

AMORTIGUACION DE LAS OSCILACIONES DE PRESION PRODUCIDAS POR EL GOLPE DE ARIETE

P. de Assas y A. Liñán
 Dep. de Termodinámica Dep. Mec. de Fluidos
 E.T. Superior de Ingenieros Aeronáuticos
 Universidad Politécnica de Madrid

Resumen. Cuando se cierra una válvula en un conducto por el que circula un fluido se originan oscilaciones de presión de tipo golpe de ariete, que se mantendrían indefinidamente, después del cierre si despreciásemos los efectos de fricción.

En este trabajo se muestra cómo puede describirse el proceso de amortiguamiento utilizando el método de escalas múltiples, ya que el tiempo característico de amortiguamiento es mucho más grande que el período de la oscilación, igual a dos veces el tiempo de ida y vuelta de las ondas.

Se encuentra, por ejemplo, que la presión en la válvula es una función oscilatoria lentamente amortiguada; la evolución durante el tiempo de amortiguamiento de esta función oscilatoria, viene dada por una ecuación integrodiferencial que se resuelve analíticamente para los casos de cierre rápidos y numéricamente en casos más generales.

1. INTRODUCCION

Las pérdidas por fricción en el fenómeno del golpe de ariete no fueron tenidas en cuenta en el análisis de este fenómeno por los primeros investigadores del mismo; bien por considerarlas pequeñas, bien por no tener un método apropiado de cálculo.

Los primeros métodos utilizados para estimar las pérdidas por fricción eran inadecuados, ya que se basaban en aproximaciones poco reales: unos en la resolución gráfica de las ecuaciones sin los términos de fricción, y teniendo en cuenta las pérdidas por fricción modelándolas mediante obstáculos hipotéticos en determinadas secciones del conducto; otros en soluciones analíticas pero suponiendo que las pérdidas por fricción son lineales con la velocidad. Sin embargo, el término de pérdidas por fricción varía con la velocidad de modo aproximadamente cuadrático y sólo con ayuda de los ordenadores fué posible la resolución directa de las ecuaciones del golpe de ariete, sin necesidad de linealizar el término de fricción, utilizando el método de las características [9].

Si prestamos atención al fenómeno del golpe de ariete, vemos que en él intervienen dos escalas de tiempo muy diferentes: una asociada al tiempo de propagación de las ondas en el conducto, de longitud L, L/c , y otro asociado al tiempo de residencia, L/v_c , del líquido en el conducto, que es a su vez el tiempo característico de amortiguamiento de las oscilaciones. Estas escalas son muy dispares, pues la velocidad típica del fluido, v_c , es muy pequeña frente a la velocidad c de propagación de las ondas en el conduc-

to. Por esta razón, en el presente trabajo utilizamos el método de escalas múltiples para describir las oscilaciones [6]. La utilización de escalas múltiples permite calcular de un modo simplificado, por una parte las oscilaciones de presión generadas en el golpe de ariete y, por otra, la amortiguación de estas oscilaciones por efecto de la fricción [2].

2. ECUACIONES

Para ilustrar el procedimiento de análisis de los efectos de la fricción en las oscilaciones de fluidos en conductos, nos ocuparemos aquí del análisis del flujo transitorio que se produce cuando se cierra una válvula en el extremo de un conducto, que por simplificación supondremos horizontal, de longitud L, diámetro equivalente D, y sección inicial A_0 ; y que está alimentado por un depósito donde se mantiene la presión P_0 constante.

Utilizaremos las variables adimensionales:

$$x = \frac{x'}{L}, \quad t = \frac{t'}{L/c}, \quad v = \frac{v'}{v_c}, \quad p = \frac{P' - P_a}{\rho_0 v_c C},$$

siendo v_c la velocidad inicial del fluido en el conducto, c la velocidad de propagación de las ondas definida más abajo y ρ_0 la densidad del líquido a la presión ambiente P_a .

Las ecuaciones que describen el movimiento de un líquido, con la aproximación hidráulica, son:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon \left[v \frac{\partial p}{\partial x} + B p \frac{\partial p}{\partial t} \right] = 0 (\epsilon^2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon \left[v \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha p \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\epsilon}{2} f v |v| = 0 (\epsilon^2) \quad (2)$$

donde el parámetro $\epsilon = v_c/c$ toma valores muy pequeños, lo que justifica nuestro análisis asintótico y f es un parámetro proporcional al coeficiente λ de Darcy, que nos mide la fricción en el conducto: $f = \lambda L/D$.

