

# *Sobre la versión p-adaptable del método de los elementos de contorno*

E. ALARCÓN

*Cátedra de Estructuras*

*E.T.S. Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica. Madrid*

En este artículo se resumen las principales ideas relacionadas con la resolución de problemas elípticos mediante fórmulas de representación. El uso de una familia de funciones interpolantes jerarquizadas permite el establecimiento de un sistema de resolución autoadaptable a un nivel de exactitud prefijado. Se incluye también una comparación descriptiva con el método de los elementos finitos.

## 1. INTRODUCCION

Una importante familia de métodos aproximados para la resolución de problemas del tipo

$$Au = f \quad [1]$$

donde  $A$  es un operador lineal autoadjunto,  $f$  unas funciones dato y  $u$  unas funciones incógnita son los llamados métodos de Galerkin.

En líneas generales puede decirse que el procedimiento consiste en la selección de una solución aproximada  $\hat{u}$ :

$$u \rightarrow \hat{u} \quad [2]$$

que cumpla:

$$A\hat{u} = f \quad [3]$$

La selección de una cierta familia de funciones de ponderación  $\{\psi_i\}_1^N$  cuyas características están relacionadas con las del problema [1], permite la escritura de los productos escalares:

$$(A\hat{u}, \psi_i) = (f, \psi_i) \quad [4]$$

o teniendo en cuenta [1]:

$$(A(u-\hat{u}), \psi_i) = 0 \quad [5]$$

Si se define el residuo  $r$  como:

$$r = A(u-\hat{u}) \quad [6]$$

la igualdad [5] expresa la condición de Galerkin: los residuos deben ser ortogonales a las funciones de ponderación.

La aproximación [2] se realiza normalmente proyectando  $u$  sobre un espacio adecuado de funciones. El método más famoso, Rayleigh-Ritz, utiliza el subespacio finito generado por la familia  $\{\psi_j\}_1^N$ , esto es, se hace:

$$u \sim \hat{u} = a_j \psi_j \quad [7]$$

El establecimiento de las  $N$  condiciones [4] permite escribir:

$$(\psi_i, A\psi_j) a_j = (f, \psi_i) \quad [8]$$

o bien:

$$(\psi_i, \psi_j)_A a_j = (f, \psi_i) \quad [9]$$

donde  $(\cdot, \cdot)_A$  es el producto escalar inducido por el operador  $A$  y que en algunos casos es denominado «energético», ya que en problemas elásticos corresponde a la definición de energía elástica.

En el método de Ritz tradicional las funciones  $\psi_i$  están definidas en todo el dominio y su naturaleza es arbitraria (salvo condiciones resultantes del paso (8)  $\rightarrow$  (9) que están relacionadas con las condiciones de contorno).

El método de los elementos finitos (MEF) en desplazamientos está basado en (9), con dos condiciones adicionales: las funciones son polinomios y, en lugar de estar definidos globalmente, su soporte es pequeño, local.

Ello permite sistematizar el tratamiento numérico elemento a elemento. Además las funciones van tomando valores unidad en puntos clave, nudos, y anulándose en los demás, con lo que los coeficientes  $a_j$  pasan a tener un significado físico. A nivel de elemento la interpolación se suele escribir como:

$$u = Nu^e \quad [10]$$

donde  $N$  son las funciones de interpolación y  $u^e$  las variables particularizadas en los nudos del elemento. La formulación se completa representando la geometría de forma semejante:

$$x = Nx^e \quad [11]$$

con lo que se llega a la formulación isoparamétrica de uso habitual.

