

III Congreso Nacional sobre la Teoría de Máquinas y Mecanismos

**PROBLEMAS CON SINGULARIDADES DE CONTORNO. APLICACION  
DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

F.G. Benítez

E.T.S.I.I.I. de Madrid

M.A. Hacar

Ministerio de O.P. y Urbanismo

E. Alarcón

E.T.S.I.I.I. de Madrid

RESUMEN. Esta comunicación tiene como fundamento el demostrar la importancia de las singularidades geométricas demostradas en la referencia (3) para la resolución de sistemas que impliquen condiciones peculiares de contorno.

INTRODUCCION

No es necesario ya a estas alturas, romper ninguna lanza a favor de los métodos - numéricos de discretización del contorno para el tratamiento de problemas frente a los métodos de discretización del dominio.

Con todo, el simple hecho de ser un procedimiento numérico conlleva - ciertas peculiaridades o problemas de difícil soslayo, pero también pueden presentar serias ventajas basadas en los fundamentos del método.

En esta comunicación se pretende hacer constancia no solo de la importancia de este método, palpablemente demostrada en las referencias consignadas, - sino algunas de las ventajas que puede proporcionar la resolución de problemas que impliquen potencial, como por ejemplo transmisión de calor en régimen permanente, y que han sido demostradas para problemas de filtraciones por ejemplo, puestos de manifiesto en este artículo.

FORMULACION ELEMENTOS DE CONTORNO

Es ya bien sabido que el sistema de ecuaciones integrales que definen el comportamiento dentro de la teoría del potencial de un sistema viene regido por:

$$c(x) \phi(x) + \int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial n} ds(y) = \int_{\partial D} \psi(x,y) \frac{\partial \phi(y)}{\partial n} ds(y) \quad (1)$$

donde  $x$  e  $y$  pertenecen a la frontera o contorno del dominio representada por  $\partial D$ , y donde  $\psi$  representa la solución de la ecuación de Laplace.

El interés de estos procedimientos numéricos radica sencillamente en la posibilidad de análisis del sistema sin más que realizar la discretización de su contorno.

El implementar todo el proceso numérico con base a un sistema de coordenadas natural al que supeditamos la geometría del problema a través de las funciones de interpolación de la forma:

$$x_i(\xi) = N^\alpha(\xi) x_i^\alpha$$

y el realizar una interpolación de las variables de campo:

$$\phi_i(\xi) = N^\alpha(\xi) \phi_i^\alpha$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_j}(\xi) = N^\alpha(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial n} \int_i^\alpha$$

a través de sus valores en ciertos puntos del contorno, nos permite discretizar la ecuación (1) para obtener ecuaciones definidas en los puntos de discretización que van a dar lugar a un sistema cuya forma la presentaremos en la siguiente expresión:

$$\underline{c} \underline{\phi} + \underline{A} \underline{\phi} = \underline{B} \underline{q}$$

donde  $\underline{\phi}$  nos representa el vector potenciales en el contorno y  $\underline{q}$  el vector flujos; y que nos permitirá resolver el problema.

Dependiendo del orden de parametricidad entre las distintas interpolaciones, así como del grado de éstas, se tendrán diferentes metodologías de

aproximación para resolver problemas particulares; por ejemplo, elementos isoparamétricos, mixtos, dependiendo del orden; y constantes, lineales parabólicos, etc. dependiendo del grado.

Aquí vamos a analizar exclusivamente el tratamiento de problemas cuya resolución numérica por este método ha presentado serios problemas debido a la existencia de condiciones de contorno tales que dan lugar a singularidades en su comportamiento físico que alteran los resultados hasta ahora conseguidos.

### SINGULARIDAD GEOMETRICA

Al establecer el comportamiento del recinto estudiado a través del sistema de -- ecuaciones integrales de contorno, no se está mas que estableciendo relaciones -- entre el flujo y el potencial que permiten la posibilidad de resolver el problema -- numericamente.

En resumidos conceptos, se relaciona el potencial en cada punto del -- contorno con los potenciales y flujos de todos los nodos en que se encuentra discretizado.

Se podría analizar que sucedería en el caso de que el flujo de un determinado punto del contorno correspondiente a un nodo de la discretización, físicamente alcanzase valor infinito (caso de singularidad por condiciones de contorno) o bien que numericamente la integración del coeficiente que actúa sobre el flujo de un determinado nodo fuese infinita.

