

## ACOPLAMIENTO COHERENTE DE CUATRO ONDAS DE ALFVÉN

Sergio A. Elaskar<sup>1</sup> y Juan R. Sanmartín<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba y CONICET, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina, selaskar@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>

<sup>2</sup>Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, Plaza Cardenal Cisneros 3. Madrid. España

**Palabras claves:** ondas de Alfvén, DNLS, amarras espaciales, flujo 5D.

**Resumen.** Interacciones no lineales de ondas de Alfvén existen tanto para plasmas en el espacio como en laboratorios, con efectos que van desde calentamiento hasta conducción de corriente. Un ejemplo de emisión de ondas de Alfvén en ingeniería aparece en amarras espaciales. Estos dispositivos emiten ondas en estructuras denominadas “Alas de Alfvén”. La ecuación Derivada no lineal de Schrödinger (DNLS) posee la capacidad de describir la propagación de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas tanto para plasmas fríos como calientes. En esta investigación, dicha ecuación es truncada con el objetivo de explorar el acoplamiento coherente, débilmente no lineal y cúbico de cuatro ondas cerca de resonancia ( $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ ). La onda 1 que corresponde al vector de onda  $k_1$  puede ser linealmente inestable y las tres restantes ondas 2, 3 y 4, correspondientes a  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  respectivamente, son amortiguadas. Por medio de la utilización de este modelo se genera un flujo 5D formado por cuatro amplitudes y una fase relativa. En una serie de trabajos previos se ha analizado la transición dura hacia caos en flujos 3D (Sanmartín et al., 2004) y 4D (Elaskar et al., 2005; Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007). Se presenta en este artículo un análisis teórico-numérico del comportamiento del sistema cuando la tasa de crecimiento de la onda inestable es nula.

## 1 INTRODUCCIÓN

La interacción de una amarra espacial conductora con la ionosfera y con el campo magnético terrestre posee distintas aplicaciones entre las que cabe destacar la producción de potencia eléctrica y la obtención de una fuerza de empuje. Además, una amarra sin aislamiento eléctrico y sin corriente en sus extremos, podría servir como fuente generadora de electrones dando lugar a auroras artificiales (Sanmartín et al., 2006). Independientemente de estas y otras aplicaciones, una amarra espacial electrodinámica, es una herramienta útil como fuente de excitación de ondas electromagnéticas (Dobrowolny and Melchioni, 1993 y Drell et al., 1965). Las ondas de Alfvén generadas por un cuerpo conductor en el seno de un plasma fueron predichas por Drell et al., (1965) y fueron observadas por primera vez en la magnetosfera de Júpiter (Acuna and Ness, 1981). El satélite Io, en su movimiento alrededor de Júpiter, era el responsable de la generación de tales ondas y las observaciones confirmaron la existencia de Alas de Alfvén ligadas al satélite.

La estructura del campo electromagnético o de las Alas de Alfvén que se generan cuando una amarra espacial se mueve sumergida en un plasma es posible abordarla diferenciando aquellas regiones cercanas al cuerpo (campo próximo) de las alejadas (campo lejano). Para una amarra espacial electrodinámica el campo lejano se puede estudiar mediante un análisis lineal (Sanmartín and Estes, 1997). En las proximidades de la amarra (campo próximo) tienen lugar una serie de fenómenos que obligan a realizar un análisis más detallado ya que se espera que las ondas tengan mayor intensidad y que los efectos no lineales cobren importancia. En estas circunstancias, una alternativa para analizar la evolución de los campos es por medio de la ecuación “Derivative Non-linear Schrödinger Equation - DNLS” que describe la propagación paralela o casi paralela de ondas de Alfvén circularmente polarizadas (Rogister, 1971). Esta ecuación ha tenido éxito en la comprensión de la propagación de ondas Alfvén debido a que distintas simulaciones numéricas y observaciones en el entorno espacial, han podido ser explicadas como soluciones de la DNLS.

Las ondas de Alfvén son un rasgo característico en plasmas magnetizados. Se han observado ondas de Alfvén de larga amplitud acompañando al viento solar (Smith, *et al.* 1995), además se cree que son responsables del calentamiento turbulento de las coronas estelares (Pettini et al., 1985), de emisiones de radio coherentes (Lakhina and Buti, 1988) y de fenómenos relacionados con la generación de viento estelar y de chorros extragalácticos (Jatenco-Pereira, 1995). También se tiene constancia de la existencia de pulsos magnéticos solitarios en el entorno de los cometas (Tsurutani et al., 1990) y de fenómenos de intermitencia turbulenta (Marsch and Liu, 1993 y Bruno et al., 2001).

## 2 ECUACIÓN DNLS

La ecuación DNLS describe la propagación paralela o casi paralela a un campo magnético no perturbado de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas. Dicha ecuación puede ser obtenida desde las ecuaciones de la magnetogasdínámica considerando plasma neutro, compuesto por dos fluidos, despreciando la inercia de los electrones y la corriente de desplazamiento (Mjølhus, 1976).

Si se acepta que el campo magnético sin perturbar  $B_0$  posee la dirección del eje  $z$ , la DNLS puede ser expresada de la siguiente forma (Rogister, 1971; Mjølhus, 1976; Passot and Sulem, 2003):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \pm \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \phi \frac{|\phi|^2}{4} \right) + \hat{\gamma} \phi = 0, \quad (1)$$

donde  $\phi$ ,  $t$ ,  $z$  representan variables y campos en forma adimensional

$$\phi \equiv \frac{B_x \pm i B_y}{B_0}, \quad \omega_{ci} t \rightarrow t, \quad \frac{\omega_{ci}}{V_A} z \rightarrow z, \quad (2)$$

$\omega_{ci}$  es la frecuencia de ciclotrón iónica,  $V_A$  es la velocidad de Alfvén. El signo superior en la Ec.(1) corresponde a ondas polarizadas a la izquierda (LH), mientras que el inferior a ondas polarizadas a la derecha (RH) propagándose en la dirección del eje  $z$ . En la Ec.(1) siguiendo a Russell y Ott (1981) se ha introducido un operador lineal  $\hat{\gamma}$  de amortiguamiento o crecimiento. La Ec.(1) es derivada bajo las siguientes relaciones para las cantidades perturbadas,  $v_z/V_A \sim \Delta n/n_0 \sim (B_x/B_0)^2 \sim (B_y/B_0)^2$ , siendo  $n$  y  $v_z$  la densidad del plasma y la velocidad en la dirección del eje  $z$ .

La ecuación DNLS pertenece a la llamada teoría de solitones y engloba a las ecuaciones “Korteweg-de Vries – KdV”, “Modified Korteweg-de Vries – MKdV” y “Non-linear Schrodinger Equation – NLS” como casos límites. Ha sido analizada mediante tres técnicas: búsqueda de soluciones exactas (Mjolhus and Hada, 1997), integración numérica (Splanger et al., 1985; Dawson and Fontan, 1988) y reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta última técnica se ha llevado a cabo de dos maneras distintas: suponiendo ondas viajeras estacionarias (Hada et al., 1990) y mediante un número finito de modos (Sanmartín et al., 2004, Elaskar et al., 2005, Sánchez Arriaga et al., 2007).

