

CUERPOS DE FORMA OPTIMA EN VUELO HIPERSONICO

FUSELAJE DE UN VEHICULO PLANEADOR DE GRAN RADIO DE ACCION

Por JUAN R. SANMARTIN LOSADA

Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos.

Resumen.

Se estudia la obtención de la forma del fuselaje óptimo de un vehículo hipersónico, tipo planeador, de gran radio de acción, para el que es fundamental conseguir un valor alto de $(L/D)_{máx}$. Se utiliza la teoría de NEWTON-BUSEMANN para el cálculo de las características aerodinámicas. Para la solución del problema variacional, se consideran fijos ciertos parámetros (por ejemplo, el radio de curvatura en el morro) que afectan directamente al calor recibido por el cuerpo y a las características en vuelo subsónico. Como ejemplo, se considera la solución de un caso particular.

Planteamiento del problema.

La obtención de formas con características óptimas ha sido estudiada repetidas veces, desde SÄNGER en 1943, para el caso relativamente sencillo de vuelo hipersónico idealizado adecuadamente. Pero la índole del problema y el instrumento matemático empleado, Cálculo de Variaciones clásico, prestan

una importancia decisiva a los parámetros adoptados y a las condiciones isoperimétricas en juego. Sin embargo, tanto con la fórmula de NEWTON, modificada mediante un factor, como con la NEWTON-BUSEMANN que incluye un término correctivo de fuerza centrífuga, estos parámetros son prácticamente los mismos. (HAYES; EGGER, RESNIKOFF y DENNIS; CHERNYI y GONOR).

Para idealizar la corriente hipersónica, emplearemos las hipótesis, de suponer M_∞ muy grande y γ bastante próximo a 1. En rigor, la teoría newtoniana exigiría $M_\infty \rightarrow \infty$ y $\gamma \rightarrow 1$. Aunque en la capa flúida entre la onda de choque y el cuerpo, $\gamma < 1,4$, los valores observados no permiten olvidar el carácter ideal del flujo. Con $\gamma < 1,1$, la aproximación resulta satisfactoria.

Vamos a estudiar un semicuerpo de revolución del tipo "extradós plano". Un cuerpo de revolución completo, no cortado por un plano meridiano, influiría perniciosamente en las características del avión a través de la magnitud $\frac{V^{2/3}}{S}$, de gran importancia. Por esta razón, unida a la de pequeño alargamiento del ala, el fuselaje debe contribuir a la sustentación.

En comparación con el tipo "intradós plano", hay que observar que la base plana de éste no permite la optimización. Como se indica en la referencia [1], no es posible la obtención de grandes $(L/D)_{\text{máx}}$ con esta configuración. Además, el tipo "extradós plano" permite el uso de la parte superior para mejorar las características subsónicas. Dado el pequeño alargamiento de la aeronave y elevado ángulo de ataque de su vuelo en este régimen, dicha parte superior resulta decisiva y ha sido utilizada como variable de diseño para bajas velocidades [2]. Sin embargo, por encontrarse esta cara superior en la "sombra aerodinámica" no cambia las condiciones de régimen hipersónico. Basta que se mantenga inferior y lateralmente la forma estudiada, lo cual conduciría quizá, en un estudio subsónico posterior, a una configuración ahuecada superiormente, como de "canao" (fig. 1).

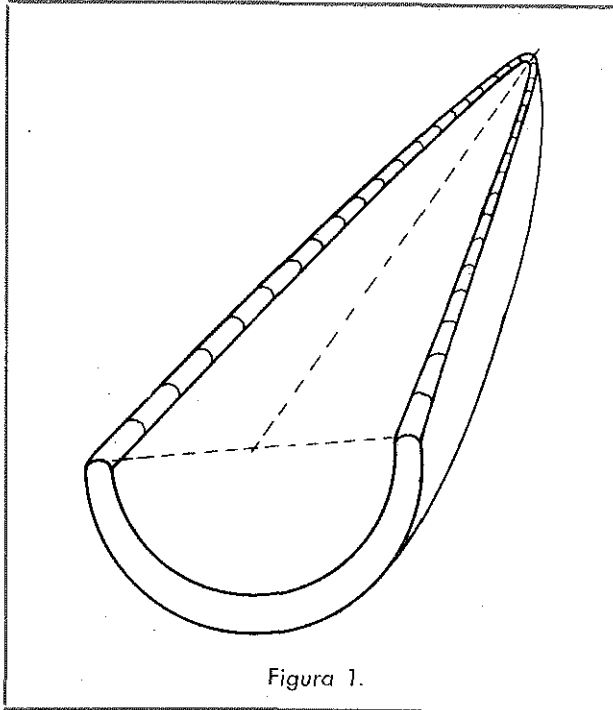


Figura 1.

