

III Congreso Nacional sobre la Teoría de Máquinas y Mecanismos
PROPIEDADES DE LA TRAYECTORIA DESCRITA POR UN PUNTO
CUALQUIERA DE UNA BARRA CUYOS EXTREMOS SE MUEVEN
SOBRE UNA CURVA DADA

Miguel Angel Hacar Benitez Ministerio de O.P. y Urbanismo
Enrique Alarcón Alvarez E.T.S.I.I. de Madrid

RESUMEN

Se estudian las propiedades de la trayectoria, que dependen de la longitud de la barra y del punto que se tome de ella. Determinación del área comprendida entre la curva dada y la obtenida. Aplicaciones para la división, por medios mecánicos, de superficies cerradas; establecimiento de curvas de transición; estudio de la circulación de vehículos en curva, etc.

1. Curvas de Holditch.

Si apoyados sus extremos en una curva dada (C) (fig. 1) deslizamos un segmento o una barra AB tomará -- las posiciones A'B', A''B'', etc.

Un punto -
cualquiera M de la -
barra tal que $MA=l_1$
y $MB=l_2$, pasará por
las posiciones M, M'
M'',..., describiendo
una curva que llama-
remos "curva holdit-
chiana" ó curva de -
Holditch, ó curva (H), deducida de la curva (C).

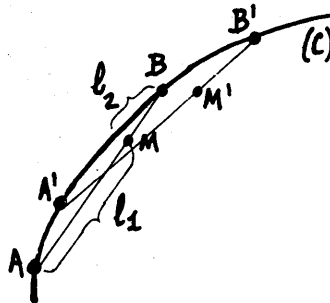


Fig. 1

Aunque el punto M puede estar en cualquier lu-

gar de la recta AB, incluso en el exterior de este segmento, supondremos por ahora que es el punto medio de $\overline{AB}=2l$. Se dice entonces que se trata de una "holditchiana ordinaria".

Estas curvas tienen importantes propiedades y aplicaciones tanto geométricas como mecánicas.

Es evidente que si la curva (C) presenta irregularidades, en la curva (H), deducida de ella, aparecerán disminuidas.

2. Camino de rodadura.

Si (C) fuese por ejemplo (Fig.2) el camino de rodadura de un móvil, o el eje de una línea ferroviaria, resulta claro que si sustituimos (C) por (H) esta nueva tendría menos irregularidades.

Sobre ella circularán mejor los vehículos. Los puntos de (C) en que haya "garrotes" y en los que la curvatura está reducida (con peligro de fuertes choques laterales e incluso de descarrilamiento) vienen mejorados en (H).

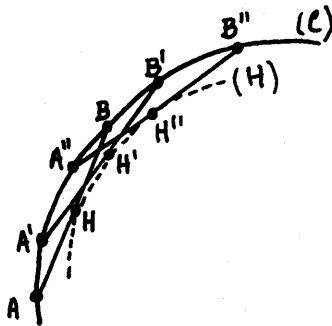


Fig. 2

Pero es que incluso, partiendo de la curva (H) podemos, deslizando sobre ella otra cuerda o barra de la misma longitud $2l$ ó de otra $2l_1$, obtener otra holditchiana, y así sucesivamente, a las que llamaríamos holditchianas de $2^\circ, 3^\circ$, etc. orden, de (C).

En realidad cuando un vehículo ferroviario moderno (locomotora ó vagón) compuesto de dos "bogies" ó -
 dos ejes circula a lo
 largo de una curva, -
 los centros H y H' de
 dichos carretones des-
 criben una curva de -
 Holditch (H) deducida
 de la (C) o del eje -
 de la vía, con auxi-
 lio de una cuerda de
 longitud $2l_1$, igual a
 la distancia entre --
 los ejes de dichos ca-

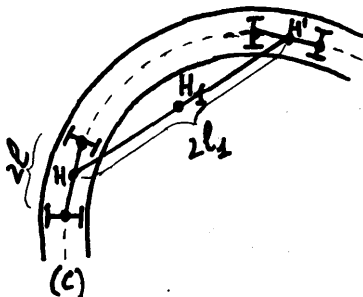


Fig. 3

rretones. El centro H_1 de la caja de vehículo, está so-
 bre el larguero principal H H' que une los centros de --
 los bogies. Por tanto H_1 viene a describir una holdit-
 chiana de segundo orden deducida de la anterior con auxi-
 lio de la cuerda $\overline{HH'}=2l_1$ deslizándose sobre ella.