### 3 TRUNCAMIENTO DE LA DNLS MEDIANTE CUATRO ONDAS

Debido a que el orden del sistema de ecuaciones diferenciales resultante depende directamente del número de modos elegidos para hacer el truncamiento, interesa seleccionar el mínimo número de ondas que reproduce de manera fiel las observaciones experimentales y los resultados numéricos. Estudios numéricos que realizan la integración de la DNLS completa (Ghosh and Papadopoulos, 1987; Nariyuki and Hada, 2005) sugieren que existen tres modos dominantes cuyos números de onda cumplen la condición de resonancia:  $2k_1 = k_2 + k_3$ . Sin embargo un artículo reciente (Nariyuki and Hada, 2006) describe la importancia de la interacción no lineal de cuatro ondas de Alfvén con la siguiente relación de resonancia:

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4 \quad (3)$$

Además se destaca que el mayor número de ondas con acoplamiento coherente en la DNLS es cuatro. Por lo tanto, se considera en este trabajo, que una solución aproximada de la Ec. (1) consiste de cuatro ondas viajeras satisfaciendo la condición de resonancia dada por la Ec. (3)

$$\phi = \sum_{j=1}^{j=4} a_j(t) \exp [i\psi_j(t)] \times \exp [i(k_j z - \omega_j t)], \quad (4)$$

siendo  $a_j$ ,  $\psi_j$  números reales. Números de ondas y frecuencias están relacionados por la expresión de dispersión lineal (sin pérdidas) para ondas de Alfvén circularmente polarizadas:

$$\omega_j = k_j \mp k_j^2 / 2 \quad (5)$$

Introduciendo la Ec. (3) en Ec. (1) y considerando solamente las componentes de  $k_1, k_2, k_3$

y  $k_4$ , es decir que se acepta que las otras componentes se amortiguan rápidamente y no poseen influencia para tiempos largos (Russell y Ott, 1981; Sanmartín et al., 2004), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{a}_1 = \Gamma a_1 - 2 k_1 a_2 a_3 a_4 \sin \beta, \quad (6a)$$

$$\dot{a}_2 = -\gamma_2 a_2 - 2 k_2 a_1 a_3 a_4 \sin \beta, \quad (6b)$$

$$\dot{a}_3 = -\gamma_3 a_3 + 2 k_3 a_1 a_2 a_4 \sin \beta, \quad (6c)$$

$$\dot{a}_4 = -\gamma_4 a_4 + 2 k_4 a_1 a_2 a_3 \sin \beta, \quad (6d)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & \nu - k_2 (a_2^2 - a_1^2) \left( 1 - \frac{a_3 a_4}{a_1 a_2} 2 \cos \beta \right) + k_3 (a_3^2 - a_1^2) \left( 1 - \frac{a_2 a_4}{a_1 a_3} 2 \cos \beta \right) \\ & + k_4 (a_4^2 - a_1^2) \left( 1 - \frac{a_2 a_3}{a_1 a_4} 2 \cos \beta \right), \end{aligned} \quad (6e)$$

siendo

$$\nu \equiv \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 \quad (7a)$$

$$\beta \equiv \pi + \nu t + \psi_3 + \psi_4 - \psi_1 - \psi_2 \quad (7b)$$

$$\gamma_1 \equiv -\Gamma < 0 \quad (7c)$$

En el caso de ondas polarizadas a la izquierda la diferencia de frecuencias es  $\nu = -k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 + k_4^2$  y para ondas con polarización derecha se escribe  $\nu = k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 - k_4^2$ . Los signos negativos delante de  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  en las Ecs. (6b,c,d) implica que las ondas 2, 3 y 4 poseen amortiguamiento.

El sistema presenta simetría con respecto al cambio de variables:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \rightarrow -a_1, -a_2, -a_3, -a_4.$$

Por lo tanto se presenta interés solamente en las soluciones que satisfagan  $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ .

El sistema de ecuaciones (6), desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, posee siete parámetros de control independientes  $\Gamma, k_2, k_3, k_4, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ , sin embargo es posible reducir el número de parámetros mediante el uso de modelos de amortiguamiento (por ejemplo amortiguamiento de Landau o resistivo). En este trabajo, con la finalidad de hacer un análisis general del sistema, no se introducen modelos de amortiguamiento; sin embargo se considera que  $\Gamma = 0$  reduciendo el número de parámetros de control a seis.

Finalmente se destaca que si se hace  $\Gamma = -\gamma_2$  y  $k_1 = k_2$  el sistema de ecuaciones (6) se reduce al sistema 4D analizado en trabajos anteriores (Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007).

#### 4 DISIPACIÓN DEL SISTEMA

La divergencia del flujo del sistema de ecuaciones (6) puede ser escrita como (Nayfeh and Balachandran, 1995):

$$\frac{\partial \left( a_1 \frac{da_1}{dt} \right)}{a_1 \partial a_1} + \frac{\partial \left( a_2 \frac{da_2}{dt} \right)}{a_2 \partial a_2} + \frac{\partial \left( a_3 \frac{da_3}{dt} \right)}{a_3 \partial a_3} + \frac{\partial \left( a_4 \frac{da_4}{dt} \right)}{a_4 \partial a_4} + \frac{\partial \left( \frac{d\beta}{dt} \right)}{\partial \beta} = 2(\Gamma - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4) \quad (8)$$

De la última ecuación se destaca que la divergencia del flujo presenta, al igual que para el flujo 4D (Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007), únicamente dependencia en parámetros de control del sistema, no siendo función de ninguna variable del espacio de fases. Además el sistema es disipativo si se verifica que:

$$\Gamma - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 < 0 \quad (9)$$

En este trabajo se considera que la onda 1 no posee amplificación ni amortiguamiento ( $\Gamma = 0$ ) y las ondas 2, 3 y 4 son amortiguadas. Por lo tanto el sistema resulta disipativo, el atractor para largo tiempo de integración será un conjunto de medida nula en el espacio 5D.

#### 5 ATRACTOR PARA $\Gamma = 0$

Se buscan en esta sección los atractores del sistema de ecuaciones (11) para el caso en que  $\Gamma = 0$ . En la sección anterior se demostró que el sistema es disipativo en estas condiciones, los atractores serán puntos fijos.

Para hallar estos puntos fijos del sistema es conveniente introducir el siguiente cambio de variables:

$$s = \frac{a_4}{a_2 a_3} \quad (10)$$

Luego reemplazando  $s$  por  $a_4$  en Ecs. (6), resulta

$$\dot{a}_1 = \Gamma a_1 - 2 k_1 a_2^2 a_3^2 s \sin \beta, \quad (11a)$$

$$\dot{a}_2 = -\gamma_2 a_2 - 2 k_2 a_1 a_2 a_3^2 s \sin \beta, \quad (11b)$$

$$\dot{a}_3 = -\gamma_3 a_3 + 2 k_3 a_1 a_2^2 a_3 s \sin \beta, \quad (11c)$$

$$\dot{s} = \gamma_s s + 2 a_1 \left[ k_4 + s^2 (k_2 a_3^2 - k_3 a_2^2) \right] \sin \beta, \quad (11d)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & v - k_2 (a_2^2 - a_1^2) \left( 1 - \frac{a_3^2 s}{a_1} 2 \cos \beta \right) + k_3 (a_3^2 - a_1^2) \left( 1 - \frac{a_2^2 s}{a_1} 2 \cos \beta \right) \\ & + k_4 (a_2^2 a_3^2 s^2 - a_1^2) \left( 1 - \frac{1}{a_1 s} 2 \cos \beta \right) \end{aligned}, \quad (11e)$$

siendo  $\gamma_s = \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4$ .

