Segunda Jornada Internacional
"Matemáticas Everywhere"

Las matemáticas del amor

Mª Dolores López González

20 y 21 de junio de 2012

Resumen

Es indiscutible que las matemáticas resultan imprescindibles en la mayoría de las áreas científicas y son el fundamento de numerosos avances de la técnica. En este trabajo se pone de manifiesto como esta ciencia también puede explicar, ayudar y modelar problemas de tipo puramente social y humano. Concretamente veremos como puede aplicarse al estudio de las relaciones de pareja. Áreas como la estadística, la teoría de juegos, la geometría o las ecuaciones diferenciales entre otras, son válidas para ello.

Palabras Clave: Matemáticas y relaciones sociales, Modelos matemáticos.

1. Introducción

Es casi indiscutible que el ~~amor~~ sexo mueve el mundo ¿no? La pregunta que nos planteamos entonces en si las matemáticas pueden ayudar a este motor, es decir, a las relaciones de pareja. Mi opinión, como la de algunos otros, es que sí. Como ejemplo de esos "algunos otros", en particular matemáticos, que piensan que las matemáticas tienen mucho que aportar a las relaciones de pareja, destacamos el libro "Matemáticas y sexo" de Clio

Cresswell (matemática, escritora y presentadora de televisión) donde la autora intenta unir sus conocimientos matemáticos avanzados con el tema del sexo y de las relaciones personales. (Figura 1)

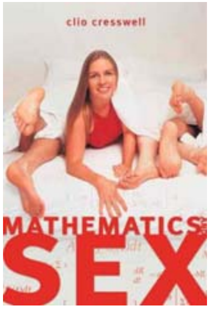

Figura 1: Portada del libro Mathematics and Sex

Desde luego es fácil conectar sexo y matemáticas tan solo pensando en la relación más simple que se puede establecer entre ellas. Ésta se cimienta en los números, las probabilidades y las estadísticas: número de contactos sexuales, orgasmos, probabilidad de encuentros fructíferos, porcentaje de espermatozoides que llegan vivos para la fecundación,….

Existe otra clara conexión basada en la idea de seducción a partir de impresionar a la pareja. Para eso las matemáticas suelen ser infalibles, como pocos las entienden puedes alardear de tus conocimientos con facilidad, pese a que estos sean escasos. Como uno de muchos ejemplos os remito a la secuencia sobre los números primos y la conjetura de Goldbach de la película "La habitación de Fermat" (figura 2). Puede verse en: http://www.youtube.com/watch?v=hpPUyZg9M8U&feature=related.

Figura 2: Cartel de la película La habitación de Fermat

Matemáticas y sexo están ciertamente vinculados en este sentido, pero esta vinculación va mucho más allá de esto. Las matemáticas son el estudio de patrones y modelos; su descubrimiento, interconexiones e implicaciones. En el contexto del amor y las relaciones, las matemáticas pueden modelar algunos de los comportamientos, patrones y situaciones dentro de este mundo.

Por supuesto esta relación es de doble sentido, también el sexo puede ayudar y ha ayudado a las matemáticas. Uno de los mejores ejemplos lo podemos encontrar en una secuencia de la película "Una mente maravillosa" (figura 3) relativa a la Teoría de Juegos y a los estudios de John Forbes Nash. En ella Nash aplica, en este caso a la vez que descubre, su teoría sobre juegos cooperativos a las relaciones con mujeres. Una noche mientras está en un bar se le ocurre una teoría que contradice las ideas de Adam Smith, el padre de la economía moderna.

Figura 3: Cartel de la película Una mente maravillosa

En términos generales podemos decir que la teoría de juegos estudia situaciones de conflicto y cooperaciones a las que se denominan juegos, en las que intervienen individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados que son de esperar, bien mediante decisiones individuales (juegos no cooperativos), bien mediante acuerdos (juegos cooperativos). Como se puede ver, algo totalmente aplicable a las parejas.

