

# ALGUNAS SOLUCIONES EXACTAS DE LA MAGNETOFLUIDODINAMICA

Por A. LIÑAN

**Resumen.**

Se obtiene la solución exacta al movimiento oscilatorio de una placa infinita que se mueve paralelamente a sí misma bajo la acción de un campo magnético transversal. No se impone ninguna limitación al valor de la conductividad de la placa, extendiéndose a valores intermedios de la conductividad las soluciones correspondientes a la placa perfectamente conductora y perfectamente no conductora. Se pone de manifiesto en todos los casos la existencia de dos ondas que se propagan hacia el interior del fluido con distintas velocidades y longitudes de penetración. También se pone de manifiesto la existencia de una única onda electromagnética que se propaga hacia el interior de la placa.

Se muestra cómo la resistencia magnética, más la resistencia de rozamiento de la placa, es mayor que en ausencia de campo magnético. En cambio, la resistencia de rozamiento es menor cuando la placa es más conductora que el fluido, y mayor cuando ocurre lo contrario, en tanto que para igual conductividad el campo magnético no influye en el coeficiente de rozamiento.

Se extiende la solución al movimiento impulsivo de la placa, obteniéndose resultados análogos.

Para el problema de la placa oscilante se obtiene la distribución de temperatura y en particular el flujo de calor en la pared.

**Notación.**

$$a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} H_0 = \text{velocidad de ALFVEN.}$$

$a'_1, a'_2$  = definidos en la fórmula [27].

$C_f$  = coeficiente de rozamiento.

$C_M$  = coeficiente de resistencia magnética.

$C_D$  = coeficiente de resistencia total.

$c_p, c_v$  = calores específicos a presión y volumen constante.

$\vec{E}$  = intensidad del campo eléctrico.

$\vec{H}$  = excitación magnética, también llamada intensidad del campo magnético.

$H_0$  = excitación magnética aplicada en el medio fluido.

$$h = \frac{H_x}{H_0}$$

$\vec{j}$  = densidad de corriente eléctrica.

$$j = \frac{J_z}{\sigma \mu H_0 a}$$

$k$  = conductividad térmica.

$L_1, L_2$  = longitudes que aparecen en la fórmula [12].

$l_1, l_2$  = valores adimensionales que aparecen en [23].

$$m = \frac{a}{\sqrt{2 \omega_0 \nu}}$$

$$m_1 = \frac{\sqrt{2} m}{\sqrt{\lambda} + 1}$$

$$P = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$p$  = presión, cuando no es subíndice.

$p_\infty$  = presión de la corriente libre.

$$Pr = \frac{\rho c_p \nu}{k} \text{ (número de PRANDTL).}$$

$r_1, r_2$  = definidos en [16].

$s$  = parámetro de la transformación de LAPLACE.

$T$  = temperatura;  $T_\infty$  temperatura de la corriente libre.

$$\tilde{T}_1 = (T - T_\infty) \frac{\sqrt{\lambda} \cdot c_p}{a^2}$$

$t$  = tiempo.

$U$  = amplitud de la velocidad de la placa en el movimiento oscilatorio o velocidad de la misma en el impulsivo.

$u_x, u_y, u_z$  = componentes de la velocidad  $\vec{v}$  según los  $x, y, z$ .

$$u = \frac{u_x}{U}$$

$$u_0 = \frac{U}{a}$$

$u_i$  = energía interna.

$V_1, V_2$  = velocidades que aparecen en la ecuación [22].

$v_1, v_2$  = valores adimensionales que aparecen en [24].

$\vec{v}$  = velocidad.

$x, y, z$  = coordenadas.

$$a = \frac{1}{P + 2}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda} \text{Pr}}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\eta = \frac{1}{\sigma \mu} \text{ difusividad magnética } (\eta_p \text{ de la placa}).$$

$$\eta' = \frac{\eta_p}{\sqrt{\eta v}}$$

$$\theta = \frac{a}{\sqrt{\lambda} + 1} \sqrt{\frac{t}{v}}$$

$$\lambda = \frac{\eta}{v} \text{ inverso del número de PRANDTL magnético.}$$

$\mu, \mu_p$  = permeabilidad magnética del fluido y de la placa.

$\nu$  = viscosidad cinemática o difusividad viscosa.

$$\xi = y - \frac{a}{\sqrt{\eta v}}$$

$\rho$  = densidad.

$$\Sigma = \frac{\sigma \mu_p}{\sigma_p \mu}$$

$\sigma, \sigma_p$  = conductividades eléctricas del fluido y de la placa.

$$\tau = t \frac{a^2}{\sqrt{\eta v}}$$

$\Phi$  = parámetro que aparece en la fórmula [33].

$\omega_0$  = pulsación del movimiento de la placa.

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{\eta v}}{a^2}$$

## 1. Introducción.

En un fluido conductor en movimiento se producen, bajo la acción de campos magnéticos, corrientes eléctricas que modifican el campo electromagnético aplicado, y aparecen fuerzas sobre el fluido y se desarrolla energía calorífica, por efecto Joule, que modifican a su vez el movimiento del fluido.

El estudio de esta doble interacción entre los

efectos electrodinámicos y fluidodinámicos constituye el objeto de la Magnetofluidodinámica.

La formulación matemática de esta interacción nos lleva a un sistema de ecuaciones no lineales demasiado complejo para poder conocer, en los casos normales que se presentan en la práctica, la solución exacta. Es necesario buscar soluciones aproximadas que proporcionen los rasgos más esenciales del fenómeno a considerar, que permitan interpretar mejor las experiencias y proporcionen fórmulas sencillas para utilizar en los proyectos.

Estas soluciones aproximadas se obtienen mediante un modelo matemático sencillo del problema, ya sea simplificando las condiciones de contorno (corrientes bidimensionales, cuerpos delgados) o simplificando las ecuaciones al desprestigiar términos cuya influencia se presume ha de ser relativamente pequeña en el problema a considerar.

Para esta labor de simplificación es muy importante conocer la solución exacta en casos que, aunque no se presenten en la práctica, permitan poner de manifiesto la importancia y significado de cada uno de los términos.

En el presente trabajo se considerará un fluido de características muy simples (densidad, viscosidad, conductividad y permeabilidad magnéticas constantes) y un esquema físico que dé lugar a condiciones de contorno muy sencillas.

Consideraremos el movimiento de una placa de superficie y espesor infinito y conductividad arbitraria, que oscila o toma un movimiento impulsivo, paralelamente a sí misma, en el seno de un fluido conductor, bajo la acción de un campo magnético transversal, cuando el fluido se extiende hasta el infinito (problemas de la placa oscilante y de RAYLEIGH), o bien cuando el fluido está limitado por la presencia de otra placa en reposo (corriente de COUETTE no estacionaria).

Diversos autores han utilizado este mismo esquema. El problema de RAYLEIGH ha sido tratado por V. J. ROSSOW (1) despreciando el campo eléctrico que mide un observador en reposo.

C. C. CHANG y T. T. YEN (2) plantean el mismo problema para una placa perfectamente conductora, obteniendo la solución exacta para fluidos cuya relación entre difusividades magnética y viscosa sea la unidad, y soluciones aproximadas para otros valores de esa relación.

L. N. TAO (3) presenta la solución al movimiento impulsivo de COUETTE cuando el campo eléctrico medido por el observador en reposo es nulo o constante.

C. C. MIE (4) da la solución general al problema en forma de serie, obtenida utilizando la

transformada finita de FOURIER, para un fluido viscoso, incompresible y perfectamente conductor.

El problema de la placa oscilante ha sido tratado por ONG y NICHOLLS (5), despreciando el campo eléctrico.

J. A. STEKETTE (6) pone de manifiesto la existencia de dos profundidades de penetración que dependen de la intensidad del campo magnético aplicado, y da resultados explícitos para números de REYNOLDS magnéticos y viscosos iguales.

W. I. AXFORD (7) analiza el problema, examinando con detalle las condiciones de contorno, y obtiene la solución con aproximaciones convenientes.

T. KAKUTANI (8) presenta la solución para un número de PRANDTL magnético arbitrario, discutiendo los resultados en los casos límites. Calcula la resistencia cuando la placa es perfectamente conductora y cuando es perfectamente no conductora.

El presente artículo resume un trabajo más detallado sobre el tema publicado como comunicado interior del I.N.T.A.E.T. (13).

## 2. Ecuaciones generales.

Si nos limitamos a fluidos incompresibles de viscosidad, permeabilidad y conductividad eléctrica constantes, las ecuaciones de la Magnetofluidodinámica, con las aproximaciones habituales (ver (10), (11) y (12)), toman la forma:

Ley de AMPÈRE:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}. \quad [1]$$

Ley de FARADAY:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}). \quad [2]$$

Líneas de fuerza magnética cerradas:

$$\nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0. \quad [3]$$

Ley de OHM:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \mu \vec{H}). \quad [4]$$

Conservación de la masa:

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad [5]$$

Cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{D \vec{v}}{D t} = - \nabla p + \rho \nu \Delta \vec{v} + \vec{J} \wedge \mu \vec{H}. \quad [6]$$

Se ha utilizado el sistema racional de unidades M K S Q; las magnitudes eléctricas  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}$  y la velocidad  $\vec{v}$  son las medidas por un observador ligado al sistema de referencia (9).

El anterior sistema de 14 ecuaciones (no independientes, pues, por ejemplo, si hallamos la divergencia de los dos miembros de [2] obtenemos  $\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mu \vec{H}) = 0$ ) con 13 incógnitas, nos determina de modo único la solución si lo complementamos con las condiciones de contorno apropiadas.

La ecuación de la energía:

$$\rho \frac{D u_t}{D t} = \Phi_v + \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{J^2}{\sigma}, \quad [7]$$

donde  $\Phi_v$  es la función de disipación de LORD RAYLEIGH, podrá resolverse separadamente una vez hallada la solución al sistema anterior.

