

## ELEMENTOS DE CONTORNO P-ADAPTABLES EN PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES.

M. CERROLAZA (\*)  
E. ALARCON (\*\*)

(\*) Universidad Central de Venezuela  
(\*\*) Universidad Politécnica de Madrid

### RESUMEN

Se presentan en este artículo los resultados obtenidos con la aplicación de la filosofía de p-convergencia a problemas tridimensionales controlados por la ecuación de Laplace. Se pretende con ello sintetizar las ventajas inherentes a la discretización de contorno y a la jerarquización de las funciones de interpolación.

### INTRODUCCION

El método de los elementos de contorno (MEC) ha provocado numerosas investigaciones y aplicaciones en los últimos años, aprovechando el atractivo que supone la reducción de dimensiones en el dominio a discretizar. Esta ventaja es especialmente interesante en problemas tridimensionales donde la discretización se reduce al contorno. Por otro lado la técnica de elementos adaptables basada en la jerarquización de funciones ha dado muy buenos resultados en el método de elementos finitos (MEF) ya que compatibiliza las ventajas derivadas de funciones semiglobales y el ajuste a trozos.

Artículos previos (1, 2, 3) han demostrado la posibilidad de utilizar la misma filosofía en el MEC, lo que ha abierto una interesante línea de investigación sobre nuevos métodos de implementación y criterios de convergencia. Al mismo tiempo, el nuevo planteamiento ha permitido reconsiderar la congruencia del proceso global típico de los MEC isoparamétricos.

En este artículo se extienden las investigaciones anteriores a los problemas tridimensionales y se reflexiona sobre la aplicación de los criterios de con-

vergencia expuestos en otro lugar (4). Como puede observarse en los ejemplos los resultados son muy prometedores y despejan en campo para la aplicación del método a temas más complicados.

#### JERARQUIA DE FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

El procedimiento comienza con la elección del soporte de las funciones de interpolación. El criterio consiste en escoger los elementos del mayor tamaño compatible con las aristas y vértices, así como con las discontinuidades de las condiciones de contorno. Con ello se reduce a un mínimo el número de elementos y, por tanto, las operaciones a realizar.

A continuación, se define la jerarquía de funciones de interpolación que va a ser utilizada para refinar la aproximación de cada elemento. En trabajos anteriores se ha recurrido a la llamada familia Peano pero, - tras observar algunos comportamientos anómalos cuando crece el grado del polinomio interpolante, se han utilizado, a partir del segundo grado, los polinomios de Legendre:

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^p}{d\xi^p} \left[ (\xi^2 - 1)^p \right] \quad (1)$$

combinados entre sí y con las funciones lineales clásicas mediante los oportunos productos tensoriales.

Estos últimos producen funciones tipo burbuja, cuyo soporte es un único elemento, con valores nulos en todas las aristas, pero también, funciones que afectan a los elementos adyacentes. Si se pretende mantener la compatibilidad interelemental el soporte de estas últimas funciones son los dos elementos vecinos a cada arista. Ello implica que sea necesaria una cuidada estrategia en la programación del sistema de refinamiento pues se van presentando secuencialmente casos en los que interesa trabajar por elementos y por aristas.

#### PUNTOS DE COLOCACION

Como es sabido las ecuaciones del MEC se producen mediante la colocación de la fórmula de representación básica en nudos seleccionados que no tienen porqué corresponder a nudos de la discretización. En el caso particular del MEC isoparamétrico se usa la misma familia de nudos para definir la geometría, las condiciones de contorno, las funciones de interpolación y los puntos de colocación. Ello implica un automatismo muy conveniente pero también una gran rigidez para adaptarse a unas situaciones locales especiales, en cuyo caso

se penaliza tanto la discretización como el número de ecuaciones.