En la película, Nash dice que Adam Smith se equivocó y que, en un juego, no es suficiente decir que el mayor bien común viene de las acciones egoístas de cada individuo (la búsqueda para satisfacer el propio interés beneficiaría a toda la sociedad). Para esto, usa de ejemplo a 5 mujeres en un bar, de las cuales la más atractiva es la rubia. Nash dice que si todos siguen su interés egoísta y tratan de conquistar a la rubia, se estorbarán y ninguno lo conseguirá. Las 4 amigas restantes no se interesarán en ellos después por sentirse despreciadas en primera instancia. Entonces, según Nash, lo que tienen que hacer es dirigirse directamente a las 4 amigas, ignorando a la rubia. Así, dejarían de lado su interés personal, y conseguirían el bien mayor para todo el grupo: que todos "liguen" esa noche.

En este artículo se desarrollarán brevemente una serie de áreas donde la matemática puede aportar resultados relevantes a la hora de plantearse una relación entre individuos: teoría de juegos, proporciones o sistemas dinámicos entre otros, tienen mucho que decir en este tema.

2. Teoría de Juegos

La teoría de juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión. Sus investigadores estudian las estrategias óptimas así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos.

En los juegos, cada jugador intenta conseguir el mejor resultado posible, maximizar su utilidad, a veces en situaciones de decisión individual, y otras muchas en las que la utilidad del resultado final no depende sólo de su él sino también de las acciones de los demás jugadores.

Se considera que el nacimiento de la teoría de juegos ocurre en 1944 con la publicación del texto de Von Neumann y Morgensten "Game theory and Economic Behaviour". En él establecen lo que actualmente se conoce como Teoría de Juegos Clásica para juegos de suma cero (jugadores en conflicto absoluto). En los años 50 Nash aporta algunos de los conceptos más importantes para una gama más amplia de juegos.

Cabe distinguir así entre dos tipos de juegos:

- Juegos de suma cero: En este tipo de juegos cada uno de los dos jugadores implicados gana lo que pierde el otro. No tiene sentido que cooperen, sólo hay ganadores y perdedores. Traducido al lenguaje de las relaciones de pareja, esto es lo que pasa casi siempre en la vida en común, uno maneja el mando de la tele y el otro no, uno decide el color nuevo de las paredes de la casa y el otro debe acatar la decisión,… Por otro lado, cuando se pelea en serio por alguien y uno tiene un competidor, sin duda el juego es de suma cero, si se la lleva uno es porque el otro la ha perdido (salvase algunos casos en los que la persona implicada es un tanto liberal o juega a dos bandas, pero aun así al final uno gana y otro pierde)

- Juegos de no suma cero: No todos los juegos son del tipo anterior, en ocasiones cada jugador tiene su propia tabla de rendimientos independiente. En este caso, si los jugadores pueden cooperar, pueden escoger una línea de acción óptima para ambos. Es posible distinguir entonces entre juegos cooperativos y los no cooperativos. En los primeros se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre las decisiones a tomar por parte de cada uno (caso que propone Nash en la película para asegurarse un ligue). El enfoque no cooperativo analiza las decisiones de cada jugador sin acuerdos previos (característica del amor en muchos caso, recordemos aquello de que en el amor y en la guerra todo vale).

Si hablamos de relaciones de pareja, existe otro concepto dentro de la teoría de juegos que puede ser de utilidad. Es éste el llamado "Equilibrio".

Se define el equilibrio de Nash como un modo de obtener una estrategia óptima para juegos que involucren a dos o más jugadores. Si hay un conjunto de estrategias tal que ningún jugador se beneficia cambiando su estrategia mientras los otros no cambien la suya, entonces ese conjunto de estrategias y las ganancias correspondientes constituyen un equilibrio de Nash. La búsqueda de este equilibrio puede interesar en algunos casos como:

- La lucha por llevarse pareja: si los aspirantes se encuentra en una posición de equilibrio, mas vale no mover ficha mientras los demás no lo hagan

- En la convivencia en pareja, si en una determinada situación se está en posición de equilibrio, tampoco conviene alterar tu postura si la pareja no lo hace.

3. Números y proporciones

Pese a la frase "la belleza está en el interior" es indiscutible que el físico es un elemento importante en las relaciones humanas y en concreto en las amorosas.

