

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN TERMOELAS-
TICIDAD AXISIMETRICA

J.J. ANZA, E. ALARCON

E.T.S. Ingenieros Industriales de Madrid.

1. Introducción

El método de elementos de contorno se aplica - con éxito a problemas en los que sea decisiva la reducción de la dimensionalidad del dominio de integración. Por ello es interesante su aplicación a cuerpos tridimensionales simétricos respecto a un eje, donde la reducción es doble y la discretización puede limitarse a un contorno monodimensional.

En este artículo se presenta el método aplicado al caso de la termoelasticidad lineal. Como es bien sabido en dicho problema aparecen fuerzas de volumen que, sin embargo, pueden reducirse con cierta facilidad al contorno según se verá más abajo, haciendo el método muy fructífero.

2. Ecuaciones de campo

La hipótesis básica es la posibilidad de descomposición del tensor deformación en la forma:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \alpha T \underline{\underline{\delta}} \quad \dots (1)$$

donde $\underline{\underline{\epsilon}}^e$ está relacionado con el estado de tensiones $\underline{\underline{\sigma}}$ mediante la ley de Hooke, α es el coeficiente de dilatación, T la variación de temperatura y $\underline{\underline{\delta}}$ la delta de Kronecker.

Mediante las fórmulas de Lamé:

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \lambda \theta \underline{\delta} + 2G \underline{\varepsilon} \\ \underline{\sigma} &= \lambda \theta \underline{\delta} + 2G \underline{\varepsilon} - (3\lambda + 2G) \alpha T \underline{\delta}\end{aligned}\quad \dots(2)$$

que, en función del módulo de Young y el coeficiente de Poisson es:

$$\underline{\sigma} = \lambda \theta \underline{\delta} + 2G \underline{\varepsilon} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha T \underline{\delta} \quad \dots(3)$$

Las ecuaciones de equilibrio

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \dots(4)$$

se convierten usando (3) en:

$$\lambda \theta_{,j} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij,j} - \frac{E\alpha}{1-2\nu} T_{,i} + X_i = 0 \quad \dots(5)$$

donde puede verse la posibilidad de considerar formalmente una fuerza de volumen equivalente

$$X_{eq} = - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \text{grad } T \quad \dots(6)$$

y escribir las ecuaciones de Navier (para $X=0$)

$$(\lambda + G) \text{grad div } \underline{u} + G \nabla^2 \underline{u} + X_{eq} = \rho \underline{u} \quad \dots(7)$$

Análogamente, según (3) es posible definir un vector tensión en el contorno equivalente

$$\underline{T} = \frac{E\alpha}{1-2\nu} T \underline{\delta} \quad \dots(8)$$

que debe superponerse al real para obtener, desde una óptica mecánica, los efectos térmicos. Es la analogía de Duhamel-Neumann.

Si además, el caso es estacionario:

$$\ddot{u}_{\sim} = 0 \quad \nabla^2 T = 0 \quad \dots (9)$$

Las ecuaciones (7) pueden escribirse en forma de teorema de reciprocidad entre dos estados, como:

$$\int_{\partial\Omega} \overset{v}{T}_{\sim} \cdot \overset{v}{u}_{\sim} + \int_{\Omega} \overset{v}{X}_{\sim} \cdot \overset{v}{u}_{\sim} = \int_{\partial\Omega} \overset{v}{T}_{\sim} \cdot \overset{v}{u}_{\sim}^* + \int_{\Omega} \overset{v}{X}_{\sim} \cdot \overset{v}{u}_{\sim}^* \quad \dots (10)$$

Si el estado auxiliar es el correspondiente a la solución de Kelvin se obtiene la fórmula de representación conocida como "identidad de Somigliana".

$$c_{\sim np} + \int_{\partial\Omega} \overset{v}{T}_{\sim}^* \cdot \overset{v}{u}_{\sim} = \int_{\partial\Omega} \overset{v}{T}_{\sim} \cdot \overset{v}{u}_{\sim}^* + \int_{\Omega} \overset{v}{X}_{\sim} \cdot \overset{v}{u}_{\sim}^* \quad \dots (11)$$

donde c_{\sim} es una matriz de coeficientes que depende de la geometría local del contorno en el punto P.

La ecuación (11) cuando $\overset{v}{X}_{\sim}=0$ es una relación integral en el contorno que se presta muy bien a su discretización y forma la base del método de los elementos de contorno (B.I.E.M.).