Por este motivo, si una vía presenta irregularidades en su trazado en planta, los puntos del centro -
 del vehículo notarán con menos brusquedad el paso por es-
 tos tramos en mal estado. Si la carga del vehículo estu-
 viese concentrada en la parte central del mismo es evi-
 dente que sufrirá menos la acción de las fuerzas centrí-
 fugas o sacudidas laterales al paso por esta zona en mal
 estado, sobre todo si el vehículo es suficientemente lar-
 go. Está claro que lo que ocurre es, como hemos dicho, -
 que la carga (lo más pesado de ella) no recorre en reali-
 dad la curva del eje de la vía, sino otra curva, que es
 una curva de Holditch deducida de ella. En verdad es una
 holditchiana de 2º orden. Fijémonos que mientras $2l$ pue-
 de variar entre 1,50 y 2 metros, $2l_1$ puede tener de 12 a
 16. Así es que la primera holditchiana (H) apenas difiere
 de la curva (C) del eje de la vía. En cambio la 2ª, -

la (H_1) varia bastante con respecto a ella.

3. Determinación de la curva holditchiana (H) de una ---
curva dada (C).

Si esta viene dada en coordenadas cartesianas rectangulares por la función $F(x,y)=0$, si operamos con una cuerda de longitud $2l$, es evidente que basta eliminar las 4 cantidades x_1, x_2, y_1, y_2 entre las 5 ecuaciones:

$$F(x_1, y_1)=0; F(x_2, y_2)=0; (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4l^2; x_1+x_2=2x; y_1+y_2=2y.$$

Si (C) viniese expresada en coordenadas polares $\rho=\rho(\omega)$ habría que eliminar ω_1 y ω_2 entre las 3 ecuaciones (Fig.4)

$$\rho(\omega_1)\cos\omega_1 + \rho(\omega_2)\cos\omega_2 = 2\rho\cos\omega \quad \rho^2 = \frac{\rho^2(\omega_1)+\rho^2(\omega_2)-2l^2}{2}$$

$$\rho(\omega_1)\sen\omega_1 + \rho(\omega_2)\sen\omega_2 = 2\rho\sen\omega$$

Ejemplos.

La holditchiana de una elipse de ecuación

$$(C) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1=0$$

es:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) + \frac{1^2}{a^2 b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

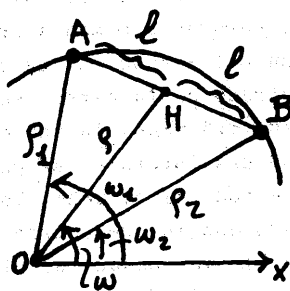


Fig. 4

como se deduce aplicando lo indicado.

En coordenadas polares, como la ecuación de la elipse es:

$$\rho = ab \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \omega} \right)^{1/2}$$

su holditchiana es :

$$\rho = ab \left((1 + \operatorname{tg}^2 \omega) \left(\frac{1}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \omega} - \frac{1^2}{b^4 + a^4 \operatorname{tg}^2 \omega} \right) \right)^{1/2}$$

Para la hipérbola, las ecuaciones son las mismas, cambiando b^2 por $-b^2$.

La de una parábola de ecuación $y=2px$ resulta ser:

$$x = \frac{y^2}{2p} + \frac{p^2}{2(p^2 + y^2)}$$

4. Una propiedad interesante de la curva de Holditch deducida de una curva cerrada (C) (Fig.5).

Supondremos que esta es convexa. Aunque por brevedad omitiremos su demostración, es la siguiente:

"El área del anillo comprendido entre la curva (C) y la (H) deducida de ella con auxilio de una cuerda ó barra de longitud $2l$ es siempre $\pi \cdot l^2$ cualquiera que sea la curva (C)".

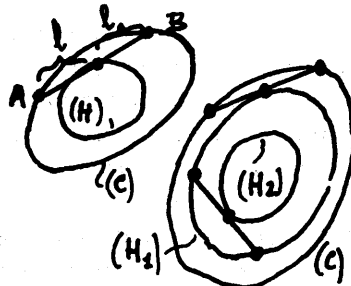


Fig. 5

Esto nos permite dividir un recinto cerrado de área S en partes "concéntricas" iguales o proporcionales a cantidades dadas.

Utilizaremos curvas de Holditch sucesivas. Así por ejemplo, si el área Σ interior a la curva (C) la queremos dividir en tres partes iguales a $\Sigma/3$, bastaría trazar con una cuerda de longitud $2l = 2\sqrt{\Sigma/3\pi}$ la 1ª y la segunda holditchiana de (C) ó sea (H_1) y (H_2) .

Si quisieramos dividir el recinto de área Σ en n partes proporcionales a p_1, p_2, \dots, p_n tendríamos que trazar las $n-1$ holditchianas sucesivas $(H_1), (H_2), \dots, (H_n)$ -- con cuerdas de longitudes $2l_i$ tal que,

$$2l_i = 2 \frac{p_i \Sigma}{\pi(p_1 + p_2 + \dots + p_n)}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$.

