

Modelado de Cadenas Cinematicas mediante Matrices de Desplazamiento. Una alternativa al metodo de Denavit-Hartenberg

A. Barrientos^a, M. Alvarez^b, J.D. Hernandez**, J. del Cerro^a, C. Rossi^a

^aCentro de Automática y Robotica UPM-CSIC, Universidad Politecnica de Madrid. Madrid, Espana.

^b Universidad Politecnica de Madrid. Madrid, Espana.

Resumen

En este trabajo se presenta un metodo para el modelado de cadenas cinematicas de robots que salva las dificultades asociadas a la eleccion de los sistemas de coordenadas y obtencion de los parametros de Denavit-Hartenberg. El metodo propuesto parte del conocimiento de la posicion y orientacion del extremo del robot en su configuration de reposo, para ir obteniendo en que se transforman estas tras los sucesivos movimientos de sus grados de libertad en secuencia descendente, desde el mas alejado al mas cercano a su base. Los movimientos son calculados en base a las Matrices de Desplazamiento, que permiten conocer en que se transforma un punto cuando este es desplazado (trasladado o rotado) con respecto a un eje que no pasa por el origen. A diferencia del metodo de Denavit-Hartenberg, que precisa ubicar para cada eslabon el origen y las direcciones de los vectores directores de los sistemas de referenda asociados, el metodo basado en las Matrices de Desplazamiento precisa solo identificar el eje de cada articulacion, lo que le hace mas simple e intuitivo que aquel. La obtencion de las Matrices de Desplazamiento y con ellas del Modelo Cinematico Directo a partir de los ejes de la articulacion, puede hacerse mediante algunas simples operaciones, facilmente programables.

Palabras Clave:

Modelo cinematico de robots, Denavit-Hartenberg, formula de rotacion de Rodrigues.

1. Introduction

El metodo de Denavit Hartenberg (Denavit and Hartenberg, 1955) para obtener el modelo cinematico de un robot manipulador, constituye un topico obligado en todo curso basico de robotica.

Este metodo establece el modo en que deben seleccionarse los sistemas de coordenadas asociados a los eslabones o barras de la cadena cinematica del robot, para sistematizar la obtencion de las matrices de cambio de base ${}^{l-1}A_l$ entre el sistema asociado a la barra $l-1$ y a la barra l .

La multiplicacion de estas matrices permite obtener la matriz de cambio de base entre los sistemas asociados a la base y al extremo del robot, en funcion de los valores adoptados por sus grados de libertad (GDL), o lo que es lo mismo, conocer las expresiones que definen la posicion y orientacion del extremo del robot en funcion de las coordenadas articulares (q_i). Estas rela-

ciones constituyen el denominado Modelo Cinematico Directo (MCD) del robot.

La obtencion de este modelo es imprescindible para abordar la mayor parte de los problemas asociados al control y programacion de los robots manipuladores, caminantes o humanoides.

El origen del metodo se encuentra en el trabajo de Denavit y Hartenberg que permite establecer la relation entre dos barras rigidas consecutivas unidas por una articulacion de un grado de libertad, mediante una matriz ${}^{l-1}A_l$, funcion de 4 parametros (θ, d, a, α) asociados a 4 movimientos consecutivos (rotacion y traslacion en z , seguidos de traslacion y rotacion en x). Para que esto sea posible, es preciso asociar a cada barra un sistema de coordenadas posicionado segun determinadas reglas.

Pieper (Pieper, 1968) aplico esta representation matricial de las relaciones entre dos barras conectadas por una articulacion, para sistematizar la obtencion del modelo cinematico directo de robots. Para ello se identifica a la matriz de Denavit Hartenberg $C^{-1}A_i$ con la matriz que define el cambio de base entre los sistemas asociados a las barras $l-1$ e l , siendo esta funcion del grado de libertad de la articulacion (q_i). Obtenidas las matrices ${}^{l-1}A_l$ para l desde 1 a n (numero de grados de libertad del robot), su producto da lugar a la matriz de cambio de base T_n

* Autor en correspondencia

Correos electronicos: antonio.barrientos@upm.es (A. Barrientos), malvarez@etsii.upm.es (M. Alvarez), juandhv@etsii.upm.es (J.D. Hernandez), j.cerro@upm.es (J. del Cerro), claudio.rossi@upm.es (C. Rossi)

entre el sistema base y el sistema asociado al extremo del robot, que expresa la localización de su extremo en función de las q_i (modelo cinemático directo).

Paul (Paul and Shimano, 1978; Paul, 1981) y otros investigadores divulgaron y popularizaron el método que, finalmente conocido como método de Denavit Hartenberg (DH), se ha convertido en el procedimiento estándar para el modelado cinemático de robots, siendo incluso utilizados los parámetros DH para la definición de cadenas cinemáticas en herramientas de simulación (Corke, 1996), (Jaramillo-Botero et al., 2006) y ampliándose su uso al análisis dinámico.

Conceptualmente el método DH es sencillo, basta con aplicar unos conocimientos elementales de álgebra lineal. Pero su uso no suele estar exento de cierta dificultad debido a la complejidad espacial ligada a la selección de la ubicación de los sistemas de coordenadas asociados a cada barra.

En cualquier caso, la popularidad del método de DH ha eclipsado otras alternativas que, posiblemente precisando de unas bases algebraicas menos difundidas que el uso de las matrices de transformación homogénea para representar cambios de base y sin notables ventajas frente a esta, han tenido menor aceptación que el método de DH.

Los números duales (Veldkamp, 1976), utilizados dentro del contexto matricial, permiten expresar las matrices DH en sus equivalentes matrices de números duales (3x3), siendo aplicables a la solución del modelo cinemático del robot (McCarthy, 1986), (Jin and Xiaorong, 2010).

Los cuaternios, si bien permiten representar rotaciones de una manera más compacta que las matrices de rotación, no permiten por sí solos representar traslaciones. Sin embargo, su extensión a los cuaternios duales, en los que cada uno de los cuatro componentes del cuaternio está formada por un número dual, permite el uso del álgebra de cuaternios para representar rotaciones y traslaciones, constituyendo así una alternativa válida para el modelado de cadenas cinemáticas (Perez and McCarthy, 2004).

En general los números duales permiten expresar un movimiento de desplazamiento (traslación y rotación) a lo largo de un eje, denominado "Movimiento de tornillo" o "Screw" (en su denominación en inglés), pudiendo ser este tipo de movimientos manejados mediante diferentes recursos algebraicos. Una comparación de estas técnicas y su eficiencia computacional puede encontrarse en (Funda, 1988), (Funda and Paul, 1990).

El método denominado como Producto de Exponenciales (PoE por sus siglas en inglés) (Brockett, 1984), (Murray et al., 1994), utiliza la representación exponencial de una serie matricial para representar desplazamientos de tornillo, cuya adecuada combinación permite la obtención del modelo cinemático de robots. Este método evita la compleja selección de los sistemas de coordenadas DH, pero su justificación y deducción es menos intuitiva y más compleja que el uso de las nociones básicas de álgebra asociadas al método de DH, por lo que su difusión es escasa, quedando limitado a algunos desarrollos de robots especialmente complejos como es el caso de los robots humanoides (Arbulu, 2009).

