

# APLICACION DEL METODO DE LAS CARACTERISTICAS A PROBLEMAS DE IMPACTO EN MEDIOS VISCOPLASTICOS

J. Gallego (\*); R. Alvarez (\*); W.K. Nowacki (\$); E. Alarcón (\*)

(\*) Universidad Politécnica de Madrid.

(\$) Institute of Fundamental Technological Research. Warsaw.

1. Resumen. - El método de las características es uno de los procedimientos más interesantes para el análisis de los problemas de impacto. Cuando el dominio es monodimensional su implementación es tan sencilla que pueden utilizarse microordenadores con todas las ventajas de interacción entre usuario y máquina debido a las facilidades de tratamiento gráfico. Además en esos casos es posible representar leyes materiales muy sofisticadas.

En este artículo se presentan los resultados obtenidos con un programa especialmente diseñado para el estudio de la propagación de ondas monodimensionales en medios viscoplásticos con muy variadas condiciones de sollicitación y contorno.

## 2. Medio de propagación elegido

Numerosos ensayos destinados a estudiar las propiedades dinámicas de los materiales plásticos, muestran que la mayoría de ellos se comportan en forma distinta al caso estático, siendo muy sensibles a la velocidad de deformación [1].

Siguiendo a P. M. NACHAI y a S.A. NURCH [2] se distingue entre medios elasto-viscoplásticos y elasto/viscoplásticos. La primera denominación se reserva para los materiales que muestran viscosidad, tanto en la fase elástica como en la plástica, mientras que la segunda se aplica cuando ello sucede sólo en las regiones plastificadas, de modo que antes de la plastificación, el medio se comporta como puramente elástico.

Las investigaciones sobre las ecuaciones constitutivas para medios elasto/viscoplásticos en el caso de pequeñas deformaciones dieron comienzo con los trabajos de HOHENEMSER y PRAGER [3]. Estas teorías fueron desarrolladas por SOKOLOVSKI y su generalización se debió a PERZYNA [5,6].

PERZYNA [5] propuso la siguiente ecuación para materiales sensibles a la velocidad de deformación:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

donde;

$\gamma$  es un coeficiente de viscosidad del material.

$\phi$  es generalmente una función no lineal del argumento  $F$ .

$F$  es la función de plastificación considerada:

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P) = \frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P)}{H} - 1$$

$H$  es el parámetro de rigidización del material.

El símbolo  $\langle \phi(F) \rangle$  se define como:

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{para } F \leq 0 \\ \phi(F) & \text{para } F > 0 \end{cases}$$

En el caso de un material elasto/visco-perfectamente plástico, la función  $F$  es independiente de las deformaciones, por tanto suponiendo la forma:

$$F = \frac{f(\sigma_{ij})}{K} - 1 \quad (2)$$

y citándose al criterio de HUBER-MISES, donde  $f(\sigma_{ij}) = (J_2)^{1/2}$ , y  $K$  representa el límite elástico a cortadura pura, la ecuación (1) para un estado de tensión uniaxial se reduce a la forma:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \langle \phi \left( \frac{|\sigma|}{\sigma_0} - 1 \right) \rangle \text{sign} \sigma \quad (3)$$

La naturaleza de la función  $\phi(F)$  en (3) ha sido ampliamente discutida por P. PERZYNA. Algunas de las formas propuestas son:

$$\begin{aligned} \phi(F) &= F \\ \phi(F) &= F^\delta \quad (\delta = 1, 2, 3, \dots) \\ \phi(F) &= e^{F-1} \end{aligned} \quad (4)$$

El mejor ajuste entre estas formas y la experiencia se obtiene para la ley exponencial (4.2) cuando  $\delta=5$ .

3. El método de las líneas características en el proceso de propagación de ondas elasto/visco-perfectamente plásticas en medios unidimensionales

El sistema de ecuaciones que rige el movimiento de un cuerpo homogéneo, isótropo y elasto/visco-perfectamente plástico, consiste de las tres ecuaciones de movimiento, las ecuaciones de compatibilidad y la ley de comportamiento (3). Así, para el caso unidimensional y suponiendo fuerzas de volumen nulas, el sistema se reduce a:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \langle \phi(F) \rangle \text{sign} \sigma$$

donde:

$$\phi(F) = \left( \frac{|\sigma|}{\sigma_0} - 1 \right)^5$$

Llamando  $v = \partial u / \partial t$ , velocidad de las partículas del medio y estableciendo la igualdad de derivadas cruzadas de  $u$  respecto de  $x$  y  $t$ , el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (5) se puede poner en forma matricial como:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{\frac{\partial u}{\partial t}} + \underset{\sim}{C} = 0 \quad (6)$$

donde:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{E} & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma^* \langle \phi(F) \rangle \text{sign} \sigma \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} \sigma \\ v \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

La ecuación característica se obtendrá imponiendo la condición  $|\underset{\sim}{A} - m\underset{\sim}{B}| = 0$ , con  $m = dx/dt$ , de donde las pendientes de las líneas características para (6) corresponden a los autovalores:

$$m = 0$$

$$m = \pm C; \text{ donde } C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ es la celeridad de las ondas.}$$

Los autovectores se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\underset{\sim}{\lambda}^T [\underset{\sim}{A} - m \underset{\sim}{B}] = 0 \text{ por lo que:}$$

$$\text{para } m = 0 \quad \underset{\sim}{\lambda}_1^T = [0, 0, 1]$$

$$\text{para } m = \pm C \quad \underset{\sim}{\lambda}_{2,3}^T = \left[ \mp \frac{1}{\rho C}, 1, 1 \right]$$