Cuando $\overset{v}{X}_{\sim} \neq 0$ la integral de volumen debe ser calculada en todo el dominio.

En el caso termoelástico, sin embargo, la relación (6) puede combinarse con la solución fundamental para producir una serie de integrales en el contorno, lo que simplifica el cálculo final.

3. Tratamiento de las fuerzas por unidad de volumen

Un caso muy habitual se presenta cuando las fuerzas por unidad de volumen derivan de un potencial.

$$\overset{v}{X}_{\sim} = \nabla \phi \quad \dots (12)$$

La integral de volumen es:

$$I = \int_{\Omega} \chi_{\sim} \cdot u_{\sim}^* = \int_{\Omega} u_{\sim}^* \cdot \nabla \phi \quad \dots (13)$$

que se puede transformar fácilmente en:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\phi u_{\sim}^*) - \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} u_{\sim}^* = \\ &= \int_{\partial \Omega} \phi u_{\sim}^* \cdot \nu_{\sim} - \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} u_{\sim}^* \quad \dots (14) \end{aligned}$$

Para reducir la última integral conviene recordar la expresión de la solución fundamental en función del vector de Galerkin G :

$$\begin{aligned} u_{\sim}^* &= \nabla^2 G_{\sim} - \frac{1}{2(1-\nu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} G_{\sim} = \\ &= \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} G_{\sim} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} G_{\sim} \quad \dots (15) \end{aligned}$$

con lo que:

$$\operatorname{div} u_{\sim}^* = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \nabla^2 (\operatorname{div} G_{\sim}) \quad \dots (16)$$

(ya que $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$)

Puesto que

$$G_{\sim} = \frac{1+\nu}{4\pi E} r e_{\sim} \quad \dots (17)$$

llamando

$$W_{\sim} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)} r e_{\sim} \quad \dots (18)$$

es posible poner (16) como:

$$\operatorname{div} \underline{u}^* = \nabla^2 (\operatorname{div} \underline{W}) = \nabla^2 \omega$$

$$\omega = \operatorname{div} W = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)} (r_{1,1}^2 + r_{1,2}^2) \dots (19)$$

y, por tanto,

$$-\int_{\Omega} \phi \operatorname{div} \underline{u}^* = -\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \omega =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \omega \operatorname{grad} \phi \cdot \nu - \int_{\partial\Omega} \phi \operatorname{grad} \omega \cdot \nu - \int_{\Omega} \omega \nabla^2 \phi \dots (20)$$

La integral de volumen tiene, pues, la expresión:

$$I = \int_{\partial\Omega} \phi \underline{u}^* \cdot \nu + \int_{\partial\Omega} \omega \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial \omega}{\partial \nu} - \int_{\Omega} \omega \nabla^2 \phi \dots (21)$$

Como puede verse, siempre que

$$\nabla^2 \phi = k_0$$

$$\int_{\Omega} \omega \nabla^2 \phi = k_0 \int_{\Omega} \omega = k_0 \int_{\Omega} \operatorname{div} W = k_0 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial W}{\partial \nu} \dots (22)$$

que es utilísima para los casos de peso propio, fuerza centrífuga, etc.

En particular en el tema que nos ocupa y debido a la condición (9) la última integral de (21) se anula, con lo que es posible trabajar directamente en el contorno manteniendo todas las ventajas del método.

4. Elementos de contorno axisimétricos

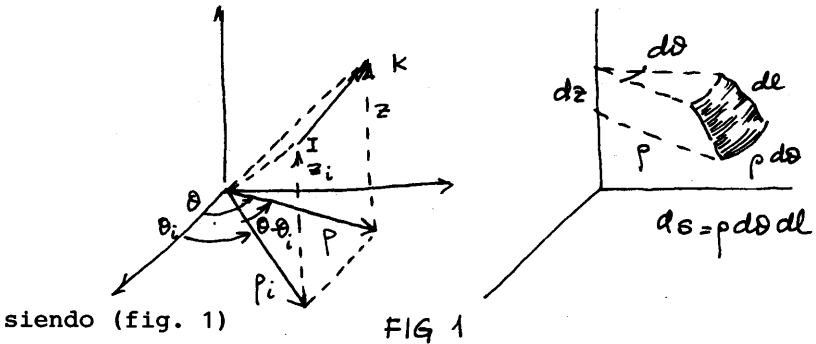
En el caso de cuerpos tridimensionales axisimétricos es posible reducir la dimensionalidad del problema. Para verlo observemos el caso simple de la teoría del potencial, paso necesario para el estudio de la teoría termoelástica desacoplada.