Obsesionado con la belleza humana, el Dr. Devendra Singh, de la Universidad de Texas inventó una serie de proporciones que establecían el "coeficiente de atracción física". Publicaba en 2003 en Estados Unidos, un texto en le que decía que había definido el coeficiente de atracción física mediante el cociente de dividir el perímetro de la cintura entre el de la cadera. ¿Cuál era el ideal? 0.7, que obedece a una cintura de 70 cm y una cadera de 90 cm. Con ese coeficiente, por ejemplo, las "Barbis" tendrían un coeficiente medio de atracción física igual a 0.54, por lo que para este profesor universitario se trataría de personas enfermas. Como no era asumible que la mayoría de las adolescentes tuviesen escaso atractivo, otros científicos dijeron que el mencionado coeficiente no es útil ya que, para ellos, la belleza tiene otro parámetro curiosamente también ligado con la matemática: la simetría.

Charles Feng, de la Universidad de Stanford, tras estudiar a un grupo de bebés que manifestaban predilección por personas cuya simetría bilateral se manifestaba con mayor claridad que en las restantes, trasladó su análisis a personas adultas y afirmó que generalmente, los occidentales se inclinan por las mujeres con mandíbulas no demasiado pronunciadas, narices pequeñas, ojos grandes y pómulos salientes, todos rasgos asemejables a los de los bebés. De hecho, según Feng, las revistas "Playboy" y "Hustler" eligen a las mujeres que ilustran sus páginas a partir de estos criterios, muy vinculados a la más pura 'intuición masculina'. Para consagrar a una nueva conejita de Playboy, Bill Farley, portavoz de la revista, dice que seleccionan a una mujer proporcionada y persiguen la simetría.

Según datos recientes, en EE.UU. las operaciones más habituales (liposucción, implantes mamarios y retoques de nariz) han sido remplazadas por las inyecciones de botox buscando esta finalidad.

La situación, además de machista, resulta un tanto ridícula. Buscando otros estudios sobre medidas de la belleza en la sociedad europea se puede encontrar otra investigación del año 2007. El País publicaba el día 19 de marzo de 2007 "Los más guapos del mundo". Se decía que Naomi Campbell y Christian Bale son la pareja más atractiva, según un estudio de la Universidad de Gdansk sobre el índice de belleza. El profesor Leszek Pokrywka del Departamento de Histología de la Universidad de Gandsk y su equipo publicaban un estudio acerca de un supuesto índice universal de belleza basado en las medidas de la cintura en relación con la altura, el perímetro del busto, el índice de masa corporal, el índice de grasa acumulada en las piernas, la altura, la circunferencia de las pantorrillas en relación con la altura, y hasta el índice de grasa en el omóplato.

Se encuentra con ello otro nuevo índice de belleza basado en el desarrollo de una fórmula matemática. Además aplicable a mujeres y hombres, las medidas no presentan diferencias cruciales entre ellos.

El estudio mostró que el promedio de mujer súper atractiva medía 175 cm, la cintura era el 76% del tamaño del pecho y el 70% del tamaño de las caderas. La modelo Naomi Campbell fue la mujer que se acercaba más al ideal:

- Índice de masa corporal: 20.85
- El perímetro de pecho es el 49.3% de su altura
- Proporción pecho/cintura: 1.4
- Proporción pierna/cuerpo: 1.4
- El perímetro de la pantorrilla es el 19.5% de su altura
- Perímetro del muslo es el 29.7% de la altura
- Altura: 175cm

Resumiendo, en una mujer "10" la cintura es 2/3 de la cadera y 3/4 del perímetro de pecho. Debe tener las piernas largas y los muslos y las pantorrillas delgadas. Haciendo cálculos vemos que la Naomi debe tener 86.3 cm de pecho, 61.6 cm de cintura, 102 cm de piernas, 73 cm de cuerpo, 52 cm de muslo, 34 cm de pantorrilla,…

El hombre perfecto resultó ser el actor británico Christian Bale:

- Índice de masa corporal: 26,5
- Proporción cintura/pecho: 0,6
- Proporción cuerpo/piernas: 1
- Altura: 188cm

En resumen, aunque es evidente que para los hombres no se tomaron tantas molestias como para las mujeres, se puede afirmar que el hombre "10" mide más de 180 de altura, sus piernas tienen la misma longitud que la parte superior del cuerpo, razón por la que parece más musculoso que la mujer, de ahí que el IMC ideal para los hombres sea mayor que el de las mujeres.

