

B.I.E.M Y ESTUDIO DE SINGULARIDADES EN PROBLEMAS DE POTENCIAL

S. Gómez, F. Paris y E. Alarcón

Cátedra de Estructuras
E.T.S. Ing. Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen.— El objeto del presente artículo es el estudio de singularidades en problemas de Potencial mediante el uso del Método de las Ecuaciones Integrales sobre el contorno del dominio en estudio. Frente a soluciones basadas en la mejora de la discretización, análisis asintótico o introducción de funciones de forma que representen mejor la evolución de la función, una nueva hipótesis es presentada: el término responsable de la singularidad es incluido en la integral sobre el contorno de la función — auxiliar. Los resultados obtenidos mejoran los de soluciones anteriores simplificando también el tiempo de cálculo.

INTRODUCCION

Un gran número de problemas de la Física-Matemática pueden ser abordados mediante la teoría del Potencial. En concreto, la ecuación de Laplace presenta problemas de Torsión de prismas de cualquier sección, de Transmisión de calor, de Filtraciones, de movimiento de fluidos incompresibles, de Electroestática, etc. En muchos de estos casos, las condiciones de contorno pueden originar variaciones bruscas de las variables definidas sobre dicho contorno, llegando a alcanzar valores infinitos en ciertos puntos.

El problema es común a otros campos diferentes a la teoría del Potencial. Así en la Mecánica de los Medios Continuos, la aparición de una grieta provocaría igualmente la presencia de valores infinitos en las tensiones. Algunas de las soluciones que se van a proponer para el análisis de las singularidades en la Teoría del Potencial son de aplicación inmediata a la Mecánica de los Medios Continuos, pues se basan en el análisis de los resultados obtenidos. En otros casos, las modificaciones afectan al desarrollo del método numérico empleado y por tanto también serán extrapolables las soluciones propuestas.

La presencia de singularidades hace muy difícil la posibilidad de una solución analítica por las implicaciones de la geometría del contorno, lo que hace que sólo para casos sencillos se disponga de este tipo de solución. Las técnicas de laboratorio, resultan costosas y los resultados obtenidos requieren de un gran número de pruebas, para eliminar las posibles causas de error. En definitiva, los métodos numéricos aparecen como el útil más

apropiado para abordar este tipo de problema.

El Método de los Elementos Finitos ha constituido en las últimas décadas la herramienta de cálculo más comúnmente usada. Sin embargo, la necesidad de discretizar todo el dominio, aunque la zona de interés sea reducida, el gran trabajo en la elaboración de los datos de entrada (salvo que se utilice generación automática, no siempre disponible), y sobre todo, para el tipo de problemas que nos ocupa, la presencia de altos gradientes de variación de la función, que obligan a discretizaciones finas en el entorno de la singularidad, hace que el M.E.F. pueda ser considerado en este campo como una técnica útil pero costosa.

El Método de los Elementos de Contorno se presenta como la alternativa más eficiente al conservar las ventajas del M.E.F. y paliar sus inconvenientes. La discretización de sólo el contorno, rebajando así en una la dimensión del problema a estudiar, el poder analizar en el interior del dominio sólo las zonas de interés, una vez resuelto el problema en el contorno y la facilidad de preparación de los datos de entrada e interpretación de los de salida, constituyen las características más destacables del Método, que se ven incrementadas por la naturaleza del problema que se está estudiando (pues la singularidad en un problema plano (2D) se transforma en una singularidad de una dimensión).

Diferentes soluciones pueden ser presentadas para abordar el problema:

- Refinamiento de la malla en el entorno del punto donde se representa la singularidad (ref. 1)
- Análisis asintótico usado haciendo una extrapolación de los resultados obtenidos en puntos cercanos pero no próximos a la singularidad (ref. 2)
- Introducción de funciones de interpolación especiales que incluyen la singularidad.

Esta última técnica constituye el objeto de este artículo. Sobre el Método utilizado se hace a continuación un esquema del modelo matemático y un desarrollo completo puede encontrarse en ref. 3, 4, 5.

MODELO MATEMATICO DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

Los problemas de la Teoría del Potencial que nos ocupan, así como muchos otros de la Física-Matemática pueden ser representados por:

$$\underline{A} \cdot \underline{u} = \underline{f} \quad (1)$$

donde \underline{A} es un operador lineal o un conjunto de ellos. Si, dentro de los Métodos Proyectivos, se busca una solución de u en la forma:

$$\underline{u}^n = \sum_{j=1}^n a_j \psi_j \quad (2)$$

donde ψ_j son funciones conocidas, y por tanto a_j son las nuevas incógnitas del problema.