El método de los elementos de contorno (MEC) se basa en una idea semejante aplicada a un fórmula de representación clásica. En un problema de potencial sin focos ni sumideros puede establecerse por ejemplo que:

$$C \phi(P) = - \int_{\partial\Omega} q^*(P,Q) \phi(Q) + \int_{\partial\Omega} \phi^*(P,Q) q(Q) \quad [12]$$

donde  $\Omega$  es el dominio en estudio,  $\partial\Omega$  su contorno,  $P$  y  $Q$  dos puntos del contorno,  $C$  un número que depende de la geometría del contorno en  $P$  ( $C = \frac{1}{2}$  si el contorno es liso),  $\phi$  es el potencial,  $q = \frac{\partial\phi}{\partial n}$  el flujo,  $\phi^*(P,Q)$   $q^*(P,Q)$  el potencial y el flujo respectivamente, generados en  $Q$  por una carga unidad situada en  $P$ .

Si se hacen las aproximaciones

$$\phi \sim \hat{\phi}; q \sim \hat{q} \quad [13]$$

[12] puede interpretarse como una relación integral semejante a [4] con la salvedad de que ahora las funciones de ponderación  $\phi^*$  y  $q^*$  están definidas globalmente. La gran ventaja sin embargo estriba en que las integrales sólo están definidas en el contorno, por lo que la discretización queda reducida en una dimensión, respecto a la que sería necesaria con el MEF. En el caso de la elasticidad la fórmula de representación utilizada es la de Somigliana.

El paso siguiente es la definición de [13]. Generalmente el BEM ha trabajado con la idea isoparamétrica estricta. El contorno se divide en elementos y se procede a una aproximación con funciones de pequeño soporte:

$$\begin{aligned} u &= Nu^e \\ x &= Nx^e \end{aligned} \quad [14]$$

que, generalmente se extiende también a las condiciones de contorno.

Dificultades intrínsecas del método son la existencia de integrandos singulares que deben calcularse con cuadraturas numéricas, la asimetría de la matriz de coeficientes causada por el uso de funciones de interpolación distintas a las de aproximación y el carácter lleno de la matriz de coeficientes debido al uso de funciones de ponderación definidas globalmente. A pesar de ello el método ha tenido éxito, incluso comercial, y actualmente se ha establecido como una alternativa aceptable y ventajosa.

La mejora de resultados en la discretización se obtiene aumentando la base aproximante por subdivisión de los soportes. Es la llamada versión *h* (denominación que hace referencia al tamaño característico *h* del elemento). Este tipo de mejora presenta el inconveniente de tener que re-

construir una discretización distinta a la inicial, con lo que todo el trabajo de cálculo debe, a su vez, repetirse. Ello implica que, en aplicaciones prácticas, jamás se conozca el grado de precisión con que se trabaja. En general, las comprobaciones se reducen a un estudio cualitativo de los resultados en cuanto a su credibilidad física como distribución en  $\Omega$  así como a órdenes de magnitud.

Una herramienta de este grado de refinamiento y de este coste debería, sin embargo, estar dotada de algún método que le permitiera conseguir niveles de aproximación semejantes en todo el dominio, así como de estimadores «a posteriori» del error cometido.

Aunque existen diferentes alternativas, desde hace unos años se ha intentado reconsiderar las bases del BEM a la luz de las exigencias anteriores.

La idea fundamental es evitar la aproximación isoparamétrica que carece de sentido tan pronto como las funciones de ponderación sean definidas globalmente. Por otro lado, el método de Ritz con funciones globales basa su aprovechamiento en la corrección que las funciones sucesivas van realizando sobre las precedentes, en forma semejante a lo que se consigue con el desarrollo de Fourier.

Finalmente, desde el momento que las funciones de ponderación dejan de ser polinomios queda abierta la posibilidad de tratamiento con otro tipo de funciones.

Se trata, pues, de identificar zonas del contorno lo suficientemente grandes como para compensar el trabajo adicional que se va a realizar y, de esta manera, aprovechar las ventajas del MEF y del Ritz tradicional. Los elementos quedan limitados así por esquinas, singularidades, etc., y la geometría se representa de forma independiente y con toda la generalidad que se estime necesario.

## 2. ELEMENTOS P-ADAPTABLES

Según se indicó en el apartado anterior un sistema p-adaptable exige:

- a) una familia jerarquizada de funciones interpolantes.
- b) un criterio estimador que permita garantizar la bondad global de la solución.
- c) un criterio indicador que permita acusar la necesidad local de nuevas funciones de interpolación.

