

ENRIQUE ALARCON ALVAREZ

CATEDRATICO DE LA E.T.S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES
C/ José Gutiérrez Abascal, 2
MADRID-6

REVISION DE LAS TEORIAS MODERNAS DE PLASTICIDAD.

1. REVISION DE LOS CONCEPTOS SUBYACENTES EN PLASTICIDAD CLASICA

En plasticidad clásica se realizan una serie de hipótesis más o menos explicitadas. Entre ellas conviene comentar las siguientes:

- a) Se supone que el comportamiento del material depende de la historia previa. Ello implica el tratamiento incremental de las ecuaciones.
- b) Se supone la posibilidad de expresar las deformaciones en la forma:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad \dots \quad (1.1)$$

donde los superíndices e,p indican comportamiento elástico y plástico respectivamente.

- c) Se supone la posibilidad de respuesta puramente elástica y por tanto la existencia de un dominio elástico y una frontera o superficie de plastificación.

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, \lambda) \quad \dots \quad (1.2)$$

donde $\underline{\sigma}$ es el estado de tensiones, $\underline{\alpha}$ un tensor representativo de la parte recuperable de la rigidización y λ un parámetro escalar característico de la rigidización im posible de recuperar con, por ejemplo, una carga inversa.

d) La ley de comportamiento se refleja en una relación

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{A}(\dot{\underline{\sigma}}) \quad \dots \quad (1.3)$$

entre incrementos de tensión y deformación.

d.1) Para que (1.3) sea independiente del tiempo se supone que A es una función homogénea de orden uno de $\dot{\underline{\sigma}}$ y, generalmente, que la relación es lineal.

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \underline{A} \dot{\underline{\sigma}}$$

d.2) Se supone que existe continuidad en el paso de los incrementos de tensión que conducen desde la frontera al dominio elástico (descarga) y los que suponen deformación plástica (carga).

Para ver las implicaciones de estas hipótesis comparemos los casos siguientes:

$$\text{Descarga} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\epsilon}}_1 = \underline{A}_1 \dot{\underline{\sigma}} \\ \underline{A}_1 = \underline{A}^e \end{array} \right. \quad (1.4) \quad \text{(Ley elástica)}$$

$$\text{Carga} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{\epsilon}}_2 = \underline{A}_2 \dot{\underline{\sigma}} \\ \underline{A}_2 = \underline{A}^e + \underline{A}^p \end{array} \right. \quad (1.5) \quad \text{(Ley elastoplástica)}$$

Puesto que (1.3) es lineal el principio de superposición permite escribir (1.4) y (1.5) en sus componentes según la normal y la tangente a la superficie de plastificación (1.2):

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \underline{A}_1 \dot{\sigma}_n + \underline{A}_1 \dot{\sigma}_t \\ \dot{\epsilon}_2 &= \underline{A}_2 \dot{\sigma}_n + \underline{A}_2 \dot{\sigma}_t \end{aligned} \quad (1.6)$$

En el caso de transición (carga neutra):

$$\dot{\sigma}_{\tilde{m}} = 0 \quad (1.7)$$

y (1.6) sería:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\tilde{1}} &= A_{\tilde{1}} \dot{\sigma}_{\tilde{t}} \\ \dot{\epsilon}_{\tilde{2}} &= A_{\tilde{2}} \dot{\sigma}_{\tilde{t}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

que deben ser iguales según las hipótesis (d.2) por lo que sustituyendo en (1.6):

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\tilde{2}} &= A_{\tilde{2}} \dot{\sigma}_{\tilde{m}} + A_{\tilde{1}} \dot{\sigma}_{\tilde{t}} = A_{\tilde{2}} \dot{\sigma}_{\tilde{m}} + (\dot{\epsilon}_{\tilde{1}} - A_{\tilde{1}} \dot{\sigma}_{\tilde{m}}) = \\ &= \dot{\epsilon}_{\tilde{1}} + (A_{\tilde{2}} - A_{\tilde{1}}) \dot{\sigma}_{\tilde{m}} = \dot{\epsilon}_{\tilde{1}} + A^P \dot{\sigma}_{\tilde{m}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

(1.9) puede escribirse, obviamente, como:

$$\dot{\epsilon}_{\tilde{2}} = A^e \dot{\sigma}_{\tilde{t}} + A^P \tilde{n} (\dot{\sigma}_{\tilde{t}} \cdot \tilde{n}) \quad (1.10)$$

donde \tilde{n} es la normal a f en el punto en estudio.

