

CURSO

**ELEMENTOS FINITOS NO LINEALES EN
MECÁNICA DE SÓLIDOS Y ESTRUCTURAS**

**Introducción básica y
formulación del Método de los
Elementos finitos**

Enrique Alarcón

Madrid, 13-24 Enero

Introducción básica y formulación del método de los elementos finitos

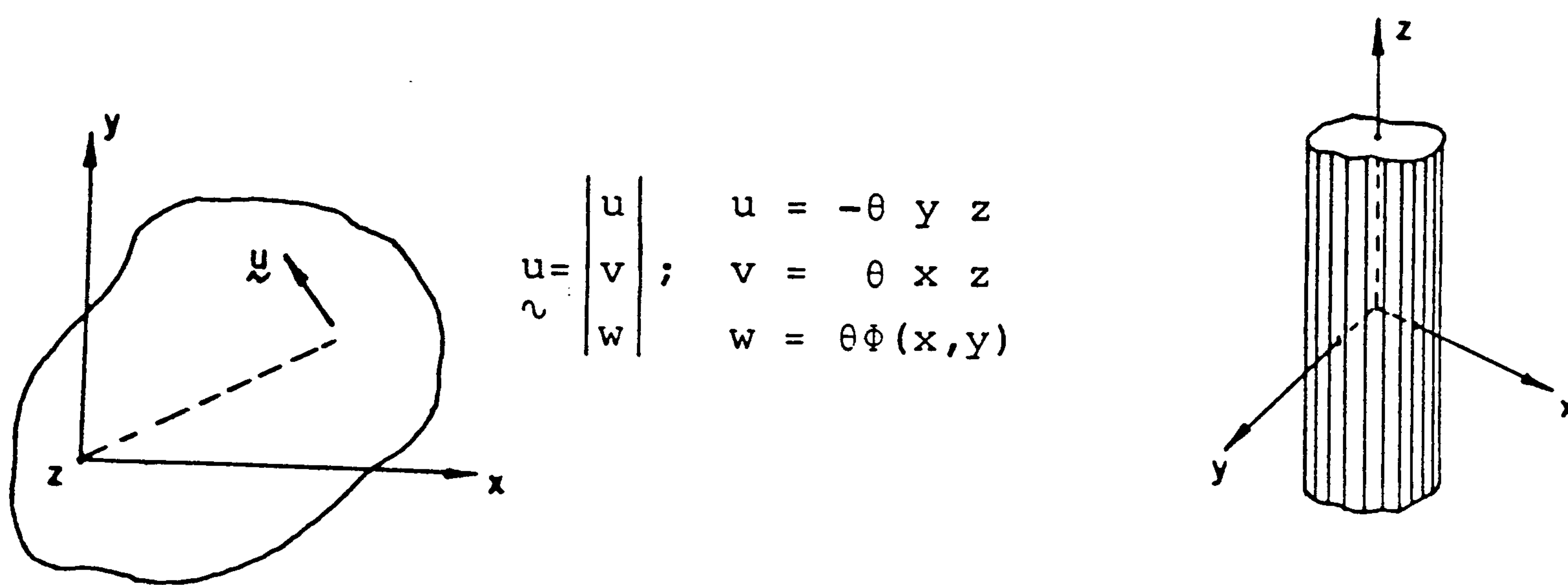
1. Un ejemplo de introducción: la torsión de cilindros rectos.
2. La formulación débil del problema potencial.
3. La idea de aproximación
 - 3.1. Elementos, nudos y variables nodales.
 - 3.2. Funciones de interpolación
 - 3.3. La matriz de rigidez elemental
 - 3.4. El vector de cargas elemental
4. La matriz de rigidez y el vector de cargas globales
5. La imposición de las condiciones de contorno
6. Elementos isoparamétricos
7. Convergencia h y convergencia p

Con el método de elementos finitos se ha desarrollado un procedimiento para el tratamiento de ecuaciones diferenciales y su resolución numérica. En este capítulo se va a realizar la aplicación a problemas de potencial regidos por la ecuación de Laplace. Se trata de una situación relativamente sencilla pero que permite comentar la mayoría de las características del método de elementos finitos en desplazamientos y sirve como introducción a situaciones más complicadas. Además esta ecuación rige problemas de interés como la filtración, la torsión de cilindros, la distribución de temperaturas en régimen estacionario, etc. En lo que sigue la exposición se limita a problemas planos. Tras un primer ejemplo representativo del tema se realiza la formulación débil del problema de potencial. Acto seguido se introduce el concepto de discretización con toda su parafernalia de elementos, nudos, variables nodales, funciones de interpolación, etc.

El capítulo finaliza con la mención de algunos temas más especializados que el lector estudioso deberá proseguir en otro tipo de textos.

1. LA TORSIÓN DE CILINDROS RECTOS

Con objeto de establecer una referencia familiar, se recuerdan en este apartado los conceptos fundamentales de la teoría de Saint-Venant.



θ : ángulo girado por unidad de longitud

Figura 1.

Como es sabido (figura 1), se supone que el vector desplazamiento admite unas componentes en su plano semejantes a las del caso del cilindro circular, pero se añade una tercera componente w independientemente de la posición de la sección transversal. Es decir, se admite que las secciones transversales se alabean.

La determinación de esta función de alabeo es justamente el problema de Saint-Venant.

Con el campo de desplazamientos definido en la figura 1, es inmediato comprobar por aplicación de la ley de Hooke que la distribución de tensiones es:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G\theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \quad (1)$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G\theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right)$$

donde G es el módulo de rigidez del material $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Las ecuaciones de equilibrio son identidades, salvo la tercera:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

que se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

Si G es constante se obtiene así que el alabeo ϕ debe ser una función armónica, esto es, debe cumplir la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4)$$

Esta es la ecuación de campo que rige el problema. Para que éste quede bien planteado se precisa que se establezcan las condiciones de contorno que debe cumplir el alabeo en las paredes del cilindro. Ello se consigue viendo las componentes de las tensiones. En los laterales, el vector normal es

$$\{n\}^T = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}, 0 \right)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ahora bien, sobre la superficie lateral no actúan tensiones, luego:

$$\tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0$$

o bien usando (1):

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{ds} = 0 \quad (6)$$

que puede escribirse como:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \begin{bmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{bmatrix} = (x, y) \begin{bmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{bmatrix} \quad (7)$$

es decir:

$$\{\nabla \phi\}^T \cdot \{n\} = \{r\}^T \cdot \{t\} \quad (8)$$

donde $\{t\}$ es el vector tangente al contorno.

Por su parte la condición de contorno en el extremo,

$$M_t = \int_{\Omega} -\tau_{xz} y + \tau_{yz} x = G \theta \int_{\Omega} \left[x^2 + y^2 + \frac{\partial \phi}{\partial y} x - \frac{\partial \phi}{\partial x} y \right] \quad (9)$$