La densidad ρ y el área A , que se suponen funciones sólo de la presión, se han sustituido por ser pequeñas sus variaciones relativas respecto a sus valores iniciales ρ_0 y A_0 a la presión ambiente, por sus desarrollos en torno a P_a :

$$A(p) = A_0 \left[1 + \frac{p-p_a}{P_{c1}} + \beta_1 \left(\frac{p-p_a}{P_{c1}} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\rho(p) = \rho_0 \left[1 + \frac{p-p_a}{P_{c2}} + \beta_2 \left(\frac{p-p_a}{P_{c2}} \right)^2 + \dots \right]$$

caracterizando las variaciones de A y ρ con las presiones características p_{c1} y p_{c2} , siendo $p_{c1} = (E \cdot e)/D$ (E es el módulo de elasticidad del material del tubo y " e " el espesor de la pared del tubo) y $p_{c2} = \rho_0 c_0^2$, donde c_0 es la velocidad del sonido en el líquido. De forma que $c^2 = p_c/\rho_0$ siendo $p_c^{-1} = p_{c1}^{-1} + p_{c2}^{-1}$; y si escribimos $p_{c1} = p_c/(1-\alpha)$ y $p_{c2} = p_c/\alpha$, resulta

$$B = \alpha^2 (2\beta_2 - 1) + (1-\alpha)^2 (2\beta_1 - 1).$$

Los segundos miembros de (1) y (2) representan términos de orden ϵ^2 respecto a los términos del primer miembro, que no describimos pues no intervienen en el orden de aproximación con que describimos la solución.

Las ecuaciones (1) y (2) han de complementar se con unas condiciones iniciales y de contorno apropiadas. Como condiciones iniciales han de darse los valores de la velocidad y presión en el conducto en $t=0$, $v = v_1(x)$, $p = p_1(x)$ que tomaremos como las distribuciones correspondientes al régimen estacionario.

Las condiciones de contorno se obtienen analizando para la entrada el proceso a través de la toma del conducto y a la salida del análisis del flujo en la válvula de área efectiva de salida $A_s(t)$. Para el estudio de estas zonas se supondrá el proceso casi-estacionario en ellas, y se tendrá en variables adimensionales:

$$p - \frac{\epsilon}{2} \alpha p^2 = \frac{\epsilon}{2} (1-v^2) \quad \text{si } v > 0$$

ó

$$p - \frac{\epsilon}{2} \alpha p^2 = \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } v < 0 \quad \text{en } x=0 \quad (3)$$

y en $x=1$

$$p - \frac{\epsilon}{2} \alpha p^2 = \frac{\epsilon}{2} \kappa v^2 \quad \text{si } v > 0 \quad \text{y } \kappa = \frac{1}{a^2} - 1 \neq 0$$

ó

$$v = 0 \quad \text{si } \kappa \rightarrow \infty$$

si se excluyen de nuevo los términos de orden ϵ^2 .

El carácter de la solución depende del valor característico de K o de la relación de áreas $a = A_s(t)/A_0$ y del valor del tiempo de cierre t_c . Consideraremos el caso distinguido en el que a es del orden de la unidad y t_c es del orden de t_0 , en cuyo caso las sobrepresiones generadas en el cierre de la válvula son del orden de $\rho_0 v_c c$. muy grandes frente a $\rho_0 g H$.

En el transitorio asociado al cierre aparecen dos etapas: la primera, la etapa del cierre, es del orden de $t_0 = L/c$ y durante ella se generan las oscilaciones que sólo se amortiguan apreciablemente en la segunda etapa de duración t_0/ϵ .

Para describir el movimiento en la primera etapa, se utiliza la variable x y la variable rápida t asociada a la escala t_0 . La solución puede escribirse en forma de desarrollo en potencias de ϵ con coeficientes funciones de x, t ; en primera aproximación no aparecen ni los efectos convectivos ni los efectos de fricción, proporcionales a ϵ , en las ecuaciones del movimiento, que se reducen a la ecuación de las ondas; las condiciones de contorno se reducen a:

$$p = 0 \quad \text{en } x = 0$$

$$p = \frac{\epsilon}{2} \kappa v^2 \quad \text{para } t < t_c, \quad v = 0 \quad \text{para } t > t_c \quad \text{en } x = 1.$$

En esta última expresión, p es sólo de orden unidad en los últimos instantes del cierre en los que v es de orden unidad y $\kappa \sim \epsilon^{-1}$.