Por el contrario en el MEC p-adaptable no existe ningún criterio a priori para la selección de nudos. La única idea se refiere a la colocación en los puntos donde las funciones tomen su valor máximo para reforzar el carácter dominante de los correspondientes elementos en las matrices de influencia y la separación máxima entre puntos de colocación para evitar la semejanza de ecuaciones y el consiguiente mal condicionamiento del sistema. Siguiendo este criterio, el uso de las funciones lineales se hace corresponder con la colocación en los vértices, las funciones impares con colocación en las aristas y las pares con colocación en el interior de los elementos, a intervalos regulares para ir manteniendo la simetría.

No se ha realizado todavía ningún estudio sobre la importancia que puede tener la elección del punto de colocación ni sobre su situación óptima en el contorno o fuera de él.

#### REPRESENTACION DE LA GEOMETRIA Y CONDICIONES DEL CONTORNO.

En los métodos p-adaptables el proceso de representación tanto de la geometría como de las condiciones de contorno es completamente independiente del resto del proceso. Ello permite la utilización de preprocesadores que ajusten, de la mejor manera posible, los datos, con lo que se disminuye una de las causas de error inherentes a las discretizaciones demasiado forzadas.

En nuestro caso se ha optado por utilizar una representación mediante funciones "serendipity" tanto de las facetas del elemento como de las condiciones de contorno, ajustando el grado independientemente de acuerdo con la dificultad de representación de cada una de ellas. El correspondiente preprocesador va acompañado de un refinador automático de malla lo que permite que la geometría y la distribución de potenciales y flujos sean congruentes entre sí, pese a la potencial diferencia en el grado de aproximación.

Se recurre también en esta etapa a la identificación de vértices y aristas localmente resolubles, lo que sucede con ciertas condiciones de contorno. Estos lugares se eliminan del proceso posterior, lo que es del mayor interés para reducir el número de operaciones del proceso general, y se incorporan al conjunto de datos previamente almacenados.

## PROCESO DE REFINAMIENTO DE LA SOLUCION

Una vez especificadas la geometría y las condiciones de contorno se obtiene una primera solución del problema utilizando funciones de interpolación lineales para todas las variables desconocidas, lo que, en muchos casos, produce ya una solución aceptable. En general, sin embargo, hay lugares en los que se precisa mejorar la aproximación y, en ellos, se añaden secuencialmente polinomios de la familia de Legendre descrita en el apartado 2. La identificación de los lugares en los que se precisa el refinamiento se realiza mediante el cálculo de los indicadores que se describen en los apartados siguientes (referencia 5).

### Introducción

El desarrollo se realiza para problemas de potencial, donde la fórmula de representación toma el aspecto:

$$C \phi(P) + \int_{\partial\Omega} \phi(Q) q^*(P,Q) = \int_{\partial\Omega} q(Q) \phi^*(P,Q) \quad (1)$$

donde  $\phi^*$  y  $q^*$  son los campos de potencial y flujo, respectivamente, generados en un punto Q del contorno al aplicar la solución fundamental de la ecuación de Laplace en un punto P del contorno. C es una constante relacionada con las características de la geometría del contorno en el punto P.

El contorno  $\partial\Omega$  se considera, en general, dividido en dos partes  $\partial\Omega_1$  y  $\partial\Omega_2$  según sean datos las condiciones de potencial o flujo (Condiciones tipo Dirichlet o tipo Neumann). Es decir:

$$\begin{array}{ll} \text{En } \partial\Omega_1 & \phi = \phi^0 \quad q = ? \\ \text{En } \partial\Omega_2 & \phi = ? \quad q = q^0 \end{array} \quad (2)$$