Las "relaciones sobre las características" se obtienen de las ecuaciones:

$$\underset{\sim}{\lambda}^T \underset{\sim}{A} \frac{du}{ds} + \underset{\sim}{\lambda}^T \underset{\sim}{C} \frac{dx}{ds} = 0 \quad \text{y} \quad \underset{\sim}{\lambda}^T \underset{\sim}{B} \frac{du}{ds} + \underset{\sim}{\lambda}^T \underset{\sim}{C} \frac{dt}{ds} = 0$$

resultando:

- Para las líneas  $x = \text{cte}$ :

$$d\sigma - \rho c^2 d\varepsilon + \rho c^2 \gamma^* \langle \phi(F) \rangle \text{Sign} \sigma dt = 0 \quad (7)$$

- Para las líneas  $x = \pm ct + \text{cte}$ :

$$d\sigma \mp \rho c dv \pm \rho c \gamma^* \langle \phi(F) \rangle \text{Sign} \sigma dx = 0 \quad (8 \text{ y } 9)$$

Es posible así obtener los valores de  $\sigma$ ,  $v$  y  $\varepsilon$  en el dominio en estudio  $(x, t)$  resolviendo el sistema de ecuaciones (7, 8 y 9) para una serie de puntos caracterizados por ser el lugar de cruce de las líneas características del problema.

#### 4. Resolución Numérica

##### 4.1. Generación de la Malla

El medio en estudio, puede estar compuesto por tramos de distintas características, tanto geométricas como del material; por tanto las pendientes de las líneas características serán diferentes para cada tramo. Por otro lado la función de carga puede presentar singularidades que han de ser recogidas por el  $\Delta t$  que se fije.

Para conjugar estos factores se ha seguido un método de aproximaciones sucesivas en el que se varían los parámetros que definen la geometría de la malla  $\Delta t$  e  $\Delta x$ , comparando los errores cometidos por la aplicación de un  $\Delta t$  propuesto y posteriormente modificado, tanto en el tiempo total de estudio como en las longitudes de los diferentes tramos y en los valores de la función

de carga, con los errores que para cada uno de estos factores se han fijado previamente,

Por ejemplo, para el caso de una barra compuesta por 3 tramos de características diferentes se obtiene la siguiente malla:

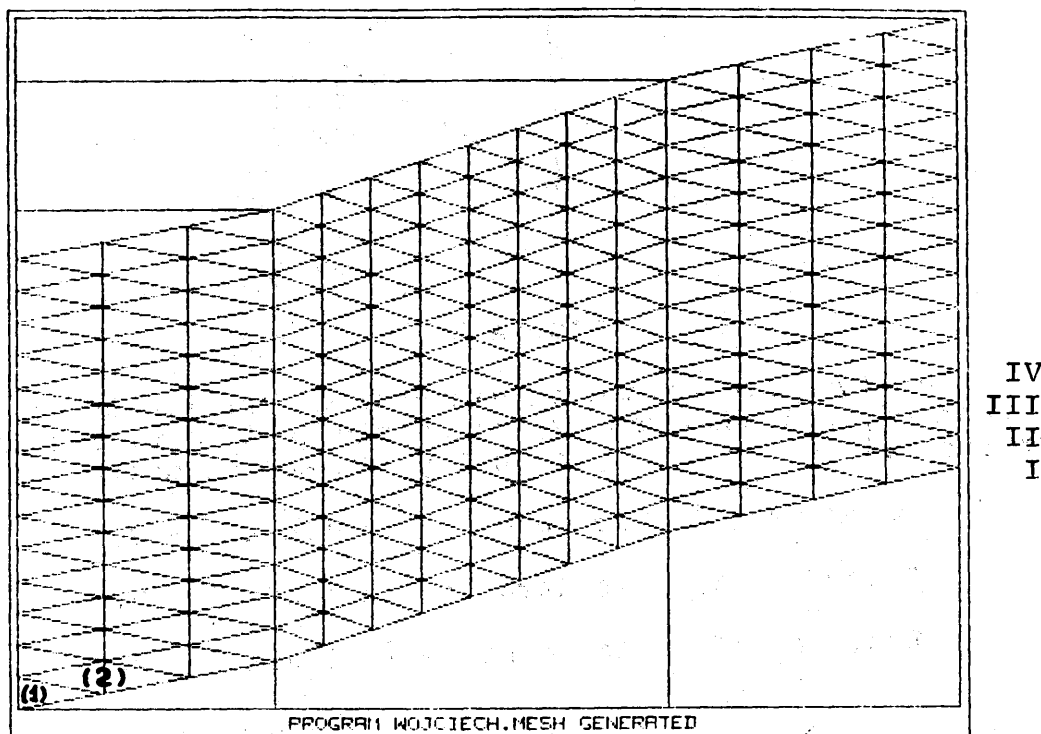


FIGURA 1

#### 4.2. Integración de las Ecuaciones

Considérese en primer lugar una barra semiinfinita sometida a una carga función del tiempo en su extremo inicial.

De las condiciones iniciales del problema, en todos los puntos sobre y bajo la línea  $x=ct$ , el vector  $\mu$  es nulo, pues aún no ha llegado a ellos la onda de tensión, que se mueve precisamente con una velocidad  $c$ . En los puntos sobre la línea  $x=0$ , es conocido el valor de la  $\sigma$  sin más que introducir la función de carga para un  $t$  dado.

En un triángulo como el indicado en la figura 1 con (1), - las únicas incógnitas son los valores de  $V$  y  $\epsilon$  para el punto  $P$ , que se obtienen resolviendo el sistema formado por las ecuaciones:

- Ecuación (7) a lo largo de línea 1 - P,
- Ecuación (9) a lo largo de la línea 2 - P.