Comparando (1.10) con (1.1) se obtiene la ley de comportamiento:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\tilde{e}} &= A^e \dot{\sigma}_{\tilde{t}} \\ \dot{\epsilon}_{\tilde{p}} &= \frac{1}{H'} \tilde{m} (\dot{\sigma}_{\tilde{t}} \cdot \tilde{n}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde se ha hecho:

$$A^P \tilde{n} = \frac{1}{H'} \tilde{m} \quad (1.12)$$

H' es el llamado módulo plástico y \underline{m} no tiene que coincidir con \underline{n} . Cuando esto sucede $\frac{1}{H'}$ es un autovalor de \underline{A}^P .

e) La plasticidad clásica supone:

$$\underline{m} = \underline{n} \quad (1.13)$$

y en este sentido se dice que la regla de plastificación:

$$\underline{\dot{\epsilon}}^P = \frac{1}{H'} \underline{n} (\underline{\dot{\sigma}} \cdot \underline{n}) \quad (1.14)$$

es asociada (a la superficie de plastificación).

Multiplicando (1.14) por sí misma se obtiene el significado físico de H' :

$$H' = \frac{\underline{\dot{\sigma}} \cdot \underline{n}}{\sqrt{\underline{\dot{\epsilon}}^P \cdot \underline{\dot{\epsilon}}^P}} = \frac{d\sigma_{II}}{d\epsilon_{II}^P} \quad (1.15)$$

es decir, H' es proporcional al módulo tangente de la curva $(\sigma - \epsilon^P)$ en el ensayo de tracción.

f) Por añadidura la evolución de H' se supone bien isótropa, bien cinemática para tener en cuenta el efecto BAUSCHINGER.

(1.2) se pone en la forma:

$$f = F(\underline{\sigma} - \underline{\alpha}) - k^n = 0 \quad (1.16)$$

donde $\underline{\alpha}$ representa la traslación de f y k su tamaño.

Si la regla de traslación se pone en la forma:

$$\underline{\dot{\alpha}} = c \underline{\dot{\epsilon}}^P \quad (1.17)$$

la expresión de H' es:

$$H' = C + \frac{\partial k^n}{\partial \lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}}} \quad \dots (1.18)$$

donde λ :

$$\lambda = \int \dot{\epsilon}_{eq} = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2} \quad \dots (1.19)$$

$$k = k(\lambda)$$

En el caso isótropo:

$$C = 0 \quad (1.20)$$

mientras en el caso cinemático:

$$k = cte$$

$$H' = C \quad (1.21)$$

La limitación más importante de los modelos se refiere al caso de carga cíclica (fig.1). (1.20) predice respuesta elástica después de la primera descarga y (1.21) un ciclo de histéresis estable.

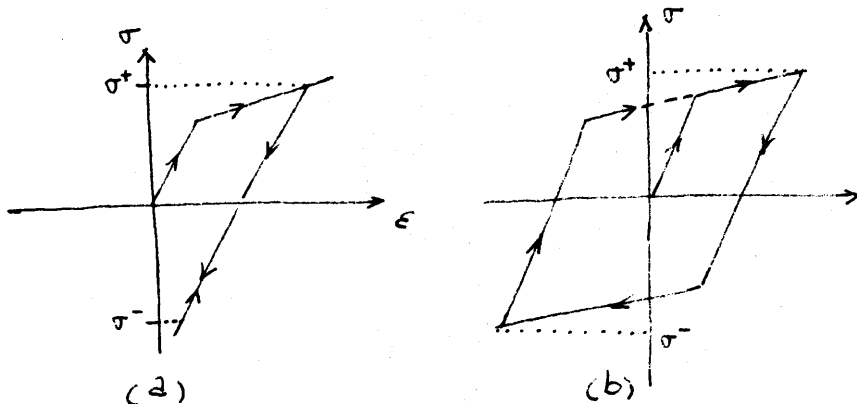


Fig. 1

2. CAMPO DE MODULOS PLASTICOS DE RIGIDIZACION

La idea de definir el campo de módulos plásticos de rigidización fue presentada por MROZ hace ya algunos años. En sustancia se parte de la constatación de que experimentalmente es imposible definir un límite elástico único ya que en general se utiliza la definición convencional correspondiente a una deformación residual plástica dada.