En este segundo caso la razón radicaría en una anulación del denominador del integrando de los coeficientes B que multiplican a los flujos  $q$ , y que -- análogamente se podría verificar para los coeficientes A.

Ambos comportamientos, singularidad por condiciones de contorno y singularidad geométrica pueden solaparse para representar en determinados puntos --

del contorno la variación física de las funciones de campo obtenidas numericamente.

Estudiemos estos tipos de singularidades:

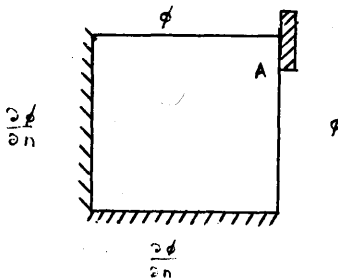
1. De la ecuación de contorno:

$$\frac{c}{\phi} + \frac{A}{\phi} = \frac{B}{\phi} q \quad (2)$$

el hecho de que el denominador del integrando de algún coeficiente A ó B pueda anularse, sin que exista singularidad de contorno en la variable a él asociada, lleva consigo la discrepabilidad de los resultados obtenidos numericamente -- con relación a los físicos.

2. Analogamente, el hecho de la existencia de singularidad de contorno en un determinado nodo, que conlleva la existencia de una variación asintótica del flujo -- sobre el elemento adyacente a ella y por tanto a un valor físico de infinito en el nodo de la singularidad, da lugar también a discrepabilidad en los resultados debido al valle presentado cerca de la singularidad en la representación de la variable  $q(\frac{\partial \phi}{\partial n})$  frente a la distancia al punto de singularidad.

Tal y como se aprecia en el caso de la placa construida:



donde  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  indica las zonas adiabáticas mientras que los  $\phi = \text{cte.}$  las isoterms.

Este último tipo de singularidad deriva de que el valor que físicamente debe de alcanzar el flujo en el nodo A como perteneciente a la superficie isoterma es  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \infty$  o lo que es lo mismo, que en notación de funciones de forma se debe verificar que:

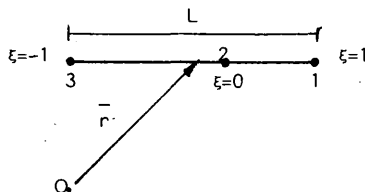
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial \xi}} \frac{\partial r}{\partial n}$$

sea infinita, siendo todo el numerador constante; transportandonos a la obligatoriedad de nulidad en:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi}$$

Y veamos cuando esto se efectua:

Para el caso de elementos parabólicos degenerados lineales:



Se verifica que:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \bar{r}_i = 2 \xi \bar{r}_1 - 2 \xi \bar{r}_2 + \frac{1}{2} (2 \xi - 1) L$$

y como puede ponerse:

$$\bar{r}_3 = \bar{L} + \bar{r}_1$$

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_1 + \alpha \bar{L} \quad (\alpha: \text{proporcionalidad})$$

Se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} = \xi (L - 2\alpha L) - \frac{1}{2} L$$

De valor:

$$\forall \xi = 0 \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} L$$

$$\forall \xi = 1 \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} = 0 \quad > \quad \alpha = 1/4$$

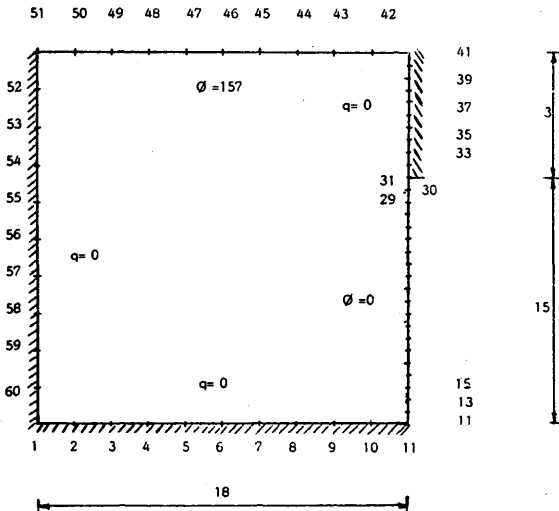
$$\forall \xi = -1 \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} = 0 \quad > \quad \alpha = 3/4$$