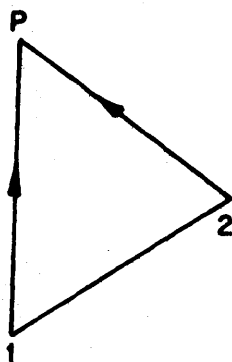


FIGURA 2

La siguiente unidad fundamental de resolución es el llamado "Diamante", indicado con (2) en la figura 1. Aquí las incógnitas son los valores de  $\sigma$ ,  $v$  y  $\epsilon$  en P y las ecuaciones:

- Ecuación (8) a lo largo de la línea 1 - P.
- Ecuación (9) a lo largo de la línea 3 - P.
- Ecuación (7) a lo largo de la línea 2 - P.

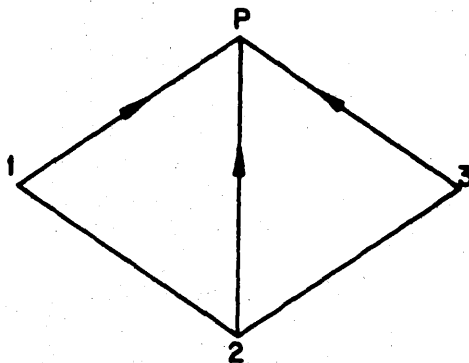


FIGURA 3

Mediante elementos "diamante" se pueden determinar los valores de  $\mu$  en todos los puntos de la línea II, que posteriormente cumplirían en el proceso de cálculo de la línea III la misma misión que las condiciones iniciales asignadas a la línea I. Este proceso se repetirá tantas veces como sea necesario para cubrir el tiempo total de estudio.

Es necesario en este punto, hacer una observación respecto a la obtención del valor de  $\Phi(F)$ , dado que el mismo depende de la  $\sigma$  en el punto a determinar. El procedimiento a seguir, es calcular

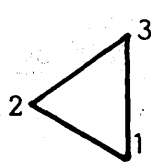
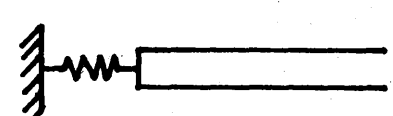
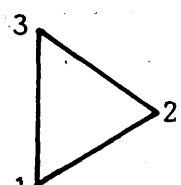
el valor de  $\sigma$  en el punto incógnita a partir del valor de  $\phi(F)$  en el punto anterior sobre la línea de cálculo, para posteriormente con este nuevo valor de  $\sigma$  repetir el proceso tantas veces como sea necesario hasta que el error cometido sea menor que el previamente seleccionado.

Considérese en segundo lugar una barra semiinfinita que, moviéndose con una determinada velocidad choca contra un obstáculo totalmente rígido. En este caso, de las condiciones iniciales en los puntos sobre la línea  $x=c.t$ , el valor de  $v$  será el de la velocidad considerada y los de  $\sigma$  y  $\epsilon$  nulos. En el triángulo inicial, no será ya conocido el valor de  $\sigma$  para el punto P, sino que se impondrá la condición  $v=0$ , hasta que la  $\sigma$  en dicho punto sea de tracción, momento en el que se habrá producido el "rebote" de la barra comportándose por tanto este extremo como "libre". El proceso posterior de resolución a través de elementos "diamante" es en todo análogo al descrito en el caso anterior.

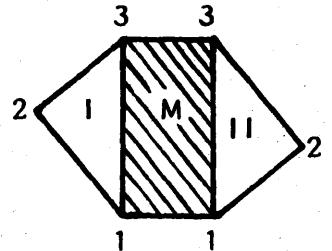
En el caso que la barra esté compuesta por tramos de distintas características, los pasos a seguir son idénticos a los ya mencionados, hasta el encuentro con el punto de unión de dos de ellos. Ahora en el punto P se tienen 6 incógnitas de  $u^1$  y  $u^2$ . Las 6 ecuaciones provienen de la condición de compatibilidad dinámica  $v_1^p = v_2^p$ , del equilibrio de fuerzas en la sección  $\Delta_1 \sigma_1 = \Delta_2 \sigma_2$ , y de las correspondientes ecuaciones sobre las líneas características para cada tramo.

#### 4.3. Condiciones de Contorno

Se consideran a continuación de manera esquemática distintas condiciones de contorno que se han incorporado al programa.

CASO	CONDICION A IMPONER
Extremo final fijo Extremo final libre	$v_3 = 0$ $\sigma_3 = 0$ 
Obstáculo Elástico (K) 	$v_3 = v_{inic} \cdot e^{-\frac{K}{\rho c \Delta} t}$ 

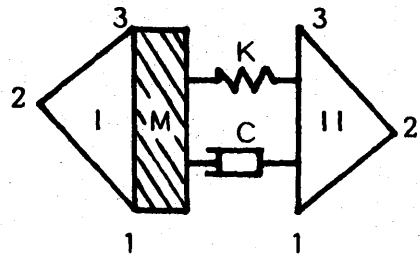
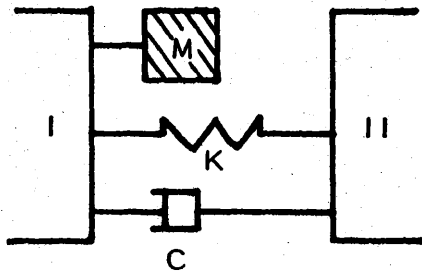
Interposición de Masa rígida.



$$v_3^I = v_3^{II}$$

$$\Delta_I \sigma_3^I - \Delta_{II} \sigma_3^{II} = \frac{v_3^I - v_1^I}{\Delta t} \cdot M$$

Interposición de Masa amortiguador y Muelle



$$\sigma_3^I \Delta_I - \sigma_3^{II} \Delta_{II} = M \cdot \frac{v_3^I - v_3^{II}}{\Delta t}$$

$$\frac{\sigma_3^{II} - \sigma_1^{II}}{\Delta t} \cdot \Delta_{II} = K(v_3^{II} - v_3^I) +$$

$$+ C \left[ \frac{(v_3^{II} - v_3^I) - (v_1^{II} - v_1^I)}{\Delta t} \right]$$

## 5. Ejemplos

### 5.1. Condiciones de contorno

Considérese una barra de longitud finita y material totalmente elástico que es sometida a una función de carga en su extremo inicial, tal como la que se representa en la figura 4.