La ecuación paralela a la (11) es:

$$c\phi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \phi = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial\phi}{\partial\nu} \quad \dots(23)$$

donde ϕ es la temperatura y ψ la solución fundamental

$$\psi = \frac{1}{4\pi r(x, k)} \quad \dots(24)$$



$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i \cos(\theta - \theta_i) + (z - z_i)^2}$$

$$\phi = \phi(\rho, z)$$

$$q = q(\rho, z) \quad \dots(25)$$

Usando las propiedades de simetría se obtiene:

$$c\phi(x) + \int_{\Gamma} \rho \phi dl \int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} d\theta = \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial\phi}{\partial\nu} dl \int_0^{2\pi} \psi d\theta \quad \dots(26)$$

Llamando

$$\psi_{as} = \int_0^{2\pi} \psi d\theta \quad \dots (27)$$

es posible producir una discretización de las variables en el contorno mediante el esquema tradicional:

$$\phi = [N_1, N_2, \dots] \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{array} \right\}^e$$

$$q = \frac{d\phi}{d\nu} = [N_1, N_2, \dots] \left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{array} \right\}^e \quad \dots (28)$$

Un caso particular, el de la interpolación constante, es especialmente simple: al ser aplicada a cada nodo (28) se reduce al sistema:

$$c \phi(I) + \sum_{k=1}^N A_k \phi_k = \sum_{k=1}^N B_k q_k \quad \dots (29)$$

donde las integrales

$$A_k = \int_{\Gamma_k} \rho \frac{\partial \psi_{as}}{\partial \nu} dl$$

$$B_k = \int_{\Gamma_k} \rho \psi_{as} dl \quad \dots (30)$$

se realizan a lo largo de la sección meridiana.

La figura 2 recoge la solución a un caso particular en que se presentaban condiciones clásicas de Neumann y Dirichlet más una derivada oblicua del tipo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial S} \quad \dots (31)$$

en el canal interior. La filosofía anterior permite tratar todas las condiciones de contorno en forma muy sencilla.

Las expresiones de Ψ_{as} son:

$$\Psi_{as} = \int_0^{2\pi} \psi \, d\theta = \frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{2\pi(\rho\rho_i)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial \Psi_{as}}{\partial \bar{v}} = \frac{1}{2\pi\rho(\rho\rho_i)^{1/2}} \left\{ \left[-\frac{Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{2} + \frac{\rho^2\rho_i^2 - (z-z_i)^2}{2\rho\rho_i} \frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{\partial \gamma} \right] r_{,n} + \left[\frac{z-z_i}{r_i} \frac{\partial Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma)}{\partial \gamma} \right] z_{,n} \right\} \dots (32)$$

donde

$$\gamma = 1 + \frac{(\rho-\rho_i)^2 + (z-z_i)^2}{2\rho\rho_i}$$

y $Q_{-\frac{1}{2}}$ es la función de Legendre de segunda especie.

En el caso elástico la idea es la misma pero los desarrollos son más laboriosos. (Véase por ejemplo Doblaré 1981 o Gómez Lera 1982) y las cargas fundamentales corresponden a las de la fig. 3.

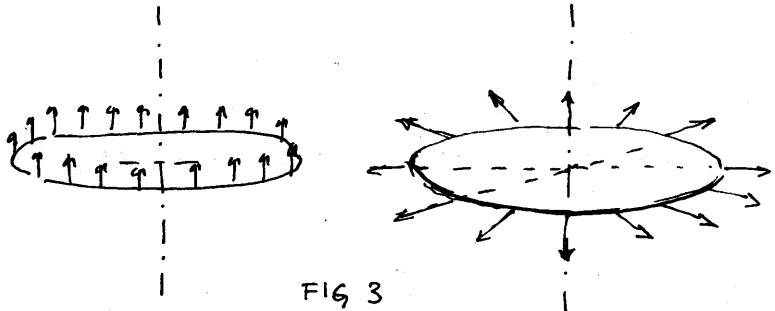


FIG 3

En todos los casos las integrales se realizan por métodos numéricos siendo utilizada una cuadratura de Gauss para los elementos a los que no pertenece el nodo desde el que se integra. Sin embargo cuando esto sucede hay que tomar ciertas precauciones pues:

$$\gamma \rightarrow 1 \quad Q_{\frac{1}{2}}(\gamma), \quad Q_{-\frac{1}{2}}(\gamma) \rightarrow \infty$$

Para soslayar este problema se suele realizar la integración subdividiendo el elemento en dos trozos. En la zona próxima al nodo se utiliza una aproximación asintótica a las funciones de Legendre (mediante el logaritmo neperiano) lo que permite la integración analítica, mientras que el resto se realiza en forma numérica.

