

## PARÁMETROS DE FORMA EN LÁMINAS DE BASE RECTANGULAR.

### B. Orta Rial.

*Universidad de Alcalá de Henares  
Escuela Técnica Superior de Arquitectura y Geodesia.  
C/ Santa Ursula n. 8.  
28801 Alcalá de Henares, Madrid, España.  
Email: belen\_orta@yahoo.es  
web page: [http://es.geocities.com/belen\\_orta/](http://es.geocities.com/belen_orta/)*

**Resumen:** En este artículo se presenta la reflexión sobre el diseño óptimo de láminas reticulares en la cubrición de espacios de grandes luces de planta rectangular y la búsqueda de los parámetros de forma que más incidencia tienen en el coste de acuerdo con la Teoría de Diseño de Estructuras<sup>1,2</sup> (TDE) de manera semejante a estructuras planas<sup>2,3</sup>. Para cumplir con este objetivo se ha creado un programa<sup>4,5</sup> de búsqueda de óptimos en láminas reticulares que aplica el **Recocido Simulado** (técnica de aproximación numérica que encuentra soluciones cercanas al óptimo). Se verá la definición de la TDE y de ella se extraerá la función objetivo utilizada: el **volumen estructural**. Se mostrarán diversas soluciones que resuelven problemas similares, cambiando la forma de la planta a cubrir, estudiando diferentes proporciones. Para finalizar se extraen en las conclusiones los parámetros de forma encontrados: la repetición de una pauta estructural en las soluciones relacionada con la proporción de la planta a cubrir, se establecen coeficientes de coste en función de la forma de trabajo (unidireccional o bidireccional), etc.

**Palabras clave:** Optimización, Óptimo, Láminas, Recocido simulado, Diseño de Estructuras, Simulated Annealing.

## 1 INTRODUCCIÓN

Una estructura tipo lámina es aquella que salva grandes luces con pequeños espesores, esto es posible gracias, fundamentalmente, a su forma. Ésta se convierte en uno de los factores más importantes en su diseño. Se buscan formas de manera que se reduzca el coste desde un punto de vista de la cantidad de material empleado, dejando de lado aspectos como la mano de obra la complejidad de ejecución o aspectos energéticos. El coste ligado al consumo de material se acerca bastante al problema a medio plazo de sostenibilidad de recursos.

Al ser un problema complejo con un alto número de variables, se intentará acotar el problema por medio de ciertas simplificaciones que se irán exponiendo.

## 2 RECOCIDO SIMULADO.

Para llevar a cabo la búsqueda de soluciones se ha construido un programa que emplea el recocido simulado. Se trata de una técnica de aproximación numérica que no necesita el conocimiento de derivadas de la función objetivo, pues solo evalúa la función a optimizar. Recibe su nombre por ser una analogía con sistemas termodinámicos tales como la cristalización de una sustancia disuelta en agua o la solidificación de un metal (recocido).

Este proceso comienza con una alta temperatura en la que la movilidad de las partículas es alta, y se pierde gradualmente al dejar enfriar la mezcla lentamente. Las partículas se van disponiendo ordenadamente y se van acercando a un estado de mínima energía. Si el proceso ha sido lo suficientemente lento la configuración obtenida es más estable y su energía interna es mínima. En algunos casos estos estados pueden ser reconocidos por su perfección visual, este es el caso de la forma de un cristal puro cuyas partículas están perfectamente ordenadas. El recocido simula una mejora global a base de iteraciones con cambios locales que tienen efectos en partículas próximas. En el caso de la optimización, la temperatura es una energía de referencia, o parámetro de control ( $c_k$  en Figura. 1), que determina la fluctuación permitida alrededor de la configuración estudiada.

Con este método, a partir de una solución inicial se genera aleatoriamente una alternativa produciendo un cambio sobre una de las variables. Para aceptar la configuración inicial, o la alternativa, se aplica el criterio de Metrópolis (1). Es un criterio de aceptación probabilístico en el que si el cambio es a mejor siempre se acepta pero si es a peor solo a veces puede ser aceptada. Al principio del proceso virtualmente todas las transiciones son aceptadas (temperaturas altas), mientras que al final los cambios a peor tienen una baja probabilidad de ser aceptados. El proceso termina cuando cualquier cambio produce un diseño con probabilidad cero de ser aceptado.

$$\begin{aligned} \text{si } f(x_j) \leq f(x_i) \text{ se acepta } x_j \\ \text{si } f(x_j) > f(x_i) \text{ se acepta } x_j \text{ con una probabilidad de: } \exp((f(x_i) - f(x_j))/c_k) \end{aligned} \quad (1)$$

siendo:

$x_i$	configuración actual.
$x_j$	configuración alternativa.
$f(x_i), f(x_j)$	valores de la función en los estados $i$ y $j$ respectivamente.
$c_k$	parámetro de control.

```

procedure SIMULATED_ANNEALING;
begin
  INICIALIZAR ( $x_0, t_0, M_0$ );
  C:=0;
   $x_i = x_0$ ;
  repeat
    for  $v=1$  to M do
      begin
        GENERAR_ALTERNATIVA ( $x_j$  from  $x_i$ );
        if  $f(x_j) \leq f(x_i)$  then  $x_i = x_j$ 
        else
          if  $\exp((f(x_i) - f(x_j))/c_k) > \text{random}[0.1]$  then  $x_i = x_j$ 
        end;
        C:=C+1
      CALCULA_TRANCIONES (M);
      CALCULA_CONTROL ( $c_k$ );
    until criterio_de_parada
  end;

```

Figura. 1: Programación en pseudo pascal del recocido simulado (Aarts, 1990)

El hecho de poder ser elegidos puntos que dan peores valores para la función objetivo convierte al recocido simulado en un algoritmo robusto que evita quedar atrapado en los óptimos locales. Con valores altos del parámetro de control al principio se asegura la búsqueda en configuraciones distantes a la de partida. Esto permite alcanzar áreas de la función objetivo con un comportamiento general mejor. Además, en muchos casos, cuando la obtención del óptimo puede ser lenta, el recocido presenta una razonable aproximación al óptimo con un coste computacional razonable.