Explicitando estas condiciones la relación 1 se escribe:

$$\begin{aligned} C \phi(P) + \int_{\partial\Omega_2} \phi(Q) \cdot q^*(P,Q) - \int_{\partial\Omega_1} q(Q) \cdot \phi^*(P,Q) &= \\ &= - \int_{\partial\Omega_1} \phi^0(Q) \cdot q^*(P,Q) + \int_{\partial\Omega_2} q^0(Q) \cdot \phi^*(P,Q) \end{aligned} \quad (3)$$

que puede escribirse en forma condensada como:

$$L_1 q(P) + L_2 \phi(P) + p(P) = 0 \quad (4)$$

si se acepta la siguiente

DEFINICION 1

$$L_1 f(P) = - \int_{\partial\Omega_1} f(Q) \phi^*(P, Q)$$

$$L_2 f(P) = C f(P) + \int_{\partial\Omega_2} f(Q) q^*(P, Q)$$

$$p(P) = \int_{\partial\Omega_1} f^0(Q) q^*(P, Q) - \int_{\partial\Omega_2} \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_Q \phi^*(P, Q) \quad (5)$$

Aproximación

Flujo y potencial incógnitas son aproximadas en los contornos  $\partial\Omega_2$  y  $\partial\Omega_1$  respectivamente mediante expresiones del tipo:

$$\begin{aligned} \phi \sim \hat{\phi} &= a_1 N_1 + a_2 N_2 + \dots + a_n N_n & \text{en } \partial\Omega_2 \\ q \sim \hat{q} &= b_1 N_1 + b_2 N_2 + \dots + b_n N_n & \text{en } \partial\Omega_1 \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $a_j$  y  $b_j$  son parámetros a determinar, mientras - las  $N_j$  son individuos de una familia jerarquizada de funciones.

Con esta aproximación se cometen los errores:

$$\begin{aligned} e_1 &= q - \hat{q} & \text{en } \partial\Omega_1 & \quad e_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega_2 \\ e_2 &= \phi - \hat{\phi} & \text{en } \partial\Omega_2 & \quad e_2 = 0 & \text{en } \partial\Omega_1 \end{aligned} \quad (7)$$

y se define el residuo  $r$  como el resultado de sustituir en (4) la aproximación (6), es decir:

$$r = L_1 \hat{q} + L_2 \hat{\phi} + p \quad (8)$$

Debe observarse que en los puntos de colocación el residuo es cero y que, mediante la aplicación de la - regla (8), puede calcularse en cualquier otro punto - del contorno.

Es evidente que de (7) se deduce:

$$\begin{aligned} L_1 \hat{q} &= L_1 q - L_1 e_1 \\ L_2 \hat{\phi} &= L_2 \phi - L_2 e_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Así pues, el residuo se puede expresar como:

$$r = L_1 q + L_2 \phi + p - (L_1 e_1 + L_2 e_2) \quad (10)$$

y, teniendo en cuenta (4):

$$r = - (L_1 e_1 + L_2 e_2) \quad (11)$$

o bien, reordenando:

$$L_1 e_1 + L_2 e_2 + r = 0 \quad (12)$$

que hace aparecer los residuos como las "cargas" que equilibran los errores.

Según se desprende de (7):

$$\text{En } \partial\Omega_1: \quad r = - L_1 e_1 = r_1 \quad (13)$$

$$\text{En } \partial\Omega_2: \quad r = - L_2 e_2 = r_2$$

### Error energético

Aunque el método de los elementos de contorno es un método de colocación se puede utilizar una técnica semejante a la de Galerkin para establecer un error energético. Se define así:

#### DEFINICION 2

$$\begin{aligned} ||e||_E^2 &= \int_{\partial\Omega_1} e_1 (L_1 e_1) + \int_{\partial\Omega_2} e_2 (L_2 e_2) = \\ &= - \int_{\partial\Omega_1} e_1 r_1 - \int_{\partial\Omega_2} e_2 r_2 \end{aligned} \quad (14)$$

que conviene explicitar para comprender su complejidad:

$$\begin{aligned} ||e||_E^2 &= \int_{\partial\Omega_1} e_1(P) \left[ - \int_{\partial\Omega_1} e_1(Q) \phi^*(P,Q) \right] + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_2} \left[ e_2(P) \right]^2 + \\ &+ \int_{\partial\Omega_2} e_2(P) \left[ \int_{\partial\Omega_2} e_2(Q) \cdot q^*(P,Q) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

donde el término  $\frac{1}{2}$  del segundo sumando (en el segundo miembro) surge al integrar sobre trozos de elementos con tangente continua.