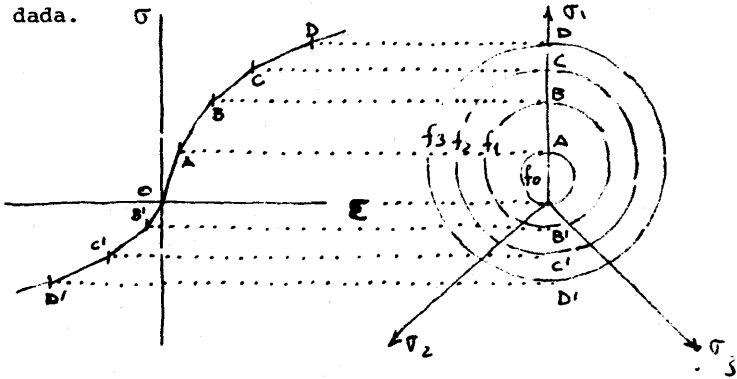


Fig. 2

Para acomodar las diferentes pendientes plásticas se definen una serie de superficies anidadas $f_0, f_1, \dots, f_m, \dots, f_p$ cada una asociada a un valor H'_0, H'_1, \dots, H'_p .

Las superficies pueden trasladarse sin cortarse y en ciertas teorías también pueden cambiar de tamaño según la deformación plástica acumulada. La superficie exterior es una superficie de rotura y la interior define el dominio elástico ($H'_0 = \infty$).

En el caso de superficies de Von Mises la ley de comportamiento resulta ser de la forma:

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + \frac{3}{2H'_m} \frac{(\sigma_{kk} - x_{kk}^m)}{k_m} \frac{d\sigma_{kk}}{k_m} (s_{ij} - x_{ij}^m) \dots (1.22)$$

donde:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk}$$

α_{kl}^{m} centro de la superficie m activada por el punto de carga.

k_m^2 tamaño de la superficie m activada por el punto de carga.

La ley de traslación es del tipo cinemático y el vector instantáneo de dirección se obtiene uniendo el punto \mathcal{Q} actuante en la superficie m con el punto de la superficie m+1 que tenga la misma normal.

De esta forma:

$$\dot{\alpha}_{ij} = d\mu (s_{ij}^{m+1} - s_{ij}^m) \quad \dots (1.23)$$

y

$$d\mu = \frac{\frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij}^m) ds_{ij} - k_m dk_m}{\frac{p^{m+1}}{k} \frac{p^m}{k} - \frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij}^{m+1}) (s_{ij} - \alpha_{ij}^m)} \quad \dots (1.24)$$

3. LA TEORIA DE CAMBRIDGE

Una de las aportaciones más interesantes de las modernas teorías es la diferenciación entre plastificación y rotura así como el reconocimiento de que las superficies representativas de ambos estados pueden ser completamente diferentes en forma.

Trabajando sobre muestras de arcilla saturada normalmente consolidada, el grupo dirigido por ROSCOE en la universidad de Cambridge produjo un criterio como el de la figura 3.

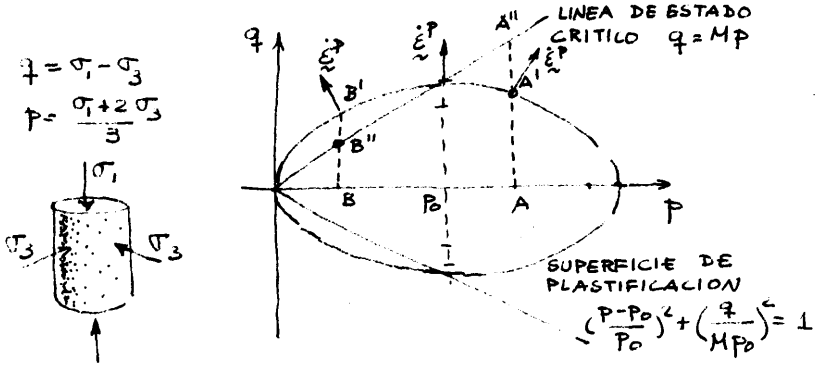


Fig. 3

La elipse es una superficie de plastificación y las dos líneas representan estados últimos en que la deformación se realiza sin cambio de volumen plástico. (Obsérvese que en la intersección $\dot{\epsilon}^P$ es vertical). Es curioso observar también que el modelo predice diferentes comportamientos en el interior y en el exterior de las líneas de estado crítico según la componente sobre p de $\dot{\epsilon}^P$. En un caso el volumen disminuye, el suelo se rigidiza y la superficie de plastificación aumenta de tamaño, mientras que en el contrario el volumen aumenta el suelo se reblandece y la superficie de plastificación disminuye.