## 5.1 Puntos fijos

Para obtener los puntos fijos se analiza en primer lugar las Ecs.(11a,b,c). De ellas se deduce que:

$$a_2 = a_3 = 0 \quad \text{y} \quad a_1 = cte. \quad (12)$$

Posteriormente de las Ecs.(11d,e) se encuentra que:

$$a_1 = cte = -\frac{\gamma_s s}{2k_4 \sin \beta} \quad (13)$$

$$s = \left[ \frac{4k_4^2 \sin \beta}{\gamma_s^2 k_1} (v \sin \beta - \gamma_s \cos \beta) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Las Ecs. (12, 13 y14) expresan que los puntos fijos del sistema habitan en el espacio tridimensional  $(a_1, s, \beta)$ .

Las condiciones de existencia de los puntos fijos se deducen desde las Ecs. (13 y 14). Para que se satisfaga la Ec. (13) se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{si } k_4 > 0 \quad \text{debe satisfacerse} \quad \frac{\gamma_s}{\sin \beta} < 0 \\ \text{si } k_4 < 0 \quad \text{debe satisfacerse} \quad \frac{\gamma_s}{\sin \beta} > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Además analizando la Ec. (14) se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{si } k_1 > 0 \quad \text{debe satisfacerse} \quad \frac{\gamma_s}{\tan \beta} < v \\ \text{si } k_1 < 0 \quad \text{debe satisfacerse} \quad \frac{\gamma_s}{\tan \beta} > v \end{aligned} \quad (16)$$

La curva  $s = s(\beta)$ , descrita por la Ec. (14), posee un valor máximo de  $s$  para:

$$\beta = -\text{inv tan} \left( \frac{v \pm \sqrt{v^2 + \gamma_s^2}}{\gamma_s} \right) \quad (17)$$

y dos extremos en  $\beta$  que corresponden a  $ds/d\beta \rightarrow \infty$  y  $s = 0$  (considerando  $s \geq 0$  y  $\beta \geq 0$ ):

$$\sin(\beta) = 0; \quad \beta = \text{inv tan}(\gamma_s / v) \quad (18)$$

Si  $k_1$  es positivo se presentan cuatro posibilidades:

1 - La curva  $s = s(\beta)$  está definida solamente para  $0 < \beta < \pi/2$  ( $k_4$  y  $\gamma_s$  tienen distinto signo), la misma comienza en  $\beta = 0$  y  $s = 0$ ; luego a medida que  $\beta$  crece  $s$  se incrementa hasta que  $\beta$  alcanza el valor que hace máximo a  $s$  dado en Ec. (17); posteriormente disminuye  $s$  mientras  $\beta$  aumenta hasta alcanzar el otro extremo  $\beta = \text{inv tan}(|\gamma_s / \nu|)$ .

2 - La curva  $s = s(\beta)$  está definida para  $0 < \beta < \pi$  ( $k_4$  y  $\gamma_s$  tienen distinto signo) comienza en  $\beta = 0$  y  $s = 0$ , luego a medida que  $\beta$  crece  $s$  se incrementa hasta que  $\beta$  alcanza el valor que hace máximo a  $s$  dado por Ec.(17); desde allí disminuye  $s$  mientras  $\beta$  aumenta hasta alcanzar el otro extremo  $\beta = \pi - \text{inv tan}(|\gamma_s / \nu|)$  que corresponde a  $s = 0$ . Si  $k_4$  y  $\gamma_s$  poseen igual signo se presentan dos situaciones más:

3 - La curva  $s = s(\beta)$ , definida sólo para  $\pi < \beta < 3\pi/2$ , comienza en  $\beta = \pi$  y  $s = 0$ ; luego a medida que crece  $\beta$ ,  $s$  aumenta hasta su valor máximo para posteriormente disminuir alcanzando  $s = 0$  para  $\beta = \pi + \text{inv tan}(\gamma_s / \nu)$ .

4 - La curva  $s = s(\beta)$  ahora definida para  $\pi < \beta < 2\pi$ , comienza en  $\beta = \pi$  y  $s = 0$ ; a medida que se incrementa  $\beta$ ,  $s$  crece hasta llegar a su valor máximo y luego comienza a disminuir alcanzando  $s = 0$  para  $\beta = 2\pi - \text{inv tan}(\gamma_s / \nu)$ .

## 5.2 Estabilidad de Puntos fijos

En esta sección se determina la estabilidad de los puntos fijos del sistema de ecuaciones (11). La estabilidad quedará determinada por los valores propios de la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones valuada en el punto fijo que se desea analizar. Los cinco valores propios son:

- En la dirección de  $a_1$ :  $\lambda_1 = 0$
- En la dirección de  $a_2$ :  $\lambda_2 = -\gamma_2$
- En la dirección de  $a_3$ :  $\lambda_3 = -\gamma_3$  (19)
- En la dirección de  $s$ :  $\lambda_4 = \gamma_s \left( 1 + \frac{\sqrt{-1}}{\tan \beta} \right)$
- En la dirección de  $\beta$ :  $\lambda_5 = \gamma_s \left( 1 - \frac{\sqrt{-1}}{\tan \beta} \right)$

En función de los cinco valores propios y analizando la estabilidad de las Ecs.(11) en el espacio  $(a_1, a_2, a_3, s, \beta)$  se destaca que el sistema es siempre estable a perturbaciones en la dirección de los ejes  $a_2$  y  $a_3$ ; posee condiciones de estabilidad neutra a perturbaciones en la

dirección del eje  $a_1$  y el valor de  $\gamma_s$  determina la estabilidad en la dirección de los ejes  $s$  y  $\beta$ . Si  $\gamma_s > 0$ , el sistema es inestable.

El comportamiento de la curva  $s = s(\beta)$  que determina los puntos fijos en el plano  $(s, \beta)$  puede sintetizarse en función del valor de los parámetros  $k_1$ ,  $k_4$  y  $\gamma_s$ :

- Para  $k_1 > 0$ ,  $k_4 > 0$ ,  $\gamma_s < 0$ : la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $0 < \beta < \pi$  y es estable.
- Para  $k_1 > 0$ ,  $k_4 > 0$ ,  $\gamma_s > 0$ : la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $\pi < \beta < 2\pi$  y es inestable.
- Para  $k_1 > 0$ ,  $k_4 < 0$ ,  $\gamma_s < 0$ : la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $\pi < \beta < 2\pi$  y es estable.
- Para  $k_1 > 0$ ,  $k_4 < 0$ ,  $\gamma_s > 0$ : la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $0 < \beta < \pi$  y es inestable.
- Para  $k_1 < 0$ ,  $k_4 > 0$ ,  $\gamma_s < 0$ : la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $0 < \beta < \pi$  y es estable.
- Para  $k_1 < 0$ ,  $k_4 > 0$ ,  $\gamma_s > 0$ : la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $\pi < \beta < 2\pi$  y es inestable.
- Para  $k_1 < 0$ ,  $k_4 < 0$ ,  $\gamma_s < 0$ : la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $\pi < \beta < 2\pi$  y es estable.
- Para  $k_1 < 0$ ,  $k_4 < 0$ ,  $\gamma_s > 0$ : la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $0 < \beta < \pi$  y es inestable.

En la Figuras 1 y 2 se muestra la sensibilidad de la curva  $s = s(\beta)$  a variaciones de  $k_2$ . Se observa que a medida que  $k_2$  se incrementa el valor máximo de  $s$  y el extremo superior de  $\beta$  (Ecs.17 y 18) también aumentan hasta que se alcanza un valor de  $k_2$  a partir del cual el máximo  $s$  y el extremo superior de  $\beta$  comienzan a disminuir.