El método operativo se puede bosquejar en el siguiente diagrama representado en la tabla I.

En general la familia de funciones jerarquizadas que se utiliza es la de Legendre que en una dimensión es:

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^p}{d\xi^p} [(\xi^2 - 1)^p] \quad [15]$$

TABLA I

Representación de la geometría mediante cualquier método de interpolación.	
Representación de las condiciones de contorno	
Interpolación lineal de las variables	
Estimación del error global $\ e\ $	
D <sub>o</sub>	
WHILE	FOR I = 1
	Cálculo del indicador I
TO	Si $\ I\ $ - tolerancia
	$\leq 0$ <span style="float: right;"><math>&gt; 0</math></span>
	Continuar <span style="float: right;">Añadir polinomio de grado siguiente para aproximar la variable.</span>
	Número de elementos
	Cálculo del error global $\ e\ $
	$\ e\ $ - tolerancia $> 0$

obteniéndose las de dos dimensiones (elementos para problemas tridimensionales) mediante los correspondientes productos tensoriales.

El tema de los indicadores ha sido resuelto utilizando una técnica de Galerkin sobre la fórmula de representación, con lo que se consigue una evaluación global del error dentro de cada macroelemento.

En el caso del potencial, por ejemplo, se definen los operadores:

$$\begin{aligned}
 L_1 f(P) &= \int_{\Omega_1} f(Q) \phi^*(P,Q) \\
 L_2 f(P) &= C f(P) + \int_{\Omega_2} f(Q) q^*(P,Q) \\
 p(P) &= \int_{\Omega_1} \phi^o(Q) q^*(P,Q) - \int_{\Omega_2} q^o(Q) \phi^*(P,Q)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

donde  $f$  es una función cualquiera,  $\partial\Omega_1$  es el trozo de contorno con  $\phi$  dato,  $\partial\Omega_2$  aquél en que  $q$  es dato, con lo que se demuestra que el residuo es:

$$r = L_1 \hat{q} + L_2 \hat{\phi} + p \quad [17]$$

y que

$$L_1 e_1 + L_2 e_2 + r = 0 \quad [18]$$

donde  $e_1$  y  $e_2$  son los errores cometidos en  $\partial\Omega_1$  y  $\partial\Omega_2$  con la aproximación efectuada (véase referencia n.º 10).

El error «global» sobre el elemento se define mediante

$$\begin{aligned} \|e\|_E^2 &= \int_{\partial\Omega_1} e_1 (L_1 e_1) + \int_{\partial\Omega_2} e_2 (L_2 e_2) = \\ &= - \int_{\partial\Omega_1} e_1 r_1 - \int_{\partial\Omega_2} e_2 r_2 \end{aligned} \quad [19]$$

y ello permite obtener indicadores del tipo:

$$I_i^2 = \frac{\int_{\partial\Omega_i} (N_{n+1} r_i)^2}{\int_{\partial\Omega_i} (N_{n+1}) L_2(N_{n+1})} \quad i = 1, 2 \quad [20]$$

donde  $N_{n+1}$  es la función interpolatriz candidato a ser añadida tras la resolución anterior del problema.

Como puede observarse, el numerador mide la proyección del residuo sobre la función candidato y ello «indica» si su presencia es interesante o no para absorber aquél.

Debido a la complejidad de cálculo del denominador, el indicador se reduce a evaluar el numerador de [20] y a seleccionar el refinamiento de aquéllos elementos que tengan una aportación mayor.