Una interesante propiedad de la definición 2 se obtiene considerando que el flujo es exacto y se mejora el potencial (el potencial es exacto y se mejora el flujo) mediante la adición de una nueva función. Es decir:

$$\phi \sim \hat{\phi} = \hat{\phi} + a_{n+1} N_{n+1} \quad (16)$$

$$(q \sim \hat{q} = \hat{q} + b_{m+1} N_{m+1})$$

de modo que:

$$e_2 = \phi - \hat{\phi} \sim a_{n+1} N_{n+1} \quad (17)$$

$$(e_1 = q - \hat{q} \sim b_{m+1} N_{m+1})$$

con ello, sustituyendo en (14):

$$||e||_E^2 = - a_{n+1} \int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} r_2 \quad (18)$$

$$(||e||_E^2 = - b_{m+1} \int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} r_1)$$

Es decir, se ve que el error energético está relacionado con la proyección del residuo sobre la nueva función de interpolación. Este error sirve pues para indicar hasta qué punto es útil la introducción de la nueva función pero no para estimar el valor del residuo. (Bastaría que  $N_{m+1}$  y  $r_1$  fuesen ortogonales para anular  $||e||_E$  por ejemplo).

Con los datos anteriores se puede establecer una expresión del error en función del residuo, estimado a partir de la hipótesis (16). Así, utilizando (17) y (13):

$$L_2 e_2 = a_{n+1} L_2 N_{n+1} ; r_2 = - a_{n+1} L_2 N_{n+1} \quad (19)$$

$$(L_1 e_1 = b_{m+1} L_1 N_{m+1} ; r_1 = - b_{m+1} L_1 N_{m+1})$$

de modo que, sustituyendo en (18) se obtiene:

$$||e||_E^2 = a_{n+1}^2 \int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} L_2 N_{n+1} \quad (20)$$

$$(||e||_E^2 = b_{m+1}^2 \int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} L_1 N_{m+1})$$

Si ahora se compara la expresión (20) con la (18) se observa que:

$$a_{n+1} = \frac{\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} r_2}{\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} L_2 N_{n+1}} \quad (21)$$

$$(b_{n+1} = \frac{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} r_1}{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} L N_{m+1}})$$

y, substituyendo de nuevo en (20) se llega a la expresión deseada para el indicador:

$$\|e\|_E^2 = \frac{\left[ \int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} r_2 \right]^2}{\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} L_2 N_{n+1}} \quad (22)$$

$$(\|e\|_E^2 = \frac{\left[ \int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} r_1 \right]^2}{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} L N_{m+1}})$$

### Indicador generalizado de Peano

La ecuación (22) se corresponde estrechamente con el criterio de indicador establecido por Peano para el Método de los elementos finitos adaptables. Para verlo conviene ponerlo en términos de los elementos de la matriz del sistema:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} \quad (23)$$

a que se reduce el método de los elementos de contorno. Para mayor facilidad supongamos que se trata de un problema de Dirichlet puro, de modo que el vector de incógnitas  $x$  contiene los coeficientes  $b_j$  de la ecuación 6.