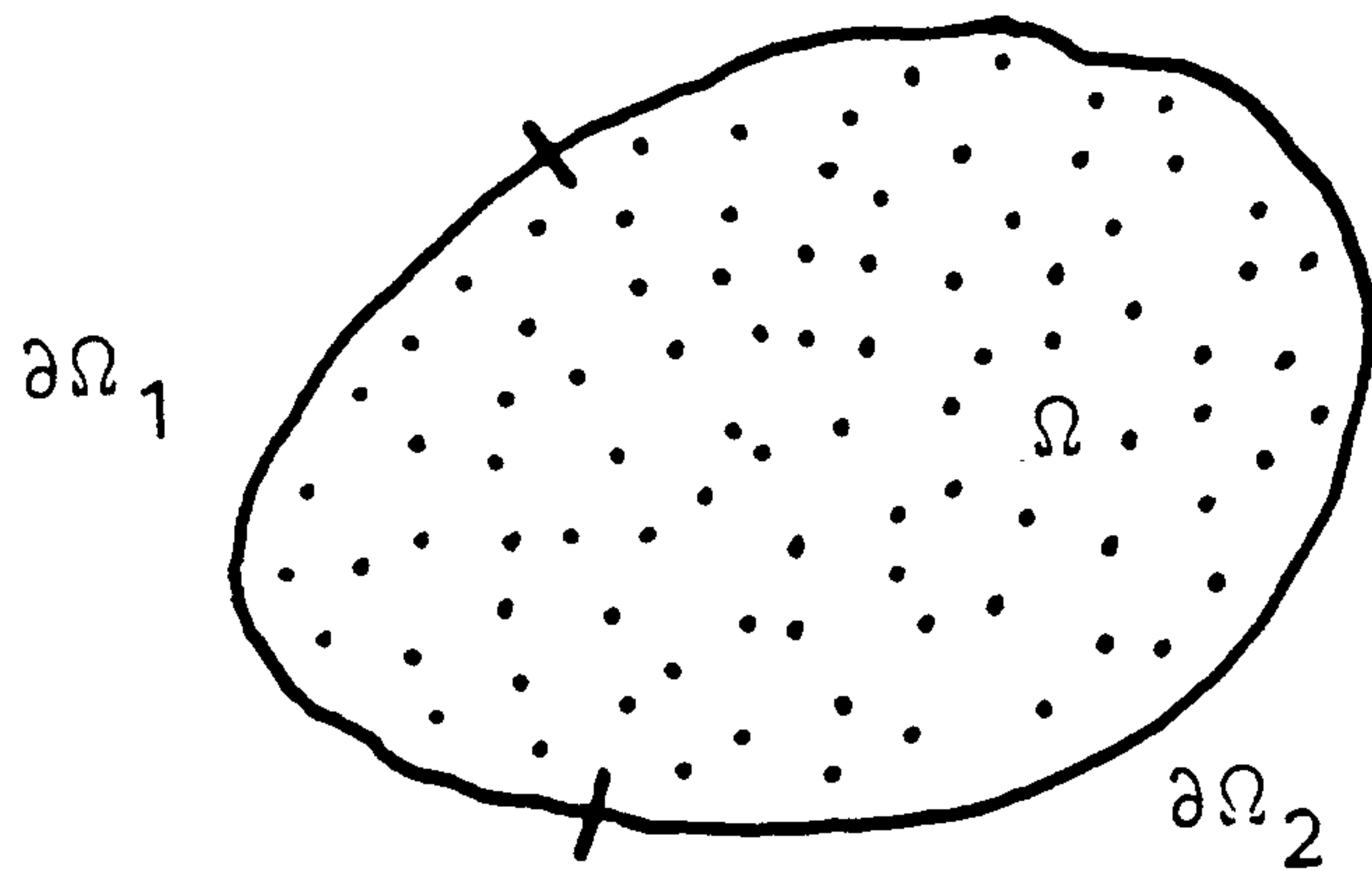
permite relacionar el valor de alabeo con el momento torsor actuante. La ecuación (9) se puede expresar también como:

$$M_t = G \theta \left[\int_{\Omega} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} (x^2 + y^2) \frac{\partial \phi}{\partial s} \right] \quad (10)$$

2. LA FORMULACIÓN DÉBIL DEL PROBLEMA DE POTENCIAL

Del ejemplo anterior cabe extraer el problema matemático descrito en la figura 2. Sobre un dominio bidimensional Ω de contorno $\partial\Omega$ se pide obtener una función armónica w tal que en el trozo $\partial\Omega_1$ del contorno tenga un valor dado w_0 y en $\partial\Omega_2$

se conozca el flujo $\frac{\partial w}{\partial n} = q_0$



$$\nabla^2 w = 0$$

$$w = w_0 \text{ en } \partial\Omega_1 \text{ (Dirichlet)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = q_0 \text{ en } \partial\Omega_2 \text{ (Neumann)}$$

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$$

Figura 2

En el caso de la torsión de cilindros sólo apareció una condición del segundo tipo (llamada de Neumann) pero hacer que surja otra de tipo Dirichlet (valores dados de w) es inmediato. Por ejemplo, en la figura 3, se muestra que las condiciones de antisimetría permiten reducir el estudio de la torsión de un cilindro

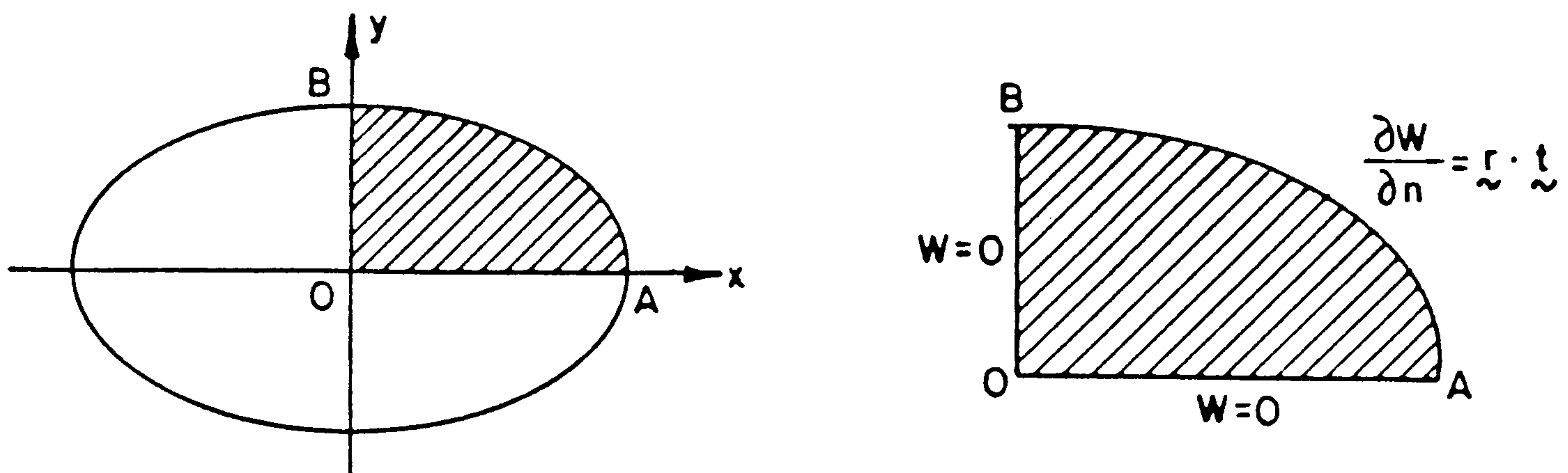


Figura 3

elíptico a la resolución de un problema de Laplace mixto.

La situación se puede generalizar al problema de Poisson, en cuyo caso la ecuación diferencial de campo es:

$$-\nabla^2 w = p \quad (10)$$

con las condiciones de contorno:

$$w = w_0 \text{ en } \partial\Omega_1$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = q_0 \text{ en } \partial\Omega_2 \quad (11)$$

La formulación débil del problema (10) se obtiene en la forma habitual. Sea $\psi_i(x,y)$ el individuo de una cierta familia de funciones que se especificará más adelante. Multiplicando ambos miembros de 10 e integrando en el dominio Ω se obtiene:

$$-\int_{\Omega} \psi_i \nabla^2 w = \int_{\Omega} \psi_i \cdot p \quad (12)$$

Pero, como es sabido:

$$\text{div}(\psi_i \{\nabla w\}) = \{\nabla \psi_i\}^T \{\nabla w\} + \psi_i \nabla^2 w \quad (13)$$

de modo que, el primer miembro de (12) es susceptible de ser escrito como:

$$-\int_{\Omega} \psi_i \nabla^2 w = \int_{\Omega} \{\nabla \psi_i\}^T \{\nabla w\} - \int_{\Omega} \text{div}(\psi_i \{\nabla w\}) \quad (14)$$

o, aplicando el teorema de la divergencia y sustituyendo en (12):

$$\int_{\Omega} \{\nabla \psi_i\}^T \cdot \{\nabla w\} - \int_{\partial\Omega} \psi_i \{\nabla w\}^T \cdot \{n\} = \int_{\Omega} \psi_i \cdot p \quad (15)$$

donde $\{n\}$ es la normal exterior al contorno. Si se considera:

$$\{\nabla w\}^T \{n\} = \frac{\partial w}{\partial n} = q \quad (16)$$

se tiene:

$$\boxed{\int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla w - \int_{\partial\Omega_1} \psi_i q = \int_{\Omega} \psi_i \cdot p + \int_{\partial\Omega_2} q_0 \psi_i} \quad (17)$$

La ecuación (17) es la formulación débil buscada. Es una expresión que, con cierto abuso de lenguaje, podríamos denominar "de trabajos virtuales", ya que el segundo miembro recoge los trabajos de las "cargas" p en los "desplazamientos" ψ_i . Asimismo $\int \{\nabla \psi_i\}^T \{\nabla w\}$ representa la energía interna (en el caso de torsión $\{\nabla w\}$ está relacionada con la tensión tangencial)