La primera vez que se utilizó el recocido simulado fue por Kirkpatrick<sup>7</sup> en la optimización de circuitos integrados. También se puede encontrar la demostración de la convergencia en la bibliografía de referencia<sup>8,9</sup> además de la programación del algoritmo<sup>10</sup>.

### 3 LA MEDIDA DEL CONSUMO DE ESTRUCTURA

La función objetivo utilizada es el Volumen Estructural ( $V_s$ ), se define como la integral extendida a toda la estructura del producto del valor absoluto del esfuerzo axial en la sección,  $N$ , por  $ds$ , elemento longitudinal de la pieza en el punto considerado. Mide simultáneamente fuerzas y sus trayectorias, sus dimensiones son las del trabajo. Se muestra su expresión de manera continua y discreta.

$$V_s = \int |N| \cdot ds \quad V_s = \sum_{i=1}^e |N_i| L_i \quad (2)$$

La importancia de esta función consiste en que tiene buenas relaciones con otras magnitudes a las que estamos más acostumbrados a la hora de evaluar el coste de una estructura como es el volumen o el peso. A la vez que se abstrae de las cualidades propias del material, considerando solo aspectos de geometría, topología y cargas aplicadas. Por esto aporta consideraciones de la forma al margen del material.

Es muy habitual el uso de un único material en una estructura, en tal caso la relación del Volumen de Material ( $V_m$ ) o del Peso ( $P$ ) con el Volumen Estructural es la siguiente:

$$V_m = \sum_{i=1}^e A_i \cdot L_i = \sum_{i=1}^e \frac{|N_i|}{f} \cdot L_i \quad ; \quad P = \sum_{i=1}^e \rho_i \cdot A_i \cdot L_i = \rho \sum_{i=1}^e \frac{|N_i|}{f} L_i \quad (3)$$

Solo en caso de dimensionado estricto, en estructuras de barras, todas ellas tienen igual tensión  $f$ , entonces:

$$V_m = \frac{V_s}{f} \quad ; \quad P = \frac{\rho}{f} V_s \quad (4)$$

Donde:

- $f$ : tensión de trabajo del material (simétrico a tracción y compresión o bien un valor medio ponderado)
- $A_i$ : Área de cada sección  $i$ .
- $\rho_i$ : Peso específico del material en el elemento  $i$ , si es igual en toda la estructura:  $\rho$ .

### 4 OPTIMACIÓN DE LÁMINAS: BASES

El propósito es encontrar la configuración de geometría y topología que hagan el volumen estructural de la lámina tan pequeño como sea posible. El objeto de diseño consiste en una

lámina reticulada, asimilada a soluciones trianguladas de barras de una sola capa. Su forma queda definida por su geometría,  $\mathbf{g}$ , y topología,  $\mathbf{t}$ .

La geometría queda determinada por  $\mathbf{g}(n)=\{(x_1,y_1,z_1),\dots,(x_n,y_n,z_n)\}$ , que representa las coordenadas en el espacio de los  $n$  nodos y varía dentro de  $\mathbf{G}$ , todas las posibles coordenadas de  $n$  nodos en una región previamente definida, ( $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ ). El número total de nudos,  $n$ , permanece constante a lo largo de todo el proceso.

La topología del esquema estructural define el modo en que los nodos están conectados unos a otros, se puede expresar como el conjunto de barras que unen los nodos dos a dos,  $\mathbf{t}(e) = \{(n_{1i}, n_{1j}), \dots, (n_{ei}, n_{ej})\}$ . Donde  $e$  es el número de barras entre los  $E$  elementos posibles, o lo que es lo mismo todas las posibles combinaciones de dos nodos, ( $E=n(n-1)/2$ ,  $e \in [1,E]$ , con  $e$  y  $E \in \mathbb{N}$ ). Varía dentro del conjunto de todas las topologías posibles, ( $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$ ).

Sólo se tomarán en consideración las láminas que sean internamente isostáticas; además no se consideran condiciones de sustentación que podrían dar lugar a soluciones hiperestáticas -salvo las que garantizan condiciones de simetría- pues éstas suponen diferencias en cómo se materializan las fuerzas en cimientos -anillos de tracción, por ejemplo- que pueden dar lugar a condiciones no comparables entre formas en competencia.

El conjunto de vínculos queda definido de la siguiente manera:  $\mathbf{v} = \{(n_1, \delta_x), (n_1, \delta_y), (n_1, \delta_z), \dots, (n_f, \delta_x), (n_f, \delta_y), (n_f, \delta_z)\}$ , donde cada par consta del número del nodo al que se le aplica la coacción y de la dirección de la coacción. En este conjunto aparecen todos los nudos fijos al menos una vez (siendo  $n_f$ , el número de nudos fijos)

La carga que debe soportar la lámina se define por unidad de superficie y está aplicada en la dirección del eje vertical,  $Z$ . La carga se reparte de manera que todos los nudos tienen una carga puntual,  $q(i)$ . El valor está calculado en función de la superficie de los triángulos que acometen en él, en proyección horizontal, y del valor de la carga por unidad de superficie,  $q$ . Así a un nudo interior,  $n_i$ , al que acometen  $nb$  barras, la carga que recibe es, (siendo  $area$ , la función que devuelve el área en proyección horizontal del triángulo definido por los tres puntos indicados):

$$q(i) = \frac{1}{3} \left( \sum_{j=1}^{j=nb} area(n_i, n_{i,j}, n_{i,j+1}) \right) \cdot q \quad (5)$$

A partir del análisis (por medio del método matricial de equilibrio), se hace el dimensionado. Cuando la estructura es isostática, se dimensiona en función del axil de cada barra y de la tensión admisible con seguridad,  $f$ , del material. Cuando sólo es internamente isostática para el análisis se han considerado todas las barras de igual sección, el dimensionado definitivo se hace tras el análisis como en el caso anterior. El dimensionado,  $\mathbf{d}$ , viene determinado por  $\mathbf{d}(e) = \{A_1, \dots, A_e\}$ , siendo  $A_i$  el área de la sección del elemento  $i$ , ( $i=1, \dots, e$ ).