En este artículo se presenta y demuestra un método para la obtención del modelo cinemático de un robot que, recurrien-

do solo a conocimientos básicos de álgebra lineal y a simples consideraciones vectoriales, deduce una expresión final del Modelo Cinemático equivalente a la que se llega con el Producto de Matrices Exponenciales, pero sin precisar del uso de estas, sistematizando y simplificando notablemente la obtención del modelo cinemático de robots, con respecto al método de DH.

El método propuesto utiliza las denominadas Matrices de Desplazamiento (D), de fácil obtención a partir de la identificación de los ejes de cada articulación, prescindiendo del establecimiento de los sistemas de coordenadas y de la obtención de los parámetros DH, foco de dificultades y errores en el método de Denavit-Hartenberg.

Frente al método de DH, el método propuesto resulta más simple de comprender y de aplicar, evitando la necesidad de tener que memorizar y utilizar los criterios que llevan a la selección de los sistemas de coordenadas de Denavit Hartenberg y a la obtención de los correspondientes parámetros.

Se aspira a que tras el conocimiento del algoritmo y su demostración, este constituya una alternativa competitiva e incluso preferida al método de Denavit-Hartenberg para el modelado de cadenas cinemáticas robóticas.

Se ha optado por estructurar el presente artículo comenzando con la exposición del método (apartado 2), previamente a su justificación. Esta decisión tiene por objeto el mostrar al lector, desde el primer momento, las ventajas del método propuesto. El algoritmo se describe tanto literalmente como mediante su codificación en Matlab ©.

Tras especificar el algoritmo y aplicarlo en un sencillo robot de ejemplo para facilitar su comprensión, se procede en el apartado 3 a su demostración. En esta, la única dificultad, puramente geométrica, es la demostración de la fórmula de Rodrigues, que si bien es ampliamente conocida, se ha incluido en el artículo para su mejor disposición. La demostración del método propuesto precisa de la extensión de la fórmula de Rodrigues a rotaciones en torno a ejes que no pasan por el origen, lo que se hace mediante simples razonamientos geométricos.

En el apartado 4 se muestra como las Matrices de Desplazamiento permiten, con la misma metodología habitualmente utilizada con las matrices de DH (Paul, 1981), obtener el modelo cinemático inverso.

El apartado 5 extiende el uso del método a la obtención del modelo diferencial, calculando las componentes de la matriz Jacobiana a partir de las Matrices de Desplazamiento generalizadas. Con esto, la utilización del método MD al modelado cinemático de robots se equipara a la del método DH (Modelo cinemático directo, inverso y diferencial).

En el apartado 6 se muestran las ventajas del método aplicado a dos robots de cinemática complicada. El primero se trata de un robot redundante de 7 grados de libertad. El segundo es un robot multicadena concretado en un robot bipedo. En ambos casos se muestran los sistemas y parámetros de Denavit-Hartenberg y los ejes y parámetros de las Matrices de Desplazamiento.

Se supone que el lector está familiarizado con el método de Denavit-Hartenberg (Ollero, 2001), (Spong et al., 2005), (Barricent et al., 2007).

2. Algoritmo de obtencion del Modelo Cinematico Directo mediante Matrices de Desplazamiento

Del mismo modo que el metodo de Denavit-Hartenberg, el metodo de las Matrices de Desplazamiento puede sistematizarse en una serie de pasos a modo de algoritmo.

2.1. Algoritmo para obtener el MCD mediante MD

Mientras en el metodo de DH es preciso comenzar identificando el eje de desplazamiento (giro o traslacion) de cada articulacion, para despues situar el origen del sistema de coordenadas, y los ejes z, x, y (en este orden) haciendo consideraciones sobre la situation del eje de la propia articulacion y la del eje de la articulacion anterior, en el metodo propuesto basta con la identificacion de los ejes de desplazamiento, sin precisarse de situar los ejes xyz ni el origen del sistema de coordenadas. Esta diferencia simplifica notablemente el procedimiento, evitando-se pasos que pueden ser fuentes de errores por el manejo de ejes asociados a varias articulaciones y por precisarse de cierta vision espacial, en ocasiones compleja. Tras la obtencion de estos ejes, se calculan las matrices D_i , ligadas a cada una de las articulaciones. Estas representan desplazamientos generalizados en el espacio (traslaciones o rotaciones en torno a cualquier eje) y dependen de los parametros que definen el eje de la articulacion. Por ultimo, para obtener el modelo cinematico del robot, se efectua el producto las matrices D_i ; y se añade a este el de la matriz de transformation homogenea TQ que define la localizacion del extremo del robot, cuando todos los grados de libertad adoptan el valor cero. La Tabla 1 recoge esquematicamente los pasos del algoritmo, mientras que en la Tabla 2 se compara este con el metodo de DH

En relation con la comparacion mostrada en la Tabla 2, cabe destacar que la diferencia entre ambos metodos se concreta en los pasos 1 y 2. Asi los pasos 1.b, 1.c y 1.d del algoritmo DH mostrado en la Tabla 2, desaparecen totalmente en el algoritmo MD, con lo que se simplifica el procedimiento. Por su parte la obtencion de los 4 parametros de DH (paso 2.a) que supone para cada grado de libertad la realization de 4 movimientos consecutivos que deben ser identificados y cuantificados, se sustituye por la identificacion del eje de cada articulacion (k, p^*), y de la matriz que localiza al extremo del robot en su position de reposo, valores facilmente deducibles a partir de la geometria del robot T_0 .

Los dos ultimos pasos corresponden a operaciones algebraicas y son equivalentes en ambos metodos, pudiendo ser delegados a programas de algebra simbolica (como el mostrado en la Tabla 3), que reciben como entradas los resultados del segundo paso (parametros de DH o parametros (k) y (p^*) de los ejes y matriz TQ).

2.2. Ejemplo de obtencion del MCD mediante MD

Se aplica a continuation el algoritmo descrito en la Tabla 1 al robot de 3 grados de libertad mostrado en la Figura 1 en su position de reposo ($q_i = 0, \forall i$).

Tabla 1: Algoritmo para la obtención del Modelo Cinematico de un Robot mediante las Matrices de Desplazamiento

- D-1. Situando al robot en su position cero ($q_i = 0, \forall i$), encontrar la expresion de la matriz de transformation homogenea TQ que localiza al extremo del robot referido al sistema de la base.
- D-2. Para la misma position del robot y para cada grado de libertad q_i obtener la matriz de desplazamiento D_i . Para ello:
 - D-2.1. Identificar el vector unitario k_i del eje de la articulacion expresado en las coordenadas del sistema de la base.
 - D-2.2. Seleccionar un punto cualquiera S del eje de la articulacion.
 - D-2.3. La matriz de desplazamiento asociada a ese grado de libertad, vendra dada por:

$$D_i = \begin{matrix} / & k_i \cdot q_i \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \text{si el GDL es de traslacion}$$

$$D_i = \begin{matrix} R_i & (J \cdot R_d \cdot f_i) \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \text{si el GDL es de rotation}$$

con / matriz identidad de dimension 3
->>T ->

$$R_i = I \cos\{q_i\} + k_i k_i^T (\cos\{q_i\} - 1) + \text{skew}\{k_i\} \sin\{q_i\}$$

Siendo el operador skew el que a cada vector

$k = (k_x, k_y, k_z)$ asocia la matriz antisimetrica

$$\text{skew}\{k\} = \begin{bmatrix} k_z & 0 & -k_y \\ 0 & k_x & -k_z \\ -k_y & -k_z & 0 \end{bmatrix}$$

- D-3. El MCD se obtiene como el producto

$$T_{0n} = \{U_i D_i\} \cdot T_0$$

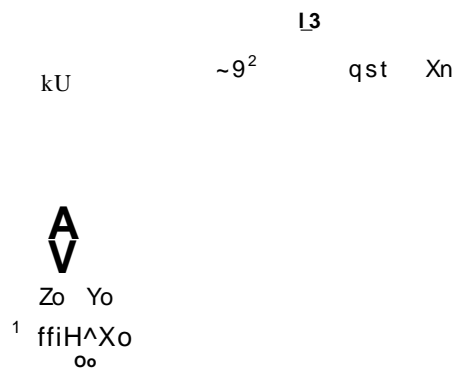


Figura 1: Robot ejemplo de 3 GDL.