Para que (17) tenga sentido en el espacio de las funciones de cuadrado integrable basta que $(w, \psi_i) \in H^1$ y, por tanto, en el segundo miembro p , cantidad dual, puede ser $p \in H^{-1}$, es decir serían admisibles "cargas concentradas" (por ejemplo focos de calor en caso que el problema represente temperaturas, o fuentes en caso de filtración). La norma energética es:

$$\|e\|_E = \int_{\Omega} (\nabla w)^2 \quad (18)$$

3. LA IDEA DE APROXIMACIÓN

Al igual que en estructuras de barras es posible ahora suponer construida la función w como superposición de una familia auxiliar $\{\psi_i\}$. Es decir aproximar

$$w(x,y) \sim w_N(x,y) = \sum_{j=1}^N a_j \psi_j(x,y) \quad (19)$$

y obligar que los coeficientes a_j sean calculados con un criterio de optimalidad. Que este criterio esté implícito en la formulación débil se observa trabajando en (12) de la misma forma que es habitual al tratar el método de los residuos ponderados. Sustituyendo (19) en (12) se obtiene:

$$-\int_{\Omega} \psi_i \nabla^2 w_N = \int_{\Omega} \psi_i p \quad (20)$$

Es decir:

$$\int_{\Omega} \psi_i (\nabla^2 w_N + p) = 0 \quad (21)$$

Pero, según (10):

$$p = -\nabla^2 w$$

luego:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w_N - \nabla^2 w) \psi_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

La función:

$$\varepsilon(x,y) = \nabla^2 w_N(x,y) - \nabla^2 w(x,y) \quad (23)$$

representa los residuos "energéticos" y la condición (22) indica que la proyección de estos residuos sobre los vectores base es nula. Esto es **el residuo es ortogonal al subespacio engendrado por las funciones de interpolación ψ_i y por tanto,**

obligando a que se cumplan las N ecuaciones (22) se está obteniendo la mejor aproximación posible a la solución real, basada en las ψ_i .

El método de Rayleigh-Ritz se obtiene sustituyendo (19) en (17), pero previamente conviene eliminar el segundo sumando de (17). Para ello basta observar que se puede hacer:

$$w = w^* + \phi_0 \quad (24)$$

donde:

$$w^* = 0 \text{ en } \partial\Omega_1$$

$$\phi_0 = w_0 \text{ en } \partial\Omega_1$$

Es decir, al aproximar w se hace:

$$w \sim \sum_{j=1}^N a_j \psi_j + C_1 \chi_1 + C_2 \chi_2 \dots + C_M \chi_M = \sum_{j=1}^N a_j \psi_j + \sum_{k=1}^M C_k \chi_k \quad (25)$$

donde $\psi_j = 0$ en $\partial\Omega_1$ y las χ_j se escogen para interpolar los datos, w_0 en el sentido que se verá a continuación.

Obsérvese que las incógnitas son N ya que las C_k se fijan de modo que se cumplan las condiciones esenciales.

Con ello se consigue que:

$$\int_{\partial\Omega_1} \psi_i q = 0 \quad (26)$$

para lo cual:

$$\psi_i \in H_0^1 \quad (27)$$

El sistema discretizado se escribe así:

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \nabla \psi_i \nabla \psi_j \right) a_j + \sum_{k=1}^M \left(\int_{\Omega} \nabla \psi_i \nabla \chi_k \right) C_k = \int_{\Omega} p \psi_i + \int_{\partial\Omega_2} q_0 \psi_i \quad (28)$$

o bien, pasando los sumandos conocidos a la derecha.

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \nabla \psi_i \nabla \psi_j \right) a_j = \int_{\Omega} p \psi_i + \int_{\partial\Omega_2} q_0 \psi_i - \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} (\nabla \psi_i \nabla \chi_k) C_k \quad (29)$$

En el método de los elementos finitos, para interpolar se buscan funciones definidas localmente; esto es, con soporte limitado, de modo que muchos elementos de las integrales sean cero.

La ecuación (29) es susceptible de ser escrita como:

$$k_{ij} a_j = f_i$$

$$\{f\} [a] = \{f\} \quad (30)$$

donde:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \{ \nabla \psi_i \}^T \cdot \{ \nabla \psi_j \}$$

$$f_i = \int_{\Omega} p \psi_i + \int_{\partial\Omega_2} \psi_i q_0 - \sum_{k=1}^M C_k \int \{ \nabla \psi_i \}^T \{ \nabla \chi_k \} \quad (31)$$

Para sistematizar el trabajo se busca una subdivisión del dominio en "elementos" dentro de los cuales se interpola la variable de campo tal como se indica a continuación.

3.1. Elementos, nudos y variables nodales

El problema ahora radica en identificar elementos adecuados al cálculo repetitivo y que puedan utilizarse para definir funciones de interpolación. Estos elementos en el cálculo matricial de estructuras de barras son más o menos intuitivos pero ahora queda cierta libertad para su elección. Para fijar ideas imagínese que se trata de analizar la torsión de un prisma de sección triangular.



Figura 4

La figura 4 muestra dos posibilidades de subdivisión, la primera mediante rectángulos y la segunda mediante triángulos. En ambos casos la figura elemental queda definida por nudos, equivalentes a los de las estructuras de barras, en los que se van a materializar los valores de a_j característicos del problema. Las variables nodales pueden ser varias. (Recuérdese que en el caso de barras las variables nodales son las flechas y los giros). En el caso concreto que nos ocupa dicha variable es única y se refiere a los valores del alabeo w en los nudos.

3.2. Funciones de interpolación

Se pretende comenzar con las más sencillas y que se cumplan las propiedades de continuidad para que las integrales a realizar tengan sentido.

Además se busca que las variables nodales coincidan con los parámetros a_j ; es decir, en este caso, dando un alabeo unidad en un nudo particular, deber ser nulo en el resto de los nudos.

Las figuras 5(a) y (b) muestran las funciones de interpolación que se obtienen cuando se exige una variación lineal a lo largo de los lados de los elementos.