El cálculo de un estimador global presenta problemas más serios. Wendland y Rank han desarrollado algunos estudios de convergencia que no son directamente aplicables a los casos expuestos por lo que, actualmente, el tema sigue abierto. Un caso muy sencillo que ilustra el sentido en que se pretende actuar, se refiere a los problemas tipo Neumann. En este caso el residuo y el error se pueden relacionar para contornos rectos (o planos). En efecto:

$$L_2 e_2 = \int_{\partial\Omega_2} e_2(Q) q^*(P, Q) + C e_2(P) \quad [21]$$

Si los elementos son planos y el punto de colocación está en el elemento:

$$q^*(P,Q) = 0 \quad [22]$$

Con ello:

$$r_2(P) = - L_2 e_2 = - C e^2(P)$$

y por tanto:

$$- \int_{\partial\Omega_2} e_2(P) r_2(P) = \frac{1}{C} \int_{\partial\Omega_1} r_2^2(P) \quad [23]$$

Con  $C = \frac{1}{2}$  y sumando en el contorno:

$$\|e\|^2 \text{ global} = 2 \sum_i \int_{\partial\Omega_i} r_2^2(P) \quad [24]$$

Este estimador está siendo utilizado actualmente, incluso en casos mixtos y con contorno curvo, demostrándose experimentalmente que marca bien el proceso de convergencia, por lo que sería de gran interés intentar una justificación precisa de su comportamiento.

### 3. EJEMPLO

Se presenta a continuación un ejemplo que permite hacerse una idea del proceso operativo. Se trata de una presa en Portugal estudiada inicialmente por Zienkiewicz mediante el método de los elementos finitos. En este caso se utiliza una sola hipótesis de carga, embalse lleno, y los resultados se indican a continuación.

La figura 1a representa la malla de elementos finitos utilizada por Zienkiewicz, mientras que la figura 1c recoge la de elementos de contorno. Como puede observarse sólo se precisa discretizar el contorno con la consiguiente reducción en el número de variables a utilizar así como la simplificación en el proceso de mallado.

Las figuras 1b y 1d representan respectivamente las soluciones de tensiones principales en el arco para elementos finitos y de contorno. Puede observarse la progresiva aproximación a la «solución exacta» que en este caso se ha obtenido utilizando una gran malla de 130 elementos de contorno lineales.

Finalmente, la figura 1e recoge la progresión del estimador del error para un refinamiento  $h$  y para refinamiento  $p$  selectivo. Como puede ver-