Tabla 2: Comparación entre los métodos de DH y Matrices de Desplazamientos

Metodo de DH

1. Identificación de los sistemas de coordenadas asociados a cada articulation:
 - a. Identificar del eje de desplazamiento de cada articulation
 - b. Identificar del origen de cada sistema de coordenadas
 - c. Identificar de los ejes z de cada sistema de coordenadas
 - d. Identificar de los ejes x de cada sistema de coordenadas
2. Obtencion de los 4 parametros de DH (θ, d, a, α)
 - a. Encontrar los valores del giro en z, traslacion en z, traslacion en x y giro en x, necesarios para pasar del sistema asociado a un eslabon al del siguiente.
3. Obtencion de las matrices de DH: A_i mediante expresion conocida
4. Obtencion del MCD como producto de las matrices A_i

Metodo de Matrices de Desplazamientos

1. Identificación de los ejes de desplazamiento asociado a cada articulation:
 - a. Identificar del eje de desplazamiento de cada articulation
2. Obtencion de los parametros que definen los ejes y de la localizacion del robot en reposo con el robot situado en su position cero ($\theta = 0, V = 0$)
 - a. Identificar el eje de cada articulation (mediante su vector director k y un punto cualquiera del mismo P_i)
 - b. Identificar la matriz de transformation homogenea TQ que define la localizacion de su extremo
3. Obtencion de las matrices de Desplazamiento: D; mediante expresion conocida (formula de Rodrigues generalizada)
4. Obtencion del MCD como producto de las matrices D; y la matriz T_0

D-1. Se comienza obteniendo la Matriz de Transformation Homogenea T_0 que define la localizacion del extremo del robot, cuando $q_i = 0$ para todo i .

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L_2 + L_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las tres primeras columnas representan las coordenadas de los vectores X_n, Y_n, Z_n en el sistema $S_0 = \{O_0, X_0, Y_0, Z_0\}$. La cuarta columna representa las coordenadas de O_n origen del sistema S_n , y punto extremo del robot, en el sistema de la base S_0 .

D-2.1. y D-2.2: Se obtienen los valores que definen los ejes de cada articulation, siendo estos:

Eje	Vector director l_i	Punto cualquiera del eje P_i
1	$l_1 = [0,0,1]$	$P_1 = [0,0,0]$
2	$l_2 = [0,-1,0]$	$P_2 = [L_2,0,L_1]$
3	$l_3 = [1,0,0]$	$P_3 = [0,0,L_1]$

En la Figura 1 se han marcado los vectores l_i y los puntos seleccionados de cada eje P_i . Notese que P_i es cualquier punto del eje de la articulation i , procurandose por ello escoger el que resulte mas comodo.

D-2.3. Una vez obtenidos los vectores l_i y P_i se obtienen las co-

respondientes matrices D_i . En el presente ejemplo los 3 grados de libertad son de rotation. Las matrices D_i toman la forma¹:

$$D_i = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & 0 \\ S_i & C_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & L_2 S_2 - L_2 (C_2 - 1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & -L_2 S_2 - L_1 (C_2 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & -S_3 & Z_3 S_3 \\ 0 & S_3 & C_3 & L_3 (C_3 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Estas expresiones han sido obtenidas mediante el codigo Matlab © incluido en la Tabla 3, que implementa los puntos 2.3 y 3 del algoritmo.

¹Se emplea la notacion habitual en robotica que representa a las funciones seno y coseno por las letras S y C , de modo que $S = \text{sen}(qi)$ y $C = \text{cos}(qi)$

D-3. El MCD se obtiene como el producto de las matrices D; por la matriz T_0 , resultando:

$$T_4 = \underline{D_1.D_2.D_3.ro} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{matrix} \quad R \quad (4)$$

Siendo:

$$\begin{matrix} -S_1C_3 - C_1S_2S_3 & S_1S_3 - C_1S_2C_3 & C_1C_2 \\ -C_1C_3 - S_1S_2S_3 & -C_1S_3 - S_1S_2C_3 & S_1C_2 \\ C_2S_3 & -C_2C_3 & S_2 \end{matrix} \begin{matrix} d(L_1 + L_3C_2) \\ L + L_3S_2 \end{matrix}$$

Tabla 3: Código en Matlab © para resolver los pasos D-2.3 y D-3 por el método de las Matrices de Desplazamiento (El código se ha particularizado para el caso de robots con un máximo de 6 grados de libertad. Puede ser fácilmente ampliable a cualquier número de grados de libertad sin más que aumentar el número de valores simbólicos q_i y del vector simbólico qq -2 primeras líneas-)

```
function T=MCD_MD (kk, pp, TO, tipo, n)
% kk(3,n) coordenadas del vector director ...
% del eje de la articulación expresadas en
% {S0}, con el robot situado en qi=C
% pp(3,n) coordenadas de un punto del eje de
% la articulación expresadas en {S0}, con
% el robot situado en qi=C
% TO (4,4) MTH del sistema de coordenadas del
% extremo {Sn} expresado en {S0}, con el
% robot situado en cero qi = C
% tipo(1,n) vale 0 si el gdl es de rotación
% y 1 si es de traslación
% n: número de gdl
syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 real;
qq=sym([q1, q2, q3, q4, q5, q6]);
I=T0;
I=eye(3);
for i=n:-1:1
    k=kk(i,:); p=pp(i,:); q=qq(i);
    if tipo(1)==C
        K=[0 -k(3) k(2); k(3) 0 -k(1); -k(2) ..
            k(1) 0];
        R=I*cos(q)+k*k'*(1-cos(q))+K*sin(q);
        D=[R, (I-R)*p; [0 0 0 1]]
    else
        D=[eye(3), w*q; [0 0 0 1]];
    end
    I=simple(D*T);
end
end
```

3. Demostración del Algoritmo

Para demostrar el algoritmo propuesto se debe partir de la matriz de transformación homogénea T_0 que define la localización (posición y orientación) del extremo del robot, cuando este se encuentra en la posición cero ($q_i = 0$ para todo i). A

continuación basta con ir calculando en que se transforma T_0 cuando se le somete sucesivamente a los desplazamientos originados por cada uno de los grados de libertad desde q_n hasta q_1 . Estos desplazamientos consisten en traslaciones o giros a lo largo de los ejes de la correspondiente articulación, que en general no pasarán por el origen. El resultado es el valor de T_0 tras haber sufrido los desplazamientos definidos por todos los grados de libertad y por lo tanto la nueva localización del extremo del robot T_n en función de los q_i o Modelo Cinemático Directo.

Es preciso por lo tanto establecer cual es el resultado de desplazar un punto mediante un eje cualquiera, definido por su vector dirección lq y por un punto cualquiera del mismo pi . Este movimiento va a venir definido por la Matriz de Desplazamiento.