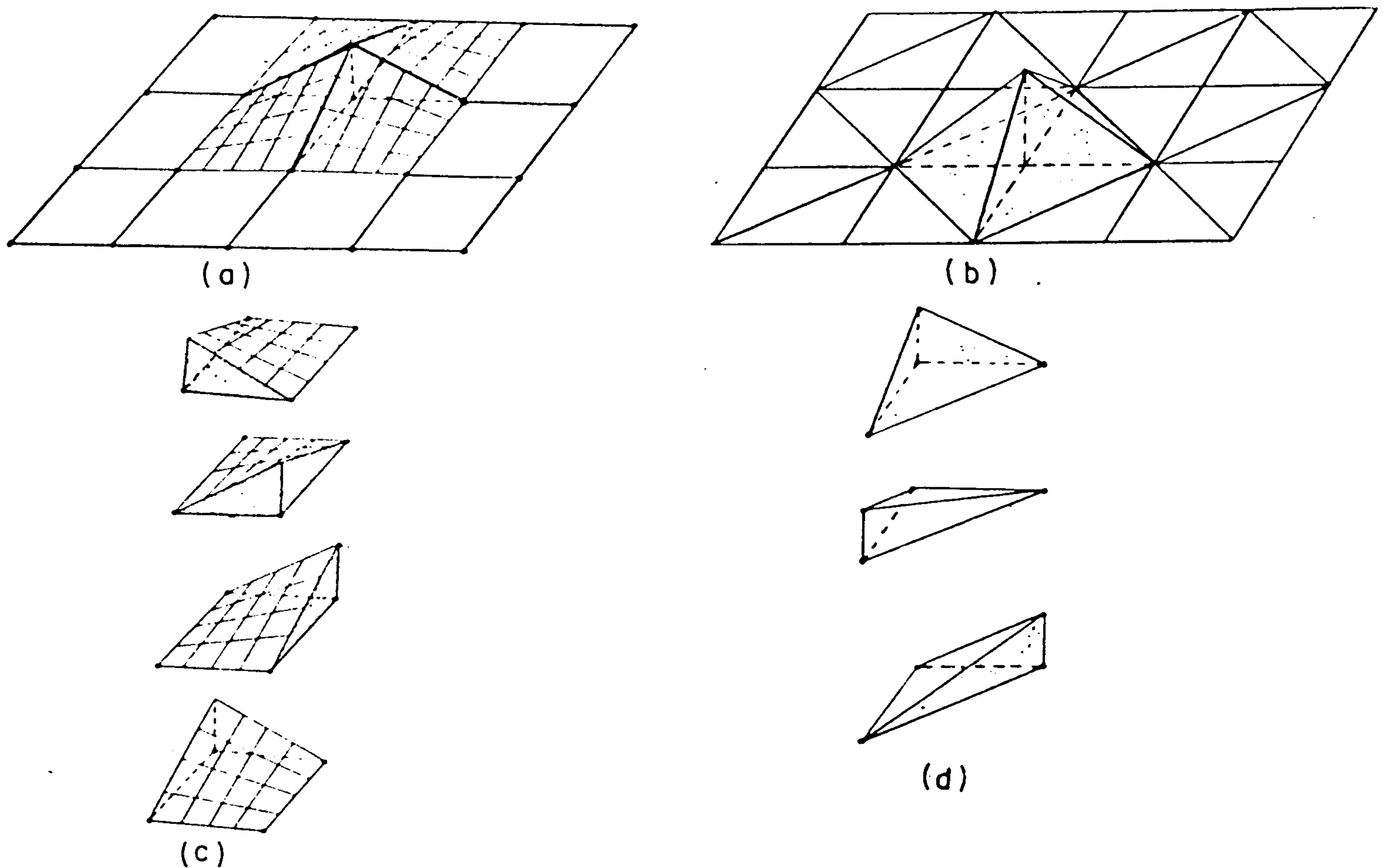


Figura 5

Esta condición permite garantizar la continuidad de la función de alabeo a lo largo de las aristas, y así aunque las derivadas sean discontinuas es posible por ejemplo realizar las integrales que definen k_{ij} . En el caso de rectángulos esta condición provoca la aparición de funciones "sombrero", formadas por trozos de paraboloides hiperbólicos y de pirámides para el caso de elementos triangulares. Evidentemente con estas funciones se obtiene la identificación de los coeficientes del desarrollo aproximante

$$a_j \equiv w^0 \quad (\text{nudo } j)$$

con los valores del alabeo en el nudo correspondiente.

Además los cálculos con cada función “sombrero” se pueden descomponer en cálculos con cada una de sus partes. En 5(c) y (d) se incluyen, por ejemplo, todas las posibilidades que deben tenerse en cuenta para cada elemento.

Respecto al cálculo y montaje de los elementos de la matriz de rigidez, estas figuras juegan, en dos dimensiones, un papel semejante al de las funciones de Hermite monodimensionales utilizadas en cálculo matricial de estructuras de barras.

La expresión de cada función es inmediata. Como ejercicio considérese el caso del rectángulo (figura 6). Se suele preferir por razones de sistematización normalizar la representación haciendo un cambio de coordenadas hasta el cuadro $-1 \leq \xi \leq 1$; $-1 \leq \eta \leq 1$.

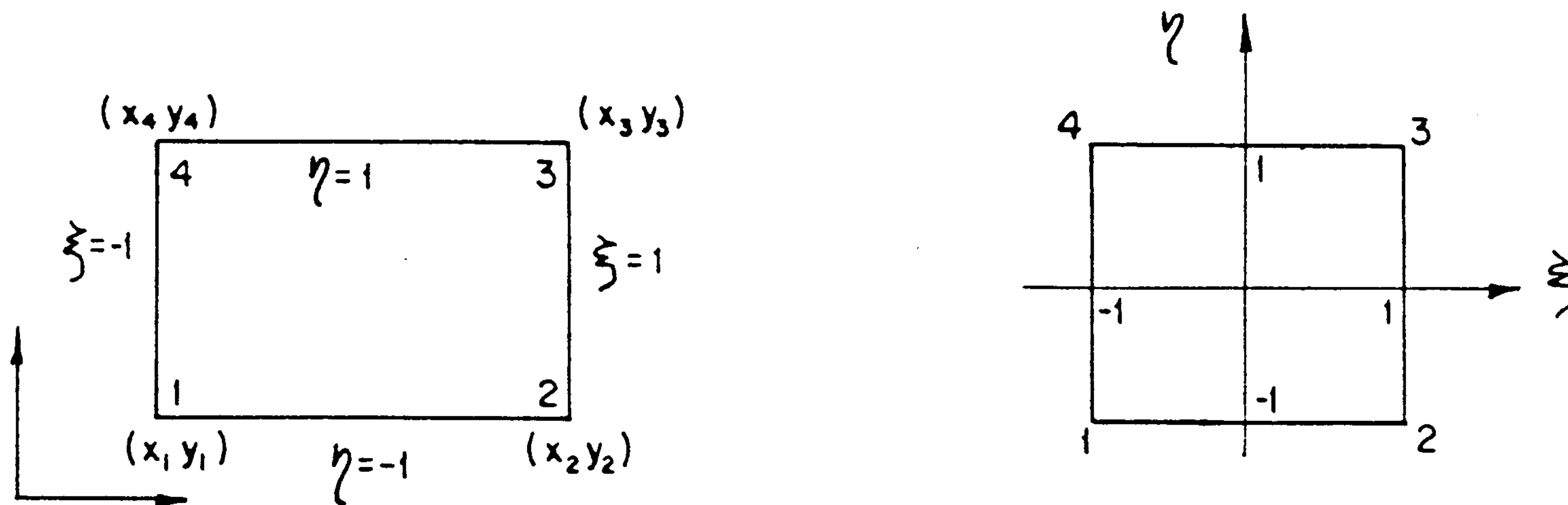


Figura 6

La transformación se consigue evidentemente con:

$$\xi = \frac{x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\frac{x_2 - x_1}{2}} = \frac{2x - (x_1 + x_2)}{x_2 - x_1}$$

$$\eta = \frac{y - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)}{\frac{y_3 - y_2}{2}} = \frac{2y - (y_3 + y_2)}{y_3 - y_2} \quad (32)$$

$$x = \frac{1 - \xi}{2} x_1 + \frac{1 + \xi}{2} x_2$$

$$y = \frac{1-\xi}{2} y_2 + \frac{1+\xi}{2} y_3 \quad (33)$$

Así por ejemplo. Si $x = x_1$; $\xi = -1$, lo que permite ver la correspondencia entre los lados.

En el cuadrado adimensional es fácil ver que las funciones que toman valor unidad en cada nudo y son cero en el resto se obtienen por producto tensorial de las indicadas en (33), esto es:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)}{2} \frac{(1-\eta)}{2} \\ N_2 &= \frac{(1+\xi)}{2} \frac{(1-\eta)}{2} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)}{2} \frac{(1+\eta)}{2} \\ N_4 &= \frac{(1-\xi)}{2} \frac{(1+\eta)}{2} \end{aligned} \quad (34)$$

3.3. La matriz de rigidez elemental

Dentro del cuadrado adimensional la evolución de la función es:

$$w(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) w_1 + N_2(\xi, \eta) w_2 + N_3(\xi, \eta) w_3 + N_4(\xi, \eta) w_4 \quad (35)$$

donde w_1, w_2, w_3, w_4 son los valores del alabeo en los vértices. En lugar de transformar (35) en coordenadas absolutas se prefiere mantener las relativas y realizar la integración en el cuadrado adimensional, lo que permite utilizar fórmulas de integración numérica. Así pues, se establecen todas las contribuciones del cuadrado combinando las N_j entre sí, lo que provoca una matriz elemental de 4x4.

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla N_i \nabla N_j J d\xi d\eta \quad (36)$$

donde J es el jacobiano de la transformación que aparece al transformar el elemento de área:

$$\begin{aligned} dx dy &= \left[\frac{1}{2} (x_2 - x_1) d\xi \right] \left[\frac{1}{2} (y_3 - y_2) d\eta \right] \\ J &= \frac{1}{4} (x_2 - x_1) (y_3 - y_2) \end{aligned} \quad (37)$$

A su vez:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2}{(x_2 - x_1)} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{2}{y_3 - y_2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (38)$$

con lo que, finalmente,

$$k_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \left(\frac{y_3 - y_2}{x_2 - x_1} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \left(\frac{x_2 - x_1}{y_3 - y_2} \right) \right] d\xi d\eta \quad (39)$$

Por ejemplo k_{23} exige el cálculo de:

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 - \eta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} (1 + \xi)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi) \quad (40)$$

$$k_{23} = \frac{1}{6} \frac{y_3 - y_2}{x_2 - x_1} - \frac{1}{3} \frac{x_2 - x_1}{y_3 - y_2} = \frac{(y_3 - y_2)^2 - 2(x_2 - x_1)^2}{6(x_2 - x_1)(y_3 - y_2)} \quad (41)$$

Obsérvese (fig. 7) que a este mismo resultado se habría llegado fácilmente trabajando directamente en coordenadas absolutas. Se ha preferido sin embargo mostrar el método anterior que es el utilizado en casos más generales.