Respecto al cálculo de los términos de la diagonal principal correspondientes a la dirección Z se realiza a partir del resto de los elementos de la fila dando un movimiento como sólido rígido al conjunto. Evidentemente esta solución no puede utilizarse.

5. Ejemplos

Un ejemplo elemental es el de la fig. 4. Se ha considerado sometido exclusivamente a una variación

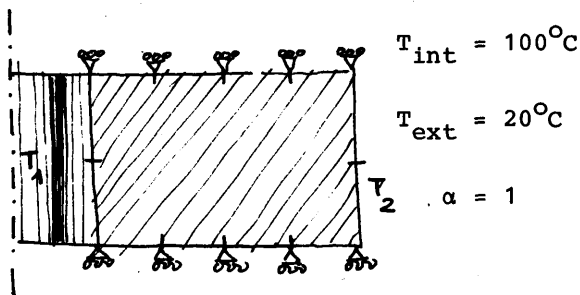


fig. 4

de temperatura, pudiendo verse los resultados en temperaturas, desplazamientos y tensiones en la figura 5, conseguidos con tan solo 10 elementos.

Otro ejemplo bien conocido es la esfera de la figura 6 con 8 elementos ya que no es necesario discretizar los ejes de simetría.

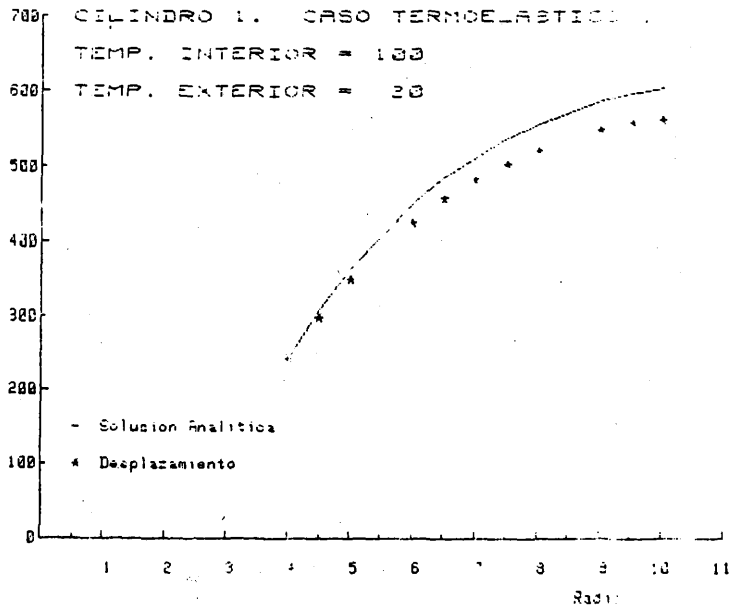
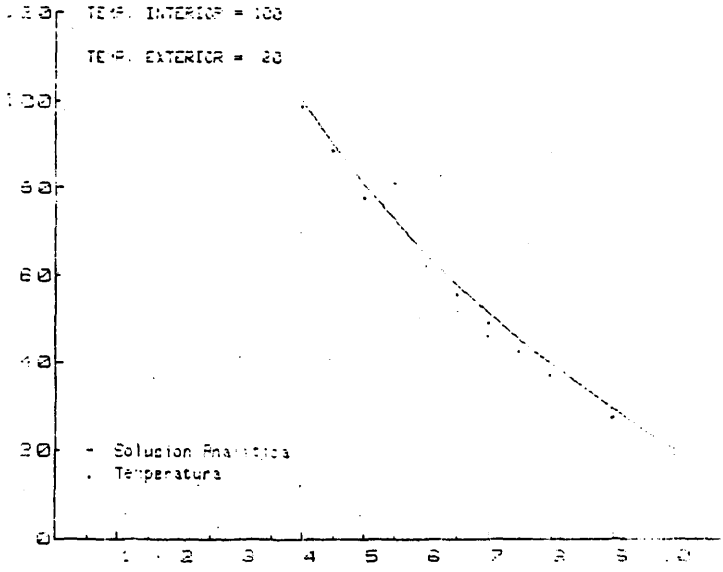


Fig. 5(b)

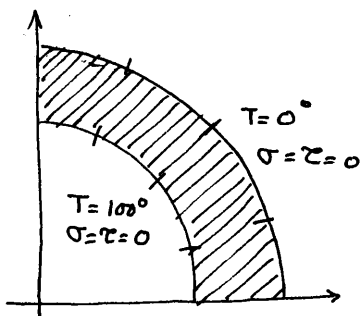


fig. 6

Los resultados ahora son los de la fig. 7.