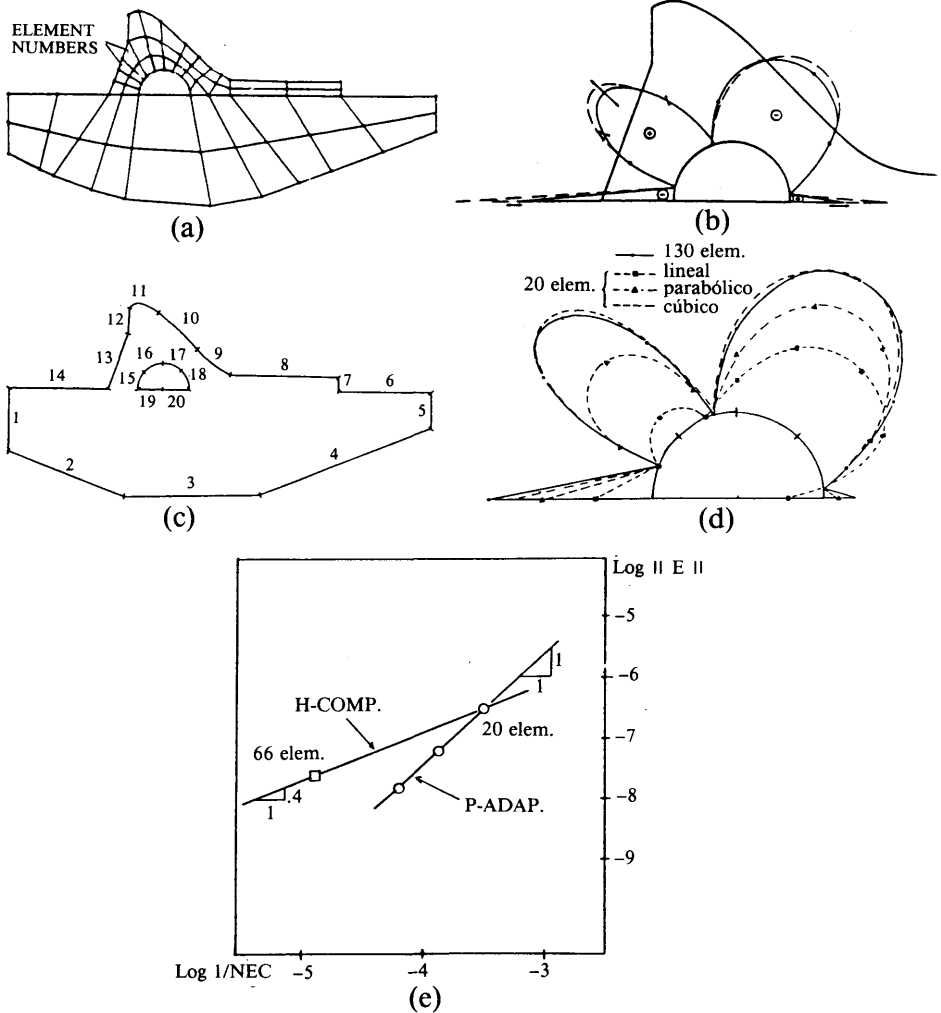


Figura 1.

se la velocidad de convergencia es muy superior en el caso de la versión p-adaptable. Este resultado se confirma experimentalmente en todos los casos estudiados y merece un estudio analítico más detallado.

#### 4. AGRADECIMIENTOS

Se agradece la ayuda del profesor M. Cerrolaza, de la Universidad Central de Venezuela, que ha contribuido a la materialización de las ideas



expuestas más arriba y que, en particular, ha desarrollado el ejemplo descrito.

## 5. REFERENCIAS

1. E. ALARCÓN, L. ABIA AND A. REVERTER: «On the possibility of adaptive boundary elements», in Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Elements Computation (ARFEC), Lisbon, 1984.
2. E. ALARCÓN, A. REVERTER AND J. MOLINA: «Hierarchical Boundary Elements», *Comp. Struct.*, 20(1-3), 151-156 (1985).
3. E. ALARCÓN, AND A. REVERTER: «P-Adaptive boundary elements», *Int. j. numer. methods eng.* Vol. 23, 801-829. 1986.
4. A. G. PEANO: «Hierarchies of conforming finite elements», Doctoral dissert., Washington Univ., St. Louis (1975).
5. K. BABUSKA AND W. C. RHEINBOLDT: «A posteriori error estimates for the FEM», *Int. J. numer. methods eng.*, 12, 1957-1616 (1978).
6. D. W. KELLY, J. GAGO, O. C. ZIENKIEWICZ AND I. BABUSKA: «A posteriori error analysis and adaptive processes in the FEM», parts I and II, *Int. j. numer. methods eng.*, 19, 1593-1619 (1983).
7. B. A. SZABO, P. K. BASU AND M. P. ROSOW: «Adaptive finite element based on p-convergence», NASA Conf. Pub. 2059, pp. 43-50 (1978).
8. D. N. ARNOLD AND W. L. WENDLAND: «On the asymptotic convergence of collocation methods». Preprint 665, TH Darmstad, Dept. of Mathematics, Fed. Rep. Germany (1982).
9. I. BABUSKA: «The selfadaptive approach in the FEM», in *Mathematics of Finite Elements and Applications* (J. R. Whiteman, Ed.), Academic Press, New York, 1975.
10. M. CERROLAZA, E. ALARCÓN: «P-adaptive boundary elements for 3-D potential problems». *Communications in applied numerical methods*, Vol. 3, 335-344 (1987).
11. M. CERROLAZA, M.<sup>a</sup> S. GÓMEZ-LERA, E. ALARCÓN: «Elastostatics p-adaptive boundary elements for micros». *Software for Engineering Workstations*, 1988, 4. Enero.