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{y_3 - y}{(y_3 - y_2)(x_2 - x_1)} \quad \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{y - y_2}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_2)}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = -\frac{x - x_1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_2)} \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{x - x_1}{(y_3 - y_2)(x_2 - x_1)}$$

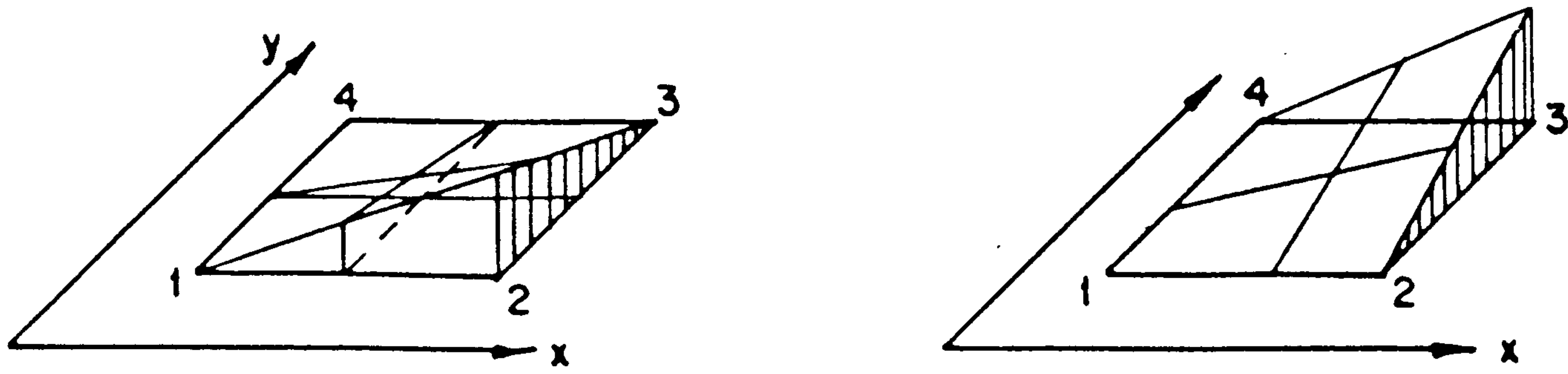


Figura 7

3.4. El vector de cargas elemental

El vector de cargas correspondiente a las acciones por unidad de área del elemento tiene 4 componentes y se obtiene aplicando la definición. Así:

$$f^e = \frac{1}{4} (x_2 - x_1) (y_3 - y_2) \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(\xi, \eta) N_1 d\xi d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(\xi, \eta) N_2 d\xi d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(\xi, \eta) N_3 d\xi d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(\xi, \eta) N_4 d\xi d\eta \end{bmatrix} \quad (42)$$

Así por ejemplo, en el caso de $p = \text{cte}$, es fácil ver que la carga se reparte por igual entre los cuatro nudos:

$$f_1^e = \frac{p}{16} (x_2 - x_1) (y_3 - y_2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-\xi)(1-\eta) d\xi d\eta \quad (43)$$

es decir:

$$f_1^e = \frac{p (x_2 - x_1) (y_3 - y_2)}{4} \quad (44)$$

y lo mismo para el resto de los nudos.

4. LA MATRIZ DE RIGIDEZ Y EL VECTOR DE CARGA GLOBALES

La formación de las matrices globales es inmediata, siguiendo la misma estrategia empleada en cálculo matricial de estructuras con las barras. Se establece una numeración de nudos y elementos y, a través de la correspondiente tabla de conectividad se colocan cada uno de los 16 términos de la matriz elemental en la correspondiente matriz global, y lo mismo se hace con las cuatro componentes del vector de carga.

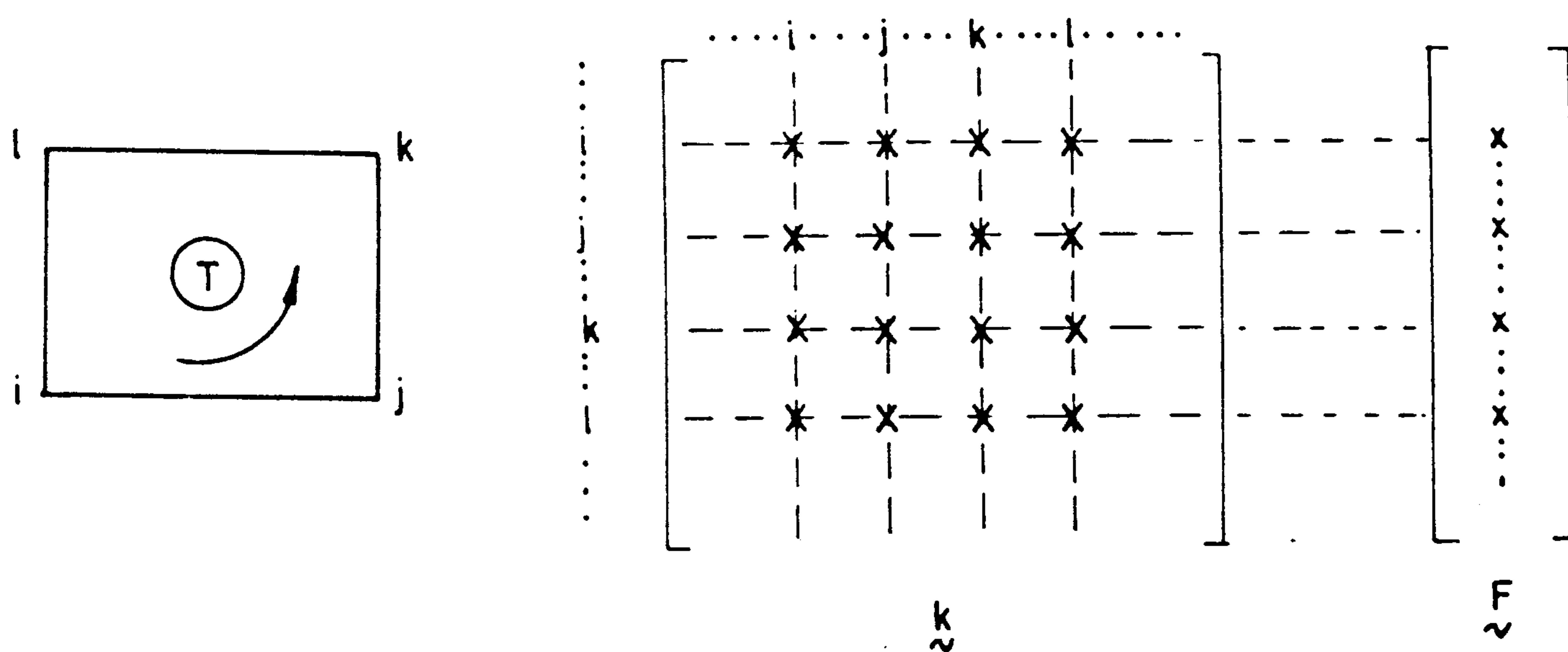


Figura 8

En la figura 8 se ha representado esquemáticamente este proceso para un elemento T, aunque conviene hacer notar que evidentemente el orden ijkl no tiene porqué cumplir en la numeración de nudos la condición $i < j < k < l$ que se ha supuesto en la figura.

5. LA IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

En la ecuación (29) aparecen sumandos correspondientes a las condiciones de contorno, cuya presencia ha sido olvidada hasta el momento.

Su contribución está relacionada con elementos, alguno de cuyos lados esté en el contorno $\partial\Omega$ del dominio Ω de definición del problema. La contribución es doble. Por un lado existe una aportación al vector de cargas del tipo:

$$\int_{\partial\Omega_2} \psi_i q_0 \quad (45)$$

donde ψ_i es la función de ponderación (N_i en el caso del elemento) y q_0 los flujos conocidos a lo largo del trozo de contorno $\partial\Omega_2$.

Si se trata del elemento 1, por ejemplo, en el caso de la figura 9 existirían contribuciones debidas a las funciones N_1 , N_2 y N_4 .