3.1. Matriz de Desplazamiento generalizado

La Matriz de Desplazamiento generalizada es una matriz de transformación homogénea D (4x4) que relaciona las coordenadas de un punto \hat{c} con las del punto $?$ obtenido por la traslación 0 rotación del primero a lo largo de un eje k que no pase por el origen.

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{r}_x \\ \tilde{r}_y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

En el caso de tratarse de una traslación de longitud d , en la dirección del vector $k = [k_x, k_y, k_z]$, la relación es trivial, estando la matriz de desplazamiento definida por la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d.k_x \\ 0 & 1 & 0 & d.k_y \\ 0 & 0 & 1 & d.k_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para el caso de rotación, antes de obtener la matriz D que define una rotación de ángulo θ alrededor de un eje k que no pasa por el origen, es preciso encontrar la expresión de D para el caso particular de que el eje de rotación pase por el origen. Esta matriz viene dada por la fórmula de Rodrigues, que se expone y demuestra a continuación.

3.1.1. La fórmula de Rotación de Rodrigues

Si bien la demostración de la fórmula de Rodrigues, puede encontrarse en numerosas fuentes (Koks, 2006), se reproduce aquí para mayor comodidad del lector.

La Figura 2 representa un vector t que, una vez rotado un ángulo θ , en torno al eje definido por el vector unitario k que pasa por el origen O , se convierte en el vector f .

El círculo de la Figura 2a se muestra abatido en la Figura 2b. Este se encuentra contenido en el plano perpendicular al eje de rotación que pasa por el extremo del vector t . El punto O' es el corte del vector de giro k con dicho plano.

El vector oo' está en la dirección del vector k y su longitud es la proyección del vector t sobre dicho vector. Por lo tanto puede expresarse como:

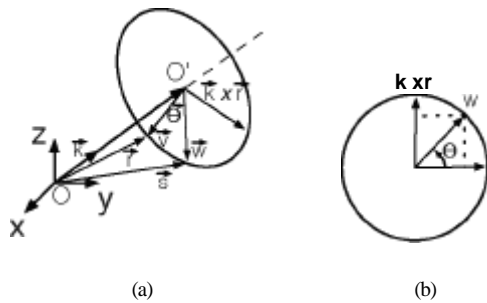


Figura 2: Rotacion en torno a un eje que pasa por el origen

$$ob' = \{i.t\}i \quad (7)$$

Los vectores i y v están definidos como:

$$v = f - OO' \quad f - (k.r)k \quad (8)$$

$$i = \quad (9)$$

El producto vectorial $f \times v$ está contenido en el círculo, pues k es unitario. Además es perpendicular a tf , pues

$$f \times v = f \times (f - (k.r)k) = f \times v \quad (10)$$

Atendiendo ahora al círculo se tiene (Figura 2b) que las proyecciones del vector v sobre los vectores k y f serán respectivamente $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ (notese que las longitudes de w , v y $k \times f$ son las mismas).

Por lo que v se podrá poner como:

$$v = -\cos(\theta)k + \sin(\theta)(k \times f) \quad (11)$$

Sustituyendo (8) en (11) se obtiene:

$$v = (f - (i.f)t)\cos(\theta) + tx f.\sin(\theta) \quad (12)$$

Utilizando (9) y considerando (12) se llega a:

$$tf = g - ob' = f - \{i.f\}i$$

$$3 = i + \{t.f\}t = (f - \{t.f\}i)\cos(\theta) + tx f.\sin(\theta) + \{t.f\}t \quad (13)$$

Desarrollando y agrupando términos:

$$v = f.\cos(\theta) - (tf)t\cos(\theta) + tx f.\sin(\theta) + \{t.f\}t \quad (14)$$

$$t = v.\cos(\theta) + \{i.f\}t(1 - \cos(\theta)) + tx v.\sin(\theta) \quad (15)$$

Esta expresión, que es de por sí la forma vectorial de la fórmula de Rodrigues, permite obtener el vector f , resultado de rotar al vector t alrededor del eje definido por el vector k un ángulo θ . Puesto que interesa encontrar la matriz de rotación que consigue el mismo efecto, se debe convertir la expresión (15) a su forma matricial, resultando:

$$f = R.t$$

Con:

$$R = I \cos(\theta) + ik^i j^j \sin(\theta) + skew(k) \sin(\theta) \quad (16)$$

Donde I es la matriz identidad (3x3).

El producto del vector columna $k = [k_x, k_y, k_z]^T$ por su traspuesto da lugar a una matriz (3x3).

La matriz $skew(k)$ se obtiene como la matriz antisimétrica que, multiplicada por el vector t , da como resultado que $k \times t$, estando definida por:

$$skew(k) = \begin{bmatrix} 0 & k_z & -k_y \\ -k_z & 0 & k_x \\ k_y & -k_x & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Por lo tanto, utilizando coordenadas homogéneas como en el caso de la expresión (6), el resultado de rotar el vector r un ángulo θ alrededor de un eje k que pasa por el origen, es (fórmula matricial de Rodrigues):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$D = \begin{bmatrix} R & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Estando R definido por la ecuación (16).

En ocasiones la expresión de la fórmula matricial de Rodrigues puede encontrarse como:

$$R = I \cos(\theta) + skew(k) \sin(\theta) \quad (20)$$

Expresión que se puede comprobar es equivalente a (16), a partir de la igualdad:

$$skew(k) \cdot t = k \times t \quad (21)$$

que se puede verificar por simple desarrollo de ambos miembros de la misma.

3.1.2. Rotación en torno a un eje que no pasa por el origen

La siguiente extensión de la fórmula de Rodrigues permite obtener la matriz de desplazamiento asociada a una rotación de un ángulo θ , alrededor de un eje k , que no pasa por el origen. Dicho eje, vendrá definido por su vector director k y por un punto cualquiera del mismo p .

Para ello se realizará una traslación del origen de coordenadas O al punto p , efectuando entonces la rotación alrededor del eje k que sí pasa por el nuevo origen (p) (ver Figura 3). La matriz que define esta rotación estará dada por la fórmula de Rodrigues. Se parte para ello de la igualdad general:

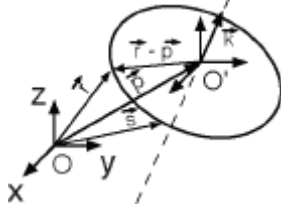


Figura 3: Rotación en torno a un eje que no pasa por el origen

$$f = p + (f-p) \quad (22)$$

Donde p es un punto cualquiera del eje de giro y f el punto original que se va a someter a la rotación.

El resultado de rotar t es un nuevo punto t . Si R representa la matriz de rotación de ángulo θ en torno al eje k que pasa por p , se tiene que, utilizando la expresión de f dada en (22):

$$f = Rp + R(f-p) = p + R(f-p) = Rf + (I-R)p \quad (23)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $Rp = p$ por estar p en el eje de rotación. La expresión anterior se puede reescribir en coordenadas homogéneas como:

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ \cdot 1 \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} \sim r_x \\ r_y \\ r_z \\ \cdot 1 \end{bmatrix}$$

Con

Donde $R = I + (\text{skew}(\xi) (1 - \cos(\theta)) + \text{skew}(\xi) \sin(\theta))$. D representa la matriz de rotación de ángulo θ en torno al eje k que pasa por un punto p .