6. Referencias

1. ALARCON, E., MARTIN, A., y PARIS, F.: "Boundary Elements in Porcal and Elasticity Theory". Communication Congress Trends in Computerize Estructural Analysis and Syntesis, 1978.
2. ANZA, J.J.: "El método de los elementos de contorno en la teoría de la termoelasticidad". Teis. E.T.S. I.I.M. 1981.
3. ANZA, J.J., y ALARCON, E.: "The effect of boundary conditions in the numerical solution of 3-D thermoelastic problems. Advances in Eng. Software. Vol. 4. nº 3. Julio 1982.
4. DOBLARE, M.: "Formulación tridimensional del Método de Iso Elementos de Contorno, con interpolación parabólica". Tesis Doctoal. E.T.S.I.I. de Madrid, 1981.
5. GOMEZ LERA, S.: "Formulación del método de los elementos de contorno en problemas axisimétricos". Tesis. E.T.S.I.I.M. 1982.
6. LACHAT, J.C. y WATSON, J.O.: "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equation: A Formula_{tion} for Three-Dimensional Elastotstatics". Int. J. for Numerical Methods in Engineering -10-, 1976.
7. NOWACKI, W.: "Problems of Thermoelasticity". VIIIth European Mechanics Colloquium, 1967.
8. RIZZO, F.J.: "An integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics". Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 25, 1967.

ESFERA 1. (CASO TERMOELASTICO).