En la Figura 3 está indicada la sensibilidad de la curva  $s = s(\beta)$  a variaciones de  $k_3$ . Se observa que a medida que  $k_3$  disminuye el valor máximo de  $s$  y el extremo superior de  $\beta$  (Ecs.17 y 18) aumentan hasta que se alcanza el valor de  $k_3 = 0$ .

La Figura 4 expresa la sensibilidad de la curva de puntos fijos al modificarse  $k_4$ . Se observa que a medida que  $k_4$  crece también lo hace  $s$  máximo y  $\beta$  máximo, excepto para valores de  $k_4$  próximos a 1.

Para comprender la dependencia de  $s$  con  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  hay que relacionar la Ec.(14) con la condición de resonancia  $k_1 = k_3 + k_4 - k_2$  y la expresión para la diferencia de frecuencias  $\nu = -k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 + k_4^2$  (esta última corresponde a ondas con polarización izquierda). A medida que  $k_3$  varía produciendo una disminución en  $k_1$ , el valor de  $s$  se incrementa. Cuando  $k_3$  alcanza y supera el valor que hace  $k_1 = 0$  (para la Figura 3 es  $k_3 = -1$ ) no hay soluciones reales para  $s$ .

Con  $k_2$  sucede algo similar, a medida que  $k_2$  adquiere valores positivos mayores,  $k_1$  disminuye hasta anularse. El diferente comportamiento de la dependencia de  $s$  en  $k_2$  y  $k_3$  reside en la relación de la diferencia de frecuencias:

$$\nu = -k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 2(k_3^2 + k_4^2 - k_3k_4 - k_2k_3 - k_2k_4) \quad (20)$$

La curva de puntos fijos posee una dependencia con  $k_4$  que es parcialmente similar al caso de  $k_3$ , sin embargo hay que añadir que  $k_4$  aparece en el numerador de la Ec. (14). Existe un



valor de  $k_4$  que anula  $k_1$  (para la Figura 4 es  $k_4 = 1$ ). A medida que  $k_4$  disminuye aproximándose  $k_4 = 1$ ,  $s$  y  $\beta$  máximos disminuyen debido a que  $k_4$  está en el numerador, sin embargo para valores muy próximos a  $k_4 = 1$  la tendencia comienza a modificarse debido a la influencia de  $k_1 \rightarrow 0$  en el denominador de la Ec. (14).

En las Figuras 1, 2, 3 y 4 se destaca que:

$$k_1 = k_3 + k_4 - k_2 > 0; \quad k_4 > 0 \quad \text{y} \quad \gamma_s = \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 < 0;$$

esto implica que la curva  $s = s(\beta)$  está definida para  $0 < \beta < \pi$  y es estable.

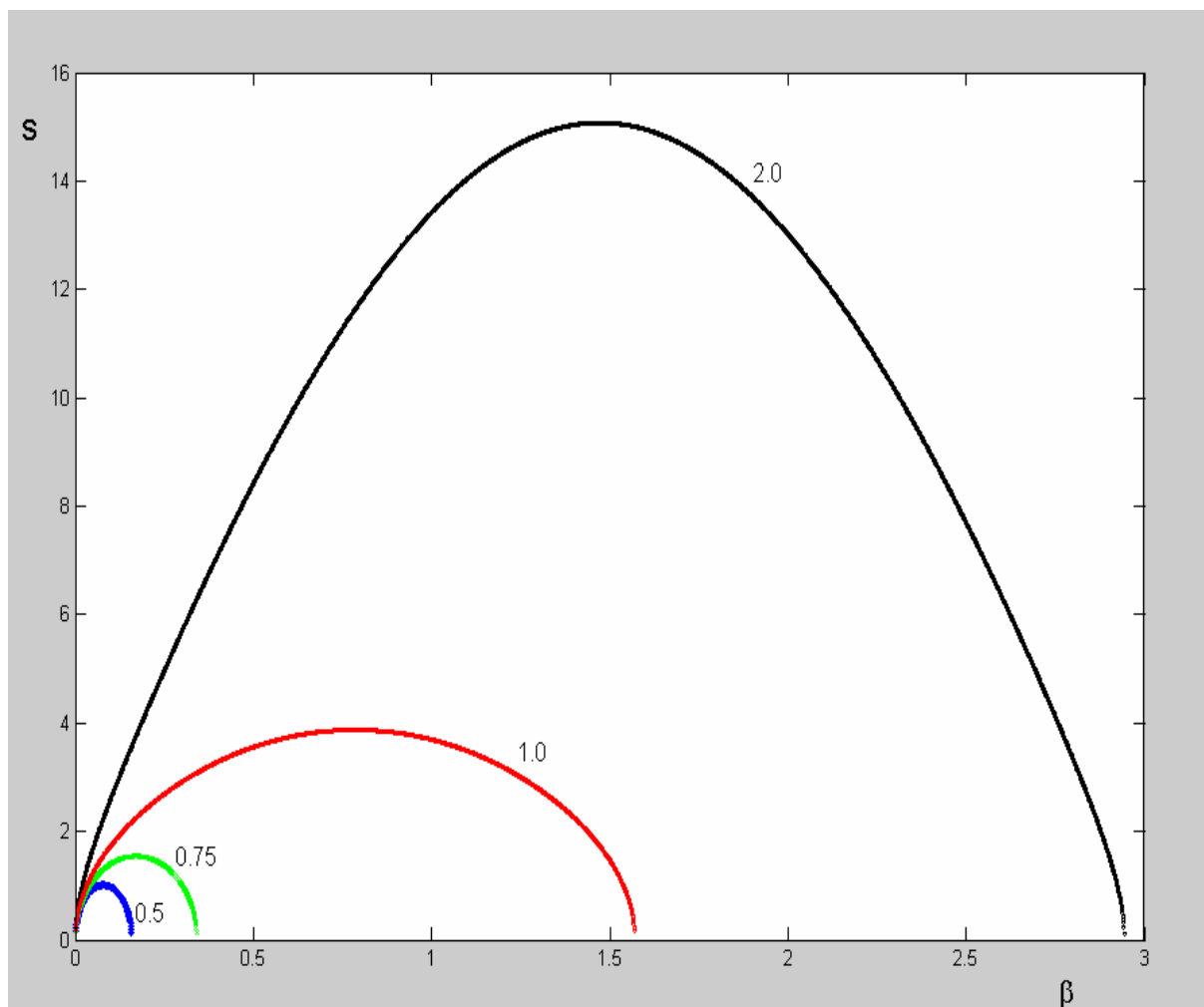


Figura 1: Curva  $s = s(\beta)$  para  $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 1.5$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = 3$  y  $k_2 = 0.5, 0.75, 1, 2$ .