Con todo esto, la conclusión es que, hoy en día, la madrastra de Blancanieves ya no tendría que preguntarle a su espejo mágico quién es la más bella de las mujeres porque podía obtener la respuesta con un metro, papel, boli y un poquito de matemáticas.

3.1 La proporción en el cuerpo humano

No es cuestionable que en el ser humano, al igual que en otros animales, existen unas proporciones que pueden comprobarse fácilmente. A continuación se citan algunas de ellas:

- Una palma es la anchura de cuatro dedos.
- Un pie es la anchura de cuatro palmas.
- Un antebrazo es la anchura de seis palmas.
- La altura de un hombre son cuatro antebrazos (24 palmas).
- Un paso es igual a cuatro antebrazos.
- La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura.
- La distancia entre el nacimiento del pelo y la barbilla es un décimo de la altura de un hombre.
- La altura de la cabeza hasta la barbilla es un octavo de la altura de un hombre.
- La distancia entre el nacimiento del pelo a la parte superior del pecho es un séptimo de la altura de un hombre.
- La altura de la cabeza hasta el final de las costillas es un cuarto de la altura de un hombre.
- La anchura máxima de los hombros es un cuarto de la altura de un hombre.
- La distancia del codo al extremo de la mano es un quinto de la altura de un hombre.
- La distancia del codo a la axila es un octavo de la altura de un hombre.
- La longitud de la mano es un décimo de la altura de un hombre.

- La distancia de la barbilla a la nariz es un tercio de la longitud de la cara. -La distancia entre el nacimiento del pelo y las cejas es un tercio de la longitud de la cara.

- La altura de la oreja es un tercio de la longitud de la cara.

Nota: que el lector verifique las más sencillas: 3 pulgares = 1 palma, 2 palmas (6 pulgares) = antebrazo, 3 palmas (9 pulgares) el brazo, doblando codos juntando los dedos 2 antebrazos mas los dos que quedan para estirar los brazos (24 pulgares)= longitud de los brazos extendidos, esa longitud es la altura total del hombre.

4. Buscando modelos

Si retomamos a la idea de "modelizar el amor", también podemos encontrar algunas herramientas matemáticas que nos pueden servir.

Al final de los 80 Steven Strogatz, un profesor de Harvard, propuso un ejercicio en clase con la idea de captar la atención de sus alumnos veinteañeros, o al menos de sus hormonas. Fue el siguiente:

Romeo está enamorado de Julieta pero, en este caso, Julieta resulta una enamorada voluble; cuanto más la ama Romeo, más ganas tiene ella de largarse y cuanto menos caso le hace, más atractivo le encuentra. Por su parte, Romeo se enciende si Julieta le quiere y se enfría si ella le desprecia.

Expresemos matemáticamente esta situación. ¿Cómo evolucionará el amor entre nuestra pareja? Representemos a Romeo por R y a Julieta por J, tendremos:

$$\frac{dR(t)}{dt} = aJ(t)$$
$$\frac{dJ(t)}{dt} = -bR(t)$$

Donde a y b son números reales positivos.

Una vez trasladado al lenguaje matemático, el siguiente paso será usar las técnicas matemáticas para analizar los resultados y conocer el tipo de relación que les espera a estos peculiares amantes.

Nos encontramos dentro de la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales autónomos. Una amplia gama de fenómenos naturales son modelados por sistemas bidimensionales de primer orden de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = F(x,y) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = G(x,y) \end{cases}$$

que en nuestro caso, expresado matricialmente, el sistema es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dR(t)}{dt} \\ \dfrac{dJ(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}.$$

Es conocido que si suponemos F y G funciones continuamente diferenciables en una región del plano, plano de fases del sistema (algo que ocurre en el problema Romeo-Julieta), dados t_0 y cualquier punto del plano (x_0,y_0), existe una única solución x=x(t), y=y(t) que contiene a t_0 y satisface las condiciones iniciales $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$. Las ecuaciones x=x(t), y=y(t) describen una curva solución en el plano de fases.