Si consideramos ahora el movimiento inducido en el fluido por una placa que se mueve paralelamente a sí misma, tomando un sistema de referencia en reposo con el eje  $x$  en el plano de la placa y en la dirección del movimiento, y el eje  $y$  perpendicular a ella (fig. 1), las únicas variables independientes del problema serán el tiempo  $t$  y la distancia  $y$  a la placa. Con ello las ecuaciones anteriores tomarán la forma:

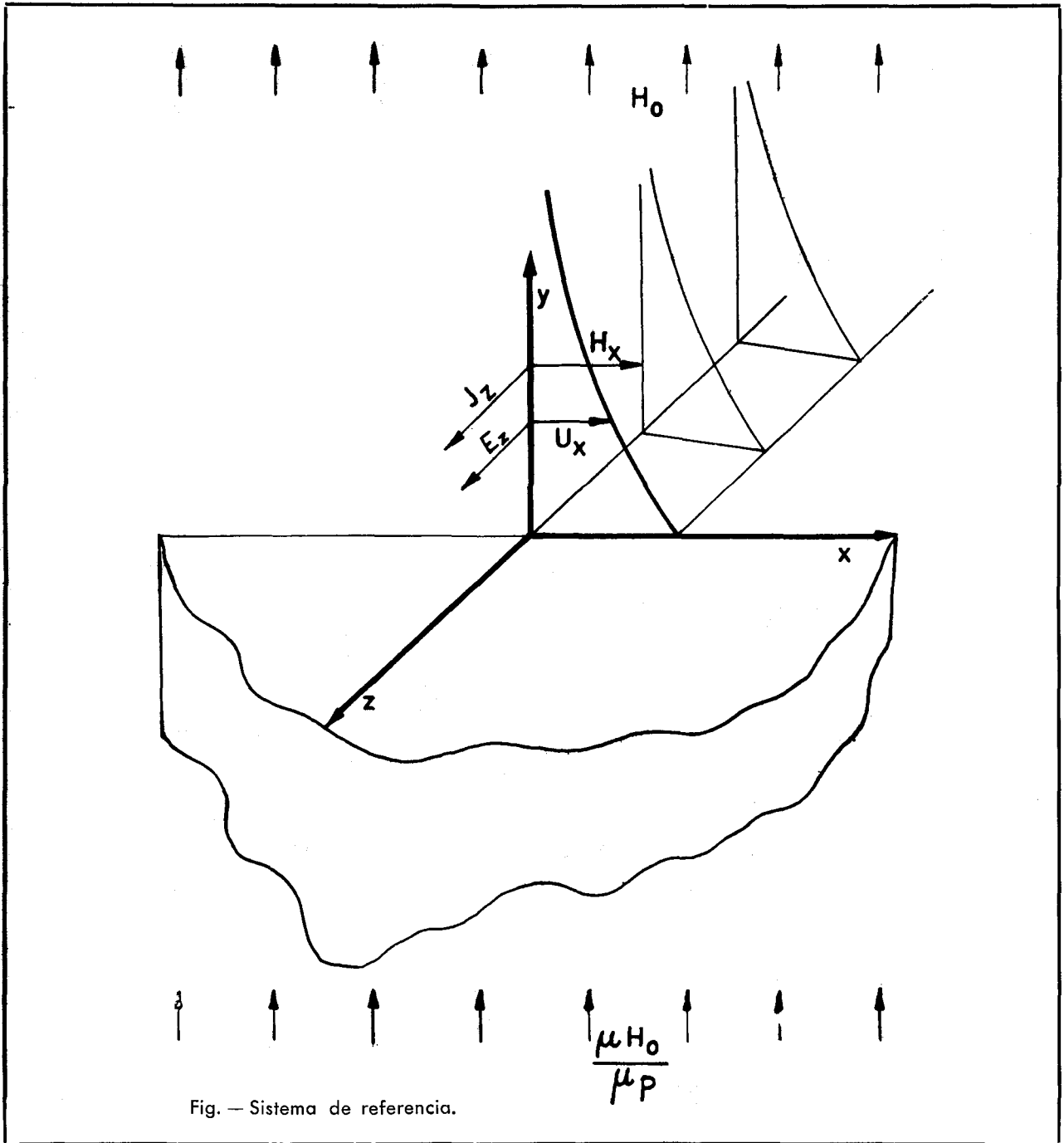
En el medio fluido:

$$\begin{array}{l|l} J_z = - \frac{\partial H_x}{\partial y}; \quad (8 a) & J_x = \frac{\partial H_z}{\partial y}; \quad (9 a) \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = - \frac{\partial E_z}{\partial y}; \quad (8 b) & \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y}; \quad (9 b) \\ J_z = \sigma (E_z + \mu H_0 u_x); \quad (8 c) & J_x = \sigma (E_x - \mu H_0 u_z); \quad (9 c) \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\mu H_0}{\rho} J_z; \quad (8 d) & \frac{\partial u_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\mu H_0}{\rho} J_x; \quad (9 d) \\ J_y = 0 \quad \rightarrow \quad H_y = H_0 \quad \rightarrow \quad E_y = \mu (u_x H_z - u_z H_x); \\ u_y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( p + \frac{1}{2} \mu H_x^2 + \frac{1}{2} \mu H_z^2 \right) = 0. \end{array}$$

En el interior de la placa se verificarán las mismas ecuaciones anteriores, excepto las [8 d] y [9 d], que se sustituyen por:

$$u_x = U(t) \quad y \quad u_z = 0.$$

También la relación  $H_y = H_0$  se sustituye por  $H_y = \frac{\mu H_0}{\mu_p}$ .



Las condiciones de contorno exigen:

1.º Para

$$y = 0 \quad \cdot \quad u_x = U(t) \quad \cdot \quad u_y = 0 \quad \cdot \quad u_z = 0,$$

para

$$y \rightarrow \infty \quad \cdot \quad u_x = 0 \quad \cdot \quad u_y = 0 \quad \cdot \quad u_z = 0.$$

2.º Para  $y = 0$  „  $H_x$ ,  $H_z$ ,  $E_x$ ,  $E_z$  han de ser continuas, pues así nos lo muestran las ecuaciones

de MAXWELL (leyes de FARADY y AMPÈRE), escritas en forma integral (ver (9)).

Teniendo en cuenta [3],  $\mu H_y$  ha de ser continua; luego el valor de  $H_y$  en el interior de la placa será  $\frac{\mu H_0}{\mu_p}$ .

3.º Para  $y \rightarrow \infty$  y también para  $y \rightarrow -\infty$ .

$$H_x = 0 \quad \cdot \quad H_z = 0;$$

$$E_x = 0 \quad \cdot \quad E_y = 0 \quad \cdot \quad E_z = 0.$$

4.º Para  $y \rightarrow \infty$ ,  $p = p_\infty$

En estas condiciones el sistema [9] admite la solución:

$$J_x = H_z = E_x = u_z = 0;$$

y el problema se reduce a resolver el sistema [8], que puede reducirse, a su vez, al sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\mu H_0}{\rho} \frac{\partial H_x}{\partial y}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\sigma \mu} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + H_0 \frac{\partial u_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad [10]$$

para el medio fluido, y

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\sigma_p \mu_p} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} \quad [11]$$

en el interior de la placa.

Con las condiciones de contorno:

$$\text{para } y \rightarrow \infty \rightarrow u_x = 0 \rightarrow H_x = 0;$$

$$\text{para } y = 0 \rightarrow u_x = U(t) \rightarrow H_x \text{ y } \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y} \text{ continuas;}$$

$$\text{para } y \rightarrow -\infty \rightarrow H_x = 0.$$

Una vez conocido  $u_x(y, t)$ ,  $H_x(y, t)$ , podremos calcular las restantes variables mediante las fórmulas:

$$p + \frac{1}{2} \mu H_x^2 = p_\infty;$$

para la  $J_z$  utilizaremos la [8 a], y para la  $E_z$ , la [8 c]. La  $E_y$  es idénticamente nula.

*Forma adimensional.*

Poniendo  $h = \frac{H_x}{a}$ ,  $u = \frac{u_x}{H_0}$ , donde  $a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} H_0$  es la velocidad de ALFVEN;  $\lambda = \frac{1}{\sigma \mu \nu} = \frac{\eta}{\nu}$ , donde  $\eta = \frac{1}{\sigma \mu}$  es la difusividad magnética ( $\frac{1}{\lambda}$ , relación entre las difusividades viscosa y magnética, será el número de PRANDTL magnético):

$$\xi = y \frac{a}{\sqrt{\eta \nu}} \rightarrow \tau = t \frac{a^2}{\sqrt{\eta \nu}};$$

$$\eta' = \frac{\rho}{\sqrt{\eta \nu}} = \frac{\sigma \mu}{\sigma_p \mu_p}.$$

Con estas variables el sistema de ecuaciones [10] y [11] toma la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial h}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial h}{\partial \tau} &= \sqrt{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi}, \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

que se verifican en el medio fluido, y

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \eta' \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}, \quad [13]$$

que se verifica en el interior de la placa.

### 3. Problema de la placa oscilante.

Si la placa toma un movimiento oscilatorio, podemos escribir  $U(t)$  como suma de oscilaciones armónicas, y al ser lineal el sistema de ecuaciones, podemos obtener la solución sumando las correspondientes a cada armónico.

Supongamos, pues, que  $U(t) = U \cos \omega_0 t$ , que escribiremos en forma adimensional  $u(0, \tau) = u_0 \cos \omega \tau$ , habiendo puesto:

$$u_0 = \frac{U}{a} \rightarrow \omega = \omega_0 \frac{\sqrt{\eta \nu}}{a^2}.$$

Por ser lineal el sistema de ecuaciones, la parte real de la solución correspondiente a la condición de contorno  $u(0, \tau) = u_0 e^{i\omega\tau}$  será la solución correspondiente a la condición  $u(0, \tau) = u_0 \cos \omega \tau$ .

Busquemos, pues, la solución del sistema de ecuaciones [12] y [13] con las condiciones de contorno:

Para

$$\begin{aligned} \xi \rightarrow \infty: & u = 0 \rightarrow h = 0; \\ \xi \rightarrow \infty: & h = 0; \end{aligned}$$

$$\xi = 0 \rightarrow u = u_0 e^{i\omega\tau} \rightarrow h \text{ y } \frac{1}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial \xi} \text{ continuas.}$$

Puede esperarse, como consecuencia de estas condiciones de contorno, que:

$$u = f(\xi) e^{i\omega\tau} \rightarrow h = F(\xi) e^{i\omega\tau}$$

Con ello la ecuación [13] toma la forma:

$$i \omega F = \eta' \frac{d^2 F}{d \xi^2},$$

cuya solución, tendiendo a cero para  $\xi \rightarrow -\infty$  es:

$$F(\xi) = F(0) e^{-\sqrt{\frac{i \omega}{\eta'}} \xi}, \quad [14]$$

en función de  $F(0)$ , que determinamos más adelante.