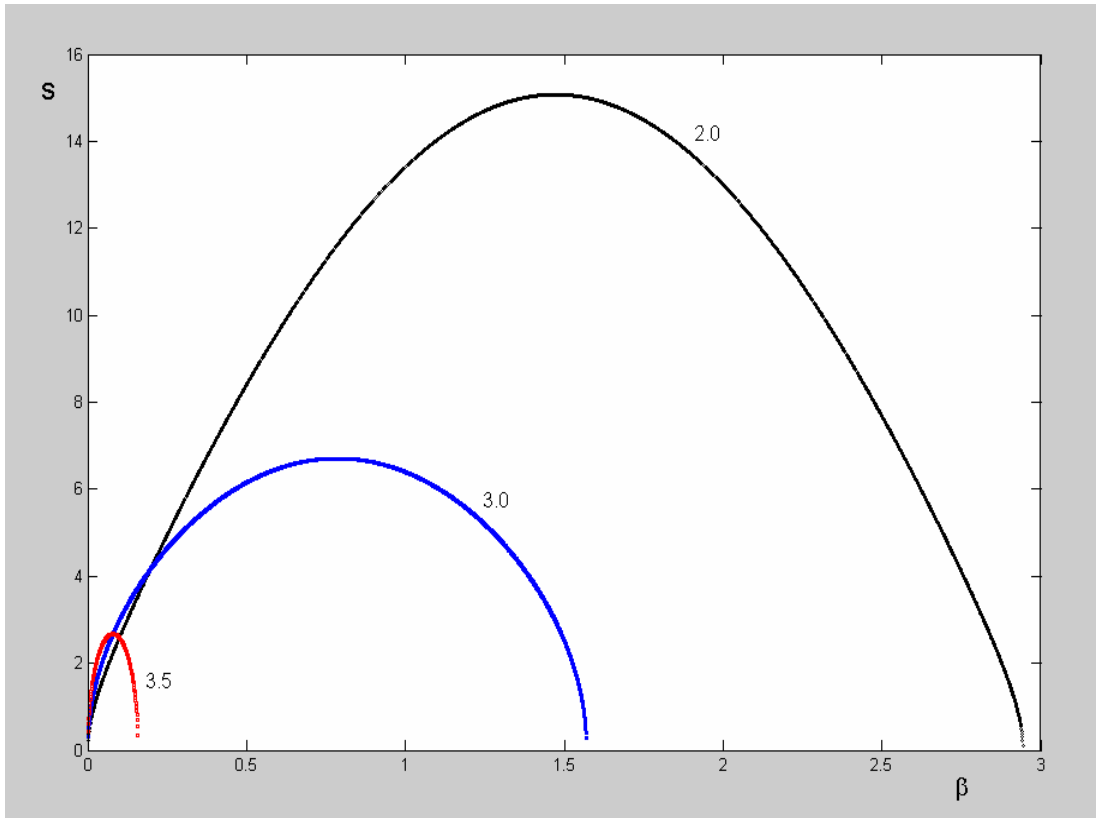


Figura 2: Curva  $s = s(\beta)$  para  $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 1.5$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = 3$  y  $k_2 = 2, 3, 3.5$ .

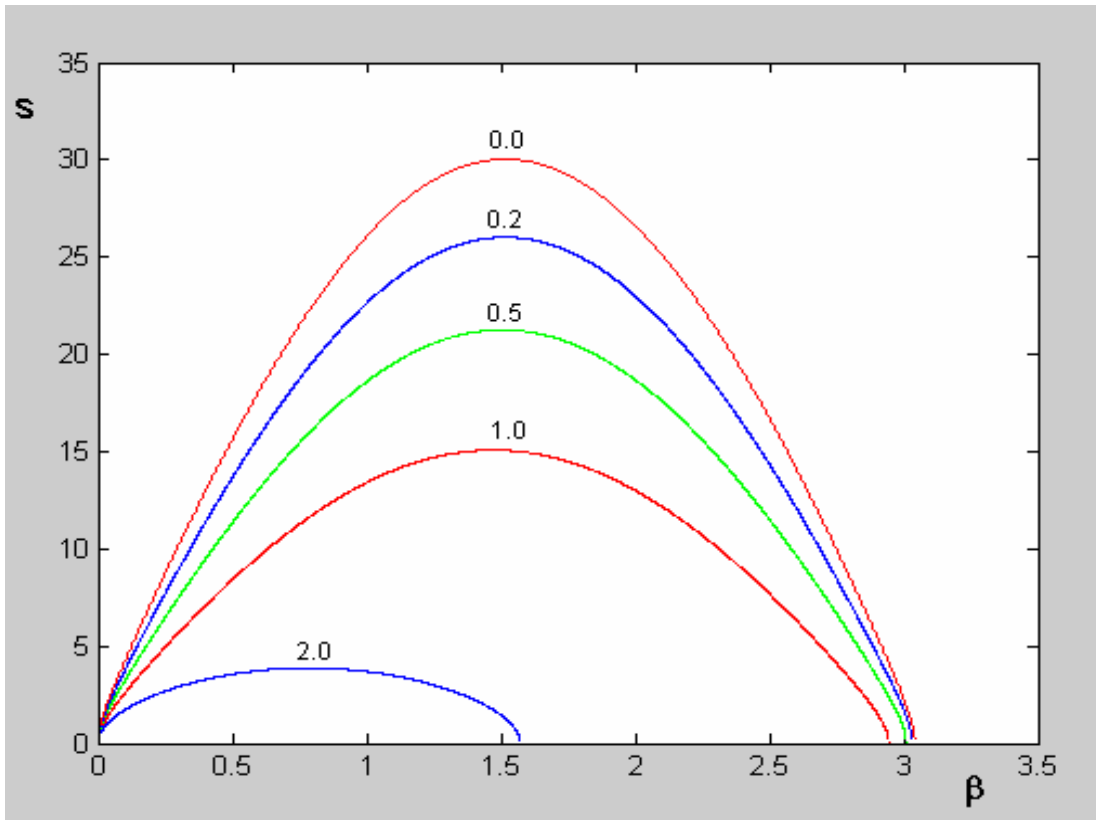


Figura 3: Curva  $s = s(\beta)$  para  $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 1.5$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_4 = 3$  y  $k_3 = 0.2, 0.5, 1, 2$ .