5. Curva comprendida entre dos alineaciones rectas (Figura 6).

Consideremos una curva (C) comprendida y tangente a dos alineaciones rectas que forman un ángulo α . Sea (H) su ordinaria de Holditch prolongando todo lo preciso, por deslizamiento de la AB sobre dichas alineaciones.

Se puede demostrar también, que el área comprendida entre la curva (C), prolongada por sus dos alineaciones rectas, y la curva (H) es precisamente $1/2 \alpha l^2$ (α en radianes), cualquiera que sea la curva (C); es decir que dicha área no depende más que de α y de l .

(En realidad es una generalización del anterior. Para $\alpha = 2\pi$, la curva se cierra y su área es πl^2 ,

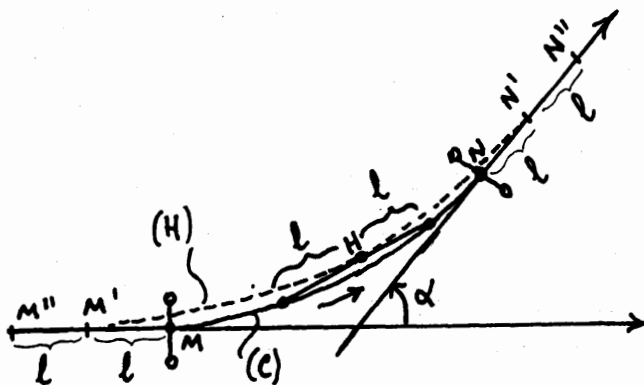


Fig. 6

como era de esperar).

La curva (H) es sin duda más "suave" que la -- (C). Las irregularidades de estas son reducidas por aquella. Podemos construir holditchianas sucesivas, que vendrán a ser "curvas de acuerdo" que mejorarán la curva primitiva (C).

Es evidente que si M y N son los puntos de tan gencia de (C) con las alineaciones rectas, los de las demás curvas holditchianas sucesivas pasarán a ser M' y N'; M'' y N''; etc., "avanzando" sobre dichas alineaciones rectas de tal modo que $\overline{MM'} = \overline{M'M''} = \dots = \overline{NN'} = \overline{N'N''} = 1$.

6. Mejoras de trazados (Fig. 7).

Sea (C) el trazado sinuoso de una línea de comunicación (ferrocarril ó carretera) que deseamos mejorar.

Sin más que aplicar al trazado M_0 (C) N_0 una cuerda de longitud $2l$ que nos vaya dando las sucesivas -- holditchianas $M_1(H_1)N_1$; $M_2(H_2)N_2$; $M_3(H_3)N_3$; etc. obtenemos curvas que son cada vez mejores y que son tangentes a

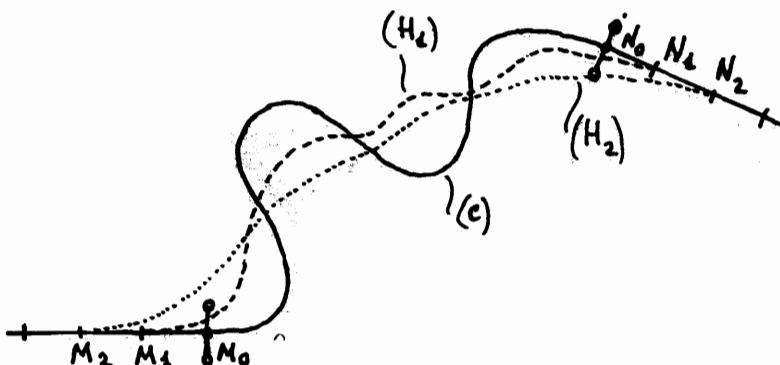


Fig. 7

las primitivas alineaciones rectas M_0M y N_0N que enmarcaban a (C), en los puntos M_1 y N_1 ; M_2 y N_2 ; M y N ; etc. -- respectivamente.

BIBLIOGRAFIA.

- H. BROCARD et T. LEMOINE "Courbes géométriques remarquables". Libra. A. Blanchard. París 1967-70.
- A. CAQUOT "Le recordement parfait" Revue Générale des Chemins de Fer. Enero 1940.
- J. CHAPPELLET "Méthodes de rectification du tracé des courbes de Chemin de fer par correction des fleches". Eyrolles, ed. 1938.
- D. BRANDENBURG "Von der Gleisbogenaufmessung über Gleiskordinaten zur Gleisabsteckung". Eisenbahningenieur. 23, 1972.
- E. SCHUBERT "Die Mechanisierung der Bogenberichtung". E.T.R. Viena 1964.

- GIOVANI POLSONI "Considerazioni sulle curve di record ferroviarie". Ingegneria Ferroviaria. April 1958.