El sistema [12], a su vez, toma la forma:

$$\left. \begin{aligned} i\omega f &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi} \\ i\omega F &= \sqrt{\lambda} \frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{df}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad [15]$$

y las condiciones de contorno serán:

$$\begin{aligned} \text{para } \xi \rightarrow \infty & \quad f = 0 & \quad F = 0 \\ \xi = 0 & \quad f = u_0 & \quad F = F(0) \end{aligned}$$

como exige la continuidad de  $h$ , mientras que la

continuidad de  $\frac{1}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial \xi}$  nos muestra que:

$$\left( \frac{dF}{d\xi} \right)_{\xi=+0} = \frac{\sigma}{\sigma_p} \left( \frac{dF}{d\xi} \right)_{\xi=-0} = \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{i\omega}{\gamma'}} F(0).$$

La solución del sistema [15] será de la forma:

$$f = C_1 e^{r_1 \xi} + C_2 e^{r_2 \xi}$$

$$F = - \frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} r_1^2 - i\omega}{r_1} C_1 e^{r_1 \xi} + \frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} r_2^2 - i\omega}{r_2} C_2 e^{r_2 \xi},$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= - \frac{\sqrt{1 + (P+2)\omega i} + \sqrt{1 + (P-2)\omega i}}{2} \\ r_2 &= - \frac{\sqrt{1 + (P+2)\omega i} - \sqrt{1 + (P-2)\omega i}}{2} \end{aligned} \right\} \quad [16]$$

donde se ha puesto:

$$P = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Las condiciones de contorno en el infinito se cumplen de este modo automáticamente, y las condiciones en  $\xi = 0$  nos determinan  $C_1$  y  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{(r_2 - r_1 \sqrt{\lambda}) \left( r_2 - \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{\omega i}{\gamma'}} \right)}{\left[ (r_2 + r_1) - \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{i\omega}{\gamma'}} (1 + \sqrt{\lambda}) \right] (r_2 - r_1)} u_0 \\ C_2 &= \frac{(r_1 - r_2 \sqrt{\lambda}) \left( r_1 - \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{\omega i}{\gamma'}} \right)}{\left[ (r_2 + r_1) - \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{i\omega}{\gamma'}} (1 + \sqrt{\lambda}) \right] (r_2 - r_1)} u_0 \end{aligned} \right\} \quad [17]$$

Utilizando estos valores de  $C_1$  y  $C_2$  podemos escribir la solución al problema de la placa oscilante omitiendo el símbolo parte real de:

$$u = [C_1 e^{r_1 \xi} + C_2 e^{r_2 \xi}] e^{i\omega\tau} \quad [18]$$

$$h = - \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} r_1 - r_2 \right) C_1 e^{r_1 \xi} + \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} r_2 - r_1 \right) C_2 e^{r_2 \xi} \right] e^{i\omega\tau} \quad [19]$$

y teniendo en cuenta las leyes de AMPÈRE y OHM, i.e. [8 a] y [8 c]:

$$- \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y} = E_z + \mu H_0 u_x$$

que en forma adimensional escribiremos:

$$\frac{E_z}{\mu H_0 a} = -u - \sqrt{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad [20]$$

y también teniendo en cuenta [8 a]:

$$\frac{J_z}{\sigma \mu H_0 a} = -\sqrt{\lambda} \frac{\partial h}{\partial \xi} \quad [21]$$

con lo cual:

$$\frac{E_z}{\mu H_0 a} = \left[ (r_1^2 - i\omega \sqrt{\lambda} - 1) C_1 e^{r_1 \xi} + (r_2^2 - i\omega \sqrt{\lambda} - 1) C_2 e^{r_2 \xi} \right] e^{i\omega\tau} \quad [20 a]$$

$$\frac{J_z}{\sigma \mu H_0 a} = \left[ (r_1^2 - i\omega \sqrt{\lambda}) C_1 e^{r_1 \xi} + (r_2^2 - i\omega \sqrt{\lambda}) C_2 e^{r_2 \xi} \right] e^{i\omega\tau} \quad [21 a]$$

Las fórmulas [18], [19], [20 a] y [21 a] resuelven el problema e indican que cualquiera de las incógnitas puede escribirse en forma dimensional como sigue:

$$q = A_q e^{-\frac{y}{L_1}} \cos \left[ \omega_0 \left( t - \frac{y}{V_1} \right) + \phi_q \right] + B_q e^{-\frac{y}{L_2}} \cos \left[ \omega_0 \left( t - \frac{y}{V_2} \right) + \phi_q \right], \quad [22]$$

pudiendo ser  $q$  cualquiera de las  $u_x$ ,  $H_x$ ,  $E_z$ ,  $J_z$ . Con ello se pone de manifiesto la existencia de dos ondas sinusoidales que avanzan hacia el interior del

fluido con velocidades  $V_1, V_2$ , reduciéndose su amplitud según el factor  $e^{-\frac{y}{l_j}}$  en el que aparecen las longitudes características  $L_1$  y  $L_2$  de penetración de los efectos magnetofluidodinámicos.

Los valores de estas velocidades y longitudes pueden calcularse fácilmente, obteniéndose:

$$L_1 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_0}} l_1(\lambda, m) \quad \bullet \quad L_2 = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_0}} l_2(\lambda, m); \quad [23]$$

$$V_1 = \sqrt{2\omega_0\nu} v_1(\lambda, m) \quad \bullet \quad V_2 = \sqrt{2\omega_0\nu} v_2(\lambda, m). \quad [24]$$

Siendo  $m = \frac{a}{\sqrt{\frac{2\nu}{\omega_0}}} = \frac{4}{\sqrt{\lambda}}$ , la relación entre

la velocidad de propagación de las ondas magnetofluidodinámicas en ausencia de efectos de viscosidad y la velocidad de propagación de las ondas en ausencia de campo magnético.

En las figuras 2, 3 y 4 se dan los valores de  $l_j, v_j$ , en función de  $m$ , para distintos valores del parámetro  $\lambda$ .

*Coefficiente de rozamiento.*

Definiremos el coeficiente de rozamiento para la placa oscilante:

$$C_f = \frac{2\nu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0}}{U^2} = - \frac{2}{\sqrt{\lambda} u_0^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}. \quad [25]$$

Teniendo en cuenta [18]:

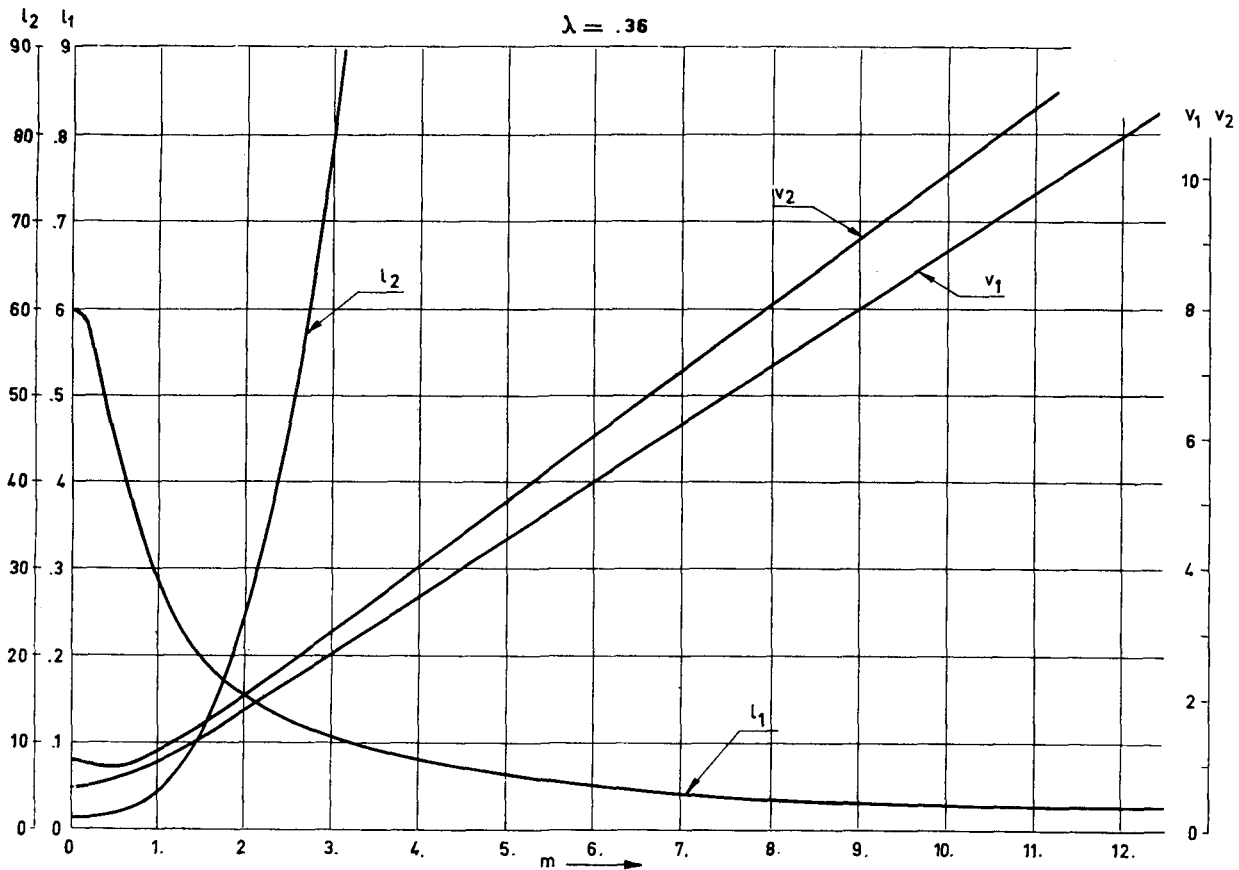
$$C_f = R e \left[ - \frac{2}{\sqrt{\lambda} u_0^2} (C_1 r_1 + C_2 r_2) e^{i\omega\tau} \right], \quad [26]$$

donde  $R e$  indica "parte real de".