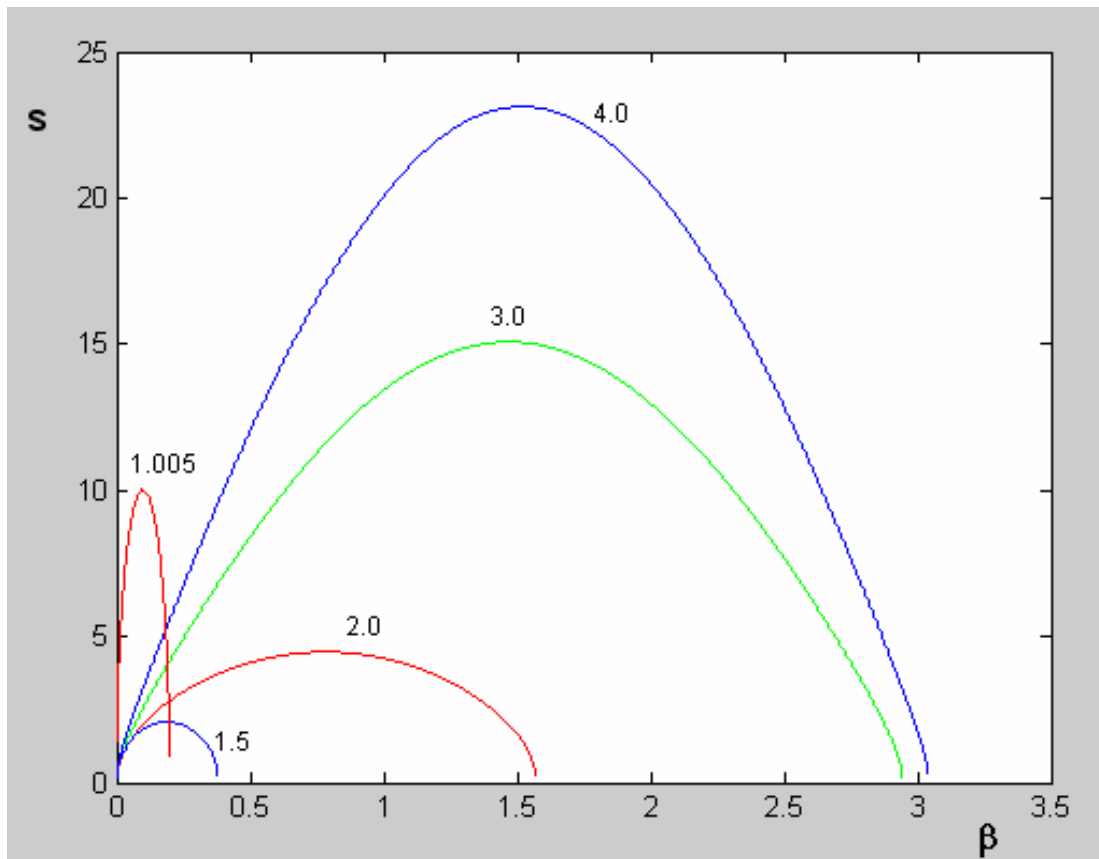


Figura 4: Curva  $s = s(\beta)$  para  $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 1.5$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 1$  y  $k_4 = 1.005, 1.5, 2, 3, 4$ .

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se realiza en esta sección una serie de integraciones numéricas con la finalidad de determinar las trayectorias del sistema de ecuaciones (11). Para tal fin se utiliza un esquema Runge-Kutta de orden 4.5 y de un paso, es decir para evaluar las variables dependientes para el tiempo “ $t$ ” sólo necesita la solución en el paso anterior “ $t - 1$ ” (Dormand and Prince, 1980).

La Figura 5 muestra la trayectoria de integración junto con la curva de puntos fijos en el plano  $(\beta, s)$  considerando que:  $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 1.7$ ,  $k_2 = 1.5$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = 2$ . Para dichos parámetros de control se tiene que  $k_1 = 1.5$  y  $\gamma_s = -0.6$ , verificando que la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $0 < \beta < \pi$  y es estable. Mediante integración numérica se encuentra la trayectoria atraída hacia un punto fijo estable perteneciente a la curva de puntos fijos.

En las Figuras 6 y 7 se indica la trayectoria y la curva de puntos fijos en el plano  $(\beta, s)$  y en el espacio  $(\beta, s, a_1)$  respectivamente para  $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 1.5$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = 3$ . En dichas graficas se verifica que  $k_1 = 2$  y  $\gamma_s = -0.4$ , por lo que la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $0 < \beta < \pi$  y es estable. De forma semejante a lo observado en la Figura 5, la trayectoria es atraída hacia un punto fijo.

Finalmente en la Figura 8 están graficadas la trayectoria y la curva de puntos fijos en el plano  $(\beta, s)$  considerando  $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 2.25$ ,  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 2.2$ ,  $k_4 = -1$ . Para dichas graficas se tiene que  $k_1 = 0.2$  y  $\gamma_s = -1.15$ , satisfaciendo que la curva  $s = s(\beta)$  existe para  $\pi < \beta < 2\pi$  y es estable. En este caso la trayectoria finaliza en el punto fijo estable  $(a_1, a_2, a_3, s, \beta) = (5.6360, 0.0, 0.0, 5.833, 3.779)$  perteneciente a la curva  $s = s(\beta)$ .

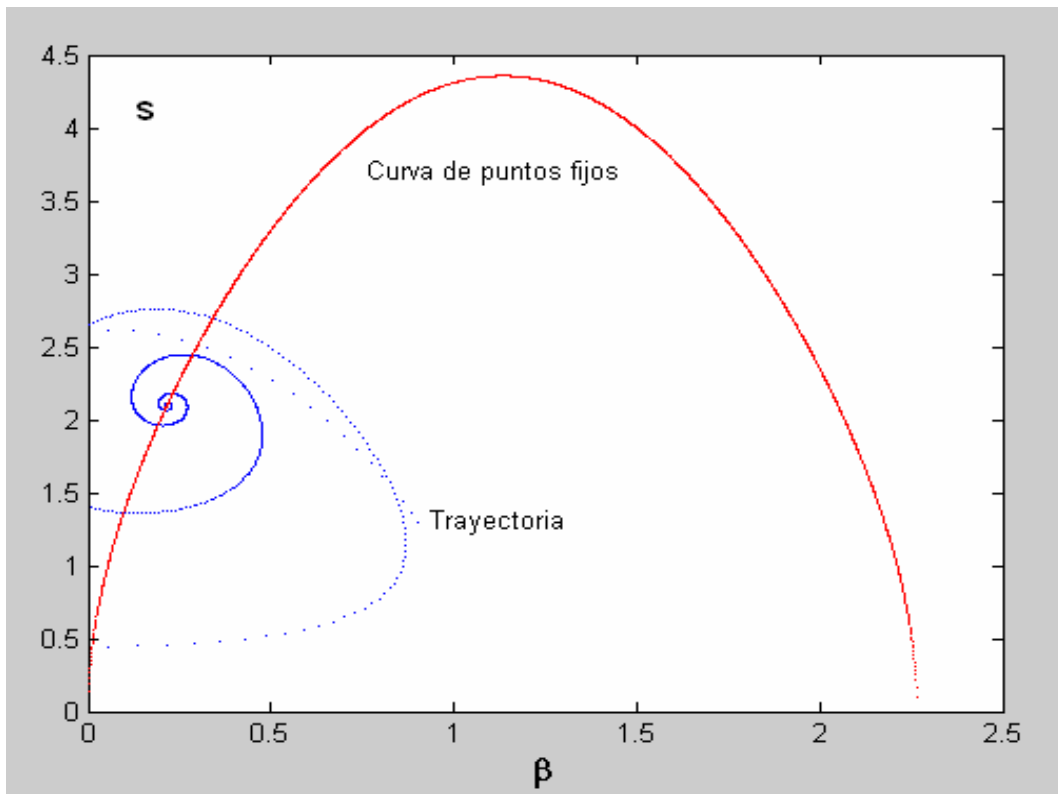


Figura 5: Trayectoria y curva  $s = s(\beta)$ ,  $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 1.7$ ,  $k_2 = 1.5$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = 2$