#### 4.1 Formulación general del problema de diseño.

Los grados de libertad de una configuración se puede expresar como  $\mathbf{x}$ , con  $\mathbf{x} = \{\mathbf{g}, \mathbf{t}\} \in \{\mathbf{G}, \mathbf{T}\}$ , donde  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{T}$  son los conjuntos de todas las posibles geometrías y topologías respectivamente. Cada conjunto  $\mathbf{x}$ , corresponde con una solución, que para que sea válida debe estar contenida dentro del dominio búsqueda,  $\mathbf{X}$ .

En consecuencia, el problema de optimación se puede expresar según la fórmula (6). Esto es, encontrar la configuración de geometría y topología que hacen mínimo el valor de la función objetivo, dentro del dominio de búsqueda.

Encontrar  $\mathbf{x}_0$ , tal que: 
$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} (f(\mathbf{x})) \quad (6)$$

## 4.2 Dominio de búsqueda.

El espacio de búsqueda,  $\mathbf{X}$ , donde debe buscarse cada solución,  $\mathbf{x}$ , está constituido por todas las láminas reticuladas con  $n$  nudos, con los vínculos aplicados en los nudos fijos,  $n_f$  con ( $n \geq n_f$ ), y que a su vez cumple los requisitos del problema:

Los requisitos estructurales son los tres básicos: resistencia, rigidez y estabilidad general. Sin embargo en relación a la condición de estabilidad local, no se ha considerado el pandeo de las barras comprimidas, esto hace que las soluciones encontradas solo sean válidas desde un punto de vista teórico.

Los requisitos geométricos y topológicos son los siguientes:

- 1- Los nudos interiores pueden cambiar su posición a cualquier punto dentro del recinto definido por puntos que marcan unos límites inferior y superior de la lista  $\{(x_{\min}, y_{\min}, z_{\min}), (x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})\}$ .
- 2- Cada nudo de contorno libre puede cambiar su posición dentro de un plano que le contiene, paralelo al eje Z. El plano se define por el ángulo  $\varphi$  y por sus coordenadas.
- 3- Se limita la longitud máxima de las barras para evitar soslayar el problema de flexión, al acercar los nudos con carga a los apoyos.
- 4- El número de nudos permanece constante
- 5- Las barras siempre se intersectan en los nudos y nunca tienen proyecciones coincidentes, de esta manera se evitan soluciones de doble capa.

### 1.1 Mecanismo de generación de láminas

Con el generador de alternativas se pretende asegurar que con un número finito de jugadas exista una probabilidad no nula de que una lámina pueda transformarse en cualquier otra y siga cumpliendo las condiciones del problema aunque cada transformación produce una variación de la lámina relativamente pequeña. Se ha diseñado un mecanismo de generación específico a cada categoría de variables (Figura. 2): la primera modifican la geometría (1-cambio de posición de un nudo) y la segunda la topología (2-cambio de una barra por otra)

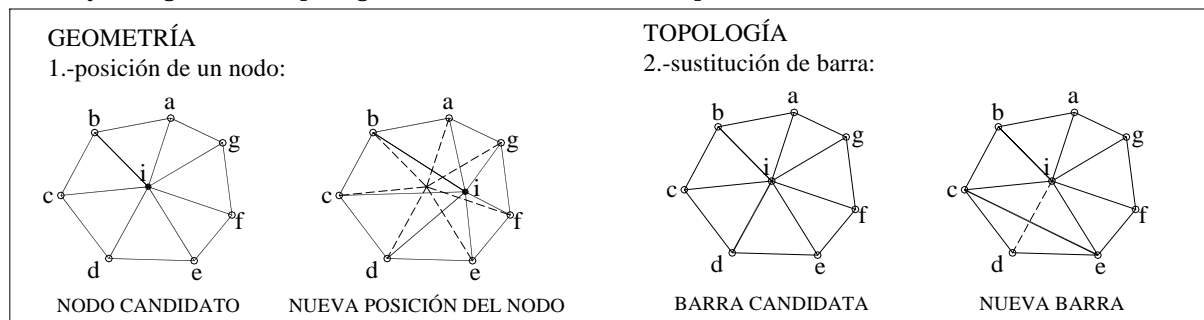


Figura. 2: Jugadas del generador de alternativas.

## 5 EJEMPLOS NUMÉRICOS:

Este es un problema nuevo en la bibliografía existente sobre optimización; por ello no hay ejemplos que sirvan de patrón. Se han elegido una serie de ejemplos que resuelven problemas sencillos, con una geometría básica: base cuadrada, rectangular, circular y mixta. La carga siempre es de  $4.5\text{kN/m}^2$ . Se estudia el caso de recinto con cotas  $z \geq 0$  (siendo  $z=0$  la cota de los apoyos, así se eliminan las soluciones de membrana colgada trabajando fundamentalmente a tracción). En todos los casos se limita la longitud máxima de barra al 40% de la luz corta pues se ha

comprobado que de no hacerlo la solución tiende a barras largas con los nudos cerca de los apoyos<sup>2</sup>.

Tras el proceso de búsqueda el programa aporta la solución en archivos de entrada al programa ANSYS-ED 5.3, de análisis de estructuras por el método de los elementos finitos. Así se consigue contrastar resultados y obtener las imágenes que se adjuntan. De esta forma se puede observar la manera de trabajar de la estructura. Paralelamente se presenta la imagen renderizada en AutoCAD de la superficie con luces y sombras. Cada conjunto va rotulado con el volumen estructural en kN.m, que no depende del material empleado, solo depende del axil de las barras y de su longitud

La forma inicial de la estructura no es importante si al principio del proceso la temperatura toma valores muy altos, se producirán grandes cambios que habitualmente serán aceptados, aun así se muestran las situaciones de partida.