Así pues, durante la etapa del cierre, las ecuaciones del movimiento conducen al problema clásico del análisis del golpe de ariete sin efectos convectivos ni de fricción, tratado en primer lugar en [1] y abundantemente tratado en la literatura científica ([5] y [4] entre otros).

Es importante observar que la solución de este problema para instantes $t > t_c$ posteriores al cierre es periódica, de período 4, no amortiguada. Los efectos de amortiguación sólo aparecen cuando se retienen los términos de orden ϵ de los desarrollos, que dejan de ser uniformemente válidos para tiempos $t \sim \epsilon^{-1}$.

3. ANALISIS DE LA AMORTIGUACION

Para analizar los efectos de amortiguamiento en la segunda etapa, utilizaremos el método de escalas múltiples; esto es, describiremos el movimiento utilizando la variable x y dos variables temporales, una rápida y otra lenta,

$$t' = t \quad \text{y} \quad \tau = \epsilon t \quad (4)$$

basadas en las escalas t_0 y t_0/ϵ respectivamente.

Para la presión y la velocidad se suponen unos desarrollos en potencias del parámetro ϵ en la forma:

$$p(x, t', \tau) = p_0(x, t', \tau) + p_1(x, t', \tau) + \dots$$

$$v(x, t', \tau) = v_0(x, t', \tau) + v_1(x, t', \tau) + \dots \quad (5)$$

donde p_0 , v_0 , p_1 y v_1 son funciones acotadas, de orden unidad, para todo valor de t' , siendo ϵ de

orden de la unidad.

Introduciendo estos desarrollos en las ecuaciones (1) y (2) y en las condiciones de contorno (3), después de agrupar términos del mismo orden, se obtienen los sistemas siguientes, correspondientes a los dos primeros términos del desarrollo:

$$\frac{\partial p_0}{\partial t'} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial t'} + \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0 \quad (6.a)$$

$$p_0 = 0 \text{ en } x=0, \quad v_0 = 0 \text{ en } x=1 \quad (6.b)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t'} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_0}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} - B p_0 \frac{\partial p_0}{\partial t'} \quad (7.a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t'} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{\partial v_0}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + p_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{1}{2} f v_0 |v_0|$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(1-v_0^2) \text{ si } v_0 > 0 \text{ ó } p_1 = \frac{1}{2} \text{ si } v_0 < 0 \text{ en } x=0$$

$$v_1 = 0 \text{ en } x=1. \quad (7.b)$$

El sistema (6) conduce a la ecuación de las ondas; por ser este sistema homogéneo y con condiciones de contorno nulas, la solución es periódica en t' y de período $t'=4$. La solución general de este sistema viene dada por:

$$v_0 = f(t'-x, \tau) + g(t'+x, \tau) \quad (8)$$

$$p_0 = f(t'-x, \tau) - g(t'+x, \tau).$$

Las funciones f y g quedan determinadas haciendo uso de las condiciones de contorno (6.b) a partir de sus valores F y G en $t'=4n$, donde n es entero, definidas en la forma $F(x, \tau) = -f(-x, \tau)$, $G(x, \tau) = g(x, \tau)$ para $0 < x < 1$. Estas funciones F y G dependerán de x, τ ; mientras que f y g , para τ fijo, son funciones de x periódicas en t' .

Las funciones F y G se calculan exigiendo que la solución p_1, v_1 del sistema (7) sea periódica en t' , de período 4, con lo que se asegura que ϵp_1 y ϵv_1 son pequeños frente a p_0, v_0 para tiempos t' del orden de ϵ^{-1} y, por tanto, el desarrollo (5) es uniformemente válido.