Cuando se añade una nueva ecuación  $m+1$ , resultado de incrementar el orden de aproximación en un elemento, la nueva ecuación obtenida al colocar la solución fun-



damental en el punto  $P_{m+1}$  es:

$$K_{m+1,1}b_1 + K_{m+1,2}b_2 + \dots + K_{m+1,m}b_m + K_{m+1,m+1}b_{m+1} + P_{m+1} = 0 \quad (24)$$

de donde se puede despejar:

$$b_{m+1} = - \frac{\sum_{j=1}^m K_{m+1,j} x_j + P_{m+1}}{K_{m+1,m+1}} \quad (25)$$

y, por sustitución en (20), se obtiene la fórmula de Peano generalizada:

$$\|e\|_E^2 = \frac{(\sum_{j=1}^m K_{m+1,j} x_j + P_{m+1})^2}{K_{m+1,m+1}} \frac{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} L_1 N_{m+1}}{K_{m+1,m+1}} \quad (26)$$

En el caso de elementos finitos el segundo factor del segundo miembro es igual a la unidad, cosa que no sucede en el método de los elementos de contorno, donde la expresión es más complicada.

En efecto:

$$\frac{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} L_1 N_{m+1} - \int_{\partial\Omega_1} N_{m+1}(P) \int_{\partial\Omega_1} N_{m+1}(Q) \phi^*(P,Q)}{K_{m+1,m+1}} = \frac{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1}(Q) \phi^*(P_{m+1},Q)}{\quad} \quad (27)$$

Obsérvese que, mientras en el numerador tanto P como Q son puntos móviles para la integración, en el denominador  $P_{m+1}$  es el punto utilizado para establecer la ecuación y por tanto tan sólo Q es móvil en el elemento. En cualquier caso las integraciones sólo se realizan en el elemento refinado.

### Estimadores

Para cada solución parcial se precisa conocer un estimador de la bondad de la solución. La fijación de un buen estimador global es todavía un problema abierto. Existe no obstante un caso particular en que es posible obtener una expresión sencilla del estimador. Así en los casos tipo Neumann:

$$L_2 e_2 = \int_{\partial\Omega_2} e_2(Q) q^*(P,Q) + C e_2(P) \quad (28)$$

si los elementos son rectos y, como es usual, el punto de colocación está contenido dentro del propio elemento:

$$q^*(P,Q) = 0 \quad (29)$$

y, por tanto,

$$r_2(P) = -L_2 e_2 = -C e_2(P) \quad (30)$$

Sustituyendo en (14):

$$\|e\|_E^2 = - \int_{\partial\Omega_2} e_2(P) r_2(P) = \frac{1}{C} \int_{\partial\Omega_2} r_2^2(P) \quad (31)$$

y como  $C = \frac{1}{2}$  al integrar dentro de un elemento cuya tangente es continua se tiene:

$$\|e\|_E^2 = 2 \int_{\partial\Omega_2} r_2^2(P) \quad (32)$$

o sumando para cada elemento:

$$\|e\|_E^2 = 2 \sum \int_{\partial\Omega_i} r_2^2(P) \quad (33)$$

La ecuación 33 puede utilizarse también en el caso de elementos curvos, mientras no se disponga de una mejor alternativa.

Otro estimador que se viene utilizando en problemas mixtos de potencial es la suma total de flujos en el contorno que, como es sabido debe ser cero. La magnitud del flujo "desequilibrado" sirve así como parámetro para detener la solución en el margen de precisión escogido.

#### EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Se exponen a continuación tres ejemplos sencillos que muestran las posibilidades del método, así como su velocidad de convergencia a la solución exacta.

Exaedro regular con variación cuadrática del potencial (Fig. 1):

La función  $\phi$  aplicada a este ejemplo es:

$$\phi = 300(x^2 - y^2)$$

la cual satisface la ecuación de Laplace.

Los flujos, en consecuencia, serán:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = q_x = 600 x$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = q_y = - 600 y$$

El problema es analizado suponiendo variación lineal del potencial y del flujo sobre las aristas, obteniéndose una primera aproximación de la solución.