### 5.1 Base cuadrada y rectangular: configuraciones iniciales.

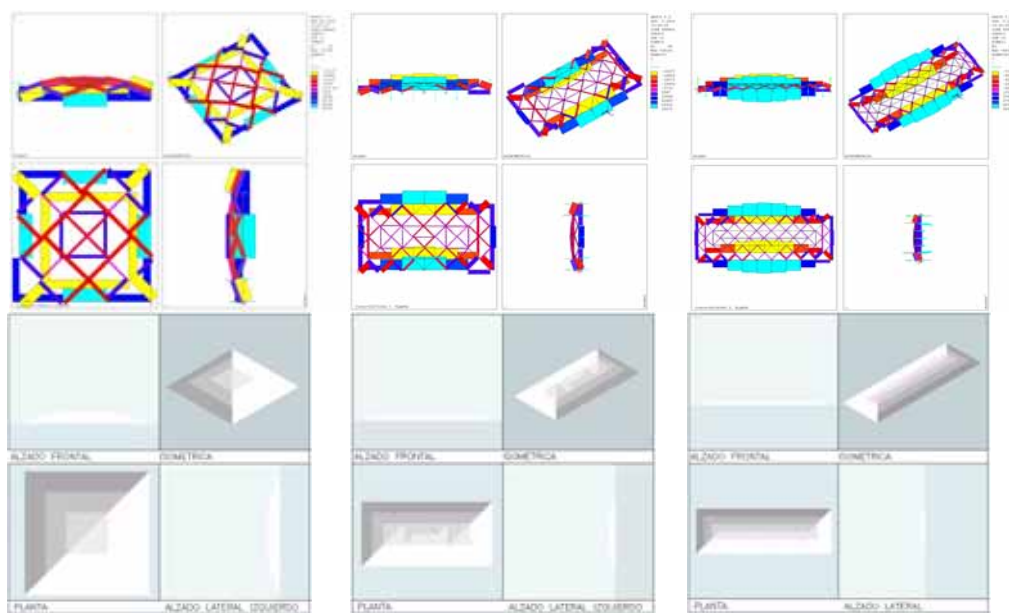


Figura. 3: Configuraciones iniciales ( de izquierda a derecha: base cuadrada,  $V_s=29.776 \text{ e}06 \text{ kN.m}$  , base rectangular 2/1,  $V_s= 15.572 \text{ e}06 \text{ kN.m}$  , base rectangular 3/1,  $V_s= 43.534 \text{ e}06 \text{ kN.m}$  )

Se utilizan tres configuraciones iniciales: de base cuadrada, rectangular de proporción 2/1 y rectangular de proporción 3/1 (Figura. 3). La primera cubre una base de 100x100m, tiene 25 nudos y 60 elementos, con 12 bielas de sustentación en los nudos de contorno mas 4 horizontales en las esquinas, dispuestos de manera simétrica, lo que hace que el conjunto sea hiperestático por sustentación con redundancia igual a 1.

La segunda cubre un espacio de 50 x 100m tiene 46 nudos, 118 elementos, 18 bielas de sustentación que se sitúan en la coacción vertical de los nudos de contorno y para impedir el giro y el deslizamiento de la estructura se colocan 4 más en posición simétrica horizontal, de esta manera la estructura es hiperestatica por sustentación con redundancia igual a 2.

La tercera cubre un espacio rectangular de 50 x 150m., con 67 nudos de los cuales 24 son de contorno y 175 elementos. Todos los nudos del contorno tienen una coacción al movimiento en vertical, a esto se añaden las tres bielas horizontales que impidan el desplazamiento y el giro del conjunto como sólido rígido, y sitúan en las 4 esquinas. El conjunto, de esta manera, es hiperestatico por sustentación con redundancia igual a 2.

## 5.2 Solución base cuadrada.

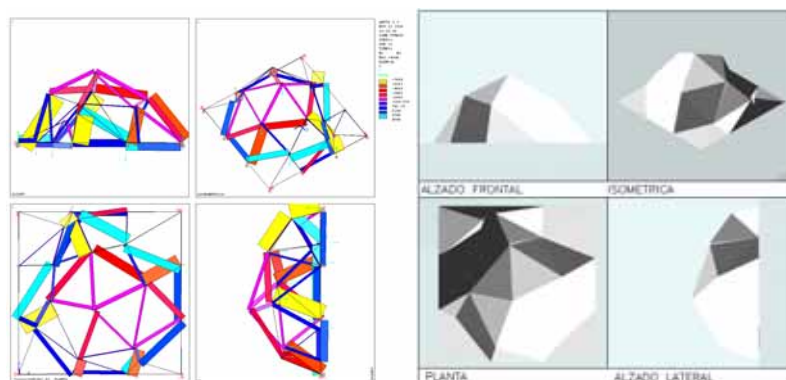


Figura. 4: Solución de base cuadrada,  $V_s 3.442 e06 kN.m$

La solución es una cúpula de barras a compresión y, un anillo a tracción, (azul y cian) que resiste los empujes. En la intersección entre forma circular del anillo y cuadrada de la base aparece una forma casi plana y a la misma cota. Aparecen unas plegaduras en dirección radial que rigidizan la superficie.

## 5.3 Solución base rectangular 2/1

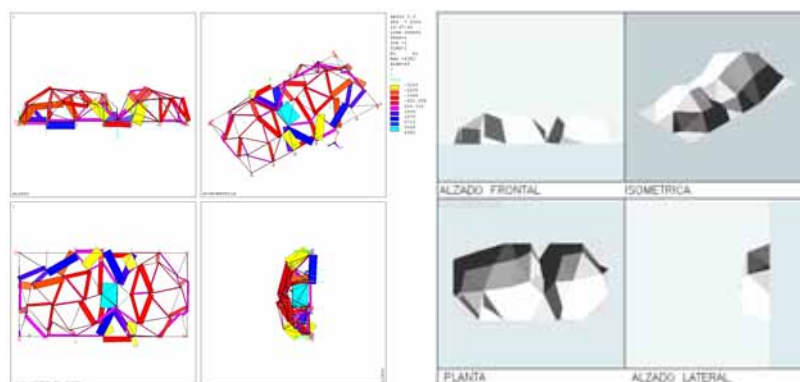


Figura. 5: Solución de base rectangular 2/1,  $V_s = 1.188 e06kN.m$

La solución consiste en dos cúpulas yuxtapuestas formadas por barras trabajando a compresión y los dos anillos de la base a tracción. En la intersección de los dos anillos se producen las mayores solicitaciones. En las esquinas, se intenta adaptar a la forma rectangular mediante zonas planas entre el anillo y las esquinas. Se repite el comportamiento de la solución con base cuadrada.