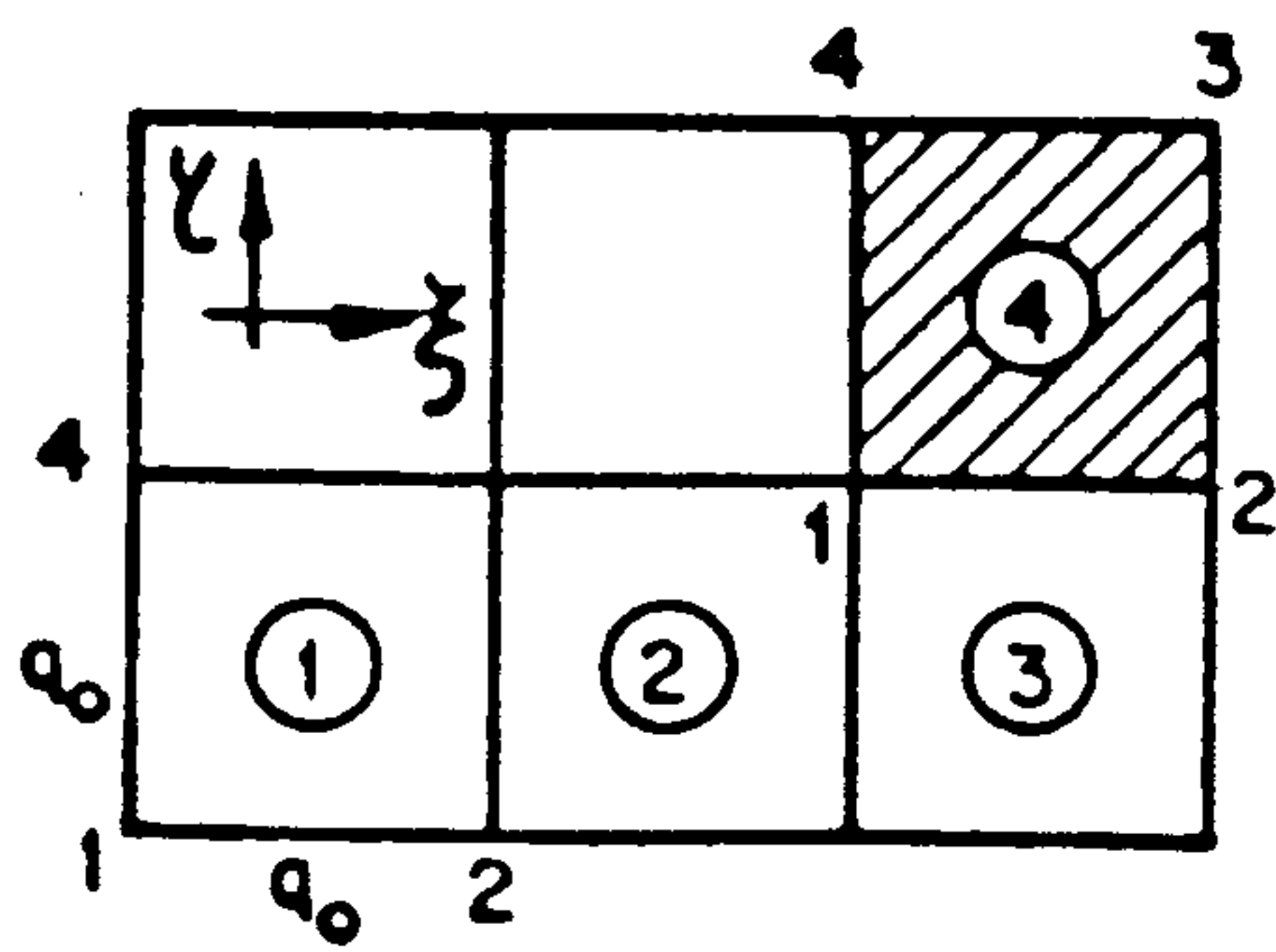


Figura 9

La relacionada con N_1 es, por ejemplo:

$$f_1^e = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-\xi) q_0 \Big|_{\eta=-1} d\xi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta) q_0 \Big|_{\xi=-1} d\eta \quad (46)$$

donde el signo - refleja el sentido horario de la integración en el contorno del elemento.

Por su parte, existe igualmente una contribución:

$$\sum_{j=1}^M C_k \left(\int_{\partial\Omega} \nabla \psi_i \nabla \chi_k \right) \quad (47)$$

Es habitual en el M.E.F. que los datos se interpolen con funciones χ_k del mismo tipo que las ψ_i , con lo que se tienen términos calculables en forma semejante a los de la matriz de rigidez. Desde el punto de vista operativo se prefiere proceder prescindiendo de la distinción ψ, χ y se organiza una matriz de rigidez de orden $N+M$ a base de trabajar siempre de la misma forma con cada elemento sin distinción de qué parte de su coincida o no con $\partial\Omega$. Se forma así un sistema que, simbólicamente, se escribe como:

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ N \\ \updownarrow \\ M \\ \updownarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc} \int \psi_i \psi_j & \int \psi_i \chi_j \\ \hline \int \chi_i \psi_j & \int \chi_i \chi_j \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

y anulando filas y columnas, se reduce el problema final a la situación real:

$$\left[\begin{array}{c|c} \int \psi_i \psi_j & 0 \\ \hline 0 & H \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} f_1 - \sum C_j \int \nabla \psi_1 \nabla \psi_j \\ f_2 - \sum C_j \int \nabla \psi_2 \nabla \psi_j \\ \vdots \end{array} & \\ \hline \phi_0 \\ \phi_{02} \\ \vdots \end{array} \right]$$

La ventaja que presenta este tipo de estrategia es la automatización del proceso de cálculo frente a un incremento en el número de operaciones a realizar, así como el mantenimiento del tamaño de las matrices que se manejan.

6. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

Hasta ahora se ha limitado el estudio a rectángulos capaces de recubrir el dominio. En la mayoría de los problemas, incluso los más sencillos (figura 10) ello no será posible y se precisará disponer de cuadriláteros capaces de absorber la geometría.

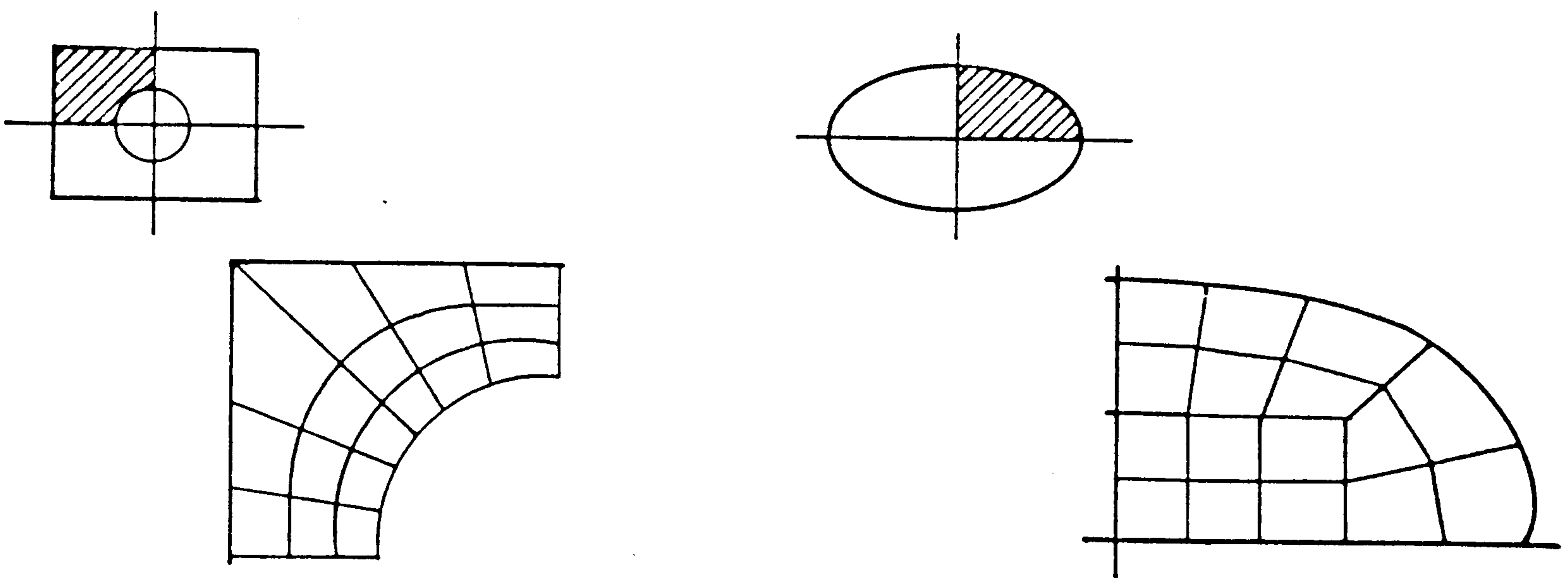


Figura 10

Una ingeniosa idea, que se atribuya a Irons (1965) consiste en aplicar a cada cuadrilátero una transformación bilineal semejante a la que se realiza para las variables. Esto es, expresar las coordenadas de cualquier punto del dominio mediante una generalización de (22):