Esta exigencia de periodicidad a p_1 y v_1 , implica que la contribución de los segundos miembros de las ecuaciones y de las condiciones de contorno del sistema (7.a), al cabo de un período, a los valores de p_1 y v_1 es nula. Esto nos proporciona, según veremos, dos ecuaciones integrodiferenciales para la evolución con τ de F y G , cuya solución queda determinada con los valores de F y G en el instante $\tau=0$, que pueden obtenerse de las distribuciones de velocidad y presión en el instante del cierre. El mismo resultado se obtiene dando la evolución en función de los valores en un instante t' posterior, de orden unidad, ya que una traslación en el tiempo t' de orden unidad en las condiciones iniciales, no altera la solución, pues se origina una traslación idéntica a la solución de p_0, v_0 y p_1, v_1 .

Para el cálculo de p_1 y v_1 conviene reescribir las ecuaciones (7.a) en las variables características $\eta = t-x$, $\zeta = t+x$, con lo que se obtiene el sistema:

$$\frac{\partial(v_1+p_1)}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial(v_0+p_0)}{\partial \tau} + \frac{v_0}{2} \frac{\partial(v_0+p_0)}{\partial \eta} - \frac{A-\alpha}{2} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} - \frac{A+\alpha}{2} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \eta} - \frac{1}{4} f v_0 |v_0|$$

$$\frac{\partial(v_1-p_1)}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial(v_0-p_0)}{\partial \tau} - \frac{v_0}{2} \frac{\partial(v_0-p_0)}{\partial \zeta} + \frac{A+\alpha}{2} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + \frac{A-\alpha}{2} p_0 \frac{\partial p_0}{\partial \eta} - \frac{1}{4} f v_0 |v_0|$$

y las condiciones de contorno

$$p_1 = \frac{1}{2}(1-v_0^2) \text{ si } v_0 > 0 \text{ ó } p_1 = \frac{1}{2} \text{ si } v_0 < 0 \text{ en } \zeta = \eta$$

$$v_1 = 0 \text{ en } \zeta - \eta = 2.$$

Después de evaluados los segundos miembros en función de F y G , y exigiendo que la contribución a la solución de los segundos miembros de estas ecuaciones y de las condiciones de contorno, que se obtiene integrando respecto de η y ζ , resulta nula al cabo de un período $|2|$, se obtiene así el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} F |F| - \frac{f}{16} \int_0^1 ((F+F')|F+F'| + (F+G')|F+G'| + (F-F')|F-F'| + (F-G')|F-G'|) d\xi \quad (9)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} G |G| - \frac{f}{16} \int_0^1 ((G+G')|G+G'| + (G+F')|G+F'| + (G-G')|G-G'| + (G-F')|G-F'|) d\xi$$

donde F y G son funciones de (x, τ) , mientras que F' y G' son las mismas funciones evaluadas en (ξ, τ) . El primer término de los segundos miembros representa el efecto amortiguador de la entrada y los últimos el efecto de la fricción del conducto. Estas ecuaciones han de integrarse partiendo de los valores iniciales $F_0(x)$ y $G_0(x)$ de $F(x, \tau)$ y $G(x, \tau)$ en $\tau=0$.

Las ecuaciones (9) se han obtenido en el supuesto de movimiento turbulento y con el coeficiente de Darcy-Weisbach, $\lambda = fD/L$, constante. Sin embargo, en un caso general, el coeficiente de fricción λ es una función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds, $R_e = |v|v_0 D/v$, que escribiremos en la forma $|v|\lambda = \psi(|v|) > 0$ y el término de fricción en las ecuaciones tomará la forma $-\frac{1}{2}(L/D)v\psi(|v|)$, con lo que las ecuaciones anteriores quedan modificadas en la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} F |F| = -\frac{L}{16D} \int_0^1 ((F+F')\psi(|F+F'|) + (F+G')\psi(|F+G'|) + (F-F')\psi(|F-F'|) + (F-G')\psi(|F-G'|)) d\xi$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} + \frac{1}{2} G |G| = -\frac{L}{16D} \int_0^1 ((G+G')\psi(|G+G'|) + (G+F')\psi(|G+F'|) + (G-G')\psi(|G-G'|) + (G-F')\psi(|G-F'|)) d\xi.$$

En el caso laminar ($R_e < 2000$), $\psi(|v|) = 64v/(v_0 D)$, por lo que en lugar de la ecuación (9), se obtiene el sistema más simple:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} F |F| - \frac{f}{4} F \quad (11)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} G |G| - \frac{f}{4} G \quad (11)$$

donde $f = (L/D) \frac{64\nu}{v_0 D}$, y en el que la variable x juega el papel de un parámetro. Este sistema ha de resolverse con las condiciones iniciales $F(x,0) = F_0(x)$, $G(x,0) = G_0(x)$. La solución (11) es de la forma:

$$F = \frac{f}{2} \frac{F_0 e^{-(f/4)\tau}}{(f/2) + F_0(1 - e^{-f\tau/4})} \quad \text{si } F > 0$$

$$F = \frac{f}{2} \frac{F_0}{(f/2) + F_0(1 - e^{-f\tau/4})} \quad \text{si } F < 0 \quad (12)$$

y análogamente para la G .