## 5.4 Solución base rectangular 3/1

Después de haber visto las soluciones anteriores se podría adelantar a priori una posible solución, una serie de tres cúpulas yuxtapuestas, y efectivamente así es. No todas las cúpulas tienen el mismo desarrollo, en la sección (Figura. 6 derecha) se observa como todas tienen, aproximadamente, el mismo canto total y como la de la derecha tiene menor amplitud.

En la Figura. 6 (izquierda) se aprecia la forma de trabajar de cada uno de los elementos, tres series de cúpulas cuyas barras trabajan fundamentalmente a compresión y sus respectivos anillos en la base a tracción. Para adaptarse a la forma rectangular, en las esquinas aparecen zonas planas esto se conjuga con el intento de configurar un anillo en forma de circunferencia, debido a la limitación de la longitud de las barras, este anillo es quebrado. En la cúpula de la derecha esto se resuelve con un arco hacia los apoyos en la esquina al no poder cerrar el anillo.

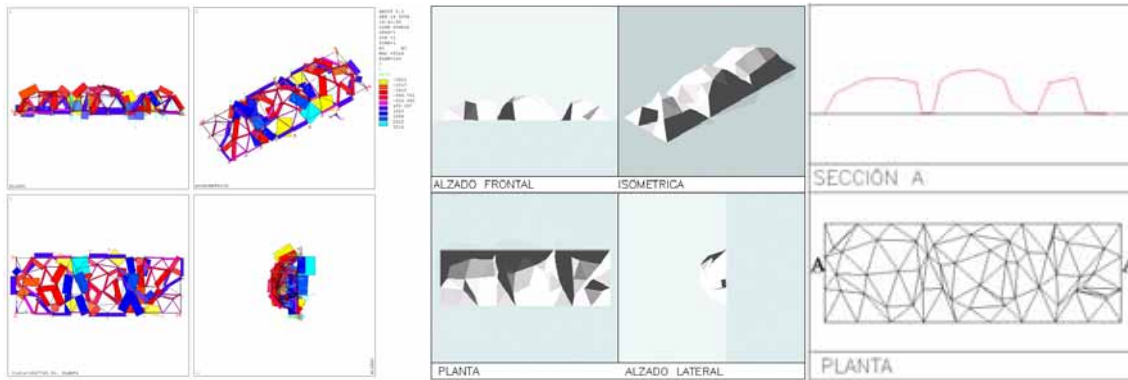


Figura. 6: Solución de base rectangular 3/1,  $V_s=1.868 \text{ e}06\text{kN.m}$ . Geometría en planta y sección (derecha).

### 5.5 Base circular y mixta: configuración inicial.

Se utilizan tres configuraciones iniciales, la primera base circular, y los dos siguientes de base mixta que combina los extremos semicirculares con tramos rectos intermedios de manera que se cubren espacios de proporción 2/1 y 3/1 (Figura. 7).

La primera cubre una base de 100m de diámetro, tiene 26 nudos, 65 elementos y 13 bielas de sustentación, que se reparten 10 en vertical en todos los nudos de la base y tres horizontales tangentes a la circunferencia, de esta manera no se llevan los empujes de la estructura y no intervienen en el reparto del trabajo. Se trata de una estructura isostática.

La segunda cubre un espacio de 50 x 100m, tiene 54 nudos, 137 elementos y 25 bielas de las cuales 22 son verticales y tres horizontales tangentes a la base. De nuevo se trata de una estructura isostática.

La tercera cubre un espacio de 50 x 150 m, tiene 82 nudos, 213 elementos y 33 bielas de manera que se consigue una estructura isostática.

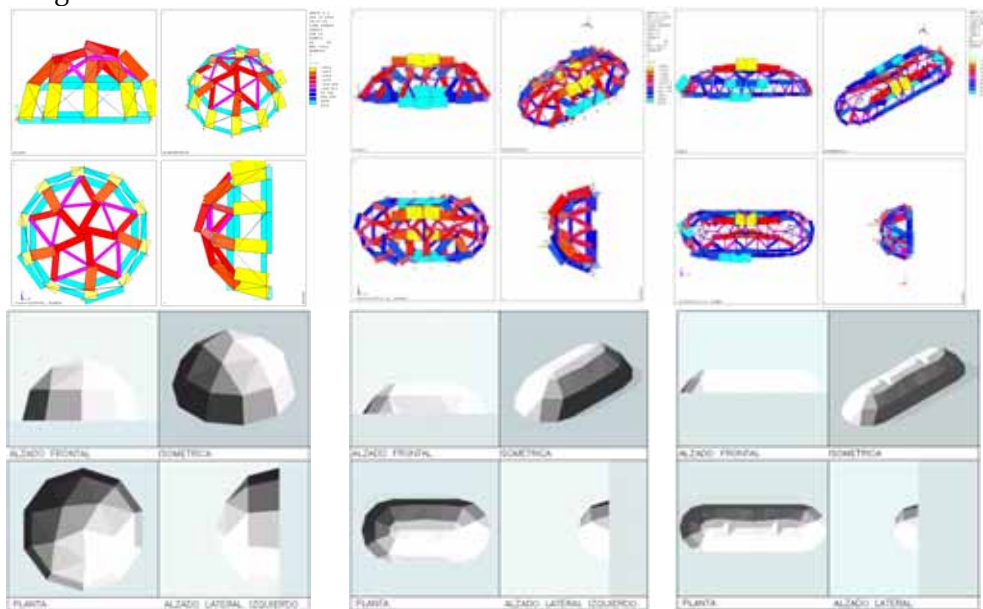


Figura. 7: Configuración inicial ( de izquierda a derecha: base circular,  $V_s=2.599 \text{ e}06\text{kN.m}$ ., base mixta 2/1  $V_s=1.994 \text{ e}06\text{kN.m}$ ., base mixta 3/1  $V_s=9.257 \text{ e}06\text{kN.m}$