Con la finalidad de estimar la bondad de la solución obtenida, se calcula la sumatoria de los flujos del exaedro sobre su contorno, la cual, como es conocido, debe ser nula. Para esta primera aproximación, el estimador mencionado proporciona el valor:

$$\Sigma q_{(\text{lineal})} = - 41,40$$

Luego, la solución es refinada utilizando funciones parabólicas sobre las aristas del exaedro. Con esta - segunda aproximación, y como era de esperarse, la solución converge a la solución teórica (exacta) y el estimador proporciona el valor:

$$\Sigma q_{(\text{parab})} = 0$$

La Figura 1 recoge la evolución del estimador ( $\Sigma q$ ) en función del número de iteraciones o aproximaciones.

Exaedro regular con variación cúbica del potencial (Fig. 2):

En este caso:

$$\phi = 100 (x^3 - 3y^2 x)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 300 (x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = - 600 xy$$

La tabla 1 muestra los valores de la  $\Sigma q$  para las tres soluciones empleadas: lineal, parabólica sobre aristas y cúbica sobre aristas

Solución	$\Sigma q$
lineal	- 20,7
parabólica	0
cúbica (exacta)	0

Tabla 1

Aún cuando no era de esperarse, la sumatoria de los flujos en la aproximación parabólica es nula. Esto sugiere el hecho de que el estimador  $\Sigma q$ , en casos donde la simetría juega un papel importante, pueden obtenerse resultados demasiado optimistas, por lo que su uso debe ser prudente.

La tabla 2 muestra la evolución de los residuos del potencial en una de las caras del exaedro.

Solución	$\int r^2$
lineal	4659,0
parabólica	87,6
cúbica (exacta)	0

Tabla 2

La Figura 2 muestra la evolución de los residuos para este caso.

Cilindro hueco:

Este ejemplo corresponde a un cilindro hueco sometido a una temperatura interna de 100°C y externa de 20°C. Se tomó una cuña cilíndrica (dada la simetría) según se muestra en la figura 3.

La solución exacta de este problema es:

$$\phi = 20 + 87,31 \ln \frac{10}{r}$$

$$\text{y } \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{87,31}{r}$$

Ahora no es posible obtener soluciones exactas con un número limitado de funciones polinómicas de interpolación, aún cuando las aproximaciones obtenidas son muy buenas.

Este problema fué analizado con tres tipos de funciones jerarquizadas:

- a) lineal
- b) parabólica sobre aristas
- c) parábolas sobre elementos

La Figura 3 ilustra la evolución de la  $\epsilon_q$  para las tres aproximaciones.

#### BIBLIOGRAFIA

1. E. Alarcón y P. Reyer. "Guía de introducción al método de los elementos de contorno". Servicio de Publicaciones E.T.S.I.I.- U.P.M. 1984.
2. E. Alarcón, A. Reverter y J. Molina. "Hierarchical Boundary Elements". Comp. Struct. 20(1-3) 151-156. (1985).
3. E. Alarcón y A. Reverter. "p-Adaptive Boundary Elements". Int. Journ. Num. Meth. Eng. (1986).
4. E. Alarcón. "Elementos de contorno adaptables". Hor migón y Acero, nº 149 (1983).
5. E. Alarcón. "Sobre el establecimiento de estimadores e indicadores para los métodos de contorno p-adaptables en problemas de potencial, en "Seminario de Análisis Numérico". Ed. F. Michavila. Servicio Publicaciones E.T.S.I. Minas. U.P.M. (1986).
6. I. Babuska. The selfadaptive approach in FEM. En "Mathematics of F.E. and Appl.". Ed. J. Whiteman. (1975).
7. P.O. Friberg. "An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method". Int. Journ. Num. Meth. Eng. 23, 91-98 (1986).
8. A. Peano, A. Riccioni, A. Pasini y L. Sardella. - "Adaptive F.E.M." en Applied Numerical Modelling. Ed. E. Alarcón. 1979.