Sustituyendo en la expresión anterior los valores de  $C_1$  y  $C_2$  ya calculados [17], podremos escribir:

$$C_f = 2 \frac{\sqrt{\omega_0\nu}}{U} \psi(\Sigma, m_1) \cos[\omega_0 t + \Phi_1], \quad [27]$$

Fig. 2. — Longitudes y velocidades de penetración de los efectos magnetofluidodinámicos.



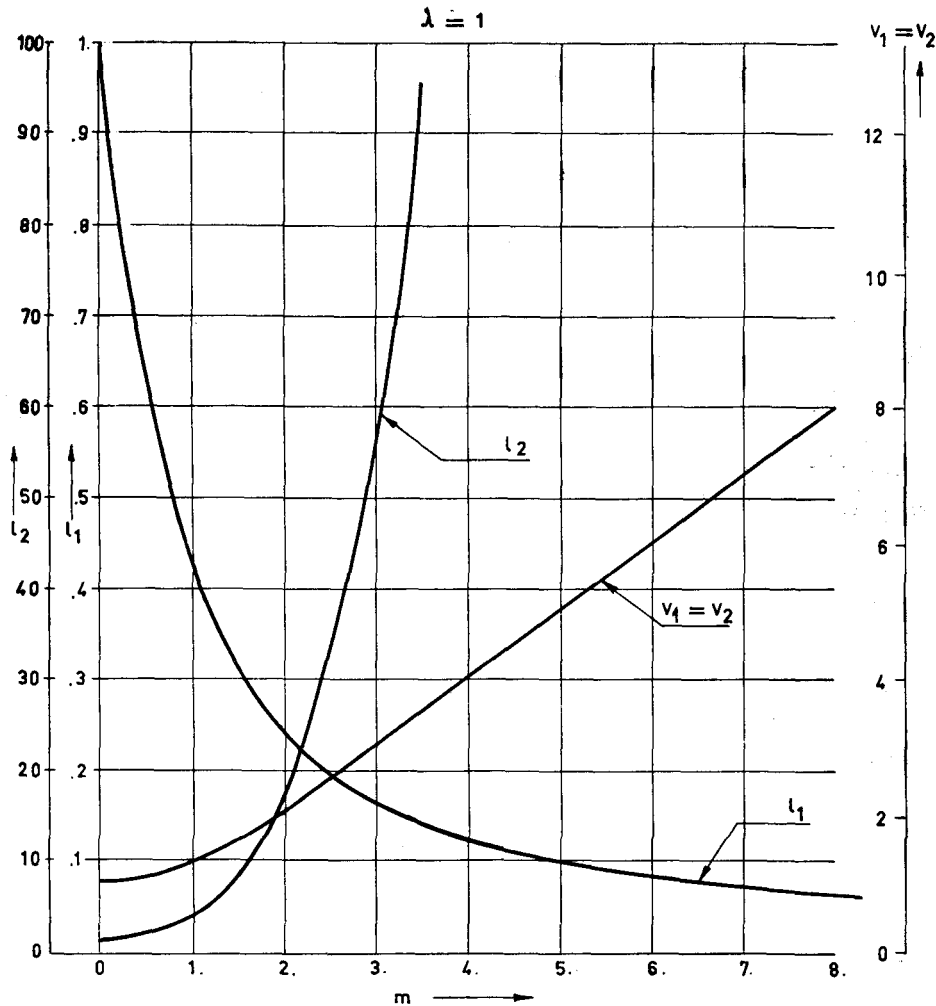


Fig. 3. — Longitudes y velocidades de penetración de los efectos magnetofluidodinámicos.

donde:

$$\psi(\Sigma, m_1) = \sqrt{\frac{\left[1 + \sqrt{\frac{\Sigma}{2}}(a'_1 + b'_1)\right]^2 + \left[\sqrt{\frac{\Sigma}{2}}(a'_1 - b'_1)\right]^2}{\left(a'_1 + \sqrt{\frac{\Sigma}{2}}\right)^2 + \left(b'_1 + \sqrt{\frac{\Sigma}{2}}\right)^2}}$$

siendo:

$$a'_1 = \sqrt{\frac{m^2_1 + \sqrt{m^4_1 + 1}}{2}}, \quad b'_1 = \sqrt{\frac{-m^2_1 + \sqrt{m^4_1 + 1}}{2}};$$

$$m_1 = \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{\lambda + 1}}, \quad \Sigma = \frac{\sigma_p \mu_p}{\sigma_p \mu}$$

En la figura 5 se ha representado  $\psi$ , en función de  $m_1$ , para distintos valores de  $\Sigma$ ; simultáneamente

se ha representado la solución obtenida por NICHOLLS y ONG (5).

Nótese que cuando  $\Sigma > 1$ , el coeficiente de rozamiento es mayor que el que se obtiene en ausencia de campo magnético, mientras que para  $\Sigma < 1$  es menor.

Para  $\Sigma = 1$  no tiene efecto el campo magnético sobre el coeficiente de rozamiento.

Cuando  $\sqrt{\frac{\Sigma}{2}} \gg a'_1$ , podemos escribir:

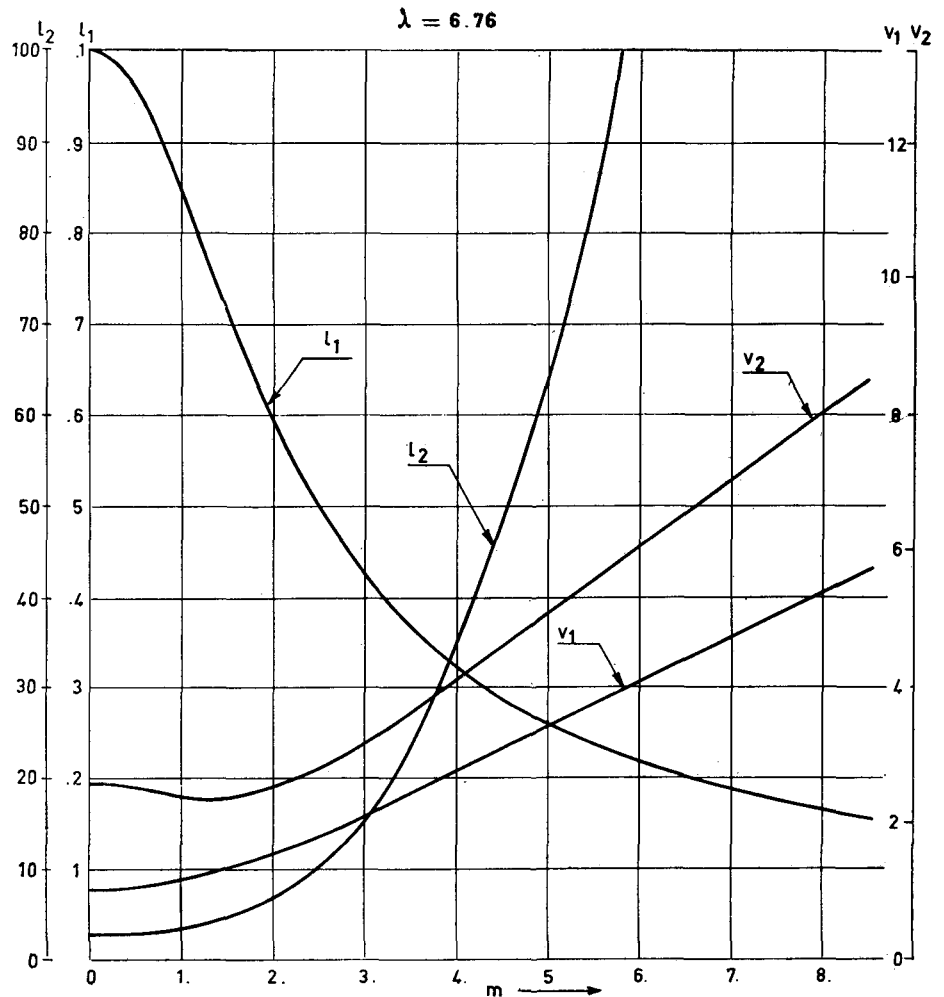
$$\psi(\Sigma, m_1) = \sqrt[4]{1 + m^4_1}. \quad [28]$$

El valor de  $\psi$  obtenido por NICHOLLS y ONG es:

$$\psi = \sqrt[4]{1 + \left(m_1 \frac{\sqrt{\lambda + 1}}{\sqrt{\lambda}}\right)^4}. \quad [29]$$



Fig. 4 — Longitudes y velocidades de penetración de los efectos magnetofluidodinámicos.



Cuando:

$$\sqrt{\frac{\Sigma}{2}} \ll b'_1 \quad \psi(\Sigma, m_1) = \frac{1}{4\sqrt{1+m_1^2}} \quad [30]$$

En cualquiera de los dos casos anteriores, la conductividad de la placa no influye en el coeficiente de rozamiento.

Cuando:

$$m_1 \gg 1 \quad \psi \rightarrow \sqrt{\Sigma} \quad [31]$$

Esto indica que, aumentando el campo magnético, el coeficiente de rozamiento tiende a un valor asintótico que depende de la relación entre las dos conductividades de la placa y el medio.

El valor dado por [28] se refiere a la placa perfectamente no conductora ( $\Sigma \rightarrow \infty$ ), a la que le corresponde la condición de contorno  $H_x = 0$  en la superficie de la placa.

En cambio, el valor dado por [30] se refiere a la placa perfectamente conductora ( $\Sigma = 0$ ), a la que corresponde la condición de contorno:

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = 0.$$

*Cálculo del campo magnético inducido y de la presión en el contorno placa-medio fluido.*

Teniendo en cuenta [19], puede obtenerse, omitiendo el símbolo  $R_e$ :

$$h(0, \tau) = -\frac{m_1 u_0 e^{i\omega\tau}}{(a'_1 + b'_1 i) + \sqrt{\Sigma} i} \quad [32]$$

luego:

$$H_x(0, t) = -H_0 u_0 \Phi(m_1, \lambda) \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad [33]$$

siendo:

$$\Phi(m_1, \lambda) = \frac{m_1}{\sqrt{\left(a'_1 + \sqrt{\frac{\Sigma}{2}}\right)^2 + \left(b'_1 + \sqrt{\frac{\Sigma}{2}}\right)^2}},$$

que se anula cuando  $\Sigma \rightarrow \infty$  (placa perfectamente no conductora), y toma el valor  $\Phi = \frac{m_1}{4\sqrt{1+m_1^2}}$  cuando

$\Sigma = 0$  (placa perfectamente conductora). La función  $\Phi$  está representada en la figura 8, en función de  $m_1$ .