Estas consideraciones facilitan el problema hipersónico, pues la corriente mantiene su carácter axisimétrico. Para mayor sencillez, suponemos nulo el ángulo de ataque del plano superior respecto a la corriente. El que el cuerpo esté situado bajo este plano, posiblemente ahuecado, y el bajo valor de α , medido desde sustentación nula, correspondiente a la condición de $(L/D)_{\text{máx}}$, aproxima esta hipótesis a la realidad.

Sea, figura 2, O X el eje revolución y el plano Y O X, uno meridiano. Introduzcamos con HAYES

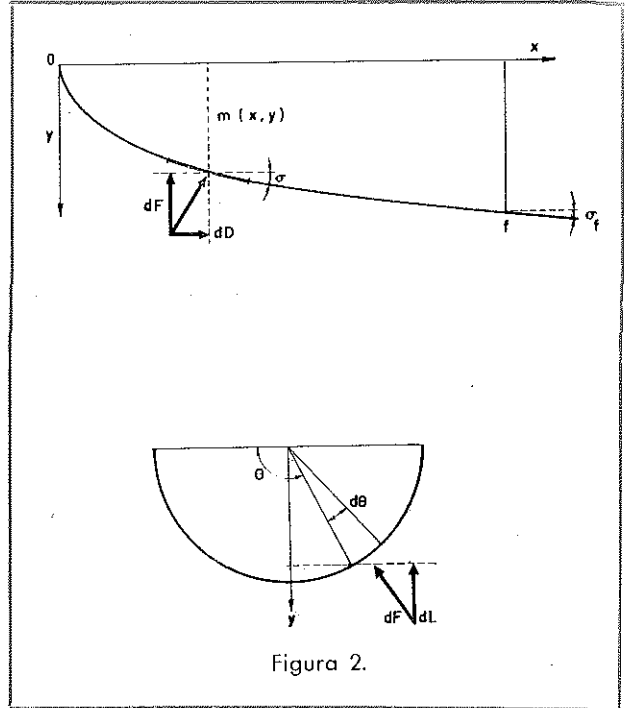


Figura 2.

y PROBSTEIN [3] la función de corriente:

$$\psi = \rho_{\infty} V_{\infty} \frac{y^2}{2}.$$

Y llamaremos: $V_{\infty} M$, a la cantidad de movimiento tangencial en la capa situada entre onda de choque y cuerpo. Entonces resulta:

$$V_{\infty} dM = \cos \sigma d\psi \cdot V_{\infty}; \quad \text{tg } \sigma = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Inmediatamente detrás de la onda de choque:

$$\frac{1}{2} c_p c = \frac{P_c - P_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} = \text{sen}^2 \sigma.$$

Pues dado el espesor infinitesimal de la capa, las formas de la onda y del cuerpo coinciden.

Sobre éste:

$$\frac{1}{2} c_p = \text{sen}^2 \sigma - \frac{d(\cos \sigma)}{d\psi} M.$$

El último término es la corrección de BUSEMANN que tiene en cuenta la curvatura, impuesta por la superficie, de las trayectorias de las partículas.

Este salto de presión finito en un espesor infinitesimal, es posible porque $\rho \rightarrow \infty$, en el fluido tras la onda de choque [4].

Las fuerzas sobre el obstáculo valen:

$$dD = \frac{1}{2} c_p \rho_\infty V_\infty^2 y d\theta dy;$$

$$D = \pi V_\infty \int_0^F \frac{1}{2} c_p d\psi = \pi V_\infty [\psi_F - M_F \cos \sigma_F];$$

$$dL = \frac{1}{2} c_p \rho_\infty V_\infty^2 dx \cdot 2y; \quad L = 2 V_\infty M_F \sin \sigma_F;$$

$$M_F = \int_0^F \cos \sigma d\psi = \rho_\infty V_\infty \int_0^F \frac{y dy}{\sqrt{1+y'^2}};$$

M_F es una magnitud fundamental para obtención de altos $(L/D)_{\max}$. Su maximización es necesaria, pues aumenta L y disminuye D . Por el contrario, no parece conveniente que el ángulo de salida de la corriente, σ_F , sea nulo, pues es desventajoso para L . Sin embargo, ocurre que un pequeño aumento de σ_F sobre el valor cero, varía mucho más rápidamente $\sin \sigma$ ($\sin \sigma = \sigma - \frac{\sigma^3}{3!} + \dots$) que $\cos \sigma$ ($\cos \sigma = 1 - \frac{\sigma^2}{2!} + \dots$). Por otro lado, la existencia de rozamiento en el caso real, que influye más en el valor de D_{total} que en L , y es dominante en la parte posterior del cuerpo, donde σ es pequeño, aconsejan valores de σ_F bajos pero no nulos.