3.2. Obtención del modelo cinemático combinando desplazamientos

Las expresiones (6) y (24) definen la matriz de desplazamiento D asociada a una traslación de longitud d o a una rotación de ángulo θ en torno a un eje que no pasa por el origen, definido por el vector k y un punto p . Utilizando estas se va a obtener el modelo cinemático de un robot manipulador.

Supongase para ello al robot situado en su posición cero ($q_i = 0$, para todo i). Sea TQ matriz de transformación homogénea que define entonces la orientación y posición de su extremo referida al sistema de la base, donde la cuarta columna de TQ representa las coordenadas de O_n en el sistema de la base y las 3 primeras columnas representan los vectores libres ortonormales X_n, Y_n, Z_n , que definen el sistema del extremo.

Si se modifica el valor de la coordenada articular q_n (traslación o rotación), correspondiente al último grado de libertad, las

coordenadas del origen O_n , y las de los 3 vectores ortonormales X_n, Y_n, Z_n , se modificarán en base al desplazamiento originado por el movimiento de la articulación, según las expresiones definidas en (6) para el caso de traslación o (24) para el caso de rotación.

De ese modo, componiendo los cuatro nuevos valores de los tres vectores ortonormales y de las coordenadas homogéneas del origen, en forma matricial, estos se podrán expresar en una nueva matriz T_n , dada por:

$$T_n = D_n T_0 \quad (25)$$

Esta matriz T_n indica la orientación y posición del extremo del robot cuando el último grado de libertad q_n ha variado y el resto se mantiene en cero. Si ahora se repite el proceso moviendo únicamente el penúltimo grado de libertad q_{n-1} , se tendrá que la orientación y posición del extremo del robot, quedará representada en la matriz T_2 dada por:

$$r_2 = D_{n-1} \cdot r_1 = D_{n-1} \cdot D_n \cdot r_0 \quad (26)$$

Repetiendo el proceso hasta llegar a desplazar el primer grado de libertad, se tendrá finalmente que la orientación y posición del extremo del robot, tras mover todos los grados de libertad vendrá dada por:

$$T_n = D_1 \cdot D_2 \dots D_{n-1} \cdot D_n T_0 = \prod_{i=1}^n D_i T_0 \quad (27)$$

Expresión final que permite obtener el Modelo Cinemático Directo del robot, haciendo uso de las expresiones (6) y (24) para obtener las matrices D_i .

4. Modelo Cinemático Inverso

Se presenta a continuación, la explicación del uso de las matrices de desplazamiento para la obtención del Modelo Cinemático Inverso (MCI), así como su aplicación al robot mostrado en la Figura 1.

4.1. Algoritmo para obtener el MCI mediante MD

Las Matrices de Desplazamiento, pueden usarse, del mismo modo que las matrices de DH para ayudar a resolver el problema cinemático inverso mediante el aislamiento de variables (combinado, si es posible, con el desacoplamiento cinemático) (Barrientos et al., 2007).

Así la expresión (27), en la que aparecen 12 ecuaciones con las n incógnitas q_i en expresiones en general muy acopladas, puede modificarse premultiplicando consecutivamente por las inversas de las matrices de Desplazamiento D_i^{-1} , para facilitar el aislamiento y resolución de las variables articulares q_1, q_2, \dots, q_n , tal y como se indica en (28).

$$\begin{aligned} T_n &= D_1 \cdot D_2 \dots D_{n-1} \cdot D_n T_0 \\ (D_1)^{-1} T_n &= D_2 \dots D_{n-1} \cdot D_n T_0 \\ (D_2)^{-1} (D_1)^{-1} T_n &= D_3 \dots D_{n-1} \cdot D_n T_0 \end{aligned} \quad (28)$$

4.2. Ejemplo de obtencion del MCI mediante MD

Para el robot de la Figura 1, se tiene que del elemento (2,4) de la expresion matricial:

$$(D_1 T^1 T_4 = D_2 D_3 T_0) \tag{29}$$

es posible obtener:

$$P_y C_i - p_x S_i = 0 \rightarrow q_i = \arctg \dots \tag{30}$$

A continuation la expresion:

$$(D_2 r^1 (D_1 r^1 T_4 = D_3 T_0) \tag{31}$$

permite obtener q_2 igualando los elementos (3,4), con el resultado de:

$$q_2 = \arctg \left(\frac{H_{Pl+P^2y} \cdot u}{U} \right) \tag{32}$$

La expresion de q_3 se puede obtener tambien de (31), igualando el cociente de los elementos (3,1) y (2,1), dando por resultado:

$$q_3 = \arctg \left(\frac{n_x C_i + n_y S^2 S_2 - n_z C_2}{n_x C_i - n_y S_1} \right)$$

5. Modelo Diferencial

EL modelo Diferencial es de gran interes para el control del robot. Se va mostrar a continuation como es posible obtener el Modelo Diferencial a partir de las MD, poniendolo en practica sobre el robot de la Figura 1.

5.7. Obtencion del modelo diferencial mediante MD

El modelo diferencial permite relacionar las velocidades $\{q\}$, q_2, q_3 , o momentos en las articulaciones $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, con las velocidades de traslacion y rotation en el extremo $(v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z)$ o fuerzas y momentos en el extremo del robot $(F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)$. Dicha relation viene dada por la matriz Jacobiana (J) segun las correspondientes relaciones:

$$\begin{pmatrix} \dot{f} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Las columnas de la matriz Jacobiana se pueden obtener a partir de las matrices de Desplazamiento, de un modo equivalente al utilizado con las matrices Denavit Hartenberg.

Para ello, debe considerarse que los 6 elementos de la columna j de la matriz Jacobiana estan formados por la aportacion de la velocidad de la articulation, a la velocidad V del extremo.

Se deben por lo tanto obtener estas aportaciones para conocer la columna j .

Para ello se distinguiran los 3 primeros elementos de J , correspondientes a la aportacion a la velocidad de traslacion de los 3 ultimos, correspondientes a la aportacion a la velocidad de rotation.

$$h \tag{34}$$

donde J_v y J_w seran respectivamente, las componentes x, y, z de la contribucion de q_j a las velocidades de traslacion (v) y rotation (w) del extremo del robot.

La Figura 4 representa al grado de libertad j aislado del resto, cuando el resto de los grados de libertad q_i , con $i \neq j$, se mantienen invariables.

Junto a la articulation j se representan los sistemas de referencia del origen $\{OQ, XQ, YQ, ZQ\}$ y del extremo $\{O_n, X_n, Y_n, Z_n\}$, asi como el eje que define el movimiento de la articulation j , dado por el vector director k_j y un punto cualquiera del mismo f_{ij} . Estos se obtienen como resultado de desplazar el vector k_j y el punto p_j que definian el eje de la articulation en la position cero del robot, mediante el movimiento de los grados de libertad anteriores (q_i, \dots, q_{j-1}) a la position considerada. Su expresion se podra obtener a partir de las matrices de Desplazamiento D ;

$$R_i \cdot R_j \cdot R_{j-i-k_j} \tag{35}$$

$$D_i \cdot D_j \tag{36}$$

Donde se debe tener en cuenta que los vectores directores k_j son vectores fijos, por lo que solo se ven afectados de las rotaciones R_j incluidas en los desplazamientos D_j , que quedan definidos por las correspondientes matrices de rotation R_j (3×3) de la matriz de desplazamiento (ecuacion (16)). Por su parte, los vectores de position p_j si se ven afectados del desplazamiento completo (rotation y traslacion) por lo que debe emplearse la matriz de desplazamiento D_j y utilizar su expresion en coordenadas homogeneas.