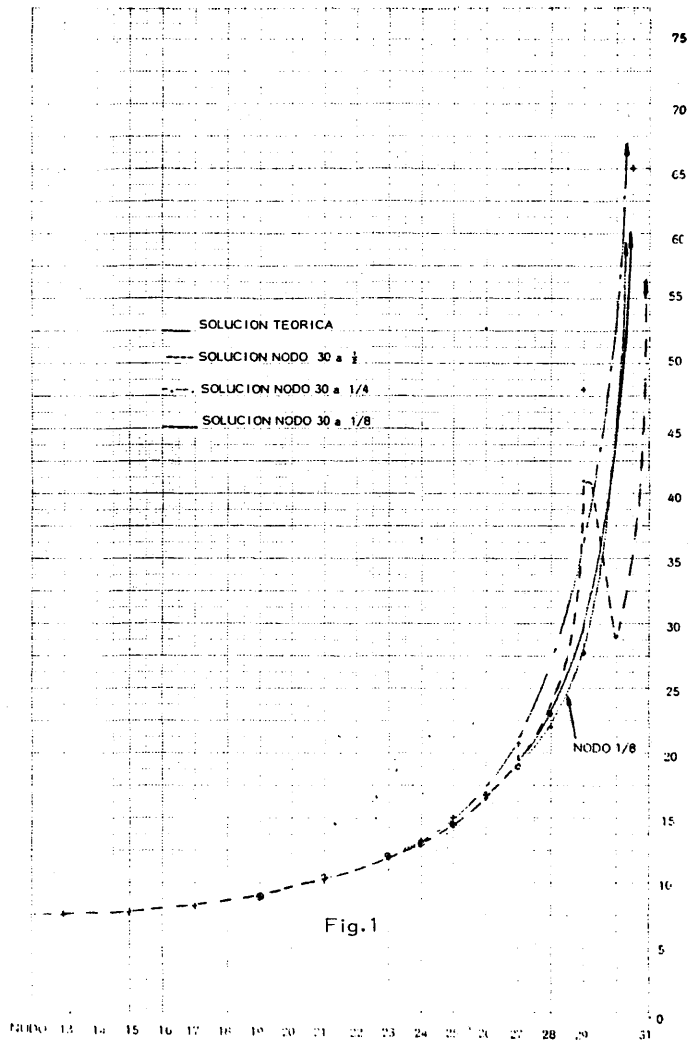
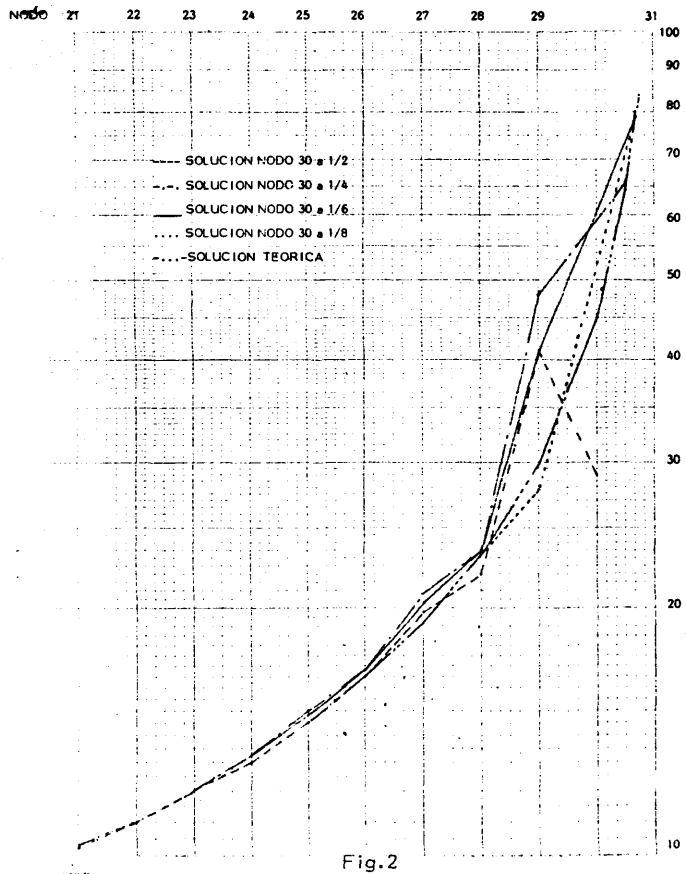
que manifiesta que en el caso de que el nodo central se encuentra a 1/4 de distancia del nodo 1, aparecerá una singularidad de tipo geométrico, que falseará los resultados que apareciesen sobre el nodo A.