Si proyectamos la expresión (1), con la aproximación (2) sobre un espacio X_n^1 generado por funciones ϕ_j sobre las cuales posteriormente se impondrán restricciones, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n a_i (\underline{A} \psi_i, \phi_j) = (\underline{f}, \phi_j) \quad (3)$$

La integración de (3) conduce a soluciones de dominio, mediante una formulación débil del problema original (1).

Para obtener una solución de contorno es necesario el uso de la fórmula abstracta de Green entre las expresiones (1) y (4)

$$\underline{A} \cdot \underline{u} = \underline{g} \quad (4)$$

$$(u, A\phi)_D = (Au, \phi)_D + (Eu, N\phi)_{\partial D} - (E\phi, Nu)_{\partial D} \quad (5)$$

donde:

- D es el dominio estudiado
- ∂D es el contorno de dicho dominio.
- N representa las condiciones naturales del contorno.
- E representa las condiciones esenciales de dicho contorno.

La elección de ϕ se presenta como el factor determinante que puede condicionar la forma de la expresión (5). El Método de los Elementos de Contorno,

se alcanza estableciendo:

$$\underline{A} \cdot \phi = \delta(x_i) \quad (6)$$

con lo que la expresión (5) toma la forma

$$u(x_i) = (Au, \phi)_D - (Eu, N\phi)_{\partial D} - (E\phi, Nu)_{\partial D} \quad (7)$$

Si (1) representa la ecuación de Laplace, esta última expresión adopta la forma:

$$u(x_i) = (Eu, N\phi)_{\partial D} - (E\phi, Nu)_{\partial D} \quad (8)$$

expresión que permite calcular los valores de la función u en un punto cualquiera del dominio, una vez resuelto el problema en el contorno, lo que se consigue estableciendo que $x_i \in \partial D$ lo que hace que la expresión (8) se transforme en:

$$c_i \cdot u(x_i) + (E\phi, Nu)_{\partial D} = (Eu, N\phi)_{\partial D} \quad (9)$$

Si introducimos, la aproximación (2)

$$\begin{aligned} Nu &= \sum_{j=1}^n a_j \psi_j \\ Eu &= \sum_{j=1}^n b_j \psi_j' \end{aligned} \quad (10)$$

por lo que la expresión (9) se transforma en:

$$c_i a_i \psi_i + \sum_{j=1}^n a_j (E\phi, \psi_j)_{\partial D} = \sum_{j=1}^n b_j (\psi_j', N\phi)_{\partial D} \quad (11)$$

Sobre esta expresión puede verse que el establecer la ecuación del problema exclusivamente en el contorno, se ha pagado con la asimetría del sistema de ecuaciones obtenido y puesto que las funciones ϕ están definidas sobre todo el contorno, dicho sistema de ecuaciones estará gobernado por una matriz llena.

Así, reordenando el sistema (11) donde los:

a_j y/o los b_j constituyen las incógnitas del problema, según se tengan condiciones de Dirichlet, Neuman o mixtas, se tiene

$$\underline{K} \cdot \underline{x} = \underline{F} \quad (12)$$

Una vez resuelto el problema en el contorno, a partir de (12), (8) permite encontrar los valores de la función, en los puntos del dominio que se deseen.

FORMULACION NUMERICA

En las expresiones (10), las funciones ψ son de pequeño soporte lo que permite establecer un sentido físico de las incógnitas resultantes de la transformación, a_j y b_j . Dichas funciones ψ pueden

adoptar la siguiente forma:

Lineal Parabólica Cúbica



Eligiendo funciones ψ lineales y sustituyendo el contorno del dominio bajo estudio ∂D por uno discretizado ∂D_k , la expresión (9) se transformaría en:

$$c \cdot u(x) + \sum_{j=1}^n \int_{\partial D_j} \frac{\partial \psi}{\partial n}(x,y) (N_1, N_2) \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} ds_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{\partial D_j} \psi(x) \cdot (N_1, N_2) \begin{Bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{Bmatrix} ds_j \quad (13)$$

ya que $Nu =$ valor de la función $\equiv u$
 $Eu =$ valor de la derivada de la función $\equiv q$.

y análogamente para la función auxiliar ψ .