Se representan tambien los vectores ip_e y op_e que corresponden respectivamente a los vectores que unen un punto del eje de la articulation j y el origen del sistema asociado a la base con el extremo del robot.

Establecidos el vector director k_j y un punto p_j que define el eje de la articulation j , las velocidades lineal y angular originadas en el extremo como consecuencia del movimiento de q_j pueden obtenerse como:

Caso de grado de libertad de rotation:

$$\dot{v} = k_j X^j p_e \cdot \dot{q}_j \tag{37}$$

$$0 = t_j \cdot \dot{q}_j \tag{38}$$

Caso de grado de libertad de traslacion.

$$\dot{v} = t_j \cdot \dot{q}_j \tag{39}$$

$$0 = 0 \quad (40)$$

donde el vector k_j está definido por (35) y el vector ip_e se puede obtener como (Figura 4):

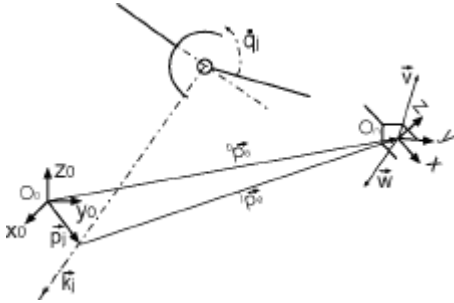


Figura 4: Efecto de la velocidad articular sobre el extremo del robot

$$Ipe \wedge Pe - Pi \quad (41)$$

p_j queda definido en (36) y ip_e es el vector de posición del extremo del robot cuando se han movido los n grados de libertad por lo que tendrá como expresión la dada en la columna 4 de la matriz del Modelo Cinemático Directo (27):

$$V_j = r_{:, (1:3,4)} \quad (42)$$

Por lo tanto la columna j de la matriz Jacobiana se obtendrá como:

$$h = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} ij & x^j & p_e \\ \hline h \\ \hline h \\ \hline 0 \end{matrix} \right| & \begin{matrix} \text{grado de libertad de rotación} \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \left| \begin{matrix} h \\ \hline h \\ \hline 0 \end{matrix} \right| & \begin{matrix} \\ \text{grado de libertad de traslación} \\ \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (43)$$

con k_j, p_{ij}, p_e definidos en (35), (36), (41), (42).

5.2. Ejemplo de obtención del modelo diferencial mediante MD

Se va a aplicar este procedimiento de obtención del Modelo Diferencial (Matriz Jacobiana) al robot de 3 GDL del que se obtuvo el Modelo Cinemático Directo e Inverso en los apartados 2 y 4 respectivamente. Se trata de un robot de 3 GDL de rotación, cuya geometría se muestra en la Figura 1. En el apartado 2 se obtuvo la matriz de transformación homogénea T_4 (4) que resuelve el MCD. La cuarta columna de la misma, proporciona las coordenadas del extremo del robot, siendo estas:

$${}^0Pe = \begin{pmatrix} d - (L_2 + L_3)d \\ SUU + U.C2 \\ Li + L_3.S_2 \end{pmatrix}$$

Aplicando las expresiones (35), (36) y (41) a los vectores $ki, k_2, k_3, pi, p_2, p_3$, con las matrices D_1, D_2, D_3 , asociadas al robot del ejemplo de la Figura 1, y cuyo valor se obtuvo en el apartado 2, expresiones (1,2,3), se obtiene:

Pi

$$\begin{pmatrix} s_x \\ -d \\ 1 \end{pmatrix} p_2 = \begin{pmatrix} \sim UPx \\ L_2 Si \\ U \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} CiC_2 & -Li d & id & -1 \\ Sid & Ps & -L_2 S & i(d-1) \\ c_2 & & L & -L_2 S_2 \end{pmatrix}$$

$${}^0Pe = \begin{pmatrix} d(L_2 + L_3 d) \\ Si(L_2 + L_3 d) \\ L_2 + L_3 S_2 \end{pmatrix}$$

$${}^0Pe = \begin{pmatrix} L_3 C & id \\ L_3 S & id \\ L_3 S_2 \end{pmatrix}$$

$${}^0Pe = \begin{pmatrix} (L_2 + L_3) d d \\ (L_2 + L_3) S id \\ (L_2 + L_3) S_2 \end{pmatrix}$$

Y aplicando la expresión (43) se obtiene la Jacobiana geométrica del robot:

$$h = \begin{pmatrix} Si(L_2 + L_3 d) & -L_3 Ci S_2 & 0 \\ d(L_2 + L_3 d) & -L_3 Si S_2 & 0 \\ 0 & L_3 d & 0 \\ 0 & Si & d C_2 \\ 0 & -d & Sid \\ 1 & 0 & S_2 \end{pmatrix}$$

6. Ejemplos de Aplicación

Se va a aplicar a continuación el algoritmo descrito para la obtención del MCD a 2 robots. En primer lugar, se aplicará a un robot industrial de 7 grados de libertad ampliamente difundido, el Mitsubishi PA-10. Por último se aplicará el método a un robot multicadena, para el caso particular de un robot humanoide formado por 13 grados de libertad. Para este último caso se presentan las consideraciones necesarias para abordar diferentes tipos de cadenas ramificadas, que suponen gran utilidad para modelar mecanismos bipedos, cuadrupedos, hexapodos, etc.

En los 2 casos, se muestran tanto los sistemas de coordenadas y parámetros de DH, como los ejes de cada articulación con sus correspondientes vectores directores y puntos. Con estos, haciendo uso del código Matlab © incluido en el apartado 2, se obtiene la matriz T_n que define el modelo cinemático directo.

6.1. Robot PA-10 de 7 grados de libertad

En esta sección se presenta el ejemplo de un brazo industrial redundante, Mitsubishi PA-10 de 7 grados de libertad. La información referente a la disposición mecánica de los grados de libertad de este robot, así como sus dimensiones fueron tomadas del manual de programación del mismo (MITSUBISHI,

2003). A continuation se presentan cada uno de los pasos del algoritmo presentado en la Tabla 1, aplicado al robot mencionado.

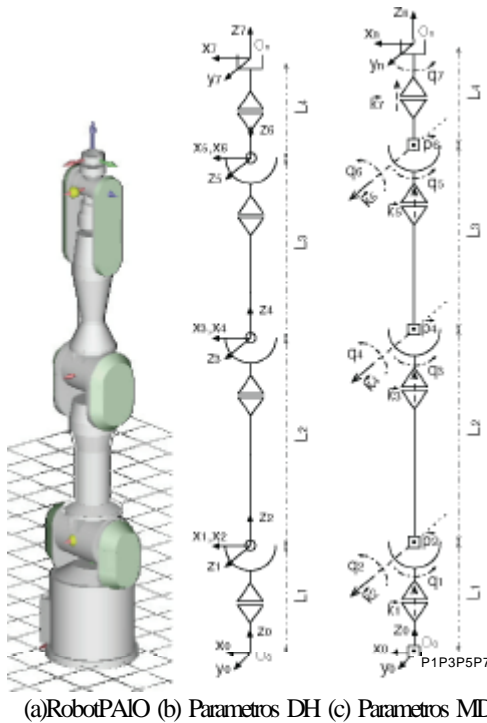


Figura 5: Descripción de los parametros cinematicos del robot PA-10.