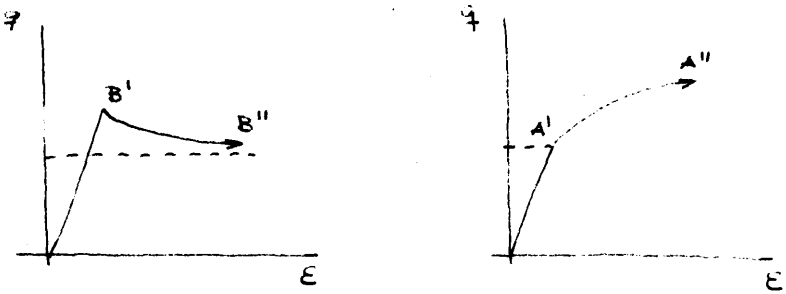
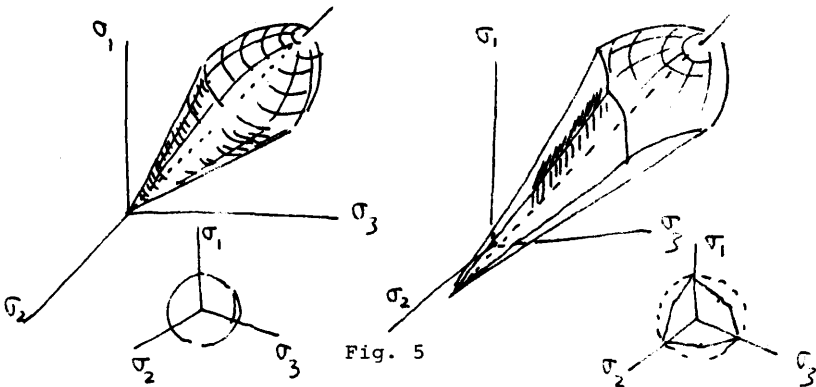


Fig. 4

Dos trayectorias típicas de ese comportamiento pueden verse en la fig. 4.

La generalización a tres dimensiones se obtiene sustituyendo q por $\sqrt{3J_2}$ donde J_2 es el segundo invariante del tensor desviador e imaginando que la línea de estado crítico corresponde a una superficie clásica como VON MISES generalizado o MOHR-COULOMB (fig. 5).



4. MODELOS DE INTERPOLACION

Definir una superficie de estado límite último y una serie de superficies de plastificación puede conseguirse también mediante reglas de interpolación que definen una familia continua de estas últimas.

Bastaría conocer H'_p y definir por ejemplo:

$$H'_m = H'_p \left(\frac{p}{m} \right)^\alpha$$

$$m = 0, 1, \dots, p \quad (1.25)$$

donde α es una constante característica del material en estudio. Pero en lugar de materializar dichas superficies es igualmente sencillo definir tan solo dos superficies: f_0 delimitando el dominio elástico y f_p definiendo el estado de rotura f_p . f_0 está dotada de una rigidez cinemática mientras que f_p varía de tamaño en forma isótropa.

Definiendo una distancia δ entre ambas (fig. 6) en conjunción con

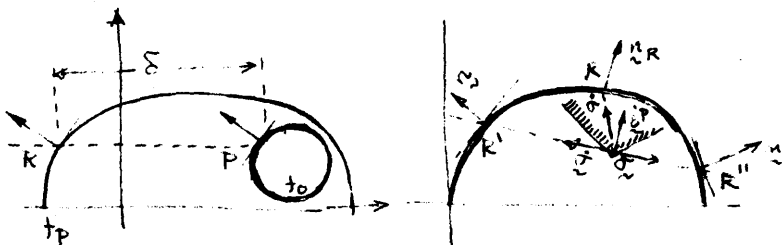


Fig. 6

las ideas anteriores es posible calcular los diferentes módulos plásticos:

$$H' = H'_R + \left[\frac{\int_{f_p} \sigma \cdot y \cdot dA}{1 - \left(\frac{\delta}{R} \right)^2} \right] \cdot x \tag{1.26}$$

y conseguir los mismos resultados que en el caso anterior.

Es posible incluso deducir el tamaño de f_o a cero (MROZ, DAFALIAS, etc) en cuyo caso el punto conjugado R se supone definido por la intersección de $\vec{\sigma}$ con f_p y:

$$\vec{\epsilon}^P = \frac{1}{H'} \cdot \sigma_K \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}_K) \tag{1.27}$$

Un hecho curioso es la semejanza que en ciertas situaciones se presenta con el efecto esquina de algunas teorías de plasticidad. Suponiendo por ejemplo que $\vec{\sigma}$ puede tener direcciones comprendidas en el semiplano $R' R''$, $\vec{\epsilon}^P$ queda confinado en la región punteada de la fig. 6b.

5. CONCLUSIONES

Las nuevas teorías de plasticidad incorporan refinamientos que permiten simular comportamientos reales muy complejos. Su uso con los métodos numéricos en boga y la mejora en rapidez de cálculo de los actuales ordenadores, hace que sean abordables en la actualidad problemas irresolubles hasta hace pocos años.

El tema está en ebullición y conviene estar atentos a su desarrollo que ya está produciendo resultados espectaculares.