Las expresiones (12) y sus análogas para la G permiten describir de un modo simple la amortiguación de las oscilaciones en el caso laminar. Compárese esta solución obtenida por el método de las escalas múltiples apoyándose en la hipótesis realista de que la caída de presión por fricción sea pequeña frente a la del golpe de ariete $\rho_0 v_0 c$, esto es, cuando $\frac{64\nu}{cD} (L/D) \ll 1$, con la obtenida por otros métodos [8].

La presión en la sección de la válvula ($x=1$) $p_V(t')$, puede calcularse en función de $F(x,\tau)$ y $G(x,\tau)$ mediante las expresiones:

$$p_V(t',\tau) = 2F(1-t',\tau) \quad \text{para } 0 < t' < 1$$

$$p_V(t',\tau) = 2G(t'-1,\tau) \quad \text{para } 1 < t' < 2 \quad (13)$$

$$p_V(t',\tau) = -p_V(t'-2,\tau) \quad \text{para } 2 < t' < 4.$$

Los valores iniciales en $\tau = 0$, $F_0(x)$ y $G_0(x)$ de F y G , pueden calcularse partiendo de los valores en el instante del cierre de la velocidad v_0 y de la presión p_0 en el conducto, utilizando las expresiones (8) con $t' = 4n$ y $\tau = 0$, o bien si se ha calculado $p_V(t')$ en los instantes posteriores al cierre, pueden utilizarse las expresiones (13) con $\tau = 0$ para el cálculo de $F_0(x)$ y $G_0(x)$.

También daremos la solución de (9) en dos regímenes límite: cierre lento con ley de cierre lineal, cierre instantáneo y en un caso intermedio en el que la ley de cierre es cuadrática, $a = a_0(1-t/t_c)^2$, siendo el tiempo de cierre $t_c = 2(2a_0)^{1/4} t_0 \epsilon^{-1/4}$ y $a_0 = A_S(0)/A_0$.

Para una ley de cierre lineal, $a = a_0(1-t/t_c)$ si el cierre es lento, esto es, cuando $t_c \gg a_0 t_0 / \sqrt{\epsilon}$, la distribución de presión en el conducto, en el instante del cierre, resulta lineal siendo cero su valor en la sección de entrada ($x=0$) y $p_V = 2\epsilon/\delta_c^2$ en la sección de la válvula ($x=1$) y la velocidad nula en todo el conducto con tal que $\delta_c = \epsilon t_c / a_0 t_0$ sea, como se ha dicho, grande frente a $\epsilon^{1/2}$.

Así pues, en el conducto y en el instante del cierre:

$$F(x) = -G(x) = \frac{1}{2} \epsilon \frac{2}{\delta_c^2} x.$$

La Ec. (9) se reduce en este caso a:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau'} = -(4/f)\psi^2 - \int_0^1 \{(\psi+\psi')|\psi+\psi'| + (\psi-\psi')|\psi-\psi'|\} d\xi, \quad (14)$$

siendo $\psi = (\delta_c^2/\epsilon)F$ y $\tau' = \frac{\epsilon f}{8\delta_c^2} \tau$. Nótese que ψ representa también $p_V/p_V(0)$.

En la Fig. 1 se han representado los efectos de la amortiguación, dando para tres valores de f , la evolución de ψ con τ . Las líneas a trazos corresponden al límite $f \rightarrow \infty$, en el que el efecto amortiguador de la entrada es despreciable.

Como ilustración de la forma en que se produce el amortiguamiento de las oscilaciones en un caso más general, en la Fig. 2 se ha representado cómo evoluciona con τ la oscilación de presión en la sección $x=1$ de salida, en un caso de cierre cuadrático con $\delta = 2$. También se ha representado la evolución con τ del valor máximo, en cada período, de la presión en la sección de salida, para el mismo valor de δ . En la Fig. 3 se representa la evolución con τ de las distribuciones de presión y velocidad en el conducto al principio de cada período.