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta) &= [N_1(\xi, \eta); N_2(\xi, \eta); N_3(\xi, \eta); N_4(\xi, \eta)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
 y(\xi, \eta) &= [N_1(\xi, \eta); N_2(\xi, \eta); N_3(\xi, \eta); N_4(\xi, \eta)] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (48)
 \end{aligned}$$

Una transformación de este tipo aplica un cuadrilátero arbitrario definido por

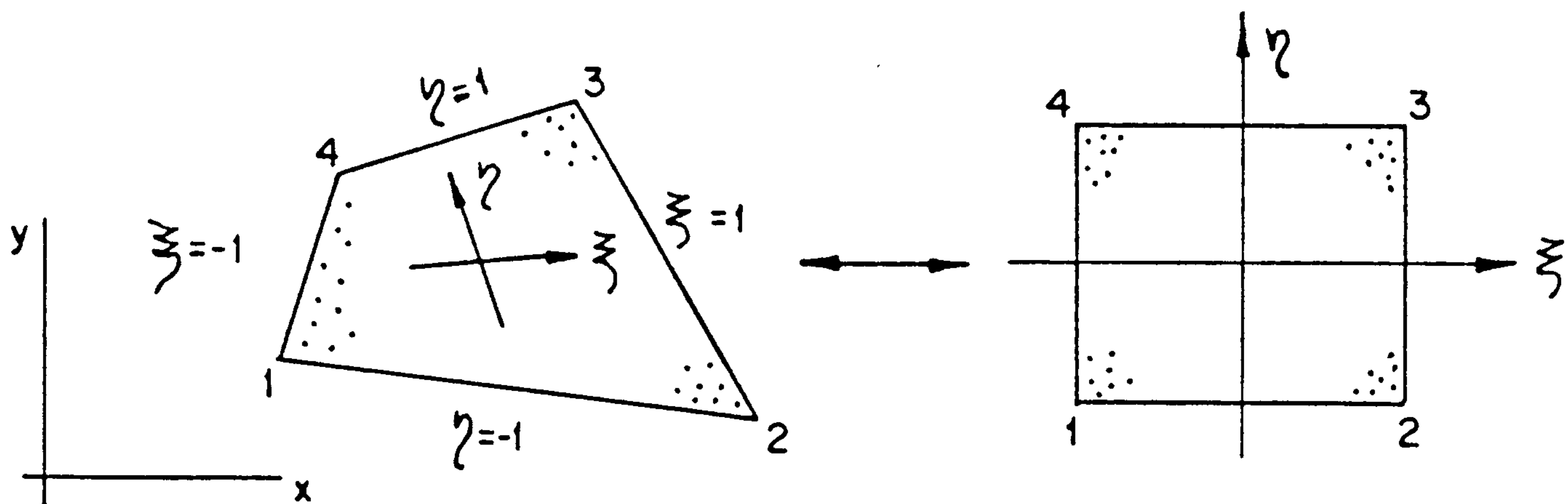


Figura 11

las coordenadas de sus nudos sobre el cuadrado adimensional. La fórmula (35) es todavía válida, pero ahora el jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (49)$$

y las integrales deben realizarse numéricamente.

El procedimiento puede generalizarse a interpolaciones de orden superior al lineal y generar de esta forma elementos de tipo parabólico, etc. (fig. 12), con lo que se observan las inmensas posibilidades que se abren a la representación de geometrías arbitrarias y se comprende el éxito de la aplicación del método a problemas prácticos.

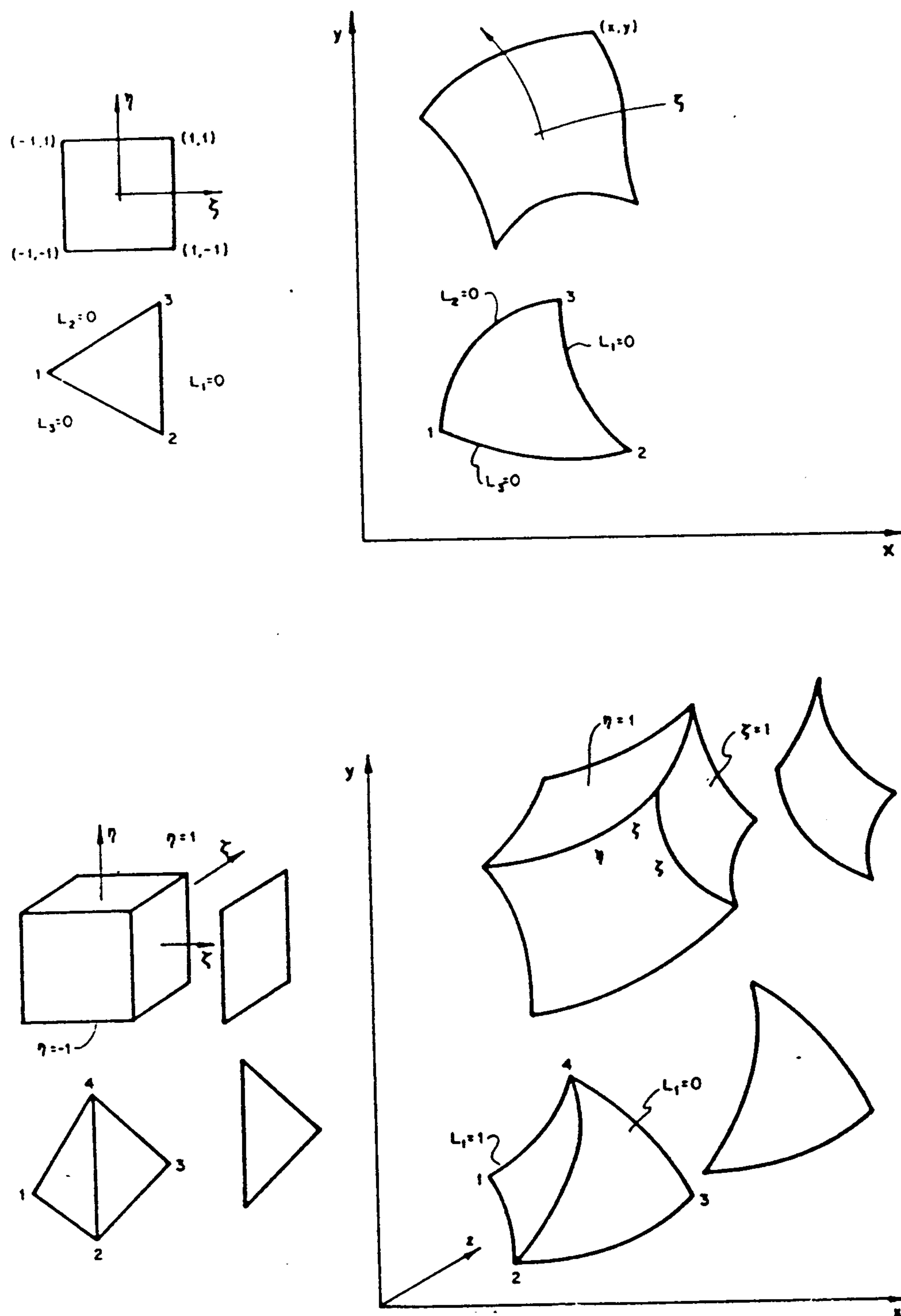


Figura 12

7. CONVERGENCIA H Y CONVERGENCIA P

Puesto que el subespacio de aproximación crece en dimensiones al aumentar el número de elementos, es lógico pensar en una mayor corrección de los resultados conforme se va reduciendo el tamaño de los elementos.

La convergencia sin embargo tiene más sentido cuando se mide en la norma natural del problema. Ecuación (18) y puede demostrarse que:

$$\|e\|_E \leq C h$$

que indica claramente que al aumentar el tamaño **h de la malla**, el error se reduce proporcionalmente.

Con objeto de simplificar las operaciones y para ver cómo se puede conseguir una acotación de este estilo, considérese el problema de la pieza a tracción o compresión. La ecuación de equilibrio es

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + q = 0$$

donde:

$$q = p - u$$

y su planteamiento débil:

$$\int_0^L u' AE \psi_i' + \int_0^L u \psi = \int_0^L p \psi_i \quad (50)$$

donde se ha supuesto $\psi(0) = \psi(L) = 0$. La norma energética es:

$$\|u\|_E = \int_0^L (AE u'^2 + u^2) dx \quad (51)$$

y la hipótesis es que el error es ortogonal, es decir, que la solución óptima u cumple:

$$\|u - u^*\|_E \leq \|u - u^*\| \quad (52)$$

respecto a cualquier otra solución u obtenida por combinación lineal en el espacio engendrado por las ψ_i . Un método de fijación del error consiste en escoger como función u^* justamente aquella que pasa por los nudos, de tal modo que, en ellos:

$$u_i = u_i^* \quad (53)$$

con lo que se puede trabajar elemento por elemento.