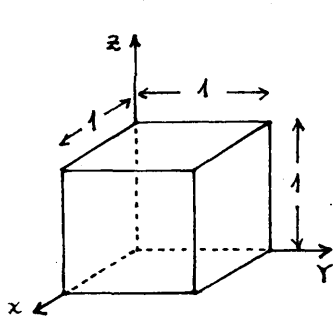


Fig 1.a Geometría

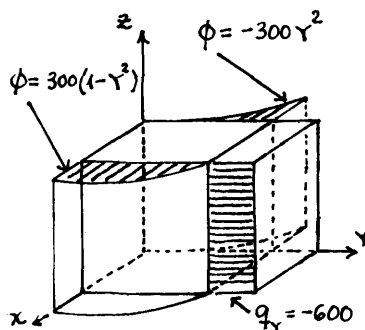


Fig. 1.b Condiciones de Contorno

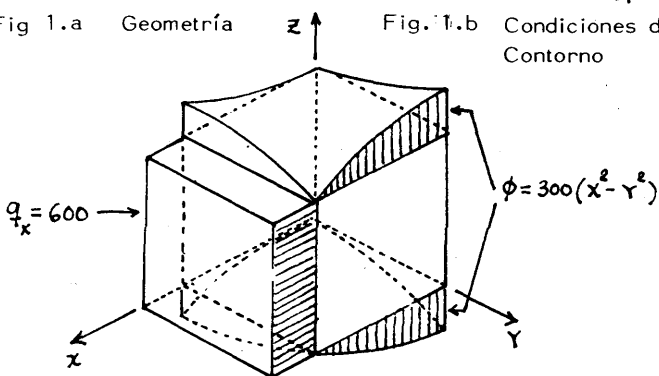


Fig. 1.c Solución Teórica

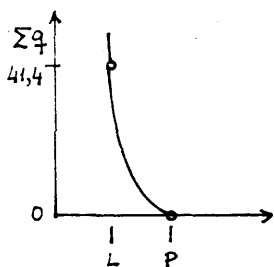


Fig. 1.d Evolución de la suma de flujos

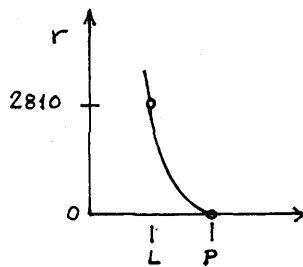


Fig. 1.e Evolución de los residuos de potencial

FIGURA 1 Exaedro con variación parabólica del potencial

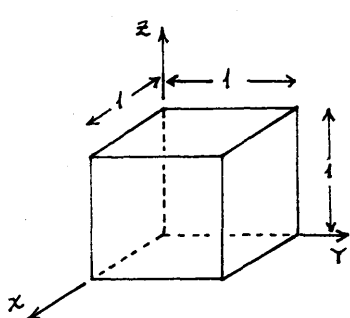


Fig. 2.a Geometría

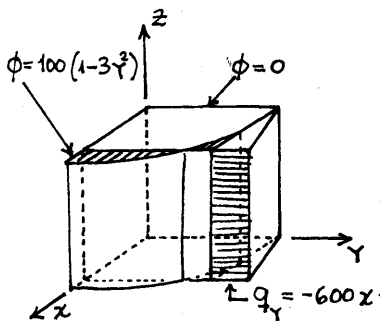


Fig. 2.b Condiciones de Contorno

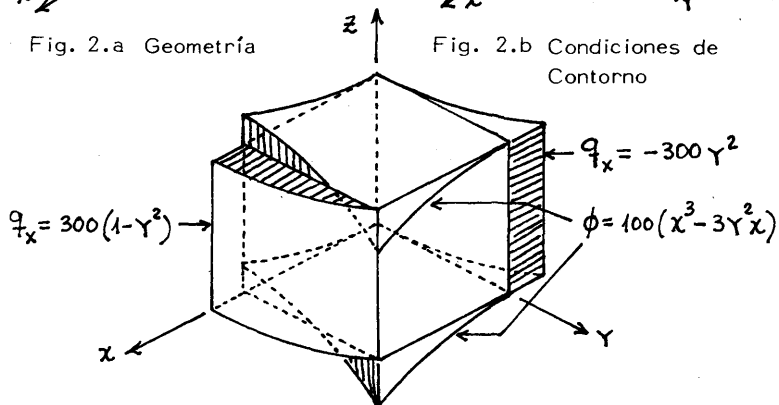


Fig. 2.c Solución Teórica