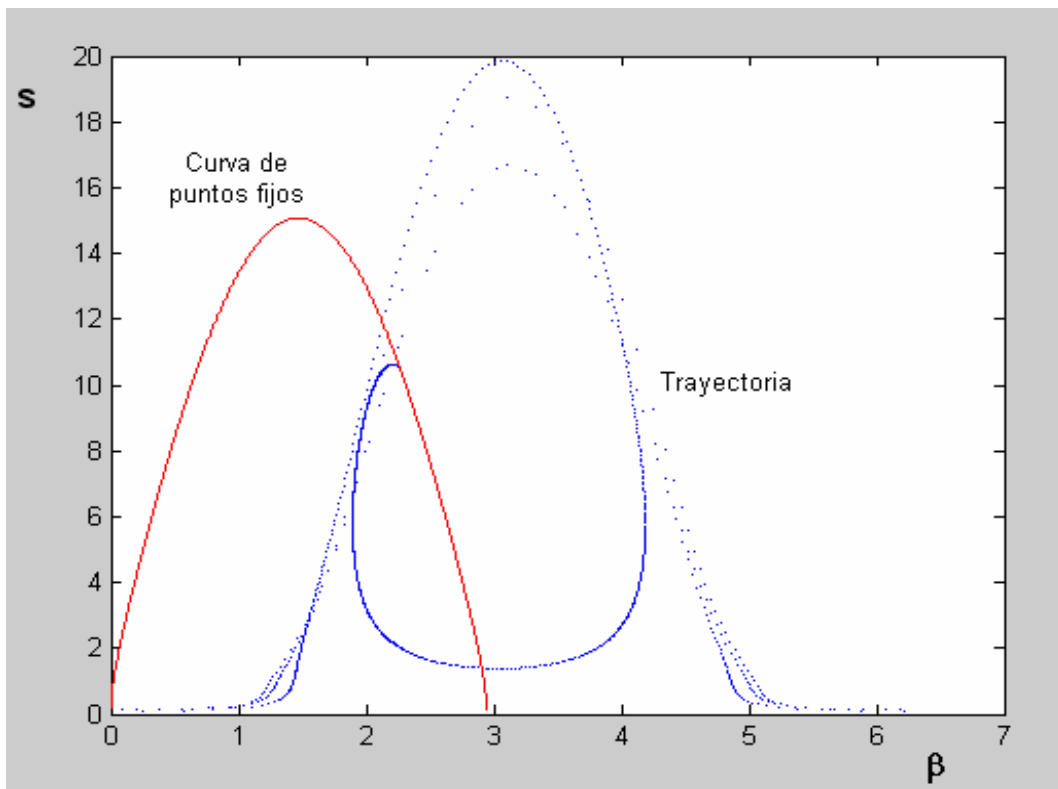


Figura 6: Trayectoria y curva  $s = s(\beta)$  en el plano  $(\beta, s)$   
 $\Gamma = 0$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\gamma_4 = 1.5$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = 3$ .

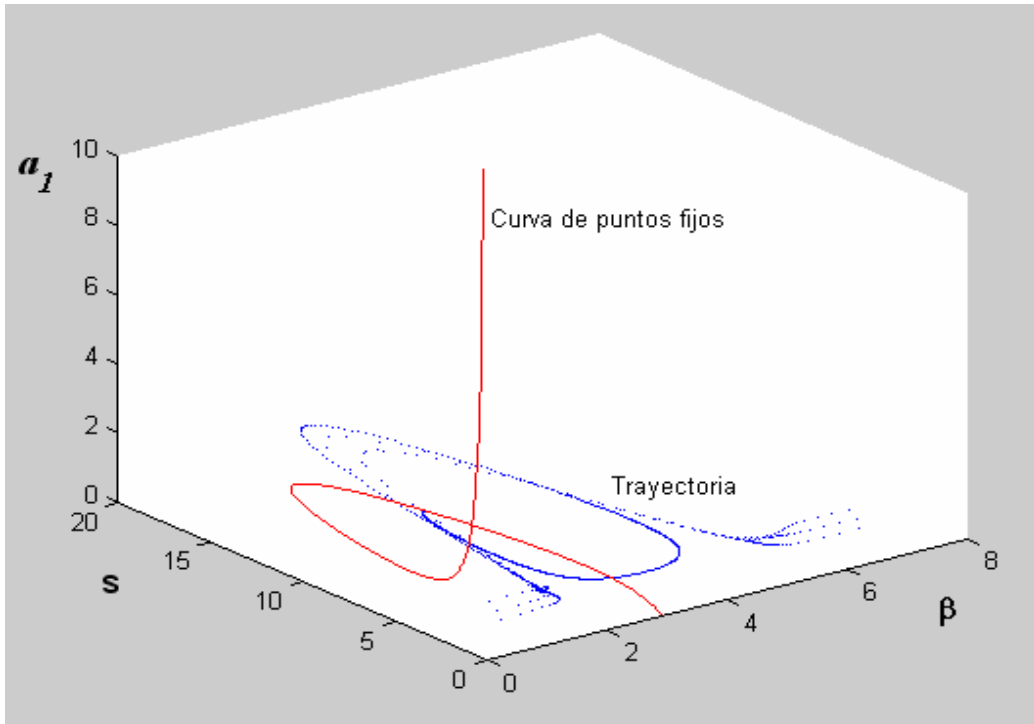


Figura 7: Trayectoria y curva  $s = s(\beta)$  en el espacio  $(a_1, s, \beta)$ .  
 $\Gamma = 0, \gamma_2 = 0.1, \gamma_3 = 1, \gamma_4 = 1.5, k_2 = 2, k_3 = 1, k_4 = 3$

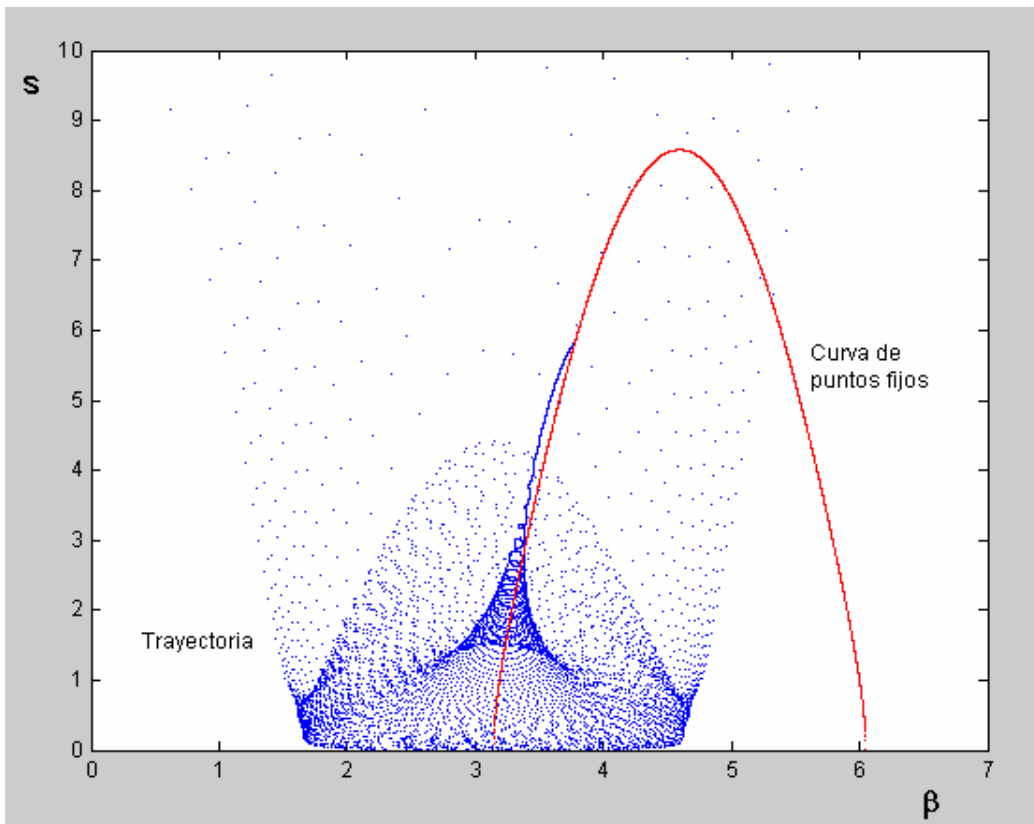


Figura 8: Trayectoria y curva  $s = s(\beta)$  en el plano  $(s, \beta)$ .  
 $\Gamma = 0, \gamma_2 = 0.1, \gamma_3 = 1, \gamma_4 = 2.25, k_2 = 1, k_3 = 2.2, k_4 = -1$

## 7 CONCLUSIONES

En este artículo la ecuación DNLS ha sido truncada para estudiar el acoplamiento coherente, débilmente no lineal y cúbico de cuatro ondas de Alfvén cerca de resonancia con la siguiente condición:  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ . La onda 1, que corresponde al vector de onda  $k_1$ , no posee amortiguamiento ( $\Gamma = 0$ ) y las tres ondas restantes 2, 3 y 4, correspondientes a  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  respectivamente, son amortiguadas ( $-\gamma_2, -\gamma_3, -\gamma_4$ ).