El estudio ideal del problema hace oportuno considerar los parámetros que más influyen en la transmisión de calor, rozamiento y características en vuelo subsónico.

El morro redondeado obliga a que $y'_{x0} = \infty$. El radio de curvatura en el morro r_0 , y $V^{2/3}/S$ son parámetros fundamentales en el problema térmico [1], [5], [6]. $V^{2/3}/S$ ha de ser pequeño para el vuelo subsónico [5], [6]; lo mismo que y_F con el fin de reducir la resistencia de base. Pero y_F y V pierden importancia con el ahuecamiento superior que contribuye a disminuir $V^{2/3}/S$. Sin embargo, estas modificaciones no dañan el valor de $(L/D)_{\max}$ hipersónico [6].

El parámetro fundamental para el cálculo del flujo de calor y rozamiento es R_s , y a través de él, s , el camino recorrido por la partícula a lo largo del cuerpo. En cambio, no es lógica la comparación de dos cuerpos de igual longitud. Estas consideraciones inducen a tomar como variable de integración s en vez de x . La sección meridiana se expresará como: $y = y(s)$.

Dada la invariancia de la ecuación de EULER del cálculo variacional [7], podemos transformar el problema a la vista de las igualdades siguientes:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx} = y'_s \cdot \sqrt{1+y'^2_x};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2_x}} = \sqrt{1-y'^2_s}; \quad \frac{y'^2_x}{1+y'^2_x} = y'^2_s.$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\rho_\infty V_\infty} &= \int_0^F \frac{y(x) dy}{\sqrt{1+y'^2_x}} = \\ &= \int_0^{S_F} y(s) y'_s(s) \sqrt{1-y'^2_s(s)} ds; \end{aligned}$$

$$V = \frac{\pi}{2} \int_0^F y^2(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{S_F} [y(s)]^2 \sqrt{1-y'^2_s} ds;$$

S = área de la forma plana =

$$= \int_0^F 2y(x) dx = \int_0^{S_F} 2y(s) \sqrt{1-y'^2_s} ds.$$

Como s no aparece en ninguna de las integrales, la ecuación de EULER se reduce a:

$$F - y' F_{y'} = c.$$

Donde:

$$F = y y'_s \sqrt{1-y'^2_s} + \lambda_v y^3 \sqrt{1-y'^2_s} + \lambda_s y \sqrt{1-y'^2_s};$$

$$\frac{y y'^3_s}{\sqrt{1-y'^2_s}} + \lambda_v \frac{y^3}{\sqrt{1-y'^2_s}} + \lambda_s \frac{y}{\sqrt{1-y'^2_s}} = c.$$

Haciendo $y'_s = z$. Queda:

$$y = \frac{-(\lambda_s + z^3) \pm \sqrt{(\lambda_s + z^3)^2 + 4c\lambda_v \sqrt{1-z^2}}}{2\lambda_v};$$

$$x = \int_{z_0}^z dx(z) = \int_{z_0}^z \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} dy(z).$$

La integración de $dx(z)$, proporciona el cuerpo de máximo M , con s_F , y_F , V , S , y , por tanto, $V^{2/3}/S$, fijados, es decir, a igualdad de los parámetros más importantes. Pero la dificultad de la integración, la disminuída importancia de V y, sobre todo, la imposibilidad de satisfacer las condiciones en el morro, llevan al caso:

$$\lambda_v = \lambda_s = 0.$$

Estudio de un caso particular.

