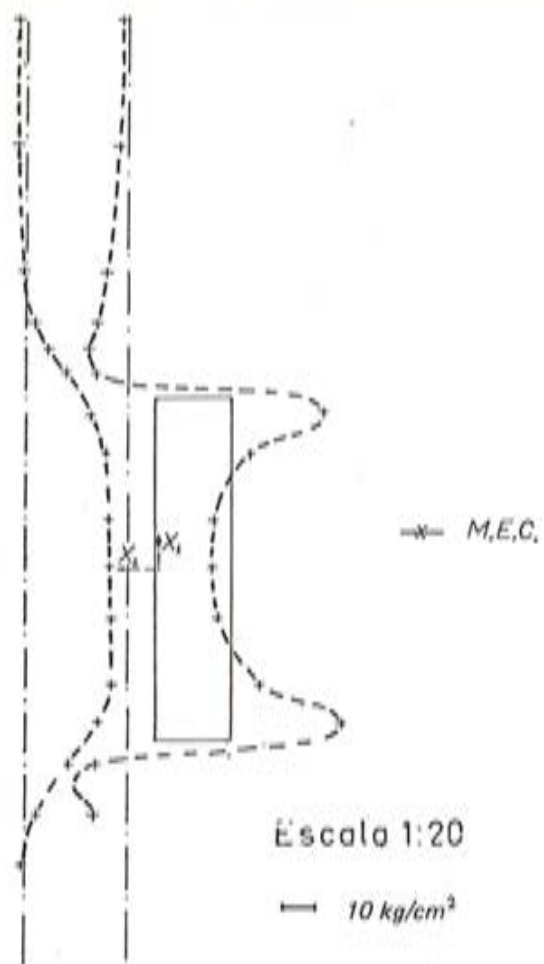


Fig. 19. Discretización del contorno. Anclaje de pretensado.

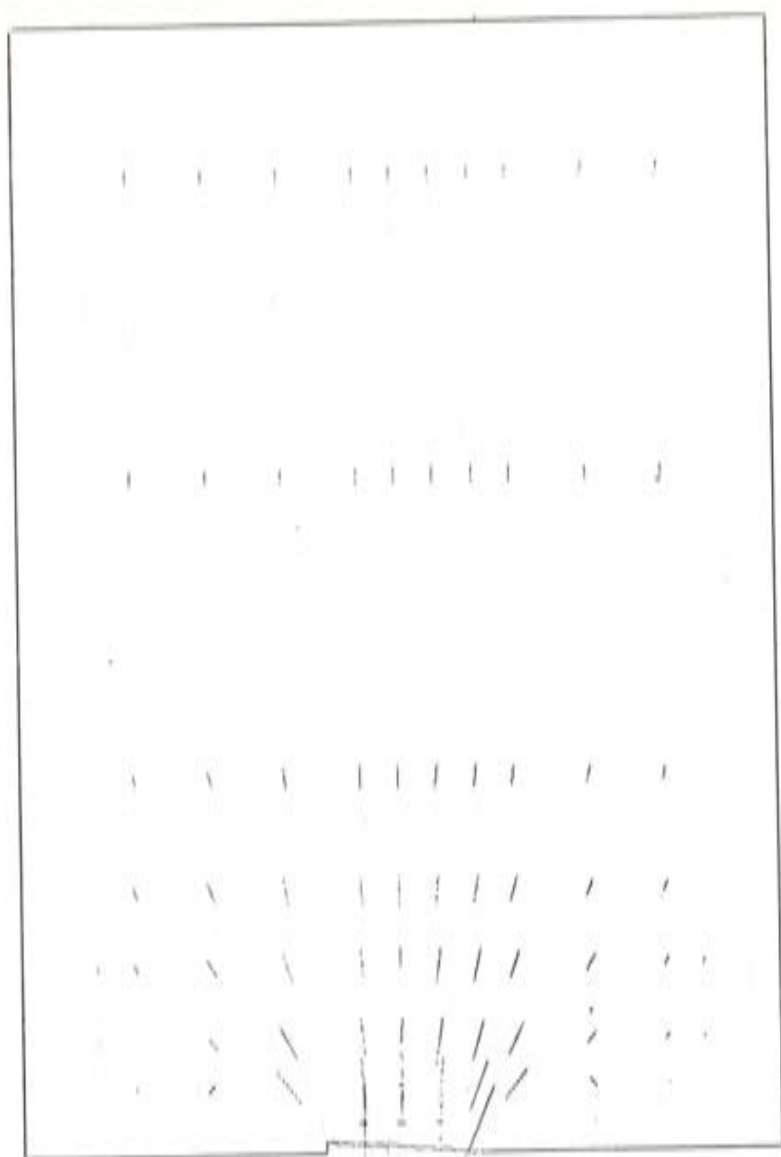


Fig. 20. Un anclaje sin apoyo.

Estos resultados están en buen acuerdo con los ensayos fotoelásticos de Sargious (3).

Otras situaciones con mayor número de anclajes y un apoyo próximo al extremo de la viga pueden ser estudiadas con el Método de los Elementos de Contorno. En general el método resulta adecuado para este tipo de problemas dada la posibilidad de modelar cualquier configuración particular y la adecuada precisión de los resultados obtenidos.

#### REFERENCIAS

1. MAGNEL, G. "Prestressed Concrete". Londres. Concrete Publications (1950)
2. GUYON, Y. "Hormigón Precomprimido". Traducción al castellano del original de 1957. Madrid. Dossat S.A.
3. LEONHARDT, F. "Hormigón Pretensado". Instituto Eduardo Torroja. Madrid (1967).
4. SELVADURAI, A.P.S. "The Load-Deflexion Characteristics of a Deep Rigid Anchor in an Elastic Medium". Geotechnique 26, No. 4 (1976).

5. MUSKHELISHVILI, N.I. "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", (traducción inglesa del ruso). Groningen. Noordhoff (1953).
6. RIZZO, F.J. "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. Q. Appl. Math. 25, 83 (1967).
7. CRUSE, T.A. "Application of the Boundary-Integral Eq. Method to 3-D Stress Analysis". J. Comp. And Struct. Vol. 3 (1973).
8. ALARCON, E., BREBBIA, C.A. y DOMINGUEZ, José. "The Boundary Element Method in Elasticity". International Journal of Mechanical Sciences (1978).
9. DOMINGUEZ, José. "Cálculo de tensiones en las inmediaciones de anclajes aplicación del método de los Elementos de Contorno". Tesis E.T.S.I. Industriales de Sevilla (1977).
10. DOMINGUEZ, José., ALARCON, E. "Análisis Elástico del Estado Tensional en las Inmediaciones de Anclajes Pasivos. Primeras Jornadas Ibero-Latinoamericanas de Hormigón Pretensado. Buenos Aires (Octubre 1977).