D-1. Según la configuración del sistema de referencia base OQ , así como la del sistema de referencia del efector final O_n , los cuales se pueden apreciar en la Figura 5c, se define la matriz TQ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \text{fti} \ll \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D-2.1. y D-2.2. En la Figura 5c se pueden apreciar los vectores directores lq , así como los puntos seleccionados sobre los ejes de la articulación $\$$. Dicha información se presenta en la Tabla 4.

D-3. Como se menciona en el apartado 2, el MCD se obtiene finalmente como el producto $\cdot = (n \text{ ti } A) \cdot r_0$.

Adicionalmente, se presenta en la Tabla 5 los parámetros DH del robot, los cuales obedecen la distribución de sistemas de referencia que se muestra en la Figura 5b.

6.2. Robot Bipedo

Los brazos manipuladores que se han expuesto como ejemplos previamente, son representados mediante estructuras de

Tabla 4: Parametros MD del robot PA-10

Eje	Vector director lq	Punto cualquiera del eje pi
1	[0,0,1]	[0,0,0]
2	[0,1,0]	[0,0, L _J]
3	[0,0,1]	[0,0,0]
4	[0,1,0]	[0,0, L ₁ +L ₂]
5	[0,0,1]	[0,0,0]
6	[0,1,0]	[0,0,L ₁ +L ₂ + L ₃]
7	[0,0,1]	[0,0,0]

Tabla 5: Parametros DH del robot PA-10

Link	q_i	d_i	c_{li}	a_t
1	$\ll n$	U	0	$\frac{pi}{2}$
2	q_i	0	0	$\frac{pi}{7}$
3	q_3	U	0	$\frac{pi}{2}$
4	q_A	0	0	$\frac{pi}{2}$
5	q_s	U	0	$\frac{pi}{2}$
6	q_e	0	0	$\frac{pi}{2}$
7	q_i	U	0	0

cuerpos rígidos serialmente acoplados. Otros mecanismos, como robots bipedos (Arbulu, 2009), cuadrupedos (Gonzalez de Santos et al., 2006) o hexapodos (Gonzalez de Santos et al., 2004), pueden ser modelados mediante estructuras ramificadas de cuerpos rígidos.

El último ejemplo presentado, muestra la solución del modelo cinemático directo para un sistema bipedo caminante de 13 grados de libertad, dispuestos como 1 que conecta la base del sistema (tronco del humanoide) y los 12 restantes con 2 piernas con 6 grados de libertad cada una (Ver Figura 6). Los robots bipedos de 12 grados de libertad, son una configuración típica de los robots humanoides (Hirai et al., 1998), (Huang et al., 2001), (Committee, 2006), (Kajita et al., 2007).

D-1. Una consideración importante en los sistemas ramificados es que tienen más de 1 efector final. Por esta razón, se definen sistemas de referencia ubicados en los efectores finales. Para este caso particular, se definen, mediante matrices de transformación homogénea, la posición y orientación de los pies del sistema caminante respecto al sistema de referencia de la base:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -Li \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & Li \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

D-2.1. y D-2.2. Dado que el robot se modela mediante una estructura ramificada de cuerpos rígidos, los ejes de

rotation lq y los puntos pi son numerados siguiendo un recorrido de primero en profundidad (DFS, Depth-First Search), lo que permite sistematizar el algoritmo recursivo de solution del modelo cinematico directo. Este esquema de numeration ha sido utilizado por otros autores en la solution de los problemas cinematicos y dinamicos de estructuras de cuerpos rigidos (Featherstone, 2008). Siguiendo esta numeration, se tendra siempre un nodo padre $A(i)$ que cumple que $A(i) < i$ para todo i . Para el caso particular del robot bipedo esto se puede apreciar en la Figura 6. Los parametros MD resultantes se pueden apreciar en la Tabla 6.

D-3. Al igual que en el ejemplo anterior, el MCD se obtiene finalmente como el producto $T_{0,n} = (J^{-1} \dot{p}_i A) \cdot T_0$

Tabla 6: Parametros MD del robot bipedo

$A(i)$	Eje	lq	pi
0	1	[0,0,1]	[0,0,0]
		[0,0,1]	[0,-L ₂ ,0]
		[1,0,0]	[0,-L ₂ ,-L ₁ -L ₃]
		[0,1,0]	0, 0, -(L ₁ +E t ₃ («
		[0,1,0]	0, 0, -(L ₁ +E t ₃ («
		[0,1,0]	0, 0, - L ₁ +E t ₃ («
		[1,0,0]	0, -A, -(xi + zLfe)
		[0,0,1]	0,L ₂ ,0]
		[1,0,0]	[0,L ₂ ,-L ₁ -L ₃]
	10	[0,1,0]	0, 0, - (L ₁ +E t ₃ («
10	11	[0,1,0]	0, 0, -(L ₁ +E t ₃ («
11	12	[0,1,0]	0, 0, - (L ₁ +Zl ₃ (L _i)
12	13	[1,0,0]	,L ₂ ,-{L _i +Zl ₃ (L _j)}

Por ultimo, y a modo de comparacion, se presentan en la Tabla 7 los parametros DH del robot bipedo. Se puede apreciar que la metodologia utilizada en este caso, consiste en modelar cada una de las extremidades del robot como una estructura serial.

7. Conclusiones

Se ha presentado un metodo para la obtencion del modelo de cadenas cinematicas en robots, basado en el uso de las Matrices de Desplazamiento. Estas permiten conocer el resultado de desplazar (rotar o trasladar) un punto en el espacio a lo largo de un eje cualquiera.

En el procedimiento de DH y tras la sencilla fase de identification de los ejes sobre los que se produce el desplazamiento de cada grado de libertad, se precisa localizar el origen y los vectores directores que definen un sistema de coordenadas asociado al eslabon. Esta localizacion del sistema de coordenadas puede revestir cierta dificultad y es posiblemente el motivo mas habitual de errores en la obtencion del MCD de un robot. El metodo presentado soslaya totalmente esta dificultad, por cuanto precisa linicamente de la identification del eje sobre el que

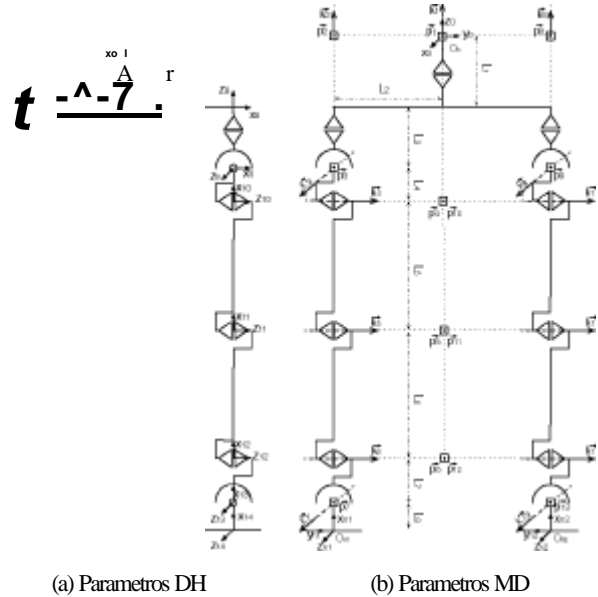


Figura 6: Descripción de los parametros cinematicos del robot bipedo de 13 GDL.