Cuando simultáneamente  $a'_1 \gg \sqrt{\frac{\Sigma}{2}}$  y  $m_1 \gg 1$ , esto es, para valores grandes del campo magnético:  $\Phi \rightarrow 1$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ , con lo cual:

$$H_x = -H_0 u_0 \cos \omega_0 t, \quad [34]$$

luego:

$$\frac{1}{2} \mu H_x^2 = \frac{1}{2} \rho u_x^2, \quad [35]$$

esto es, se igualan en el contorno la presión dinámica y la magnética debida al campo inducido.

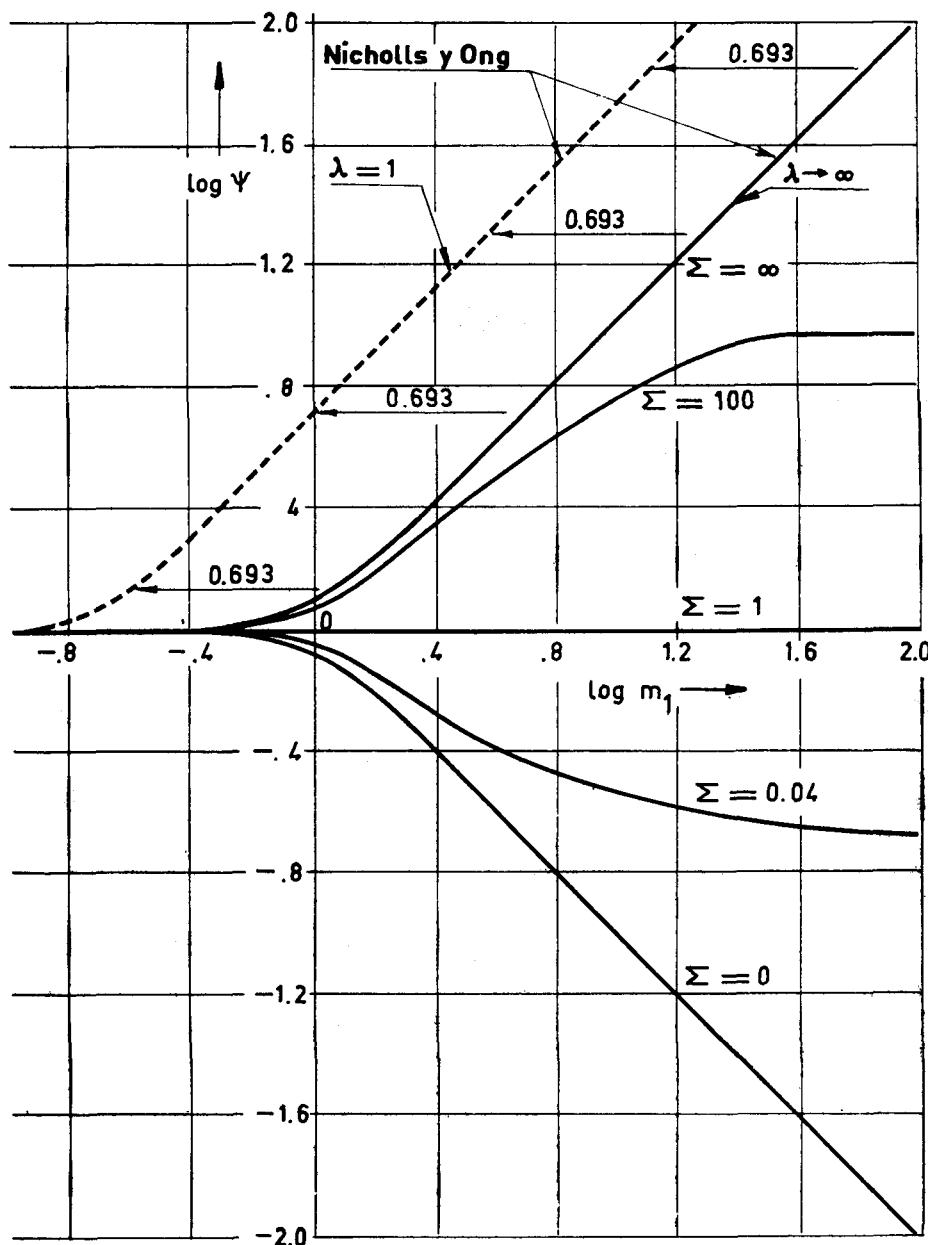


Fig. 5. — Resistencia de rozamiento en función de la intensidad del campo magnético aplicado ( $\sim m_1$ ), para distintos valores de la conductividad de la placa. (Movimiento oscilante de la placa).

Calculado el campo  $H_x$ , podemos obtener la presión en el contorno mediante la fórmula:

$$p = p_\infty - \frac{1}{2} \rho H_x^2, \quad [36]$$

que, teniendo en cuenta [35], nos proporciona:

$$p(0, t) = p_\infty - \frac{1}{2} \rho u_0^2 \cos^2 \omega_0 t, \quad [37]$$

que indica que la presión en el contorno oscila, con frecuencia doble que la velocidad, alrededor del valor medio:

$$p_\infty - \frac{1}{4} \rho u_0^2.$$

#### 4. Problema de Rayleigh en Magnetofluidodinámica.

Trataremos a continuación del movimiento impulsivo de la placa bajo la acción de un campo magnético-transversal, calculando en particular el coeficiente de rozamiento, que veremos depende fundamentalmente de la relación entre las conductividades de la placa y del medio.

Supondremos que para  $t \leq 0$  la placa y el fluido están en reposo, y que para  $t > 0$  la placa se mueve con una velocidad constante  $U$ .

La velocidad  $u$  y el campo magnético inducido  $h$  verificarán el sistema de ecuaciones [12] y [13].

Las condiciones iniciales y de contorno son ahora las siguientes:

a) Para

$$t \leq 0 \quad u = 0 \quad h = 0$$

b) Para

$$t > 0 \quad \text{y} \quad \xi \rightarrow \infty \quad u = u_0 \quad h = 0,$$

$$\xi \rightarrow -\infty \quad h = 0,$$

$$\xi = 0 \quad \text{y} \quad h \text{ y } \frac{1}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial \xi} \text{ continuas.}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior, haremos uso de la transformación de LAPLACE, para lo cual escribiremos:

$$\bar{u}(\xi, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} u(\xi, \tau) d\tau;$$

$$\bar{h}(\xi, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} h(\xi, \tau) d\tau.$$

La ecuación [13] se transforma en:

$$s \bar{h} = \eta' \frac{d^2 \bar{h}}{d\xi^2}.$$

Con las condiciones de contorno:

$$\xi = 0 \quad \bar{h} = \bar{h}(0, s) \quad \xi \rightarrow -\infty \quad \bar{h} = 0,$$

luego la solución puede escribirse:

$$\bar{h}(\xi, s) = h(0, s) e^{\sqrt{\frac{s}{\eta'}} \xi}. \quad [38]$$

El sistema [12] se transforma en:

$$\left. \begin{aligned} s \bar{u} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \frac{d\bar{h}}{d\xi} \\ s \bar{h} &= \sqrt{\lambda} \frac{d^2 \bar{h}}{d\xi^2} + \frac{d\bar{u}}{d\xi} \end{aligned} \right\}. \quad [39]$$

Con las condiciones de contorno:

$$\xi \rightarrow \infty \quad \bar{u} = 0 \quad \bar{h} = 0,$$

$$\xi = 0 \quad \bar{u} = \frac{u_0}{s} \quad \left( \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right)_{\xi=0} =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma_p} \left( \frac{d\bar{h}}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{s}{\eta'}} \bar{h}(0, s).$$

Para escribir la última condición hemos tenido en cuenta [38].

Poniendo:

$$r'_1 = -\frac{\sqrt{1+(P+2)s} + \sqrt{1+(P-2)s}}{2};$$

$$r'_2 = -\frac{\sqrt{1+(P+2)s} - \sqrt{1+(P-2)s}}{2}. \quad [40]$$

Podemos escribir la solución de [39], con las condiciones de contorno dadas, en la forma:

$$\bar{u} = C_1 e^{r'_1 \xi} + C_2 e^{r'_2 \xi}; \quad [41]$$

$$\bar{h} = -\left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} r'_1 - r'_2 \right) C_1 e^{r'_1 \xi} + \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} r'_2 - r'_1 \right) C_2 e^{r'_2 \xi} \right], \quad [42]$$

donde:

$$C_1 = \frac{(r'_2 - r'_1 \sqrt{\lambda}) \left( r'_2 - \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{s}{\eta'}} \right)}{\left[ (r'_2 + r'_1) - (1 + \sqrt{\lambda}) \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{s}{\eta'}} \right] (r'_2 - r'_1)} \cdot \frac{u_0}{s};$$

$$C_2 = \frac{u_0}{s} - C_1.$$

Volviendo al campo original, tendríamos los valores de  $u$  y  $h$ , y con ellos el campo eléctrico y corriente eléctrica en función de  $y$ .

En este trabajo nos limitaremos a calcular  $h(0, \tau)$  y el coeficiente de rozamiento.