## 5.6 Solución base circular.

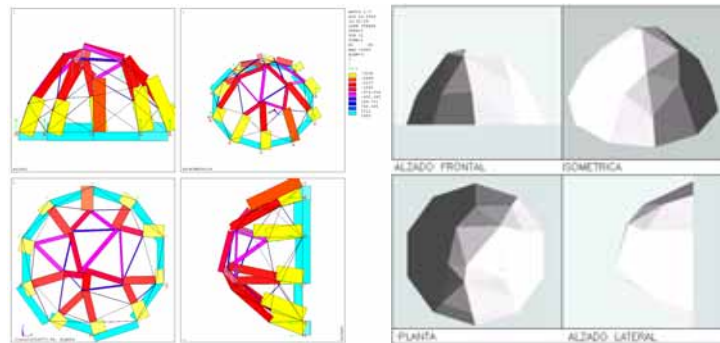


Figura. 8: Solución de base circular,  $V_s=2.056 \text{ e}06 \text{ kN.m}$ .

La solución adopta la forma (Figura. 8) de una cúpula de barras trabajando fundamentalmente a compresión, sin anillos intermedios y un anillo en la base a tracción. Podría hablarse de arcos radiales y de unas plegaduras de la superficie que ayudan a resistir las flexiones locales. La cúpula es de figura parabólica prácticamente simétrica.

## 5.7 Base alargada mixta 2/1

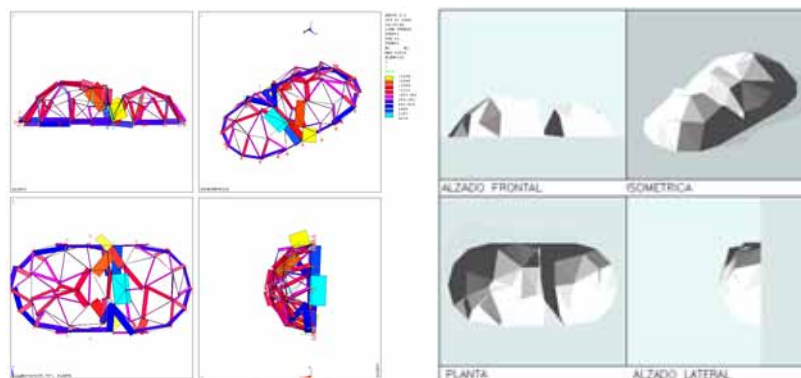


Figura. 9: Solución de base mixta 2/1,  $V_s= 0.924 \text{ e}06 \text{ kN.m}$

En este caso se encuentra una solución similar al caso de base rectangular, dos cúpulas yuxtapuestas o de una cubierta de diente de sierra. En la base aparecen dos semianillos coincidiendo con la forma de la planta, mientras que en el tramo recto, la parte baja de los dientes se lleva las tacciones más fuertes.

## 5.8 Base alargada mixta 3/1

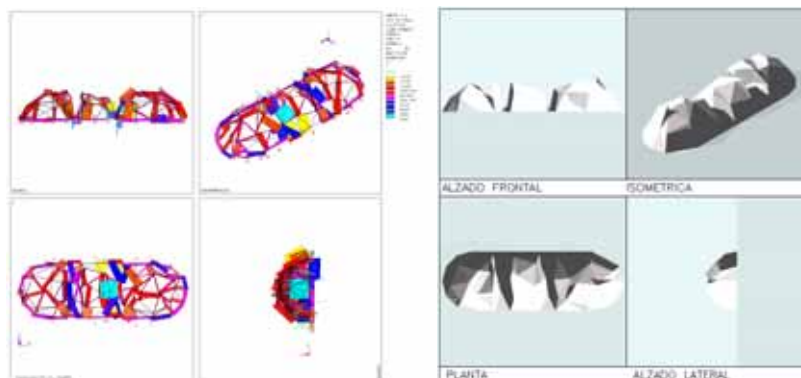


Figura. 10: Solución de base mixta 3/1,  $V_s= 1.442 \text{ e}06 \text{ kN.m}$

Se trata de una solución con tres cúpulas yuxtapuestas de desarrollo similar. De nuevo aprovecha la forma de la planta formando dos semianillos en los extremos. En la zona central las tracciones se resuelven de manera similar al ejemplo anterior por medio de unas barras a tracción en la base de las cúpulas (Figura. 10)

### 5.9 Resumen de resultados

En la siguiente tabla se muestra la comparativa de los resultados obtenidos, se puede apreciar como el volumen estructural se ha reducido considerablemente en todas las soluciones respecto de la inicial.

Se indican los valores de volumen estructural ( $V_s$ ) y esbeltez ( $l/h$ ). Para comparar los valores de volumen estructural se hace mediante una magnitud adimensional denominada *volumen estructural reducido*,  $w$ , (7) obtenido de dividir el volumen estructural por la carga por unidad de superficie,  $q$ , el área cubierta,  $A$ , y la luz corta salvada,  $l$ .

$$w = V_s / q * A * l \quad (7)$$

	Vs inicial [kN.m]	Vs [kN.m]	$q*A*l$ [kN.m]	$w$	$\lambda=l/h$
CUADRADA	29.776 e06	3.442 e06	4.5*10000*100	0.765	2.30
RECTANG. 2/1	15.572 e06	1.188 e06	4.5*5000*50	1.056	2.51
RECTANG. 3/1	43.534 e06	1.868 e06	4.5*7500*50	1.107	2.15
CIRCULAR	2.599 e06	2.056 e06	4.5*7853*100	0.582	1.88
MIXTA 2/1	1.994 e06	0.924 e06	4.5*4463*50	0.920	2.05
MIXTA 3/1	9.257 e06	1.442 e06	4.5*6963*50	0.921	1.92

Tabla 1: Resumen de resultados

## 6 CONCLUSIONES Y PARÁMETROS

Observando el comportamiento del recocido simulado en los ejemplos desarrollados<sup>5, 6</sup>, se puede afirmar que permite el estudio de la búsqueda de formas óptimas en láminas, y que en un problema tan complejo, en el que es difícil conseguir la estructura óptima, el algoritmo se ha comportado esencialmente bien aportando soluciones aceptables y cercanas al óptimo.