Este tipo de singularidad que ya fué puesto de forma palpable demostrada en la referencia (3), fué utilizada hasta entonces como una restricción en el ámbito de la discretización de problemas por elementos cuadráticos degenerados, pero no fué utilizada como un posible eclipse de singularidades de tipo de contorno.

En efecto, en la ecuación (2) podemos hacer uso de esta ventaja en el caso de que se nos presenten condiciones de contorno singulares, sin más que obligar a que los coeficientes de dichas variables de campo singulares sean también singulares, sombreándonos efectos con otros y representando numericamente el comportamiento físico. Esto se consigue haciendo uso de elemento adyacente al nodo singular tal que el nodo central se encuentre posicionado a una distancia de 1/4 de él.

A continuación se muestran las gráficas correspondientes al problema presentado anteriormente para distintas posiciones del nodo central numerado como 30 en la discretización presentada.





Posicion	nodo 26	nodo 27	nodo 28	nodo 29	nodo 30	nodo 31
1 / 2	-16.40	-19.87	-22.18	-41.03	-28.95	-239.02
1 / 4	-16.83	-20.85	-23.65	-48.16	-65.80	-473.85
1 / 6	-16.77	-20.28	-23.68	-41.07	-79.40	-414.38
1 / 8	-16.59	-19.14	-23.25	-27.83	-86.38	-210.44
3 / 4	-15.98	-19.40	-20.08	-40.17	-12.10	-187.11
5 / 6	-15.86	-18.79	-19.76	-33.33	-7.24	-176.83
7 / 8	-15.80	-18.54	-19.50	-30.51	-4.33	-172.82
Teórica	-16.53	-19.24	-23.21	-29.81	-----	

Nota: La posición de todos los nodos es fija, excepto la de 30 que se variable y los valores no deben compararse entre si. Notese la inexistencia de "valle" en el nodo 30 cuando éste se encuentra posicionado en una zona de menos o igual a un cuarto de distancia al nodo singular 31. Y cómo la solución mejora conforme el nodo central (30) se aproxima a la singularidad.

En las figuras anteriores, Fig.1 representa la variación en escala milimétrica, mientras que la Fig.2 es un detalle en escala logarítmica.



## CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

En este artículo se ha pretendido poner de manifiesto la importancia de la utilización de las singularidades geométricas para representar el problema físico real presentado en la utilización de condiciones de contorno singular; se han propuesto ejemplos para su comprensión basados en la teoría del potencial.

Análogamente se podría haber razonado para el caso de la teoría elástica tanto en el plano como en el espacio; siendo este último caso un arma poderosa para el tratamiento de problemas mecánicos con concentración de tensiones.

Para estos problemas, que implique la teoría de la elasticidad, la ecuación integral de contorno:

$$c(x) u_j + \int_{\partial D} T_{ji} U_i ds = \int_{\partial D} U_{ji} t_i ds$$

daría lugar al sistema de ecuaciones integrales:

$$\tilde{C} \underline{u} + \tilde{H} \underline{u} = \tilde{G} \underline{t}$$

donde  $\underline{u}$  representa el vector de movimiento y  $\underline{t}$  el vector de tensiones, ambos definidos en el contorno.

REFERENCIAS

1. Alarcón, E. Martín, E. Paris, F; (1.978) "Boundary Elements in Potencial and Elasticity Theory" Communication Congress Prends in Computarice Structural Analysis and Syntesis . Washington.
2. Alarcon, E. Martin, A. Paris, F; (1.978) "Some Minor Problem with B.I.E.M." Congress Applied Numerical Modelling. Madrid.
3. Benitez G, F. Alarcon, E. (1.980) "Simulación numérica por el método de los -- elementos de contorno. Utilización de elementos isoparamétricos parabólicos". I. Simposium Nacional sobre Modelado y Simulación en la Industria y Servicios Públicos. Sevilla, 7-8 de Mayo 1.980 pp 147-152
4. Olurinde E. Lafe, June 1.980 "Singularities in Darcy Flow Through Porous Media". Journal of the Hydraulics división. A.S.C.E.