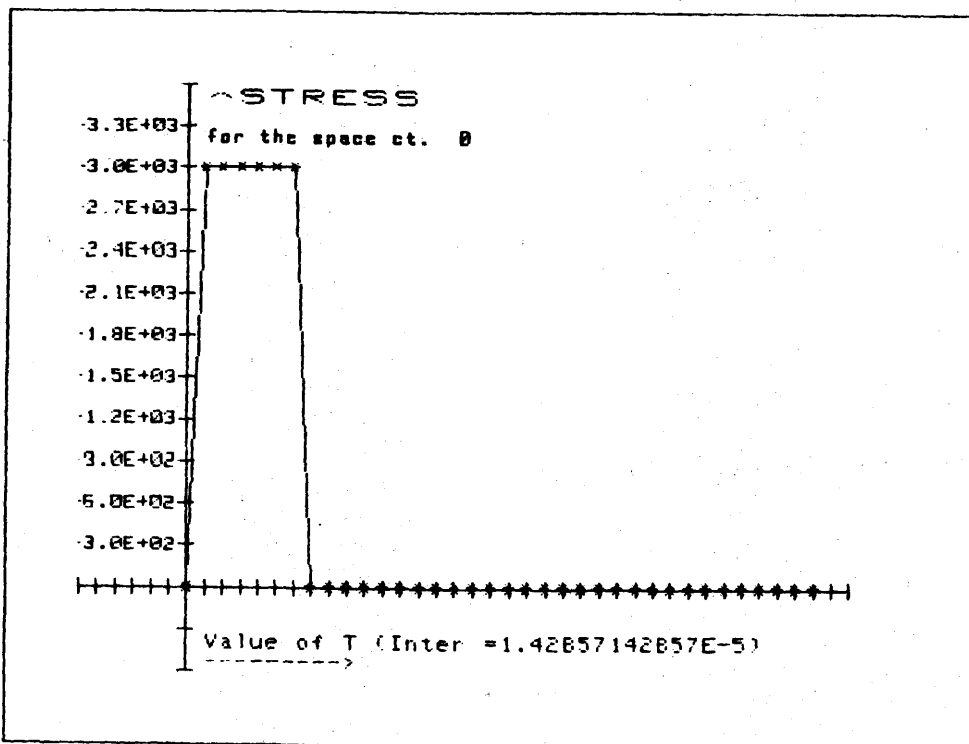


FIGURA 4

La representación de los valores de la tensión en la sección media de dicha barra, obtenidos mediante el programa WOJCIECH, son los que se muestran en la figura 5 para el caso de que el extremo final esté "Fijo" y 6 en el caso "Libre".

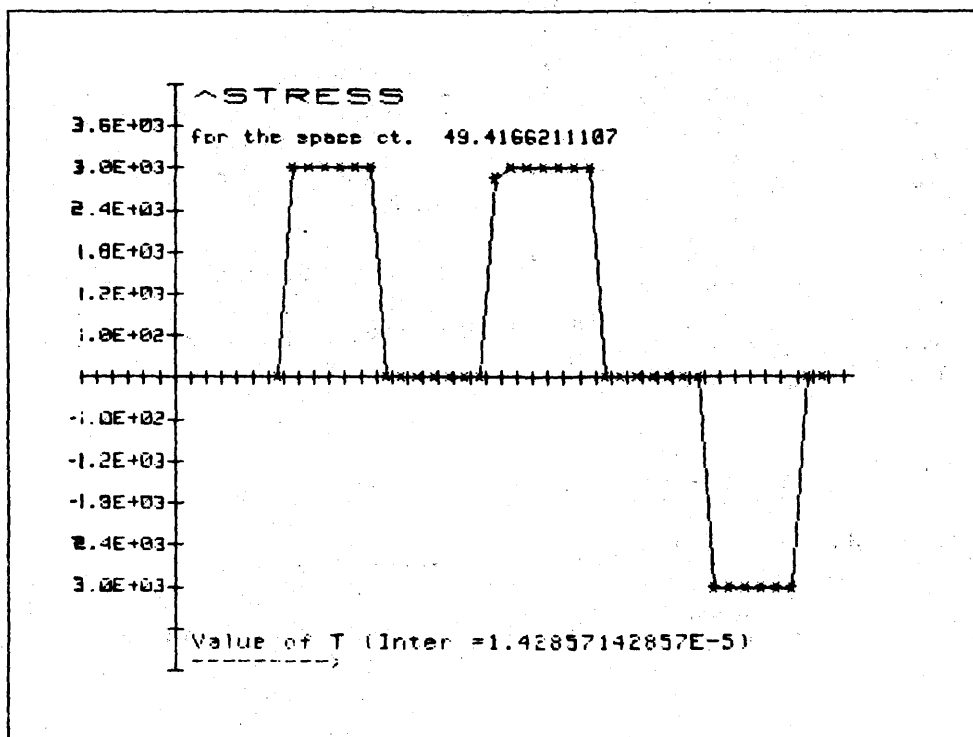


FIGURA 5

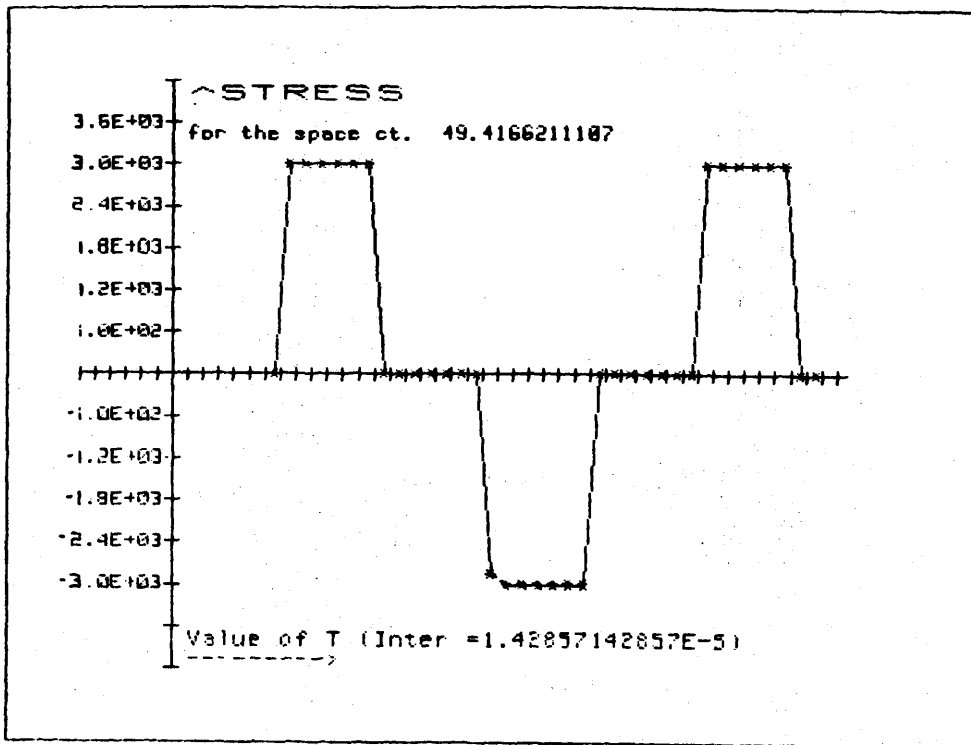


FIGURA 6

En ellas puede observarse cómo se cumplen las leyes de reflexión de ondas, según las distintas condiciones de contorno.

Así en la figura 5 se aprecia un primer escalón de carga, consecuencia de su aplicación en el extremo inicial, y a continuación el paso de otro escalón con las mismas características - que el inicial, procedente de la reflexión de la onda en el extremo fijo. Por último al reflejarse este último en el extremo inicial libre, la sección media acusa el paso de un escalón de carga del mismo valor absoluto y signo opuesto.

De esta manera, por ser el material totalmente elástico, no existe pérdida alguna de tensión en el escalón, produciéndose por tanto una secuencia indefinida de dos escalones positivos y dos negativos para el extremo fijo, y de un escalón positivo y otro negativo para el libre.

## 5.2. Material elasto/viscoplástico

Considérese ahora una barra de longitud finita con condiciones de contorno Libre-Fijo, sometida a una carga escalón como la de la figura 4 y de material Elasto/viscoplástico cuya función de viscoplasticidad es de la forma: [6]

$$\phi(F) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)^\delta$$

Con  $\delta=5$  y un límite de plasticidad  $\sigma_0 = 2500$ .

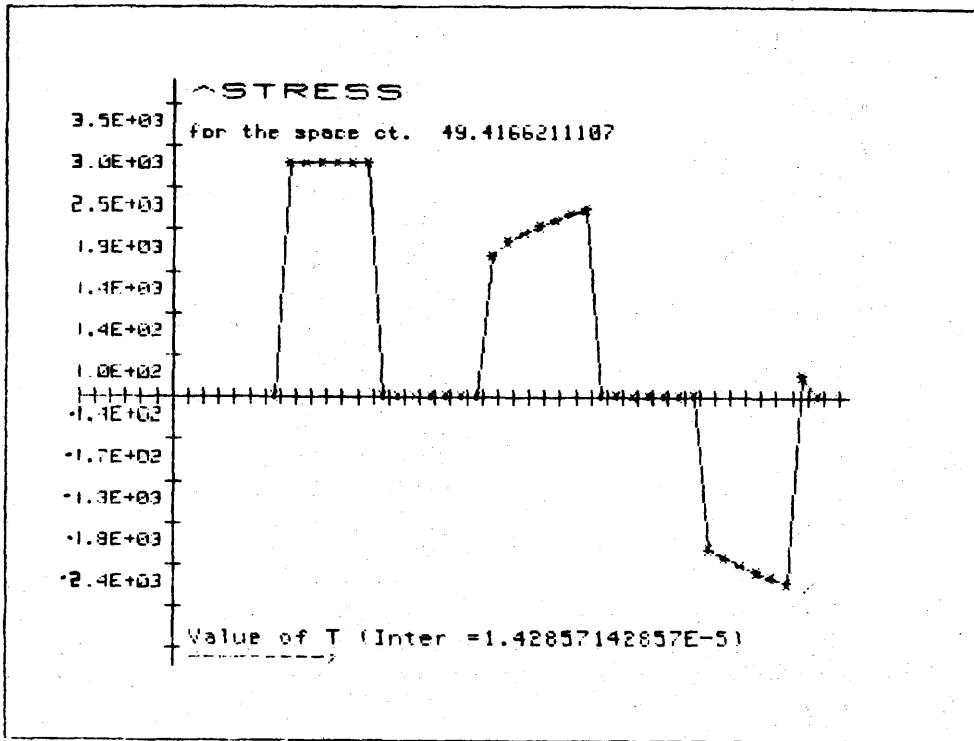


FIGURA 7

Los resultados obtenidos mediante "WOJCIECH" para la sección media se muestran en la figura 7. En ésta se aprecia cómo al superarse el límite elástico del material, se produce una pérdida de tensión en el escalón, más acusada a medida que la onda recorre la barra, hasta que, situándose las tensiones en el rango elástico, permanecen con el mismo valor en forma indefinida.

### 5.3. Choque contra obstáculo totalmente rígido

Cuando una barra perfectamente elástica, moviéndose con una velocidad de 13 m/seg  $\sim$  50 Km/h choca contra un obstáculo totalmente rígido, la situación en velocidad de su extremo inicial se muestra en la figura 8.

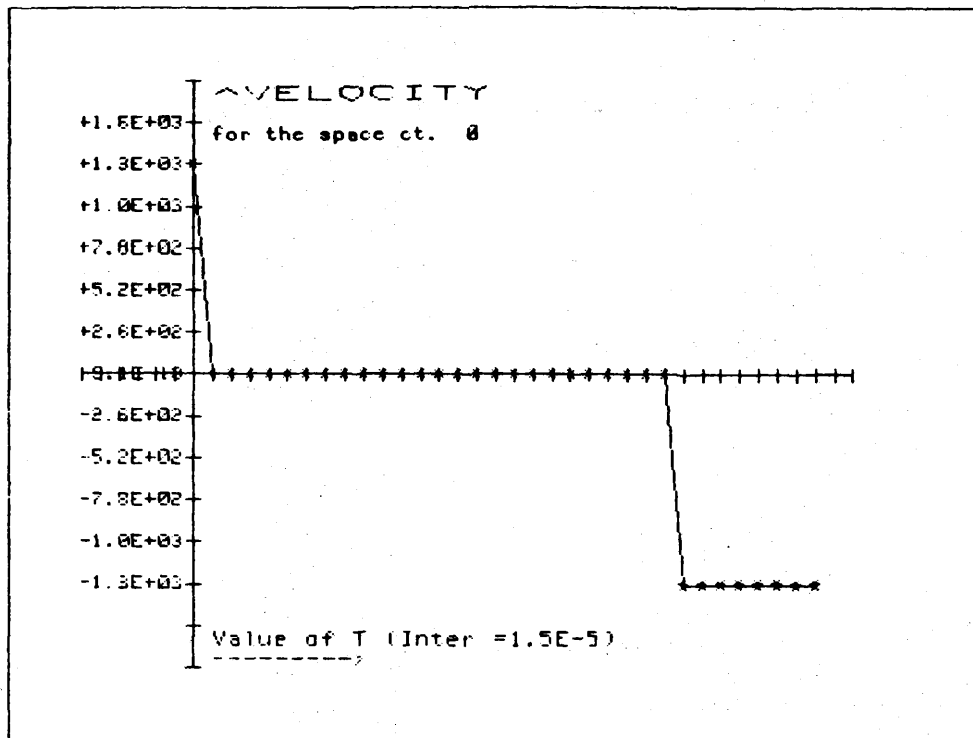


FIGURA 8

Como puede verse en Ref. 7, la sección inicial pasa en el primer instante del proceso, desde la velocidad de choque hasta una velocidad cero, permaneciendo así hasta que la onda de velocidad reflejada en el extremo libre, con el mismo valor y signo que la incidente, alcanza - el extremo inicial, instante en que todos los puntos de la barra se encuentra con la misma velocidad de -13 m/seg, moviéndose ésta por tanto como sólido libre en sentido opuesto al inicial.

En las figuras 9 y 10, se representan los valores en velocidad y los correspondientes en tensión para la sección media. Puede observarse cómo al primer paso de la onda de velocidad, la sección se comprime, permaneciendo así hasta el instante en que es alcanzada por la onda reflejada que por superposición de una tracción del mismo valor absoluto que la compresión inicial, deja a la sección libre de tensión.

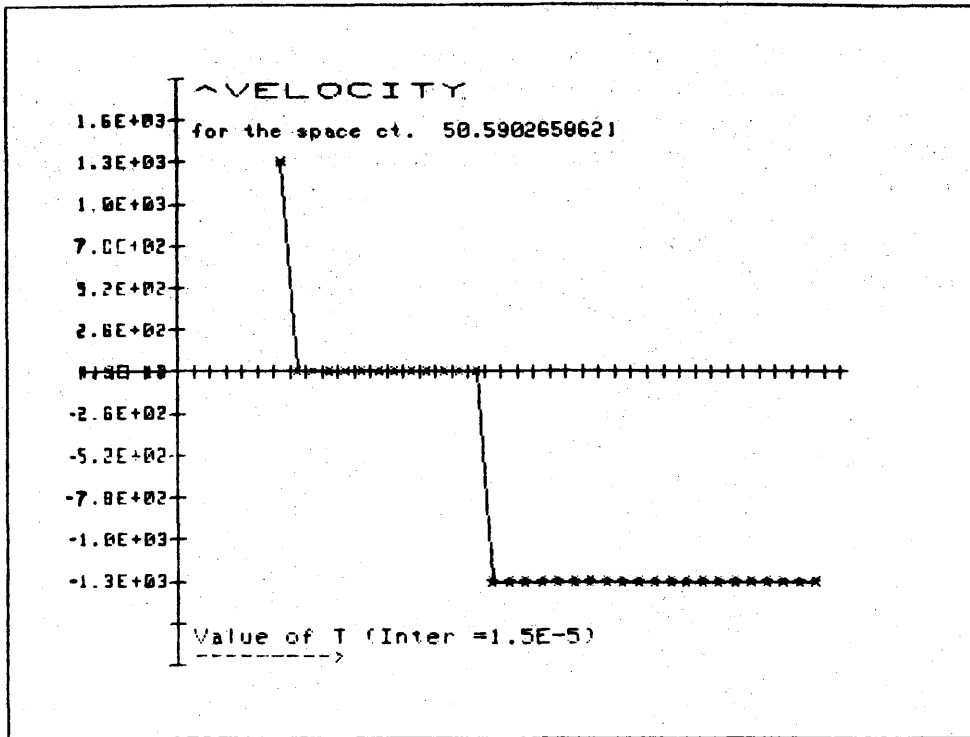


FIGURA 9

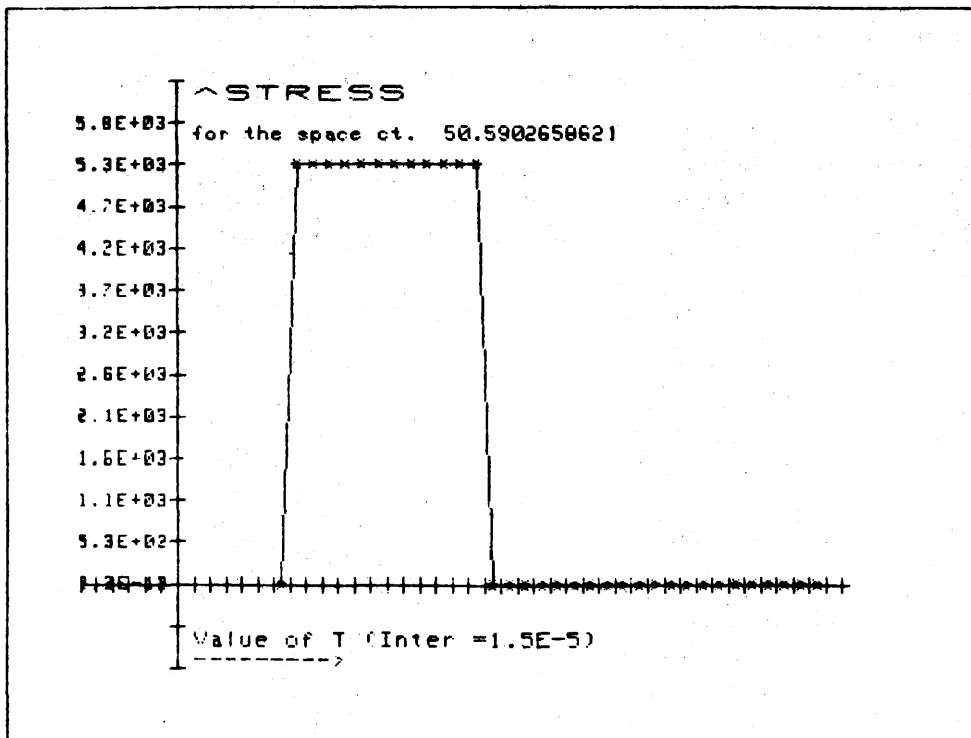


FIGURA 10

#### 5.4. Reflexión y transmisión

Considérese una barra compuesta por dos tramos de longitud finita, cuyas áreas están en proporción uno a dos. Los resultados obtenidos por aplicación del programa WOJCIECH se representan en las figuras 11 y 12 para secciones muy próximas a la media en cada uno de los tramos, estando el conjunto Libre-Fijo.

Observando ambas figuras se aprecia cómo se cumplen las leyes de transmisión y reflexión al paso de una onda, de un medio a otro de características distintas, Ref. 8.

$$\sigma_{\text{transm}} = \frac{2\Delta_1 \rho_1 c_1}{\Delta_1 \rho_1 c_1 + \Delta_2 \rho_2 c_2} \sigma_{\text{incid.}}$$

$$\sigma_{\text{reflej}} = \frac{\Delta_2 \rho_2 c_2 - \Delta_1 \rho_1 c_1}{\Delta_2 \rho_2 c_2 + \Delta_1 \rho_1 c_1} \sigma_{\text{incid.}}$$

Así como el equilibrio de fuerzas en la sección media:

$$\Delta_1 \sigma_1 = \Delta_2 \sigma_2$$

De esta manera, habiendo introducido en la sección inicial un escalón de 3000, el primer escalón de carga se eleva a 4000 en la sección anterior, proveniente de la superposición de la  $\sigma_{\text{incid.}}$  y la  $\sigma_{\text{reflej.}}$ , y a 2000 en la sección posterior, proveniente de la  $\sigma_{\text{transm}}$ .

Los restantes escalones de carga, provienen de las sucesivas reflexiones en los extremos fijo y libre; y las reflexiones y transmisiones en la unión de ambos tramos.

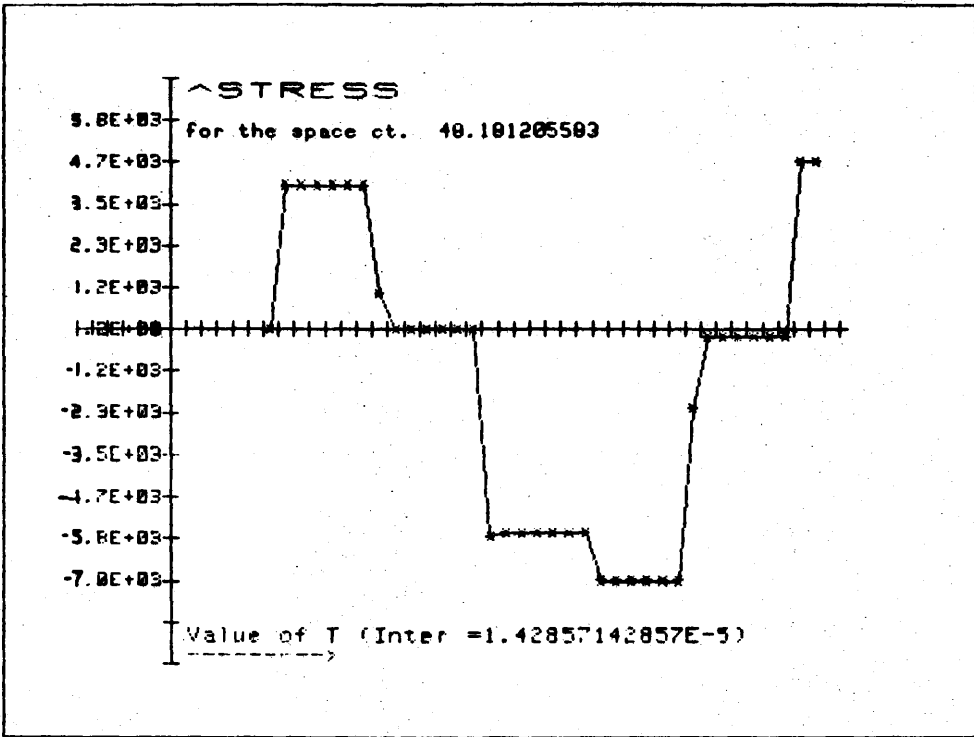


FIGURA 11

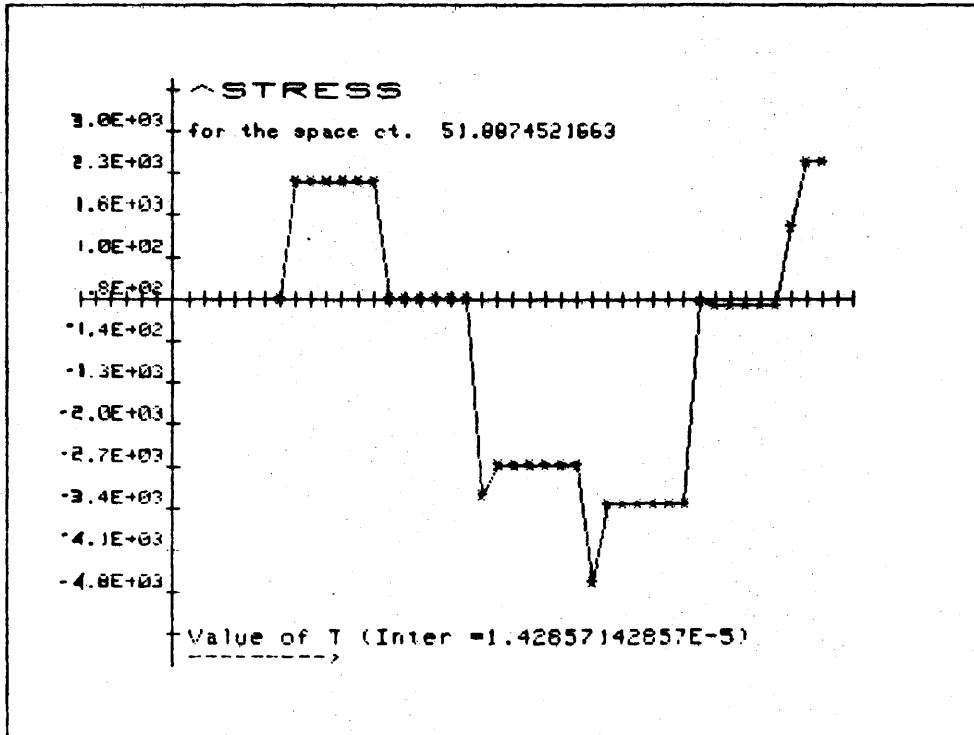


FIGURA 12

## REFERENCIAS

- 1.- NOWACKI, W.K., "STRESS WAVES IN NON-ELASTIC SOLIDS". OXFORD. Ed. PERGAMON PRESS, 1978.
- 2.- NAGHDI, P.M. and MURCH, S.A., "ON THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF VISCOELASTIC/PLASTIC SOLIDS". TECHN. REPORT. UNIV. CALIFORNIA, 1963.
- 3.- HOHENEMSER, K. and PRAGER, W. "UBER DIE ANSATZE DER MECHANIK ISOTROPER KONTINUA". A. ANGEW. MATH. MECH. 1932, Vol 12.
- 4.- MALVERN, L.E., "THE PROPAGATION OF LONGITUDINAL WAVES OF PLASTIC DEFORMATIONS IN A BAR OF MATERIAL EXHIBITING A STRAIN - RATE EFFECT". J. Appl. MECH. 1951, 18.
- 5.- PERZYNA, P., "THE CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR RATE SENSITIVE PLASTIC MATERIALS", Appl. MATH. 1963, 20.
- 6.- PERZYNA, P., "THE CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR WORK-HARDENING AND RATE SENSITIVE PLASTIC MATERIALS". PROC. VIBR. PROBL. - 1963, 4,4.
- 7.- JONAS A. ZUKAS, THEODORE NICHOLAS, HALLOCK F. SWIFT, LONGIN B. GRESZCZUK and DONALD R. CURRAN., "IMPACT DYNAMICS". Ed. JOHN WILEY & SONS. 1982.
- 8.- KARL. F. GRAFF., "WAVE MOTION IN ELASTIC SOLIDS". OHIO STATE UNIVERSITY PRESS. 1975.