Debido al uso de cuatro ondas, el sistema de ecuaciones resultante posee cinco ecuaciones, generándose un flujo 5D formado por cuatro amplitudes y una fase relativa. Se encontró que para  $\Gamma = 0$  dicho flujo es disipativo. El sistema posee siete parámetros de control  $\Gamma, k_2, k_3, k_4, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ .

Se hallaron y analizaron los puntos fijos del sistema y la estabilidad de los mismos estableciéndose criterios de existencia y estabilidad en función de los parámetros de control.

Finalmente se presentaron trayectorias del sistema obtenidas mediante integración numérica utilizando un esquema Runge-Kutta de orden 4.5 y de un paso de avance en el tiempo. Los resultados numéricos y teóricos fueron concordantes.

Este estudio es un primer paso en el análisis de la interacción de cuatro ondas de Alfvén mediante el uso de la DNLS. En una segunda etapa se considerará que la onda 1 es levemente inestable ( $\Gamma \rightarrow 0^+$ ).

### Agradecimientos

Esta investigación ha recibido apoyo del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España mediante el Proyecto ESP2004-01511; de CONICET mediante el proyecto PIP No 5692; de FONCYT con el Proyecto PICTO-UNRC-2005 N° 30339 y de la Universidad Nacional de Córdoba por medio de un Proyecto SECYT.

### REFERENCIAS

- Acuna, M. and Ness, F., Standing Alfvén wave current system at Io: Voyager I Observations. *Journal of Geophysical Research*, 86: 8513, 1981.
- Bruno, R., Carbone, V., Veltri, A., Pietropaolo, E. and Bavassano, B., Identifying intermittency events in the solar wind. *Planetary and Space Science*. 49:1201-1210, 2001.
- Dawson, S. and Fontan, C., Soliton decay of nonlinear Alfvén waves: Numerical studies. *Physics of Fluids*, 31(1):83-89, 1988.
- Dobrowolny, M. and Melchioni, E., Electrodynamics aspects of the thrust tethered satellite mission. *Journal of Geophysical Research*, 98(13):761 (1993)
- Dormand, J. and Prince, P.A, family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 6:19-26, 1980.
- Drell, S., Foley, H. and Ruderman, M., Drag and propulsion of large satellites in the ionosphere: An Alfvén propulsion engine in space. *Journal of Geophysical Research*, 70:3131, 1965.
- Elaskar, S., Sanchez-Arriaga, G. and Sanmartín, J., Fully three wave model to study the hard transition to chaotic dynamics in Alfvén wave fronts. *Mecánica Computacional*, 24:2271-2288, 2005.
- Elaskar, S., Sanchez-Arriaga, G. and Sanmartín, J., Chaos in Non Linear Alfvén Waves Using the DNLS Equation, 2006 *International Symposium on Electrohydrodynamics – 2006 ISEHD*. Buenos Aires, 4<sup>th</sup>-6<sup>th</sup> December. Publicado en los Proceedings del Congreso, pp. 131-134 (ISBN 950-29-0964-X).

- Ghosh, S. and Papadopoulos, K., The onset of Alfvénic turbulence. *Physics of Fluids*, 30: 1371-1387, 1987.
- Hada, T., Kennek, C.; Buti, B. and Mjølhus, E., Chaos in driven Alfvén systems. *Physics of Fluids* B2(11):2581-2590, 1990.
- Jatenco-Pereira, V. Alfvén Waves in Astrophysical Plasmas. *Physica Scripta*. 60:113, 1995.
- Lakhina, G. and Buti, B. Coherent Radiation Mechanism for Cometary Kilometric Radiation. *Astrophysics Journal*, 327: 1020, 1988.
- Marsch E. and Liu, S., Structure Functions and Intermittency of Velocity Fluctuations in the Inner Solar Wind. *Ann. Geophys.*, 11:227, 1993.
- Mjølhus, E., On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field. *Journal of Plasma Physics* 16: 321-334, 1976.
- Mjølhus, E. and Hada, T., *Nonlinear Waves and Chaos in Space Plasmas*, edited by T. Hada and H. Matsumoto (Terrapub, Tokio), 121-169, 1997.
- Nariyuki, Y. and Hada, T. Self-generation of phase coherence in parallel Alfvén turbulence. *Earth Planets Space*, 57: 9-12, 2005.
- Nariyuki, Y. and Hada, T., Remarks on nonlinear relation among phases and frequencies in modulational instabilities of parallel propagating Alfvén waves. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 13: 425-441, 2006.
- Nayfeh, A. and Balachandran, B., *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- Passot, T. and Sulem, P., Long-Alfvén-wave trains in collisionless plasmas. I. Kinetic theory. *Physics of Plasmas* 10:3887-3905, 2003.
- Pettini, M., Nocera, L. and Vulpiani, A., Compressible MHD Turbulence: An Efficient Mechanism to Heat Stellar Coronae. *Chaos in Astrophysics*. Eds. J. Buchler et al., Dordrecht-Reidel, 1985.
- Rogister, A., Parallel Propagation of Nonlinear Low-Frequency Waves in High- $\beta$  Plasma. *Physics of Fluids*, 14(12):2733-2739, 1971.
- Russell, D. and Ott, E., Chaotic (strange) and periodic behaviour in instability saturation by the oscillating two stream instability, *Physics of Fluids*, 24:1976-1988, 1981.
- Sanmartín, J. and Estes, R., Alfvén wave far field from steady-current tethers. *Journal of Geophysical Research*, 102-A7(14):625, 1997.
- Sanmartín, J., Estes, R.; Lorenzini, E. and Elaskar, S., The Efficiency of ED-Tether Thrusters. *Journal of Spacecraft and Rocket, AIAA*. 43(3):659-666, 2005.
- Sanmartín, J.; López-Rebollal, O.; del Río, E. and Elaskar, S. Hard transition to chaotic dynamics in Alfvén wave-fronts. *Physics of Plasmas*, 11(5): 2026-2035, 2004.
- Sanchez-Arriaga, G.; Sanmartín J. and Elaskar, S. Damping models in the truncated DNLS equation. *Physics of Plasmas*. Aceptado para publicación, 2007.
- Smith, E.; Balogh, A.; Neugebauer, M. and McComas, D. Ulysses Observations of Alfvén waves in the Southern and Northern Hemispheres. *Geophysical Research Letters*, 22: 3381, 1995.
- Splanger, S.; Sheerin, J. and Payne, G. A numerical study of nonlinear Alfvén waves and solitons. *Physics of Fluids*, 28: 104-109, 1985.
- Tsurutani, B.; Smith, E.; Matsumoto, H.; Brinca, A. and Omid, N. Highly nonlinear Magnetic Pulses at Comet Giacobini-Zinner. *Geophysical Research Letter*, 17: 757, 1990.