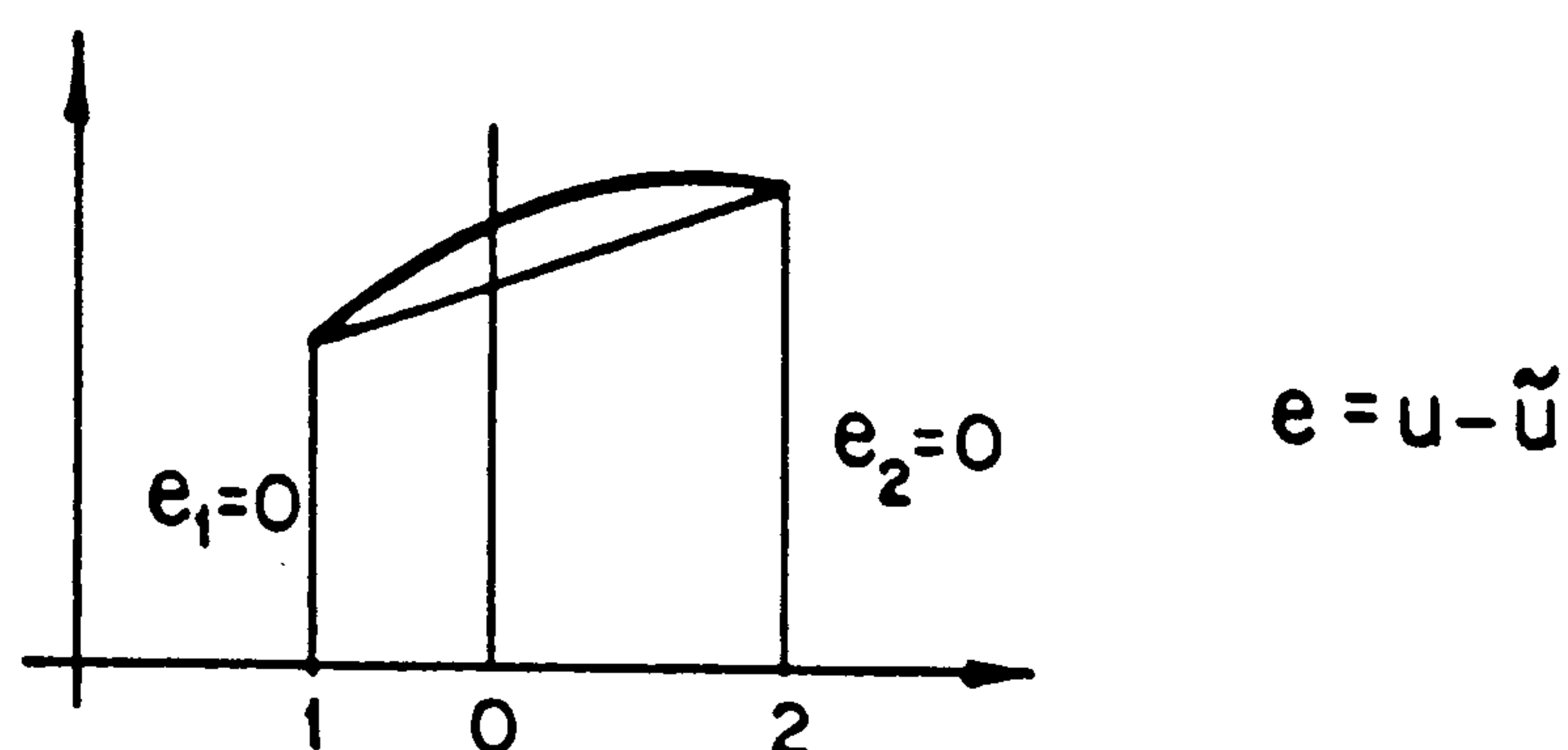


Figura 14

Según el teorema de Rolle, figura 14, el error es máximo en un punto interno "o", de modo que al desarrollar en serie de Taylor:

$$e = e_c = (x - x_0) u''(\xi) \quad (54)$$

Obsérvese que la derivada primera no aparece, debido a que es cero en el punto elegido, y que la derivada segunda de u es nula también, pues se trata de una aproximación lineal.

Si se hace coincidir el punto en estudio con el extremo más cercano al punto "0" es evidente que:

$$\max |e| \leq \frac{1}{8} h^2 \max |y''| \quad (55)$$

De la misma forma:

$$e' = (x - x_0) y''(\xi) \quad (56)$$

es decir:

$$\max |e'| \leq h \max |y''| \quad (57)$$

y al introducir (52):

$$\|u - u^*\|_E^2 \leq \|u - u^*\|_E^2 \leq \max |y' - y^*|^2 \int_0^L AE dx + \max |y - y^*|^2$$

o bien:

$$\|u - u^*\|_E^2 \leq (C_1 h^2 + h^4) \max |y''|^2 \quad (58)$$

Si y'' es finita dentro de los elementos

$$\|u - u^*\|_E \leq O(h) \quad (59)$$

y queda garantizada la convergencia del método.

En caso de interpolar con un grado p y en un operador de orden m se pueden generalizar las relaciones (55) y (57) que serían así:

$$\max |y - y^*| \leq O[h^{p+1} y^{p+1}]$$

$$\max |y' - y^*| \leq O[h^p y^{p+1}]$$

$$\max |y^m - \{y^m\}| \leq O[h^{p-m+1} y^{p+1}]$$

con lo que, en general:

$$\|y - y^*\|_m \leq C h^{p-m+1} \max |y^{p+1}| \quad (60)$$

Este tipo de refinamiento hacia el resultado correcto tiene el inconveniente de exigir el cálculo de nuevas matrices de rigidez en cada paso, de modo que no se aprovecha en absoluto todo el trabajo previo.

Una idea posterior sugiere el uso de una malla fija relativamente amplia y el uso de una familia de funciones (jerarquizada en el mismo sentido que el refinamiento de Fourier), definida en su interior de tal forma que la mejora se consigue añadiendo nuevas funciones si ello es necesario. Es decir, en lugar de reducir el tamaño h de la malla se aumenta el grado p del polinomio de interpolación en elementos seleccionados. En cierto sentido el procedimiento consiste en una vuelta al método original de Ritz, empleando como soporte de las funciones elementos lo más grandes posibles.

El compromiso entre la subdivisión en elementos y la "globalidad" de las funciones está marcado por la existencia de singularidades, esquinas, etc.

La figura 15 por ejemplo recoge algunas funciones jerarquizadas empleadas en rectángulos.

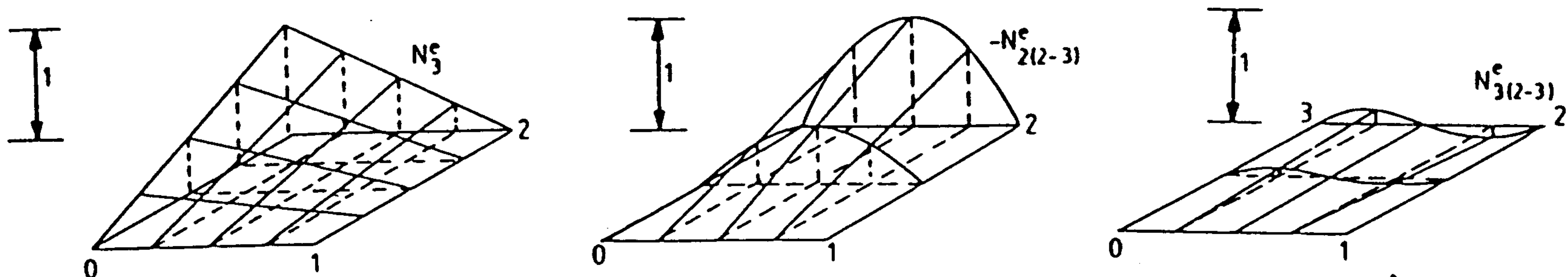


Figura 15

Este procedimiento implica el aprovechamiento de todos los términos de las matrices $[k]$ y $\{f\}$ calculados en una etapa previa y presenta unas interesantes ventajas de modularidad y conocimiento del error estimado en cada paso. Puede demostrarse además que en la mayoría de los casos la velocidad de convergencia p es superior a la h , lo que aumenta el atractivo del método. Su implementación en programas comerciales es relativamente reciente y muchos aspectos están todavía por explorar.