Tabla 7: Parametros DH del robot Bipedo

$A(i)$	Link	q_i	d_i	c_{li}	u_i
0	1	$\llcorner i + !$	$-U$	$-u$	0
1	2	l_2	$-u$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	3	$* + f$	0	$-u$	$\frac{\pi}{2}$
3	4	$\llcorner 4$	0	$-u$	0
4	5	q_5	0	$-u$	0
5	6	q_6	0	$-ln$	$\frac{\pi}{2}$
6	7	q_7	0	$-u$	0
0	8	$q_8 + \setminus$	$-U$	u	0
8	9	q_9	$-U$	0	$\frac{\pi}{2}$
9	10	$* + ?$	0	$-u$	$\frac{\pi}{2}$
10	11	q_{11}	0	$-u$	0
11	12	q_{12}	0	$-u$	0
12	13	q_{13}	0	$-ln$	$\frac{\pi}{2}$
13	14	q_{14}	0	$-u$	0

se produce el desplazamiento del grado de libertad, sin tenerse que localizar los citados sistemas de coordenadas.

La expresion final obtenida en el metodo de las Matrices de Desplazamiento, coincide con la obtenida en el procedimiento de modelado mediante la formula del producto de exponenciales, pero el enfoque aqui presentado para su obtencion utiliza razonamientos simples, basados en relaciones vectoriales y algebra lineal, sin recurrir a conceptos como matrices exponenciales, algebras de Lie u otros, de modo que es adecuado para ser incluido en cursos basicos de introduccion a la robotica.

El uso de las matrices de desplazamiento se ha extendido a la obtencion del modelo cinematico inverso y del modelo diferencial, completando de este modo el alcance habitual del modelado cinematico de robots.

En definitiva, el modelado de robots basado en las matrices de desplazamiento presentado se formula como una alternativa al tradicional metodo de Denavit-Hartenberg, considerandose que, una vez conocido, sera utilizado con preferencia para este fin.

English Summary

Modeling of kinematic chains by Displacement Matrixes. A comprehensive alternative to Denavit-Hartenberg method.

Abstract

In this paper, a new method for modelling kinematic chains in Robotics is presented. This method eludes the difficulties derived from selecting the coordinate frames required to obtain Denavit-Hartenberg parameters. The proposed method arises from knowing the position and orientation of the end-effector of the robot in its home position. This algorithm allows obtaining their transformations according to the successive variations of its degrees of freedom in descending order from the remotest to the closest to the base.

The movements are calculated based on the Displacement Matrixes by determining in which point it is transformed when such point is displaced (rotated or moved) with respect to an axis that does not pass through the origin, which is different to the Denavit-Hartenberg method that requires locating the origin and the direction of the vectors that define the frame for each link.

The method based on the Displacement Matrixes only requires identifying the axis of the joint, which allows identifying the modelling in a simpler and faster manner when compared to Denavit-Hartenberg.

The Displacement Matrixes and the corresponding kinematic modeling are obtained based on the joint axes identification by using simple mathematical operations that are easily coded.

Keywords:

Kinematics model, Denavit-Hartenberg, Rodrigues' rotation formula.

Referencias

- Arbulu, M., 2009. Stable locomotion of humanoid robots based on mass concentrated model. Ph.D. thesis, Universidad Carlos III de Madrid.
- Barrientos, A., Penin, L., Balaguer, C., Aracil, R., 2007. Fundamentos de robotica, 2nd Edition. McGraw-Hill.
- Brockett, R. W., 1984. Robotic manipulators and the product of exponentials formula. In: Fuhrmann, P. (Ed.), *Mathematical Theory of Networks and Systems*. Springer Berlin / Heidelberg, pp. 120-129.
- Committee, I. R. I. P., Oct. 2006. Static Walk of a Humanoid Robot Based on the Singularity-Consistent Method, 1-6.
- Corke, P. I., 1996. A robotics toolbox for MATLAB. *Robotics & Automation Magazine*, IEEE 3 (1), 24-32.
- Denavit, J., Hartenberg, R. S., 1955. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *ASME Journal of Applied Mechanisms* 23, 215-221.
- Featherstone, R., Feb. 2008. *Rigid Body Dynamics Algorithms*. Springer-Verlag New York Inc.
- Funda, J., 1988. A computational analysis of line-oriented screw transformations in robotics.
- Funda, J., Paul, R., 1990. A computational analysis of screw transformations in robotics. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on* 6 (3), 348-356.
- Gonzalez de Santos, P., Garcia, E., Cobano, J. A., Ramirez, A., 2004. STL06: A six-legged robot for humanitarian de-mining tasks. In: *Automation Congress, 2004. Proceedings. World*, pp. 523-528.
- Gonzalez de Santos, P., Garcia, E., Estremera, J., 2006. *Quadrupedal Locomotion: An Introduction to the Control of Four-legged Robots*, 1st Edition. Springer.
- Hirai, K., Hirose, M., Haikawa, Y., 1998. The development of Honda humanoid robot. In: *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pp. 1321-1326.
- Huang, Q., Yokoi, K., Kajita, S., Kaneko, K., Arai, H., Koyachi, N., Tanie, K., 2001. Planning walking patterns for a biped robot. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on* 17.
- Jaramillo-Botero, A., Matta-Gomez, A., Correa-Cacedo, J. F., Perea-Castro, W., Dec. 2006. ROBOMOSP. *Robotics & Automation Magazine, IEEE* 13 (4), 62-73.
- Jin, Y., Xiaorong, W., Jun. 2010. The application of the dual number methods to scara kinematics. In: *International Conference on Mechanic Automation and Control Engineering (MACE)*, 2010. pp. 3871-3874.
- Kajita, S., Kaneko, K., Morisawa, M., Nakaoka, S., Hirukawa, H., 2007. ZMP-based Biped Running Enhanced by Toe Springs. In: *Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on*. pp. 3963-3969.
- Koks, D., Sep. 2006. *Explorations in Mathematical Physics: The Concepts Behind an Elegant Language*, 1st Edition. Springer.
- McCarthy, J. M., Jun. 1986. Dual Orthogonal Matrices in Manipulator Kinematics. *The International Journal of Robotics Research* 5 (2), 45-51.
- MITSUBISHI, 2003. *General Purpose Robot PA 10 SERIES: PROGRAMMING MANUAL*.
- Murray, R. M., Li, Z., Sastry, S. S., Mar. 1994. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, 1st Edition. CRC Press.
- Ollero, A., 2001. *Robotica: Manipuladores y robots moviles*, 1st Edition. MARCOMBO.
- Paul, R. P., Nov. 1981. *Robot manipulators: mathematics, programming, and control*, 1st Edition. The MIT Press, Cambridge, MA, USA.
- Paul, R. P., Shimano, B., 1978. Kinematic control equations for simple manipulators. In: *Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes, 1978 IEEE Conference on*. pp. 1398-1406.
- Perez, A., McCarthy, J. M., 2004. Dual Quaternion Synthesis of Constrained Robotic Systems. *Journal of Mechanical Design* 126 (3), 425.
- Pieper, D. L., Oct. 1968. *The kinematics of manipulators under computer control*. Ph.D. thesis, Stanford University.
- Spong, M., Hutchinson, S., Vidyasagar, M., Nov. 2005. *Robot Modeling and Control*, 1st Edition. Wiley.
- Veldkamp, G. R., Jan. 1976. On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics. *Mechanism and Machine Theory* 11 (2), 141-156.