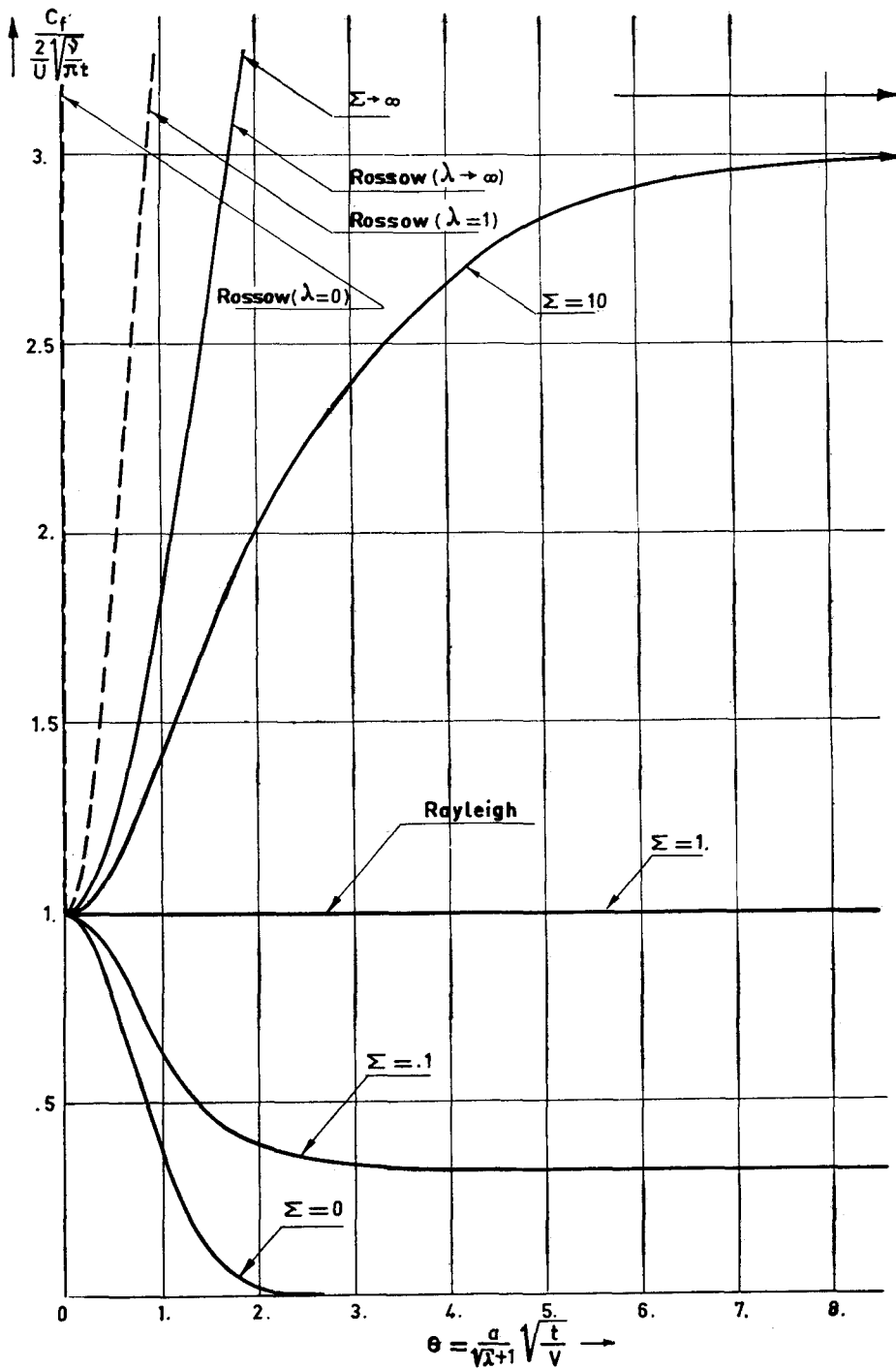


Fig. 6. — Resistencia de rozamiento en función de la intensidad del campo magnético aplicado ( $\sim \theta$ ), para distintos valores de la conductividad de la placa. (Movimiento impulsivo de la placa).

Cálculo del coeficiente de rozamiento.

Teniendo en cuenta [25] y que:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{d\xi}\right)_{\xi=0} = C_1 r_1 + C_2 r_2 = -\frac{s + \sqrt{s + \alpha} \sqrt{s \Sigma}}{s (\sqrt{s + \alpha} + \sqrt{s \Sigma})} \sqrt[4]{\lambda} u_0;$$

donde:

$$\alpha = \frac{1}{P + 2} \quad \Sigma = \frac{\sigma_p \mu}{\sigma_p \mu}$$

Podemos calcular  $C_f$  hallando la inversa de la trans-

[43] formada de LAPLACE de  $\left(\frac{d\bar{u}}{d\xi}\right)_{\xi=0}$ .

Y entonces el coeficiente de rozamiento, en va-

riables dimensionales, y poniendo, para abreviar,

$$\theta = \frac{a}{\sqrt{\lambda + 1}} \sqrt{\frac{t}{\nu}} = \sqrt{a\tau}, \text{ tomará la forma: } C_f = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \quad (\Sigma = 1); \quad [44]$$

$$C_f = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \left[ e^{-\theta^2} + \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma - 1}} \theta e^{\frac{1}{\Sigma - 1} \theta^2} \left( \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma - 1}} \theta - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{1}{\Sigma - 1}} \theta \right) \right] \quad (\Sigma > 1); \quad [45]$$

$$C_f = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \left[ e^{-\theta^2} + 2 \sqrt{\frac{\Sigma}{1 - \Sigma}} \theta e^{-\frac{1}{1 - \Sigma} \theta^2} \int \frac{\sqrt{\frac{1}{1 - \Sigma}} \theta}{\sqrt{\frac{\Sigma}{1 - \Sigma}} \theta} e^{x^2} dx \right] \quad (\Sigma < 1). \quad [46]$$

En la figura 6 se ha representado  $C_f \frac{U}{2} \sqrt{\frac{\pi t}{\nu}}$  en función de  $\theta$  para distintos valores de  $\lambda$ . También se ha representado la solución de ROSSOW (1) para distintos valores de  $\lambda$ .

Obsérvese que:

1.º Para  $\Sigma > 1$  (placa menos conductora que el fluido) el coeficiente de rozamiento es mayor que el obtenido por RAYLEIGH en ausencia de campo magnético.

2.º Para  $\Sigma < 1$ , en cambio, el coeficiente de rozamiento es menor que el de RAYLEIGH.

3.º Para  $\Sigma = 1$  el campo magnético no modifica el coeficiente de rozamiento.

4.º Para valores grandes del tiempo:

$$\dot{C}_f = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \cdot \sqrt{\Sigma}. \quad [47]$$

5.º Para  $\Sigma \gg 1$  y tiempos no demasiado grandes podemos escribir:

$$C_f = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} [e^{-\theta^2} + \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \theta], \quad [48]$$

resultado que se obtiene suponiendo que la placa es perfectamente no conductora.

El resultado obtenido por ROSSOW es:

$$C_f = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \left[ e^{-\theta^2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + 1}} \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \theta \right]. \quad [49]$$

Coincide con el anterior para valores muy grandes de  $\lambda$ . Teniendo en cuenta que  $\lambda = \frac{1}{\sigma \mu \nu}$ , obtenemos que únicamente podremos despreciar la influencia del campo eléctrico en el cálculo del coeficiente de rozamiento cuando el fluido sea mucho más conductor que la placa y la difusividad magnética sea muy superior a la viscosa.

6.º Para  $\Sigma \ll 1$  y tiempos no demasiado grandes:

$$C_f = \frac{2}{U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} e^{-\theta^2} \quad [50]$$

que es el resultado obtenido por CHANG y YEN (2) al suponer la placa perfectamente conductora.

Se observa que para tiempos muy pequeños predominan los efectos viscosos sobre los magnéticos, ocurriendo lo contrario para tiempos grandes.

*Cálculo del campo magnético inducido en la placa.*

$$\bar{h}(0, s) = -\frac{u_0 \sqrt{\alpha}}{s} \frac{1}{\sqrt{s + \alpha + \sqrt{s \Sigma}}}. \quad [51]$$

Hallando la inversa de la transformada de LAPLACE de  $\bar{h}$ , obtenemos, volviendo a variables dimensionales:

$$H_x(0, t) = -\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} U \left[ \operatorname{erf} \theta - \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma - 1}} e^{\frac{1}{\Sigma - 1} \theta^2} \left( \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma - 1}} \theta - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{1}{\Sigma - 1}} \theta \right) \right] \quad (\Sigma > 1); \quad [52]$$

$$H_x(0, t) = -\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} U \operatorname{erf} \theta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\Sigma}{1 - \Sigma}} e^{-\frac{1}{1 - \Sigma} \theta^2} \int \frac{\sqrt{\frac{1}{1 - \Sigma}} \theta}{\sqrt{\frac{\Sigma}{1 - \Sigma}} \theta} e^{x^2} dx; \quad (\Sigma < 1); \quad [53]$$

$$H_x(0, t) = -\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} U \left[ \operatorname{erf} \theta - \frac{1 - e^{-\theta^2}}{\sqrt{\pi} \theta} \right] \quad (\Sigma = 1). \quad [54]$$

En la figura 7 se ha representado  $H_x \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{U}}$  y en función de  $\theta$ . Nótese que cuando:

$$t \rightarrow \infty \quad \mu H_x(0, t)^2 = \frac{1}{2} \rho U^2,$$

luego la presión en la placa, teniendo en cuenta que:

$$p + \frac{1}{2} \mu H_x^2 = p_\infty,$$

tenderá al valor:

$$p = p_\infty - \frac{1}{2} \rho U^2, \quad [55]$$

en correspondencia con el resultado [37] obtenido para la placa oscilante.

### 5. Corriente de Couette no estacionaria.

Cuando el medio fluido está limitado por otra placa o una distancia finita  $d$  de la primitiva, las ecuaciones que determinan el movimiento en el medio fluido son las [12]. En el caso de ser oscilante el movimiento de la placa en  $y = 0$  ( $\xi = 0$ ), la solución es de la forma, omitiendo el símbolo  $R_e$ :

$$u = e^{i\omega\tau} f(\xi) \quad h = e^{i\omega\tau} F(\xi),$$

verificando  $f$  y  $F$  las ecuaciones [15] con las condiciones de contorno:

$$\text{Para } \xi = 0 \quad f = u_0 \quad \frac{dF}{d\xi} = \frac{\sigma}{\sigma_p} \sqrt{\frac{i\omega}{\eta'}} F(0).$$

$$\text{Para } \xi = \xi_d \text{ (Equivalente a } y = d) \quad f = 0 \quad F = 0.$$

Para escribir esta última condición hemos supuesto que la placa en  $y = d$  está en reposo y es perfectamente no conductora.