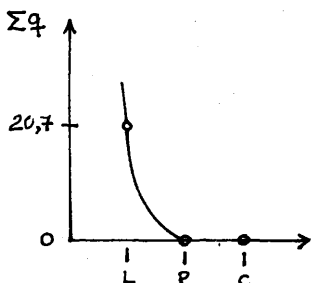


Fig. 2.d Evolución de la suma de flujos

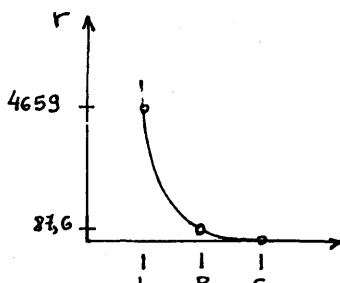


Fig. 2.e Evolución de los residuos de potencial

FIGURA 2 Exaedro con variación cúbica del potencial

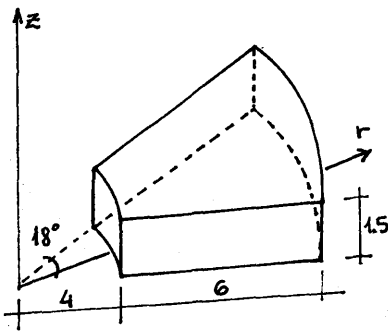


Fig. 3.a Geometría

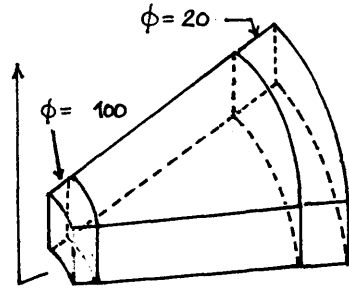


Fig. 3.b Condiciones de Contorno

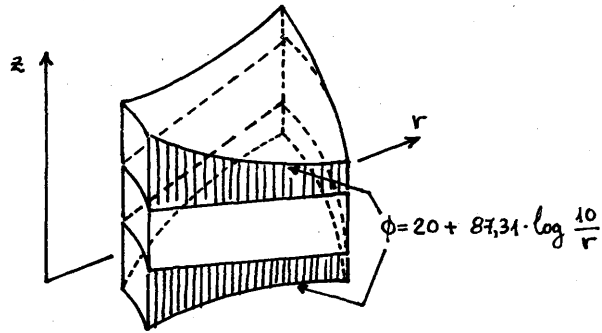


Fig. 3.c Solución Teórica

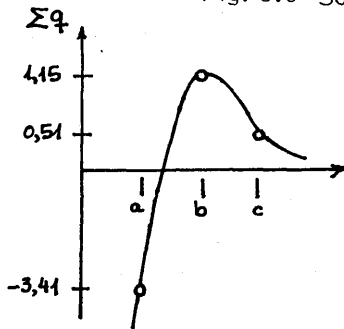


Fig. 3.d Evolución de la suma de flujos

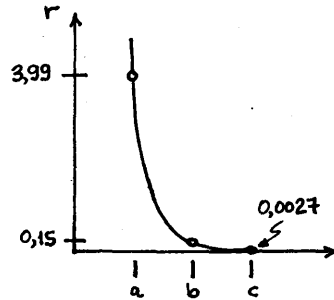


Fig. 3.e Evolución de los residuos de potencial

FIGURA 3 Cilindro Hueco