Si $\lambda_v = \lambda_s = 0$, resulta:

$$y = c \frac{\sqrt{1 - y_s'^2}}{y_s'^3} \quad \text{haciendo: } y_s' = \frac{1}{\sqrt{t}};$$

$$y = ct\sqrt{t-1}; \quad dy = c \frac{3/2 t - 1}{\sqrt{t-1}} dt;$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_s}{\sqrt{1 - y_s'^2}} = \frac{1}{\sqrt{t-1}};$$

$$dx = c(3/2 t - 1) dt; \quad x = c(3/4 t^2 - t) + c_1.$$

De la relación entre y'_s e y'_x obtenemos:

$$y'_x = \infty, \quad y'_s = 1, \quad t = 1;$$

$$y'_x = 0, \quad y'_s = 0, \quad t = \infty.$$

En el morro las condiciones son:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y'_x = \infty;$$

$$t = 1, \quad y = 0, \quad y'_x = \infty;$$

$$x_{t=1} = c(3/4 - 1) + c_1 = 0;$$

$$c_1 = \frac{c}{4};$$

$$x = c[1/4 + t(3/4 t - 1)].$$

El radio de curvatura en el punto $x = 0, y = 0$ es:

$$r_0 = \left[\frac{(1 + y_x'^2)^{3/2}}{y_x''} \right]_{t=1},$$

siendo:

$$y_x'' = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{-\frac{1}{2} \frac{1}{(t-1)^{3/2}} dt}{c(3/2 t - 1) dt},$$

de donde, finalmente, se obtiene:

$$r_0 = c.$$

La forma de la línea meridiana del cuerpo está dada por las expresiones:

$$y = r_0 t \sqrt{t-1};$$

$$x = r_0 [1/4 + t(3/4 t - 1)];$$

$$y = r_0 \frac{\sqrt{1 + \frac{12x}{r_0}} + 2}{3\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{12x}{r_0}} - 1}.$$

Es posible obtener expresiones más sencillas utilizando la variable $z = t - 1$:

$$y = r_0 (z + 1) \sqrt{z};$$

$$x = r_0 \frac{z}{2} \left(\frac{3}{2} z + 1 \right);$$

$$s = \frac{r_0}{8} \left[\sqrt{t(t-1)} (1 + 6t) + \arg \operatorname{ch} \sqrt{t} \right];$$

$$V = \frac{\pi}{240} r_0^3 (36 t^3 - 3 t^2 - 2 t - 1) (t - 1)^2;$$

$$S = r_0^2 \frac{2}{105} (t - 1)^{3/2} (45 t^2 - 6 t - 4).$$

Para calcular M , lo mismo que para obtener s , utilizaremos el cambio de variable: $t = \operatorname{ch}^2 w$.

Volviendo de nuevo al parámetro t :

$$M = \frac{\rho_\infty V_\infty r_0^2}{16} \left[\sqrt{t(t-1)} (8 t^2 - 10 t + 1) + \arg \operatorname{ch} \sqrt{t} \right];$$

$$\frac{L}{2 V_\infty} = M \operatorname{sen} \sigma; \quad \operatorname{sen} \sigma = \frac{1}{\sqrt{t}};$$

$$\frac{D}{\pi V_\infty} = \phi - M \operatorname{cos} \sigma; \quad \operatorname{cos} \sigma = \sqrt{\frac{t-1}{t}};$$

$$\phi = \rho_\infty V_\infty \frac{r_0^2 t^2 (t-1)}{2}.$$

El momento aerodinámico respecto al morro vale:

$$M_0 = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} r_0^3 \left[\sqrt{t-1} \left(\frac{t^4}{3} + \frac{43}{42} t^3 - \frac{173}{70} t^2 + \frac{201}{70} t - \frac{9}{35} \right) - \frac{\arg \operatorname{ch} \sqrt{t}}{4 \sqrt{t}} (t^3 - 3t - 1) \right].$$

Es interesante considerar si es en algún punto $c_p = 0$, pues a partir de dicho punto, al aparecer una capa de fluido desprendido, la solución no es correcta:

$$\frac{1}{2} c_p = \operatorname{sen}^2 \sigma - \frac{d(\operatorname{cos} \sigma)}{d\Psi} M = \frac{1}{t} \left[1 - \frac{8 t^2 - 10 t + 1 + \frac{\arg \operatorname{ch} \sqrt{t}}{\sqrt{t(t-1)}}}{32 t (3/2 t - 1)} \right].$$

Expresión que es siempre positiva (t varía entre 1 e ∞), pues:

$$1 > \frac{8 t^2 - 10 t + 1 + \frac{\arg \operatorname{ch} \sqrt{t}}{\sqrt{t(t-1)}}}{6 (8 t^2 - 10 t + 14/3 t)}, \quad \text{para todo } t > 1.$$

Derivando $V^{2/3}/S$ respecto a t , se comprueba que no hay máximo ni mínimo para $t > 1$. Al crecer t , decrece continuamente $V^{2/3}/S$.