De este modo tenemos un modelo muy simplificado de la capa límite, donde la corriente exterior, no conductora, está representada por la placa exterior.

Las ecuaciones [15], con las condiciones de contorno anteriores, nos muestran que  $f$  y  $F$  son de la forma:

$$f = \sum_1^4 C_j e^{r_j \xi} \quad F = \sum_1^4 D_j e^{r_j \xi},$$

donde  $r_j$  son las cuatro raíces de la ecuación:

$$r^4 - (1 + P \omega i) r^2 - \omega^2 = 0,$$

$$D_j = - \frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} r_j^2 - i\omega}{r_j} C_j.$$

La determinación de las constantes  $C_j$  por medio de las condiciones de contorno es muy laboriosa. Se simplifica notablemente el problema cuando  $\lambda = 1$ , esto es, cuando el número de PRANDTL magnético es la unidad.

De modo análogo se procede cuando es impulsivo el movimiento de la placa en  $y = 0$ . Utilizando la transformación de LAPLACE se llega al sistema [39]. Las condiciones de contorno  $\bar{u} = 0$ ,  $\bar{h} = 0$  se imponen ahora en  $\xi = \xi_d$  en lugar de imponerse en el infinito.

La determinación de la solución es muy laboriosa, simplificándose para  $\lambda = 1$ .

### 6. Resistencia magnética.

Además de la resistencia de rozamiento a que está sometida la placa, actúan sobre ella fuerzas eléctricas ( $\vec{J} \wedge \mu_p \vec{H}$  por unidad de volumen), debidas a las corrientes inducidas en el interior de la placa.

Es preferible, para facilitar el cálculo, sustituir estas fuerzas másicas por fuerzas de superficie, que podemos representar mediante el uso del tensor de esfuerzos de MAXWELL, ya que:

$$\vec{J} \wedge \mu_p \vec{H} = \nabla \cdot \left( - \frac{1}{2} \mu_p \vec{H}^2 \delta_{ij} + \mu_p \vec{H} \vec{H} \right).$$

De aquí que aparezca un esfuerzo tangencial  $\mu H_x H_0$ , que da lugar a la resistencia de rozamiento.

Definiremos el coeficiente de rozamiento magnético  $C_M$ :

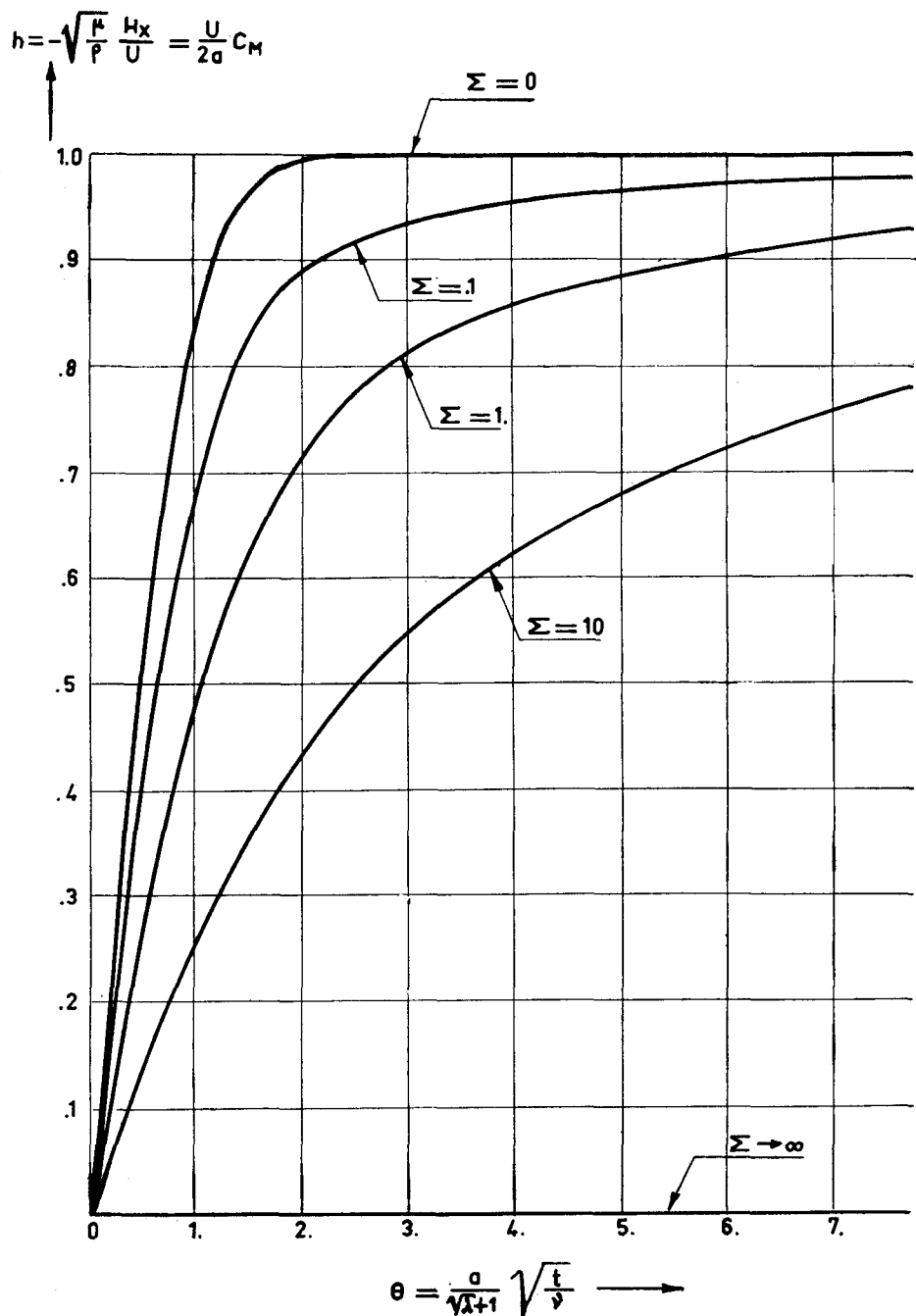
$$C_M = - \frac{2 \mu H_x H_0}{\rho U^2} = - \frac{2}{u_0^2} h, \quad [56]$$

y teniendo en cuenta [33]:

$$C_M = \frac{2a}{U} \Phi(m_1, \Sigma) \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad [57]$$

La función  $\Phi$  definida en [33] está representada en la figura 8. Definiremos el coeficiente de resistencia

Fig. 7. — Campo magnético inducido en la placa y también resistencia magnética en función del campo magnético aplicado ( $\sim \theta$ ). Movimiento impulsivo).



total  $C_D = C_f + C_M$ . Un cálculo sencillo, aunque laborioso (13), muestra que:

$$C_D = \frac{2\sqrt{\omega_0 v}}{U} \psi_1(m, \lambda, \Sigma) \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad [58]$$

siendo la función  $\psi_1$  siempre superior a la unidad para  $m \neq 0$ , lo que demuestra que el campo magnético aumenta la resistencia total de la placa.

Para el problema de la placa oscilante,  $C_M$  vie-

ne dado análogamente por [56], y se obtiene el valor de  $C_M$  sin más que sustituir en las fórmulas [52] y siguientes, que proporcionan el valor de  $H_x$ , el factor  $-\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} U$  por el factor  $\frac{2a}{U}$ .

La figura 7 representa también  $C_M \frac{U}{2a}$ .

La resistencia total se obtiene poniendo  $C_M + C_f = C_D$ .

## 7. Distribución de temperaturas.

Poniendo  $u_i = c_v T$ , y en el supuesto de ser  $c_v$  y  $k$  constantes, la ecuación de la energía interna, ecuación [7], tomará la forma:

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = v \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{J_z^2}{\sigma \rho}, \quad [59]$$

que escribiremos en forma adimensional poniendo:

$$\text{Pr} = \frac{\rho c_p v}{k} \quad (\text{N.º de Prandtl}) \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad \beta = \frac{\gamma}{\text{Pr} \sqrt{\lambda}}$$

$$T_1 = (T - T_\infty) \frac{\sqrt{\lambda} c_v}{a^2} \quad j = \frac{J_z}{\sigma \mu H_0 a};$$

la ecuación [59] toma entonces la forma:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} = \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + j^2, \quad [60]$$

que resolveremos en primer lugar con las condiciones de contorno:

$$\xi = 0, \quad T_1 = 0 \quad \xi \rightarrow \infty, \quad T_1 = 0.$$

Para la placa oscilante,  $u$  viene dada por la ecuación [18], mientras que  $j$  viene dada por la [21 a].

La solución de [60] con las condiciones de contorno anteriores es de la forma:

$$T_1 = \text{Re} [G(\xi) e^{i 2 \omega \tau}], \quad [61]$$

donde:

$$G(\xi) = A_1 e^{-\sqrt{\frac{2 \omega i}{\beta}} \xi} + A_2 e^{2 r_1 \xi} + A_3 e^{2 r_2 \xi} + A_4 e^{(r_1 + r_2) \xi} \quad [62]$$

siendo:

$$A_2 = \frac{r_1^2 + (r_1 - i \omega \sqrt{\lambda})^2}{2 \omega i - 4 \beta r_1^2} C_1^2$$

$$A_3 = \frac{r_2^2 + (r_2 - i \omega \sqrt{\lambda})^2}{2 \omega i - 4 \beta r_2^2} C_2^2$$

$$A_4 = 2 \frac{(r_1 - i \omega \sqrt{\lambda})(r_2 - i \omega \sqrt{\lambda}) + i \omega}{2 \omega i - \beta (r_1 + r_2)^2} C_1 C_2$$

y

$$A_1 = -(A_2 + A_3 + A_4).$$

Teniendo en cuenta [62], podemos escribir:

$$T_1 = \sum_1^4 \psi_j e^{-\frac{y}{L_{1j}}} \cos \left[ 2 \omega_0 \left( t - \frac{y}{V_{1j}} \right) + \varphi_j \right] \quad (63)$$

con lo cual se ponen de manifiesto cuatro ondas de temperatura que avanzan hacia el interior del fluido con velocidades  $V_{1j}$ , longitudes de penetración  $L_{1j}$ , amplitudes  $\psi_j$  y fases  $\varphi_j$ , cuyo cálculo es sencillo, aunque laborioso.