En el estudio de estos sistemas tiene especial relevancia el concepto de punto crítico. Un punto crítico es aquél (x*,y*) tal que F(x*,y*)=G(x*,y*)=0. Si (x*,y*) es un punto de crítico del sistema, las funciones x(t)= x*, y(t)=y* satisfacen las ecuaciones del sistema. A tal solución se le denomina solución de equilibrio. Su trayectoria es un único punto.

Como veremos, en el caso particular de nuestro problema amoroso Romeo-Julieta, las soluciones de equilibrio tienen gran interés en situaciones prácticas. Para introducir esta idea pensemos en el caso en que estas dos ecuaciones modelan dos poblaciones de animales que cohabitan en el mismo ambiente y que compiten por el mismo alimento o una depreda a la otra. Entonces, un punto crítico del sistema especifica una población constante de las dos especies que coexisten en un ambiente, si elegimos otro punto, no crítico no es posible que esas poblaciones constantes coexistan, una de ellas o las dos deben cambiar. En el caso de Romeo y Julieta esto se traduce en que la relación pueda mantenerse estable a lo largo del tiempo.

La propiedad característica de un equilibrio es que si el sistema arranca de él, permanecerá allí en todos los instantes futuros. Esto no significa que si el sistema está en equilibrio y es perturbado un poco (la solución se mueve a un punto cercano), volverá al equilibrio. Esta situación tiene gran interés y se trata entonces de estudiar el comportamiento de las trayectorias cerca del punto crítico de un sistema. Con ello se entra en el importante concepto de estabilidad, la capacidad de mantener el equilibrio. La realización de un proceso es estable si las diferencias entre realizaciones permanecen pequeñas a través del futuro siempre que las diferencias sean suficientemente pequeñas en el presente. Cuando un sistema posee alta sensibilidad a las condiciones iniciales, esto es, condiciones iniciales próximas producen resultados muy diferentes, cualquier pequeño cambio, incertidumbre o error en estas condiciones se verá amplificado exponencialmente. Aparece entonces una dinámica con seria limitación en la predicción, pero a su vez permite la explicación de cierto tipo de fluctuaciones dentro del mundo de la predicción.

Por todo ello, conocer las propiedades de estabilidad, al menos local, de las trayectorias será de gran importancia en el estudio de la evolución de todo sistema.

Existen muchos procesos (temperatura de un punto de la tierra, predicción meteorológica,...) que dan lugar a futuros inciertos e imprevisibles de los que sólo se sabe que "vagan" por regiones geométricas de estructura muy irregular, son los procesos caóticos. En particular, todos podemos intuir que en la mayoría de las relaciones personales existe esta alta sensibilidad a las condiciones iniciales, cualquier pequeño cambio en la actitud, comportamiento o pequeños detalles pueden alterar la situación de forma disparatada. Así mismo, casi todos buscamos esa situación de equilibrio para nuestras relaciones.

Formalmente decimos que:

- Un punto crítico de un sistema autónomo es estable siempre que si el punto inicial está suficientemente cerca de él entonces la solución permanece cerca de él a lo largo del tiempo.

- Un punto crítico no estable se dice inestable

- Yendo un poco más allá, se dice que un punto crítico es asintóticamente estable si es estable y además toda trayectoria suficientemente cerca del punto crítico también tiende a él cuando el tiempo tiende a infinito.

Es conocido que en el estudio de los sistemas lineales:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

si el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, existe un único punto crítico, el (0,0). La estabilidad en los sistemas autónomos lineales depende del carácter de los autovalores de la matriz de los coeficientes.

Para el caso concreto de nuestro problema Romeo-Julieta, (0,0) es el único punto crítico y los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ resultan dos números complejos puros conjugados $\lambda_1 = \sqrt{ab}i, \lambda_2 = -\sqrt{ab}i,$ con los que las soluciones que nos modelan la evolución del amor de esta pareja son:

$$R(t) = c_1 \cos(\sqrt{ab}t) + c_2 sen(\sqrt{ab}t)$$
$$J(t) = \sqrt{\frac{b}{a}}\left[-c_1 sen(\sqrt{ab}t) + c_2 \cos(\sqrt{ab}t)\right]$$

Siendo c1 y c2 dos constantes a determinar.