En el caso de cierre instantáneo, la velocidad en el conducto y en el instante del cierre es la correspondiente al régimen estacionario, y la caída de presión en el mismo debida a la fricción es despreciable frente a $\rho_0 v_0 c$ si $\epsilon f \ll 1$, esto es, $v_0(x) = 1$, $p_0(x) = 0$ en $t' = \tau = 0$. Así pues, en este caso, $F_0(x) = G_0(x) = 1/2$. Posteriormente, F y G siguen siendo funciones sólo de τ , independientes de x , con lo que:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}(1+f)F^2, \quad F = G = \frac{1/2}{1+(1+f)\tau/4} \quad (15)$$

La solución obtenida da, por ejemplo, para la evolución temporal de la presión en la sección de salida $p(1,t',\tau)$ una onda cuadrada amortiguada: $p = 2F(\tau)$ para $0 < t' < 2$ y $p = -2F(\tau)$ para $2 < t' < 4$.

4. CONCLUSIONES

A través de las páginas precedentes se ha descrito el método de escalas múltiples aplicado al amortiguamiento por fricción de las oscilaciones de presión generadas en el golpe de ariete. Este mismo método puede ser aplicado a otros fenómenos hidráulicos [2], [11].

5. REFERENCIAS

- Allievi, L. "Teoría General del Moto Perturbado dell'Acqua nei Tubi in Pressione", Ann. Soc. Ing. Arch. Milán 1903.
- Assas, P. de "Efectos de Compresibilidad y Fricción en las Oscilaciones Fluidodinámicas en Conductos", Tesis Doctoral, E.T.S.I. Aeronáuticos Universidad Politécnica de Madrid, 1984.

3. Cole, J.D. "Perturbation Methods in Applied Mathematics", Baisdell Publishing Company, 1968.
4. Chaundry, M.H. "Applied Hydraulic Transients" Pub. Van Nostrand Reinhold, New York, 1979.
5. Jaeger, Ch. "Fluid Transients", Pub. Blackie, 1977.
6. Kevorkian, J., Cole, J.D. "Perturbation Methods in Applied Mathematics", Pub. Springer-Verlag, 1981.
7. Parmakian, J. "Waterhammer Analysis", Pub. Dover, 1983.
8. Rich, G.R. "Waterhammer Analysis by the Laplace-Mellin Transformation", Trans. of ASME, paper nº 44-A-38, 1945.
9. Streeter, V.L., Lai, Ch. "Waterhammer Analysis Including Fluid Friction", Trans. of ASCE, paper 8502, Vo. 128, pp. 1491-1552, 1963.
10. Wylie, E.B., Streeter, V.L. "Fluid Transients", Pub. McGraw-Hill, 1978.
11. Parra, I.E. "Oscilaciones en Sistemas Hidráulicos", Tesis Doctoral, E.T.S.I.Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, 1981.

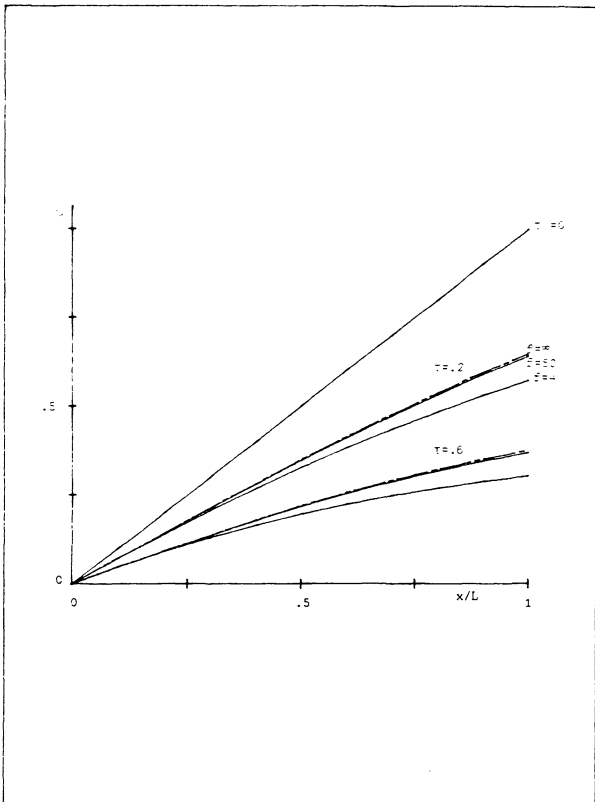


FIG.(1).-En la figura se muestra el efecto amortiguador en la distribución de presiones al principio de cada período para cierres lentos y ley de cierre lineal, para distintos valores del parámetro de fricción.

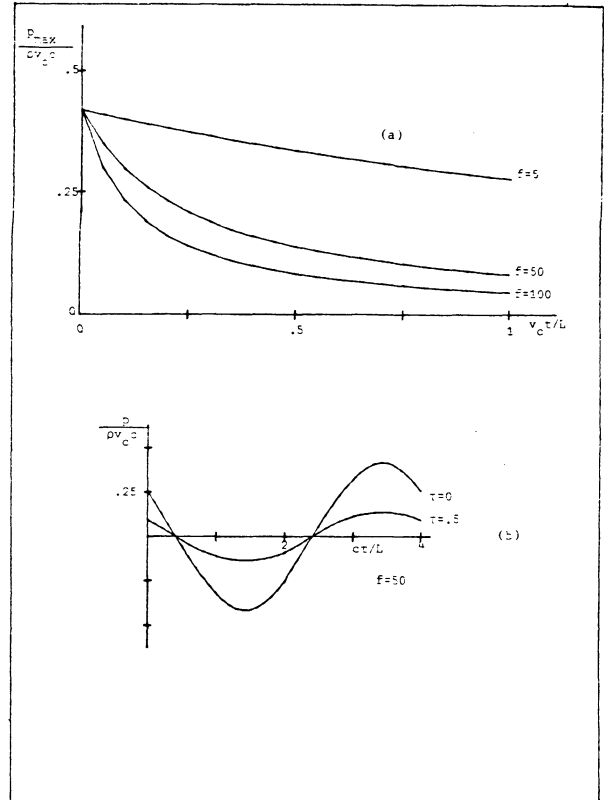


FIG.(2).-(a) Evolución, por efecto de la fricción, de la presión máxima en cada período en la sección de salida, con el tiempo de residencia para ley de cierre cuadrática y $\tau_c = 2(2a_0)^{1/4} t_c e^{-1/4}$.
(b) Forma típica de la oscilación de la presión durante un período desde el instante del cierre hasta el instante $v_c t/L = .5$

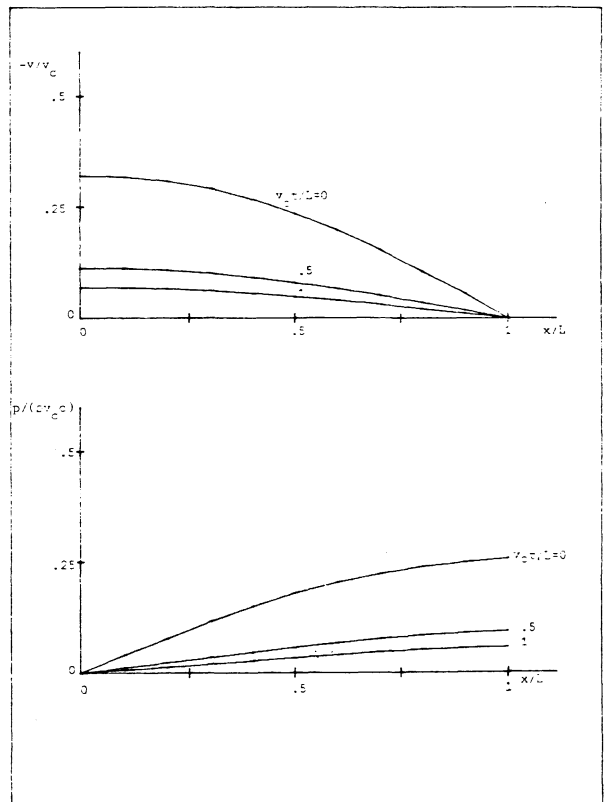


FIG.(3).-Evolución con el tiempo por efecto del amortiguamiento por fricción de las distribuciones de velocidad y presión en el conducto al principio de cada período.