Damos a continuación los valores de las longitudes y velocidades de penetración:

$$L_{11} = \sqrt{\frac{2v}{\omega_0}} \sqrt{\frac{\gamma}{2\text{Pr}}} \quad V_{11} = \sqrt{2\omega_0} \sqrt{\frac{\gamma}{2\text{Pr}}}$$

$$L_{12} = \frac{1}{2} L_1 \quad V_{12} = V_1;$$

$$L_{13} = \frac{1}{2} L_2 \quad V_{13} = V_1;$$

$$L_{14} = \frac{L_1 + L_2}{L_1 + L_2} \quad V_{14} = \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Los valores de  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  están dados por las fórmulas [23] y [24] y representados en las figuras 2, 3 y 4.

En particular el flujo de calor en la pared  $q_f = k \frac{\partial T_1}{\partial y}$  será:

$$q_f = \frac{\gamma}{\lambda \text{Pr}} \rho a^3 \Phi_0 (\cos 2 \omega_0 t + \varphi_0), \quad [64]$$

siendo:

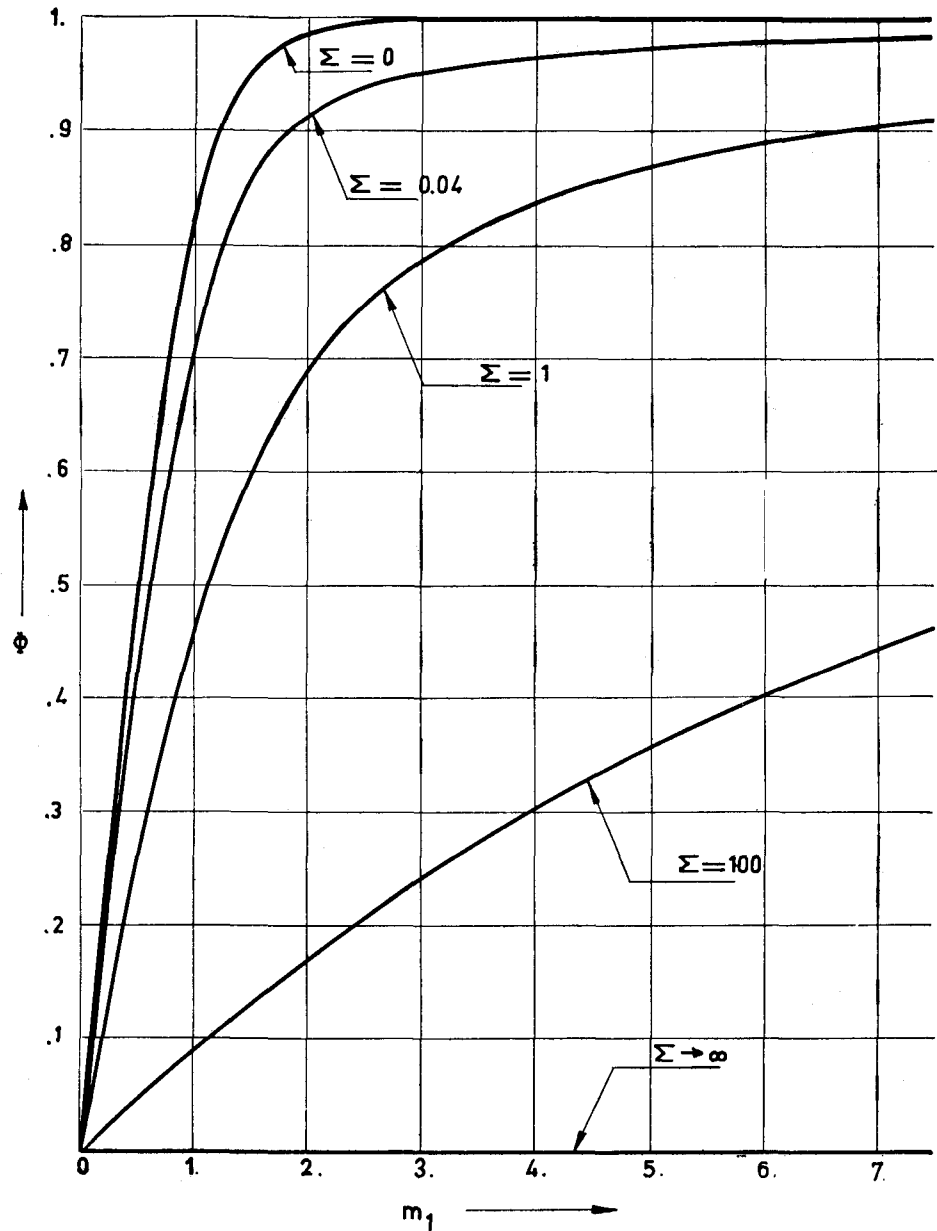
$$\Phi_0 = \left| -\sqrt{\frac{2 \omega i}{\beta}} A_1 + 2 r_1 A_2 + 2 r_2 A_3 + (r_1 + r_2) A_4 \right|$$

Si consideramos ahora como condiciones de contorno las correspondientes a la pared adiabática ( $q_f = 0$ ,  $y = 0$ ,  $T = T_\infty$  para  $y \rightarrow \infty$ ), la temperatura vendrá dada por [61] y [62] sin más que sustituir la ecuación  $A_1 = -(A_2 + A_3 + A_4)$ , que determina  $A_1$ , por la ecuación:

$$\sqrt{\frac{2 \omega i}{\beta}} A_1 = 2 r_1 A_2 + 2 r_2 A_3 + (r_1 + r_2) A_4$$



Fig. 8. — Amplitud del campo magnético inducido en la placa y también resistencia magnética en función del campo magnético aplicado ( $\sim m_1$ ). Movimiento oscilante).



que se obtiene expresando la condición de ser nulo el flujo de calor en la pared.

Para valores grandes del campo magnético, o mejor de  $m$ , si despreciamos términos de orden superior a  $\frac{1}{m}$ , obtenemos para el flujo de calor:

$$q_f = \rho U^3 \frac{\sqrt{2 \omega_0 \nu}}{U} \frac{\sqrt{\lambda \Sigma}}{2m} \cos \left( 2 \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right). \quad [65]$$

Correspondiente a las primeras condiciones de contorno, esto es, temperatura de la placa igual a la de la corriente exterior.

Mientras que el esfuerzo de rozamiento,  $\tau_f$ , en la pared [27] y [31], viene dado para valores grandes de  $m$  por:

$$\tau_f = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{2 \sqrt{2 \omega_0 \nu}}{U} \sqrt{\Sigma} \cos (\omega_0 t + \varphi_2). \quad [66]$$

Del mismo modo, despreciando términos de orden superior en  $\frac{1}{m}$ , la temperatura de la pared adiabática:

$$T_{pa} - T_\infty = \frac{U^2}{2 c_p} \sqrt{\lambda \text{Pr}} \frac{\Sigma}{m} \cos \left( 2 \omega_0 t - \frac{3}{2} \pi \right). \quad [67]$$

Escribiremos a continuación, como comparación, los valores de  $q_f$ ,  $\tau_f$  y  $T_{pa}$ , para las mismas condiciones de contorno, en ausencia de campo magnético ( $m = 0$ ) (ver (13)):

$$q_f = \rho U^3 \frac{\sqrt{2\omega_0\nu}}{U} \frac{1}{2 + \sqrt{\frac{Pr}{\gamma}}} \cos(2\omega_0 t + \varphi_3); \quad [68]$$

$$\tau_f = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{2\sqrt{\omega_0\nu}}{U} \cos(\omega_0 t + \varphi_4); \quad [69]$$

$$T_{pa} - T_\infty = \frac{U^2}{2c_p} \frac{\gamma}{1 + \sqrt{\frac{2\gamma}{Pr}}} \cos(2\omega_0 t + \varphi_5). \quad [70]$$

Si se comparan las fórmulas [66] y [69], vemos cómo, para valores grandes del campo magnético, la influencia de éste en el coeficiente de rozamiento se manifiesta por la presencia de un factor  $\sqrt{\Sigma}$ , lo que significa que, por ejemplo, para valores pequeños de  $\Sigma$  (placa más conductora que el fluido) la resistencia de rozamiento es mucho menor en presencia de campo magnético.

En cambio, la resistencia total [58], que incluye la magnética, es siempre mayor que sin campo magnético.

Comparando las fórmulas [65] y [68], vemos cómo el campo magnético introduce un factor, en el flujo de calor, proporcional a  $\frac{\sqrt{\lambda\Sigma}}{m}$ , que indica que

para valores grandes del campo magnético y para placas mucho más conductoras que el fluido se reduce considerablemente el flujo de calor en la pared.

Lo mismo ocurre con la temperatura de la pared adiabática, como puede verse comparando las fórmulas [67] y [70].

NOTA. — Agradezco a los Sres. MILLÁN y DA-RIVA el interés y la colaboración prestada en este trabajo.

## REFERENCIAS

1. ROSSOW, W. J.: NACA TN, 3971 (1957).
2. CHANG, C. C., y YEN, T. T.: *The physics of fluids* (July-Aug. 1959).
3. TAO, L. N.: *J.A.S.* (May 1960).
4. MIE, C. C.: *Appl. Sci. Res. Sect. A.*, núm. 4 (1960).
5. ONG, R. S., y NICHOLS, J. A.: *J.A.S.* (May 1959).
6. STEKETTE, J. A.: *UTPA Rept.* 63 (Aug. 1959).
7. AXFORD, W. I.: *J. of Fluid Mechanics* (May 1960).
8. KAKUTANI, T.: *J. of the Phys. Soc. of Japan*, July 1960.
9. SOMMERFELD, A.: "Electrodynamics". Vol. 3. Lectures on Theoretical Physics. Academic Press (1952).
10. COWLING, T. G.: *Magnetohydrodynamics*. Interscience (1957).
11. GOLDSTEIN, S.: *Lectures on fluid mechanics*. Interscience (1960).
12. PAI, SHIH I.: *Introduction to the theory of compressible fluid flow*. Van Nostrand, 1959.
13. LIÑÁN, A.: "Comunicado C.O.-122-5". I.N.T.A.E.T. (1961).