Es fácil observar que las soluciones oscilan, tanto el seno como el coseno son funciones periódicas que trasladan esa propiedad a las soluciones. Podríamos con ello aventurarnos a decir que Romeo y Julieta estarán sometidos a un amor repetitivo que será cambiarte pero de manera periódica, un sube y baja eterno.

Pero ¿se verá alterada esta situación por pequeños cambios de actitud o situaciones externas diversas por muy pequeñas que sean estas? La estabilidad del sistema puede responder a esta pregunta.

Los autovalores de la matriz confirman que el punto crítico es un centro (figura 4), es decir, las posibles soluciones giran alrededor del punto crítico sin acercarse ni alejarse de él y además es estable, el problema es que no es asintóticamente estable.

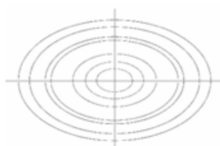

Figura 4: Centro

De esta forma, es importante señalar el efecto que perturbaciones (cambios) pequeños pueden tener en la situación de equilibrio:

- Como cabía esperar, esta relación entre Romeo y Julieta gira sin parar llevándoles de unos sentimientos a otros sin futuro ni cambios radicales pero, cualquier perturbación en el posible estado de equilibrio de su relación hace que no se llegue a dicha situación de equilibrio.

- Además una perturbación arbitraria pequeña en el valor del modelo (valores de a y b) puede hacer que la naturaleza de los autovalores y con ello del punto crítico, cambien radicalmente, pasando de un centro estable a un punto de naturaleza completamente distinta.

Este amor resulta así impredecible.

Por supuesto esta situación puede complicarse y algunas extensiones pueden ser del tipo:

El amor de Julieta es sencillo y sin complicaciones, su amor por Romeo crece tanto con la atracción de ella por él como la de él hacia ella. Pero Romeo tiene un problema, su amor sólo crece con la atracción de Julieta hacia él y se desploma si siente que la atracción por ella crece.

Animamos al lector a intentar modelar matemáticamente esta situación y con ello conocer cómo será su relación. Claro que lo mejor sería que cada uno se centrase en su situación personal.

4. Conclusiones

En este texto se ha querido recoger una pequeña muestra de lo que la matemática puede hacer en el campo de las relaciones personales. Es casi evidente que campos como la Teoría de Juegos, la Teoría de Grafos y la Combinatoria, pueden aportar mucho en este tema, pero también los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales o las Series tienen cosas que decir. Todo este arsenal matemático puede usarse para modelizar las relaciones personales (sexuales o no).

Hoy en día casi todo se puede plantear desde un punto de vista matemático y después intentar resolverlo, es casi una moda hacerlo, el problema es la seriedad del planteamiento y del problema. Cuando se intenta hacer divulgación, se corre el riesgo de simplificar en exceso los modelos o los conceptos matemáticos que hay detrás de los resultados reales. Pero yo creo que la divulgación es necesaria y beneficiosa para la ciencia y, si además, se hace en un tema que tiene gran interés para la sociedad mejor que mejor.

Con este trabajo sólo se ha pretendido mostrar que las matemáticas no son algo serio y aburrido sino que nos pueden ayudar en cualquier campo. Y se ha realizado escogiendo deliberadamente un tema polémico y jocoso.

Referencias

[1] CRESSWELL, Clio. *Mathematics and Sex*, Allen&Unwin, Sydney, 2003.

[2] PÉREZ, Joaquín; JIMENO, José; CERDÁ, Emilio. *Teoría de Juegos*, Prentice Hall, Madrid, 2004.

[3] PÉREZ, Rafael. *Mi pentágono de la belleza*. Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en Ingeniería y Arquitectura, pp:369-405. Universidad Politécnica de Madrid, 2018.

Sobre el/los autor/es:
Nombre: Mariló López González
Correo Electrónico: marilo.lopez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid