

## APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS DINAMICOS EN MEDIOS INCOMPRESIBLES

J. Mateo (\*), E. Alarcón (\*\*)

(\*) E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad Pontificia Comillas, Alberto Aguilera 23, 28015 Madrid.

(\*\*) E.T.S. de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, José Gutiérrez Abascal 2, 28006 Madrid

### RESUMEN

Los métodos numéricos, como es sabido, son en muchas ocasiones altamente sensibles a las situaciones singulares que se presentan en diversos problemas de ingeniería, pudiendo dar lugar a errores, locales o globales, que invalidan los resultados proporcionados por un modelo que, en principio, se supone bien planteado.

Tal es el caso de la aplicación del Método de los Elementos de Contorno a problemas dinámicos en medios incompresibles, donde el Coeficiente de Poisson se aproxima a su valor límite de 0,5. En estas circunstancias, según el modelo clásico de propagación de ondas, la velocidad de propagación de las ondas longitudinales (ondas P) tiende a infinito, lo que hace inoperantes las expresiones explícitas de la solución fundamental (o función de ponderación) tal como aparecen en la literatura técnica.

El recurso de aproximar el valor de dicho Coeficiente como 0,499... conduce en ocasiones a resultados insuficientemente exactos cuando no manifiestamente erróneos, especialmente cuando se trabaja con simple precisión, como consecuencia de los errores de truncamiento en expresiones que, en el límite, serían de la forma: (cero)x(infinito).

En el presente artículo se muestran los resultados analíticos de las diversas formas indeterminadas que aparecen en la aplicación del método para el caso aludido.

Los resultados son de aplicación a diversos problemas de fluidos, así como a problemas de interacción suelo-estructura en terrenos arcillosos.

Se presenta un ejemplo de aplicación que muestra la convergencia de la solución obtenida por el procedimiento propuesto, en contraste con la no-convergencia a que conduce la aproximación del Coeficiente de Poisson como 0,499...

### 1. INTRODUCCION

La aplicación del Método de los Elementos de Contorno (M.E.C.) a problemas de Elastostática y Elastodinámica se basa en la consideración de un estado real de cargas junto con un estado virtual, que actúa como función de ponderación. La identidad de Somigliana expresada en la forma:

$$c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} p^* u = \int_{\Gamma} u^* p + \int_{\Omega} u^* b \quad (1)$$

una vez discretizada, proporciona la formulación matricial del problema, permitiendo la obtención de los vectores desplazamiento o los vectores tensión, incógnitas en el contorno del problema.

$\Omega$  es el dominio del problema y  $\Gamma$  su contorno

$u, p$  son, respectivamente, los vectores desplazamiento y tensión en el contorno

$b$  es el vector de fuerzas de masa

$u^*, p^*$  constituyen la llamada "solución fundamental"; son los desplazamientos y tensiones correspondientes a la carga virtual; ésta consiste en una carga puntual actuante según una dirección del espacio en un dominio infinito

$u(\xi)$  es el desplazamiento en el punto  $\xi$  del contorno, en el que se supone aplicada la carga virtual; la consideración de distintas posiciones de  $\xi$  permite formar el sistema de ecuaciones que define la formulación matricial del problema

$c(\xi)$  es una matriz de coeficientes que depende de la forma del contorno en  $\xi$ ; en particular:  $c_{jk} = \delta_{jk}/2$  si el contorno es liso en  $\xi$  ( $\delta_{jk}$  es la delta de Kronecker)

La expresión (1) ha sido obtenida tras una operación paso al límite, haciendo tender  $\xi$  desde un punto del interior de  $\Omega$  al contorno  $\Gamma$ ; como consecuencia, las integrales en  $\Gamma$  toman estrictamente su valor principal de Cauchy.

En Elastodinámica, para el dominio de la frecuencia, la solución fundamental de los desplazamientos es de la forma:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{\alpha \pi \rho c_s^2} (\psi \delta_{kl} - \chi_{r,k} r_{,l}) \quad (2)$$

y la de las tensiones en el contorno:

$$p_{lk}^* = \frac{1}{\alpha \pi} \left[ \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) (\delta_{lk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_l) - 2 \frac{\chi}{r} (r_{,l} n_k - 2 r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n}) - \right. \\ \left. - 2 \frac{d\chi}{dr} r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} + \left( \frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\alpha \chi}{2 r} \right) r_{,l} n_k \right] \quad (3)$$

donde:

el primer subíndice ( $l$ ) se refiere a la dirección de la carga virtual, y el segundo ( $k$ ) a la componente del desplazamiento o de la tensión

para el problema bidimensional (2D):  $\alpha=2$ , y para el tridimensional (3D):  $\alpha=4$

$\rho$  es la densidad del material

$c_s, c_p$  son las velocidades de propagación de las ondas transversales y longitudinales, respectivamente

$r$  es el módulo del vector posición de un punto genérico del contorno respecto al punto de aplicación

de la carga virtual; los subíndices precedidos de coma denotan la derivada espacial en la dirección correspondiente

$n$  es la dirección de la normal exterior en el punto del contorno considerado

las funciones  $\psi$ ,  $\chi$ , diferentes según se trate de 2D ó 3D, se expresan más adelante

Una vez resuelto el problema del contorno, el M.E.C. permite el cálculo de desplazamientos y tensiones en puntos del interior de  $\Omega$ . Para el cálculo de los desplazamientos basta con aplicar la ecuación (1) situando  $\xi$  en el punto interno de interés;  $c(\xi)$  es en este caso la matriz unidad. Las tensiones se determinan por diferenciación de los desplazamientos, mediante una expresión de la forma:

$$\sigma_{ij} = - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k + \int_{\Gamma} D_{kij} p_k + \int_{\Omega} D_{kij} b_k \quad (4)$$

Para más detalles sobre el M.E.C. y deducción de las expresiones anteriores se pueden consultar las referencias: C.A.Brebbia (1992), J.Domínguez (1993).

## 2. EL PROBLEMA DE LOS MEDIOS INCOMPRESIBLES

Las funciones  $\psi$ ,  $\chi$ , mencionadas anteriormente dependen, como se verá más adelante, de las velocidades de propagación de las ondas transversales y longitudinales:  $c_s$ ,  $c_p$ .

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad , \quad c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

donde:  $\mu$ ,  $\lambda$ , son las constantes de Lamé (características del material). En el caso de material de comportamiento elástico, las constantes citadas son números reales; para comportamiento viscoelástico, trabajando con el M.E.C. en el dominio de la frecuencia, basta sustituir dichos parámetros por las expresiones complejas:  $\lambda^* = \lambda(1+2i\beta)$ ,  $\mu^* = \mu(1+2i\beta)$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria y  $\beta$  el coeficiente de amortiguamiento histerético (independiente de la frecuencia).

La expresión de  $\lambda$  en función de otros parámetros más usuales, como son el módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

denota que, para un material incompresible, es decir, con coeficiente de Poisson  $\nu=0.5$ ,  $\lambda$  se hace infinita y con ella el módulo de  $c_p$ . Esto causa problemas cuando se trata de aplicar los programas de cálculo habituales, elaborados sin tener en cuenta esta circunstancia. El recurso de hacer  $\nu=0.499\dots$  no siempre proporciona soluciones correctas, especialmente si se trabaja con simple precisión.

Como solución más inmediata, cabe programar con la variable  $1/c_p$  en lugar de con  $c_p$ . Así se consigue al menos que el programa no se detenga en sus primeros pasos (por ejemplo, tratando de calcular la propia  $c_p$  a partir de otros datos), e incluso se salvan numerosas situaciones posteriores. Pero esto no es todo; tal como se analiza en los apartados siguientes, especialmente en los problemas 2D, surgen dificultades adicionales.

3. CASO BIDIMENSIONAL

Para la determinación de la solución fundamental es necesario, tal como se ha expuesto, el cálculo de las funciones  $\psi$ ,  $\chi$  así como de sus derivadas primeras; el cálculo de los tensores  $S_{kij}$ ,  $D_{kij}$  que aparecen en (4) exige, además de lo anterior, el cálculo de las derivadas segundas (veanse las referencias citadas). Las expresiones que al efecto aparecen en la literatura técnica adolecen de los problemas señalados. Por ello, se proponen las siguientes expresiones equivalentes, en las que se señalan entre corchetes [ ] diversas indeterminaciones de la forma (cero)x(infinito), cuya solución se expone después.

En lo que sigue:

$$z_s = \frac{i\omega r}{C_s} \quad , \quad z_p = \frac{i\omega r}{C_p}$$

llamando  $i$  a la unidad imaginaria y  $\omega$  a la frecuencia angular.

En las expresiones de las funciones  $\psi$ ,  $\chi$  y sus derivadas, las expresiones:  $K_0$ ,  $K_1$  y  $K_2$  son las funciones de Bessel modificadas de segunda especie y orden 0, 1 y 2:

$$\psi = K_0(z_s) + \frac{1}{z_s} \left\{ K_1(z_s) - \frac{1}{z_s} [z_p K_1(z_p)] \right\}$$

$$\chi = K_2(z_s) - \frac{1}{z_s^2} [z_p^2 K_2(z_p)]$$

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{r} \left\{ -z_s K_1(z_s) - K_2(z_s) + \frac{1}{z_s^2} [z_p^2 K_2(z_p)] \right\}$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{r} \left\{ -z_s K_1(z_s) - 2K_2(z_s) + \frac{2}{z_s^2} [z_p^2 K_2(z_p)] + \frac{C_s^2}{C_p^2} [z_p K_1(z_p)] \right\}$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \left\{ (3+z_s^2) K_2(z_s) - \frac{3}{z_s^2} [z_p^2 K_2(z_p)] - \frac{C_s^2}{C_p^2} [z_p K_1(z_p)] \right\}$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \left\{ (6+z_s^2) K_2(z_s) + z_s K_1(z_s) - \left( \frac{6}{z_s^2} + \frac{C_s^2}{C_p^2} \right) [z_p^2 K_2(z_p)] - \frac{C_s^2}{C_p^2} [z_p K_1(z_p)] \right\}$$

Las funciones de Bessel:  $K_0(z)$ ,  $K_1(z)$  y  $K_2(z)$ , tienden a infinito para  $z \rightarrow 0$ . Así, el problema se reduce, por el momento, a la resolución de dos indeterminaciones de la forma (cero)x(infinito), más una tercera implícita en las anteriores, ya que:

$$K_2(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} K_1(z)$$

Considerando los desarrollos en serie de las funciones de Bessel (McLachlan, 1955), los resultados de los límites correspondientes para  $|c_p| \rightarrow \infty$ , es decir,  $z_p \rightarrow 0$  son:

$$z_p^2 K_0(z_p) = 0 \quad , \quad z_p K_1(z_p) = 1 \quad , \quad z_p^2 K_2(z_p) = 2$$

Surge otra indeterminación más en el último sumando de (3), ya que la expresión:

$$\left( \frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right)$$

es de la forma: (infinito)x(cero). Por otra parte, resulta de interés realizar algunas simplificaciones con carácter general (no sólo para medio incompresible), tendentes a reducir errores de redondeo. Tras algunas operaciones, se llega a:

$$\left( \frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) = \frac{1}{r} \left( 2 \frac{c_s^2}{c_p^2} - 1 \right) [ z_p K_1(z_p) ]$$

donde se ha señalado con [ ] una indeterminación (ya resuelta). Resulta curiosa la enorme simplificación que sufre esta expresión al pasar al caso límite, reduciéndose a:  $-1/r$ . Dicha expresión aparece nuevamente (requiere diversas operaciones para agrupar términos convenientemente) en el cálculo de los tensores  $S_{kij}$ ,  $D_{kij}$  para la determinación de tensiones en los puntos internos.

En la programación del método, se puede establecer como variables las formas indeterminadas y, mediante sentencias condicionales, se les puede atribuir su valor límite (si  $\nu=0,5$ ) o bien calcular su valor numérico (si  $\nu < 0,5$ ).

#### 4. CASO TRIDIMENSIONAL

En este caso, las indeterminaciones en las expresiones de  $\psi$ ,  $\chi$  y sus derivadas, tal como aparecen en las referencias mencionadas, se pueden eliminar mediante simples operaciones aritméticas, por lo que no procede mayor comentario. En cambio, sí se estima de interés la expresión simplificada del último sumando de (3), que resulta, con carácter general:

$$\left(\frac{c_r^-}{c_r^+} - 2\right) \left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \left(2\frac{c_r^-}{c_r^+} - 1\right) (1+z_0) e^{-z_0 r}$$

y cuyo valor límite para  $v=0.5$  es:  $-1/r^2$ .

### 5. EJEMPLO NUMERICO

Con el fin de ilustrar el procedimiento propuesto, se exponen algunos resultados obtenidos en el modelo bidimensional esquematizado en la figura 1; en un medio semi-infinito (parte inferior de la figura) con el contorno representado, se ha aplicado una carga armónica triangular de valor máximo unidad y frecuencia angular:  $0.2 \text{ s}^{-1}$ . Las propiedades mecánicas atribuidas al medio son:

Módulo de elasticidad transversal ( $G$ ó $\mu$ )	1.0
Coefficiente de amortiguamiento histerético ( $\beta$ )	5%
Densidad del material ( $\rho$ )	1.0
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	variable de 0.3 a 0.5

La variable analizada ha sido la respuesta en componente real de la tensión normal sobre la línea AB ( $\sigma_r$ ). En la figura 2 se aprecia una evolución regular de la respuesta al variar  $\nu$  de 0.30 a 0.50, habiéndose calculado este último valor mediante el procedimiento propuesto. En la figura 3 se muestra el efecto de tratar de aproximar el comportamiento del medio incompresible haciendo  $\nu=0.499\dots$  (se ha trabajado en simple precisión), observando como se desvirtúa la respuesta al aumentar el número de nueves; la mejor aproximación se consigue para  $\nu=0.499$ , lo que puede servir de referencia para el uso de programas que no calculen con el valor límite.

### REFERENCIAS

- Brebbia, C.A.; Dominguez, J.** (1992) "*BOUNDARY ELEMENTS. AN INTRODUCTORY COURSE*". Second Edition. Comput. Mech. Publ. and McGraw-Hill Book Comp. Southampton and New York.
- Dominguez, J.** (1993) "*BOUNDARY ELEMENTS IN DYNAMICS*". Computational Mechanics Publications Southampton Boston, co-published with Elsevier Applied Science. London New York.
- McLachlan, N.W.** (1955) "*BESSEL FUNCTIONS FOR ENGINEERS*". Second Edition. Oxford at the Clarendon Press.

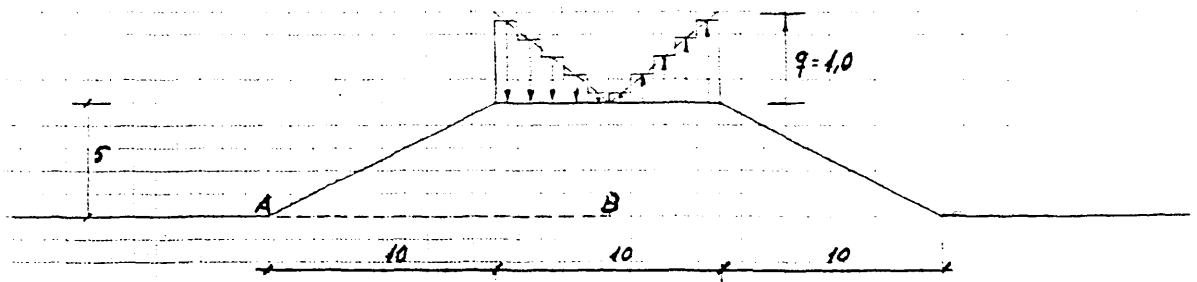


Figura 1

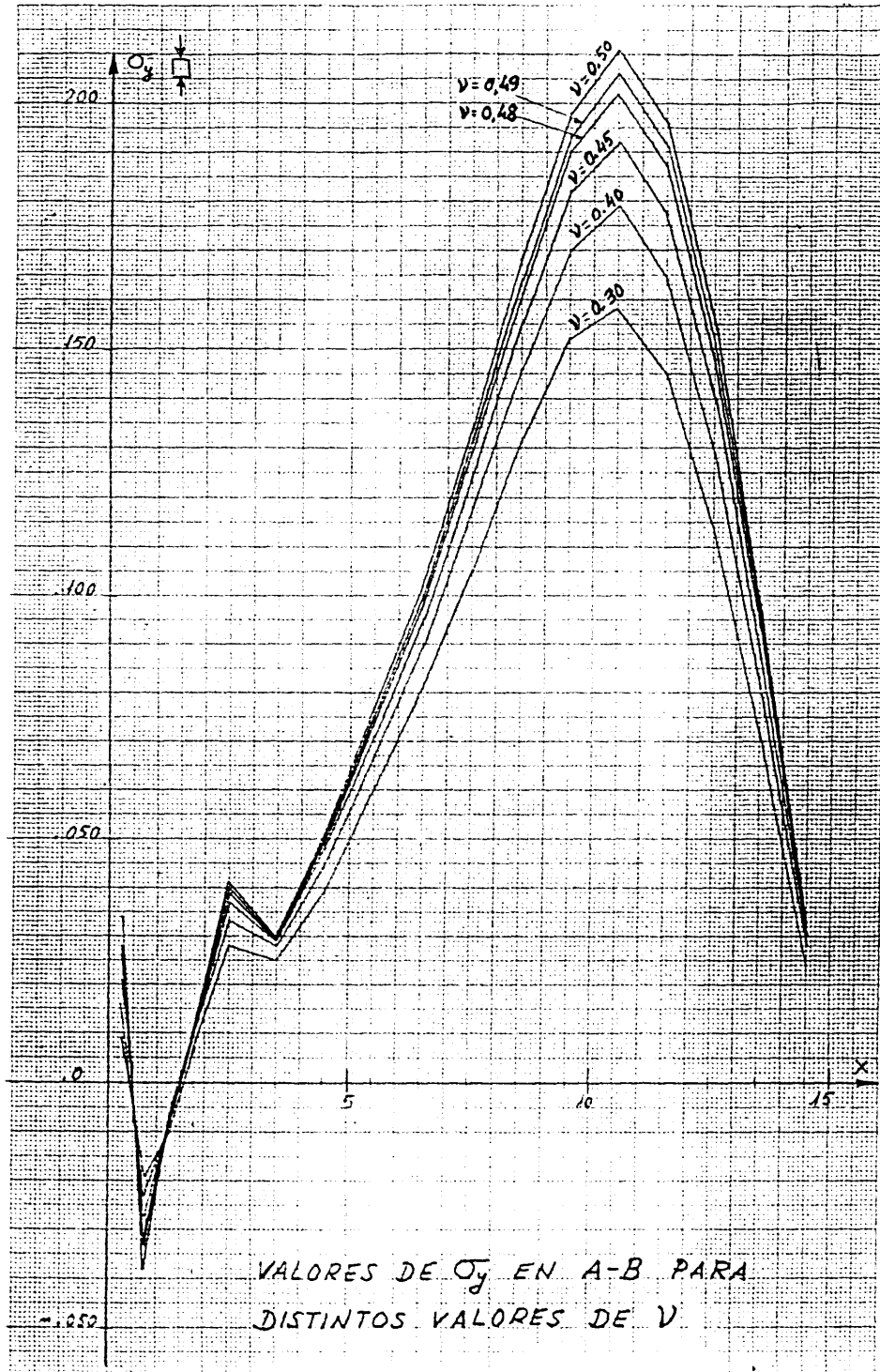


Figura 2

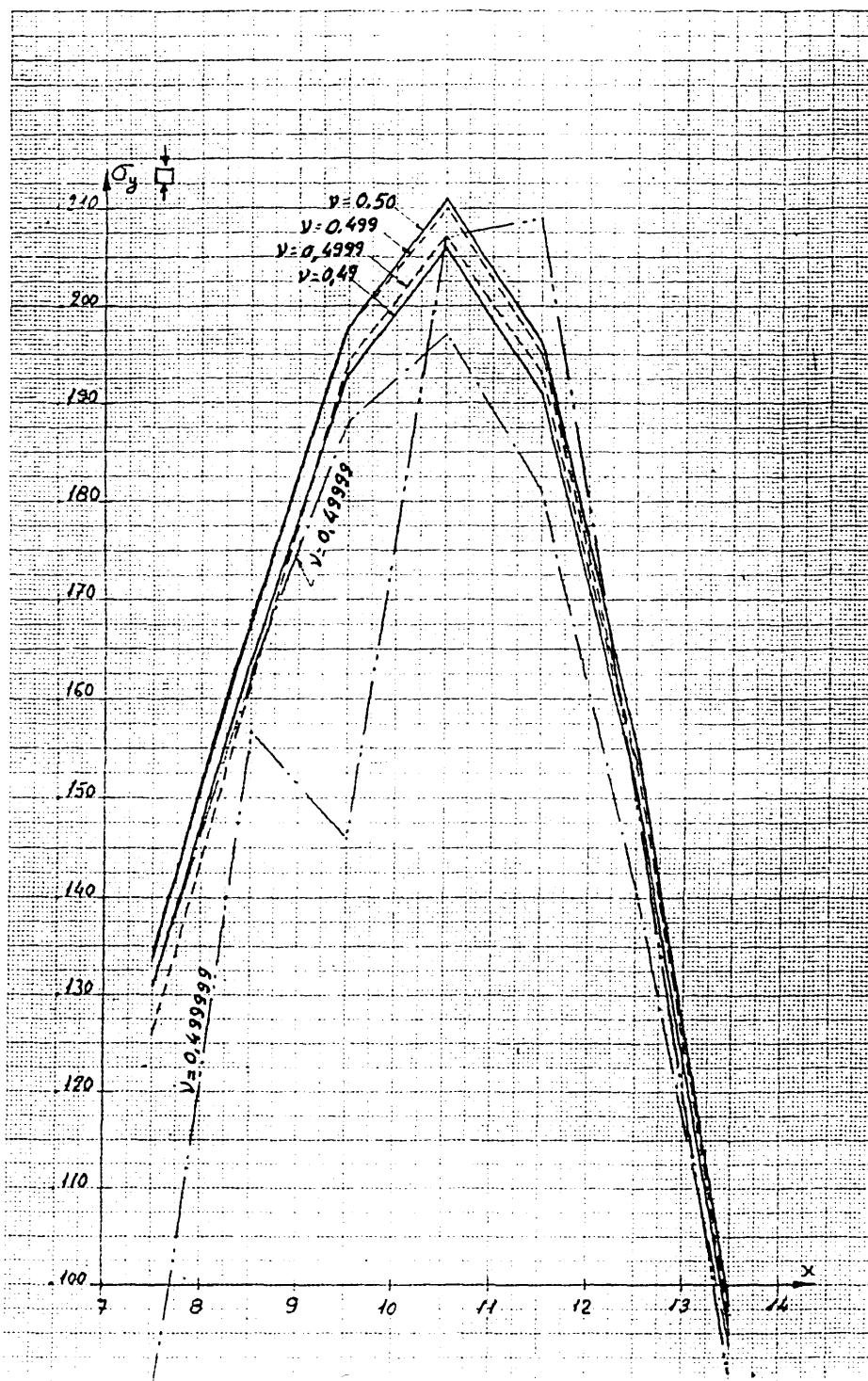


Figura 3