Las soluciones estudiadas representan el continuo de formas que existe detrás de cada una, ese conjunto es el que se intenta explorar y que consiste en todas las soluciones mejores. A partir de simplificaciones como la utilización de un dimensionado estricto, la no consideración del pandeo, etc, se consiguen capturar las propiedades de interés y la solución al problema real.

### 6.1 Soluciones cupulares.

Las soluciones con la limitación de recinto  $z \geq 0$  son cupulares, con trazados parabólicos donde, los empujes que provocan, se resuelven en el anillo de la base. Debido a esta forma no se necesitan anillos intermedios. Considerando la flexión global de hundimiento de la forma, al comparar la estructura inicial (semiesfera) con las soluciones (paraboloides), se puede observar (Figura. 11) la ventaja de los paraboloides frente a la semiesfera; a igual canto aumenta el brazo global, por ello, en la solución de base circular a pesar de la leve reducción del canto total, el brazo de palanca ha aumentado respecto del inicial y eso reduce el trabajo realizado.

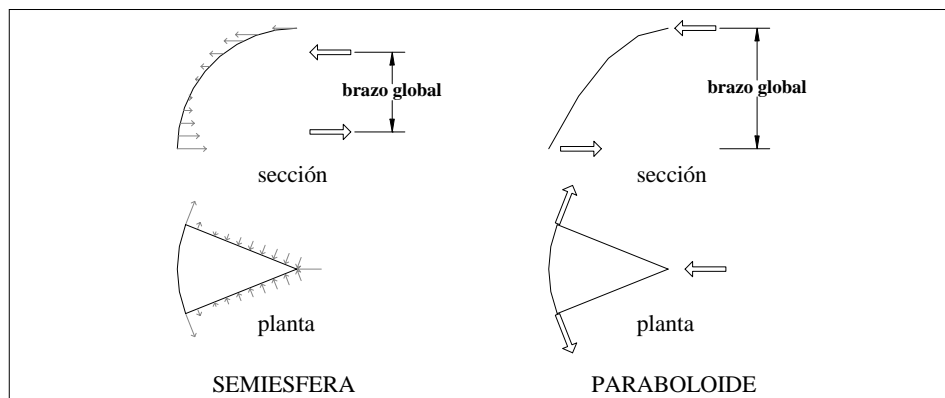


Figura. 11: Comparación a hundimiento de un sector de estructura.

## 6.2 Concentración de tensiones.

En todas las soluciones se observa la concentración de las solicitaciones en unos pocos elementos lo que jerarquiza la solución en una serie de elementos principales: arcos radiales y el anillo de la base. Esto deriva del dimensionado discreto de los elementos. Por una parte contrasta con el comportamiento habitual de las láminas con distribución continua de tensiones y por otra destacar que la concentración de tensiones es también un fenómeno natural en muchas ocasiones, un claro ejemplo aparece en las hojas de las plantas.

## 6.3 Ritmo de repetición

En caso de proporción alargada se observa una repetición de las soluciones más sencillas, tantas veces como la proporción de los lados del rectángulo. Generalizando se podría decir que el número de repeticiones dependerá de la proporción entre los lados de la superficie a cubrir.

$$r=L/l \quad (8)$$

$L, l$  luz larga y luz corta respectivamente.

$r$  número de repeticiones de la solución

## 6.4 Coeficientes de coste en función de la proporción.

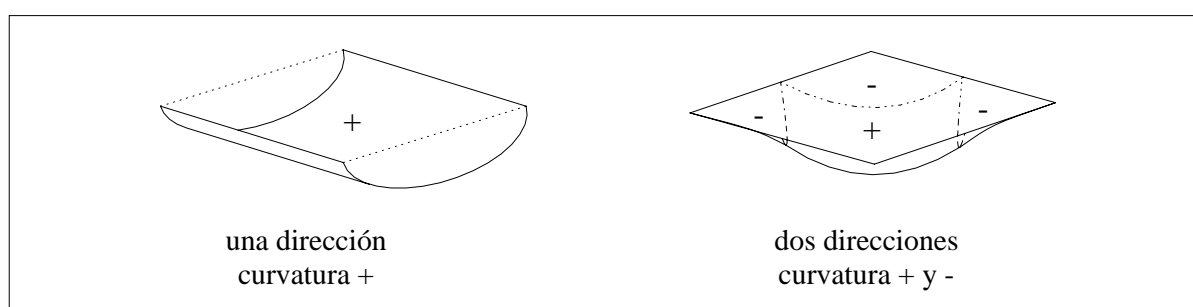


Figura. 12: Dos maneras de llevar la carga a los apoyos, en una o dos direcciones.

Los valores de  $\omega$  (Tabla 1) tienen una secuencia relativamente lógica: cuanto más rectangular más costoso. Se podría decir que en soluciones de proporción rectangular hay un sobre coste por tener que resolver el problema en una única dirección en las zonas centrales mientras que en las extremas, al igual que sucede en soluciones de proporción cuadrada el problema se resuelve en dos direcciones.