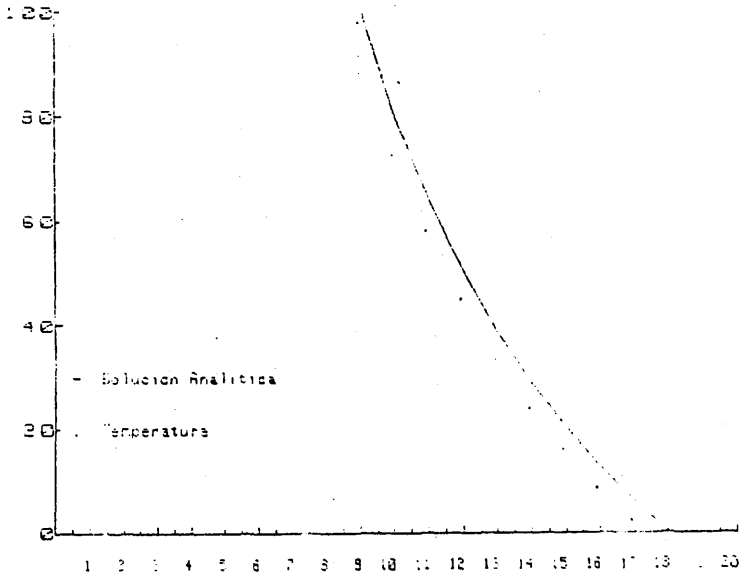


Fig. 7a

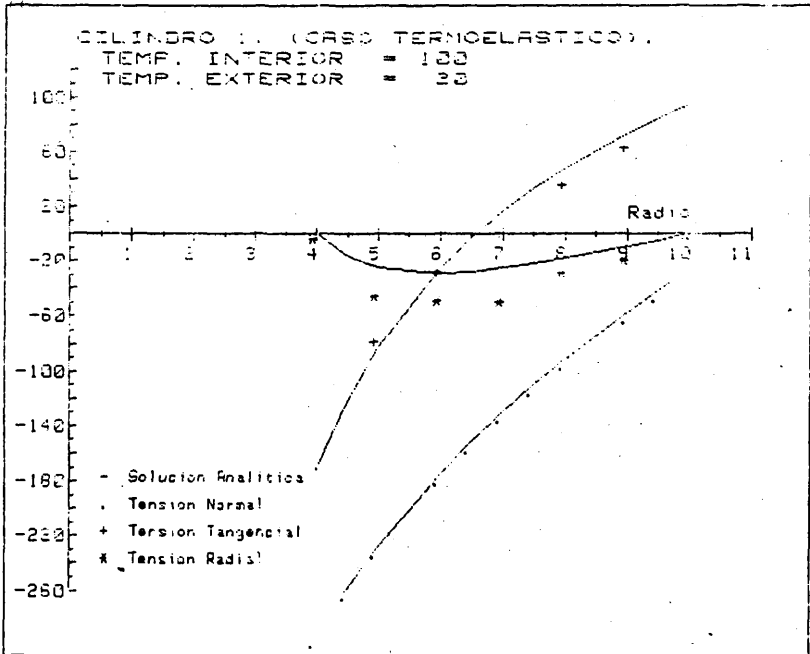


Fig. 5(c)

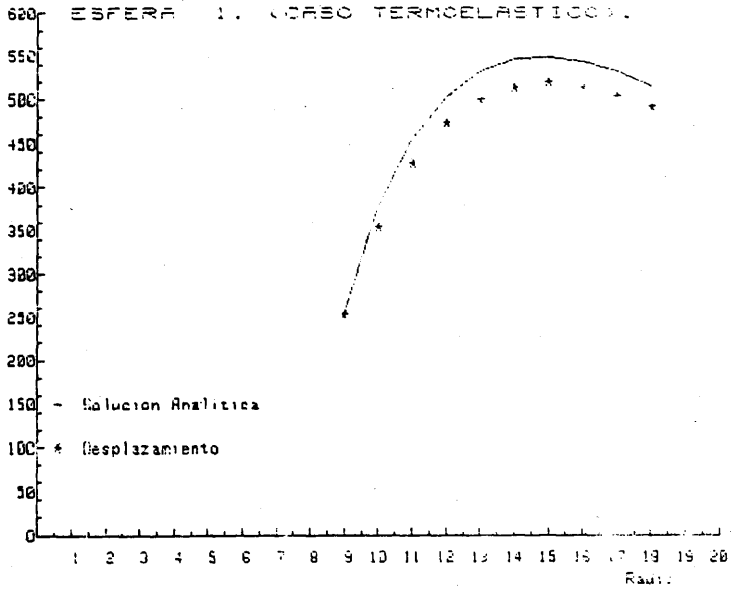


Fig. 7b

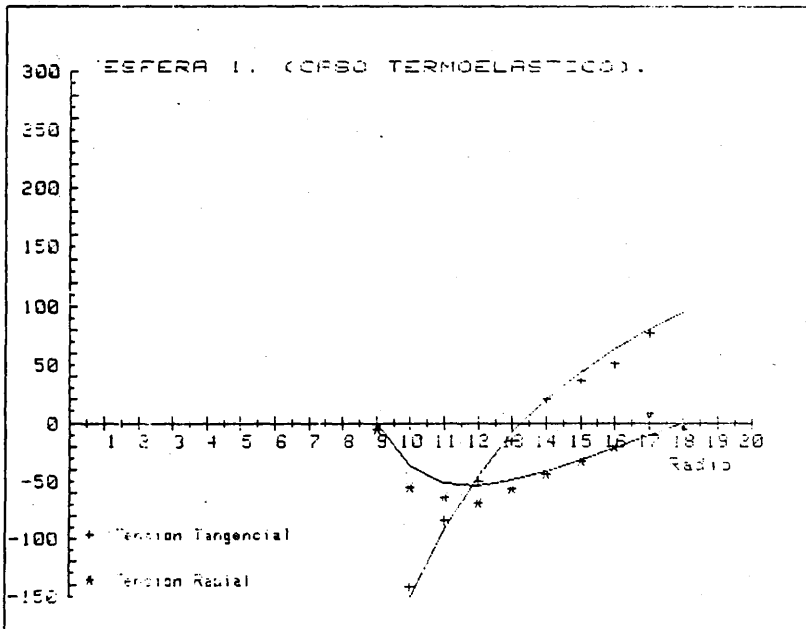


Fig. 7c

9. ROURES, V.: "El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial en régimen transitorio. Aplicación a la transmisión de calor". Tesis Doctoral. E.T.S.I.I. de Madrid, 1981.
10. WROBEL, L.C. y BREBBIA, C.A.: "The Boundary Element Method for Steady State and Transient Heat Conduction". First International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems. Swansea. Ed. C. Taylor and K. Morgan. Pineridge Press, 1979.