En cuanto a σ_F : para $t = 16$, $\sigma_F = 14^\circ 29'$, $\cos \sigma_F = 0,968$; para $t = 49$, $\cos \sigma_F = 0,989$. Es decir, que la variación de t en un intervalo relativamente grande, para valores normales de la relación V/r^3 , afecta poco a la influencia de σ_F .

Hemos obtenido, pues, un cuerpo, maximizando M , para iguales valores de s e y , con el morro redondeado ($y'_x = \infty$) y con la posibilidad de modificar su radio de curvatura r_0 , con el fin de resolver el problema térmico. Como, $c_v > 0$, no se presenta el problema de la capa desprendida, que invalidaría la solución a partir del punto de su aparición. El cuerpo se va haciendo más esbelto a medida que crece t . En la tabla adjunta se presentan las coordenadas de la línea meridiana.

t	y/r_0	x/r_0	y_f/x_f
1	0	0	—
2	2	1,25	1,6
5	10	14	0,71
10	30	65,20	0,46
15	56,10	154	0,36
20	87	280,25	0,31
25	122,25	444	0,27
30	161,40	642,75	0,25
35	204,05	883	0,23
40	245,60	1160,22	0,21
45	293,35	1474	0,19
50	350	1825,22	0,19

Otras magnitudes del cuerpo valen:

Area de la superficie lateral:

$$\Sigma = \pi \frac{r_0^2}{35} [t^{5/2}(15t - 14) - 1].$$

Centro de gravedad (supuesta una densidad constante en el volumen):

$$x_g = \frac{\pi}{2V} r_0^4 \left[t^3 \left(\frac{9}{56} t^4 - \frac{27}{48} t^3 + \frac{29}{40} t^2 - \frac{13}{32} t + \frac{1}{12} \right) - \frac{1}{3360} \right].$$

El centro de gravedad queda muy retrasado, en comparación con el centro de presión, lo que es un inconveniente para la estabilidad longitudinal. Como esto es debido a las fuertes presiones en el morro, la existencia de una sustentación alar evita tal desventaja. De todas formas, el ahuecamiento pósterio-superior del cuerpo, aparece aún más aconsejable, pues adelanta el centro de gravedad.

La relación $\frac{L}{D}$ vale:

$$\begin{aligned} \frac{L}{D} &= \frac{\sqrt{t-1}(8t^2 - 10t + 1) + \frac{\arg \operatorname{ch} \sqrt{t}}{\sqrt{t}}}{8t^2(t-1) - (t-1)(8t^2 - 10t + 1) - \frac{\arg \operatorname{ch} \sqrt{t}}{\sqrt{t}(t-1)}} = \\ &= \sqrt{t-1} \frac{8t^2 - 10t + 1 + \frac{\arg \operatorname{ch} \sqrt{t}}{\sqrt{t}(t-1)}}{10t^2 - 11t + 1 - \frac{\arg \operatorname{ch} \sqrt{t}}{\sqrt{t}(t-1)}}; \end{aligned}$$

al no tener en cuenta la resistencia de rozamiento, esta expresión crece continuamente con t .

Referencias.

1. BERTRAM, M. H.; FELTERMAN Jr, D. E., y HENRY, J. R.: *The Aerodynamics of Hypersonic Cruising and Boost Vehicles*. Aerodynamics of Space Vehicles; N.A.S.A. SP-23, December 1962.
2. LECAT, R.: *Subsonic Aerodynamic Aspects Affecting the Design of an Escape-speed Re-entry Configuration*. Low speed Aerodynamics. Symposium on Dynamics of Manned Lifting Planetary Entry; Wiley and Sons, 1963.
3. HAYES, W. D., y PROBSTEIN, R. F.: *Hypersonic Flow Theory*. Academic Press, 1959.
4. CHERNYI, G. G.: *Introduction to Hypersonic Flow*. Traducido del ruso por R. PROBSTEIN. Academic Press, 1961.
5. MULTHOFF, M.: "Design of Hypersonic Aircraft". *Aerospace Engineering*, February 1961.
6. CAMPBELL, J. P.: *Low-speed Aerodynamic Research Related to the Landing of Space Vehicles*. Proceedings of the N.A.S.A. University Conference on the Science and Technology of Space Exploration, vol. 2, 1962.
7. COURANT, R., y HILBERT, D.: *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publishers, 1953.