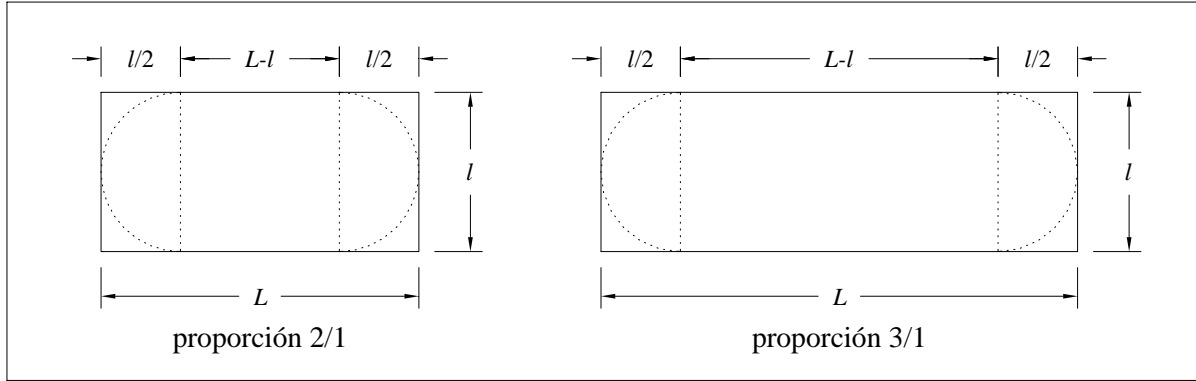


Figura. 13: Dimensiones.

Se pueden establecer dos coeficientes del coste en función de la proporción de volumen estructural reducido destinado a resolver el problema de manera unidireccional o bidireccional, que tienen que ver con el apoyo en todo el contorno o el apoyo en dos lados opuestos.

$C_r$  coeficiente de trabajo en una dirección, o de apoyo en lados opuestos.

$C_c$  coeficiente de trabajo en dos direcciones, o de apoyo en contorno.

Si se considera que el ejemplo de base cuadrada destina el 100% a resolverlo de manera bidireccional, este coeficiente sería  $C_c = 0.582$

En una base rectangular de lados  $L$  y  $l$  de proporciones 2/1 y 3/1, como en los ejemplos mostrados, el volumen estructural se ha de repartir según la siguiente igualdad

$$\frac{(L-l) \cdot C_r + l \cdot C_c}{L} = \omega. \quad (9)$$

**Para base cuadrada y rectangular:** si  $C_c = 0.765$  el valor obtenido para el coeficiente de trabajo unidireccional es 1.35 en caso de proporción 2/1 (10), y 1.29 en caso de proporción 3/1 (11).

$$\frac{(L-l) \cdot C_r + l \cdot C_c}{L} = 0.5 \cdot C_r + 0.5 \cdot C_c = 1.056; \quad C_r = 1.35 \quad (10)$$

$$\frac{(L-l) \cdot C_r + l \cdot C_c}{L} = 0.66 \cdot C_r + 0.33 \cdot C_c = 1.107; \quad C_r = 1.29 \quad (11)$$

**Para base circular y mixta:** si  $C_c = 0.582$  el valor obtenido para el coeficiente de trabajo unidireccional es 1.26 en caso de proporción 2/1 (12), y 1.10 en caso de proporción 3/1 (13).

$$\frac{(L-l) \cdot C_r + l \cdot C_c}{L} = 0.5 \cdot C_r + 0.5 \cdot C_c = 0.920; \quad C_r = 1.26 \quad (12)$$

$$\frac{(L-l) \cdot C_r + l \cdot C_c}{L} = 0.66 \cdot C_r + 0.33 \cdot C_c = 0.921; \quad C_r = 1.10 \quad (13)$$

De este modo el coste que no puede reducirse en soluciones de recinto positivo sería  $0.6 \cdot q^* A^* l$ , para las regiones con apoyo en el perímetro, más entre 1.1 y 1.35 veces  $q^* A^* l$  para las regiones con apoyos paralelos. Para ello las soluciones tratarán de formar “burbujas” o cúpulas de formas aproximadamente análogas en dos direcciones ortogonales, materializando vigas contenidas en su superficie, que permitan salvar la luz formando los pliegues requeridos.

Los parámetros encontrados pueden servir como aplicación directa a nuevos diseños de láminas, tanto reticuladas con elementos lineales (más apropiado para acero o madera) o superficiales (fundamentalmente de hormigón armado) aunque debido a la concentración de tensiones en ciertos diseños parece que no se obtendría una superficie de espesor constante.

## 7 AGRADECIMIENTOS

A Jaime Cervera por sus comentarios sobre las primeras versiones de este artículo.

## 8 REFERENCIAS

- [1] Cervera Bravo, J. *Concebir y analizar estructuras*, Madrid, 2004.
- [2] Cervera Bravo, J. *Diseño de estructuras de edificación*, Madrid: Instituto Juan de Herrera & Departamento de Estructuras de Edificación, 1993.
- [3] Vázquez Espí, M. *El recocido simulado: un nuevo algoritmo para la optimización de estructuras*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1994.
- [4] Orta Rial, B. "Optimization of Shells by Means of Simulated Annealing. Part I: Bases." *Proceedings of Tenth East Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*. (EASEC-10). Vol 4 pg 631-636. Bangkok, Thailand, 2006.
- [5] Orta Rial, B. "Optimization of Shells by Means of Simulated Annealing. Part II: Application." *Proceedings of Tenth East Asia Pacific Conference on Structural Engineering and Construction*. (EASEC-10). Vol 4 pg 637-642. Bangkok, Thailand, 2006.
- [6] Orta Rial, B. *Parámetros de forma en laminas y su incidencia en la eficacia estructural*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 2005.
- [7] Kirkpatrick, S. Gellatt, C.D. et Vecchi, M. P. Optimization by simulated annealing, *Science*, 220 pp.671-680, 1983.
- [8] Aarts, E. et Korst, J. *Simulated annealing and Boltzman machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing*. Great Britain: Courier International, Tiotree, Essex, 1989.
- [9] Yang, R.L. "Convergence of the Simulated Annealing Algorithm for Continuous Global Optimization" *Journal of Optimization Theory and Applications* 104 vol. 3 pp.:691-716, March 2000.
- [10] Press, William H.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T. et Flannery, Brian P. *Numerical Recipes in C, The art of Scientific Computing*. USA, Massachusetts: Cambridge University Press, 2ª edición, 1992.