Referidos a coordenadas intrínsecas de un elemento ∂D_j , las expresiones N_1 y N_2 toman la forma:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

Por tanto, la definición del sistema de ecuaciones (12) se reducirá al cálculo de los siguientes tipos de integrales.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int \frac{\partial \psi}{\partial n} N_1 ds \\ A_2 &= \int \frac{\partial \psi}{\partial n} N_2 ds \\ B_1 &= \int \psi N_1 ds \end{aligned} \quad (14)$$

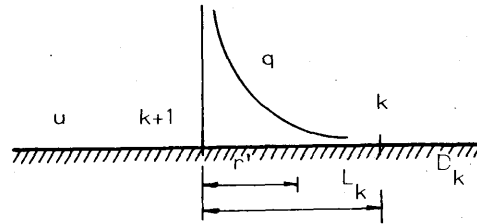
$$B_2 = \int \psi N_2 ds \quad (14)$$

siendo ψ la solución fundamental de la ecuación de Laplace:

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(x,y)} \quad (15)$$

ANÁLISIS DE SINGULARIDADES

Como se demostró en la ref (2) el valor de la función, en el tipo de singularidades que nos ocupa, se puede poner en función del factor $1/\sqrt{r}$, determinante de la evolución de la función en puntos próximos al que contiene la singularidad. Si se limita la existencia de estos puntos al elemento de la discretización que contiene el punto singular,



la evolución del flujo sobre este elemento (D_k) se puede poner en la forma:

$$q_{D_k} = (N_1, N_2) \begin{Bmatrix} q_k \\ q_{k+1} \end{Bmatrix} = (N_1, N_2) \begin{Bmatrix} q'_k / \sqrt{r'} \\ q'_{k+1} / \sqrt{r'} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

o bien

$$q_{D_k} = \left(\frac{N_1}{\sqrt{r'}}, \frac{N_2}{\sqrt{r'}} \right) \begin{Bmatrix} q'_k \\ q'_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ahora bien, puesto que q'_k aparece en las integraciones sobre D_k y D_{k-1} la expresión (17) hay que transformarla de la forma:

$$q_{D_k} = \left(\frac{N_1}{\sqrt{r'}}, \frac{N_2}{\sqrt{r'}} \right) \begin{Bmatrix} q'_k \cdot \sqrt{L_k} \\ q'_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

o bien

$$q_{D_k} = \left(\frac{N_1 \sqrt{L_k}}{\sqrt{r'}}, \frac{N_2}{\sqrt{r'}} \right) \begin{Bmatrix} q'_k \\ q'_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

For lo que las integraciones que es preciso realizar para el caso de un elemento singular serían

$$B_1 = \int_{D_k} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(x,y)} N_1 \frac{\sqrt{L_k}}{\sqrt{r'}} ds_k \quad (20)$$

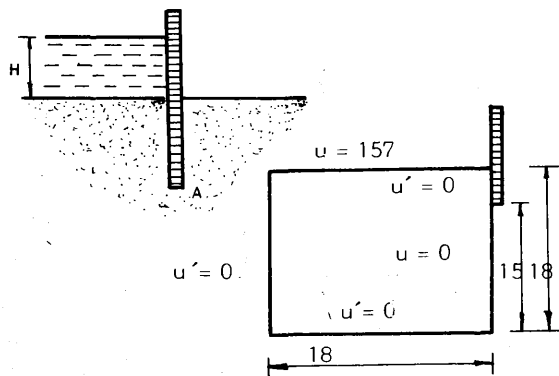
$$B_2 = \int_{\Gamma_k} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(x,y)} N_2 \frac{1}{\sqrt{r'}} ds_k \quad (20)$$

Dos casos diferentes pueden presentarse, en la evaluación de estas integrales, según que el punto desde el que se integre pertenezca o no al elemento sobre el que existe la singularidad. En cualquier caso, las integrales deben ser evaluadas cuidadosamente para tratar de extraer el núcleo responsable de la singularidad y reducir así el integrando a un término de variación suave - que pueda entonces ser evaluado numéricamente. En el apéndice 1, se desarrollan las más representativas

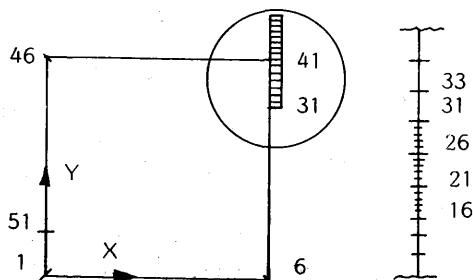
FILTRACION BAJO UNA PRESA EN UN MEDIO HOMOGENEO

Este ejemplo ha sido tratado en (ref 2), lo que hace fácil la comparación de los resultados obtenidos con la hipótesis actual, frente a otros aproximados anteriores.

El problema se define a continuación, estudiando el caso antisimétrico, que es el que presenta problemas, debido a la presencia del factor $r^{-\frac{1}{2}}$, en el desarrollo de la función alrededor del punto A.

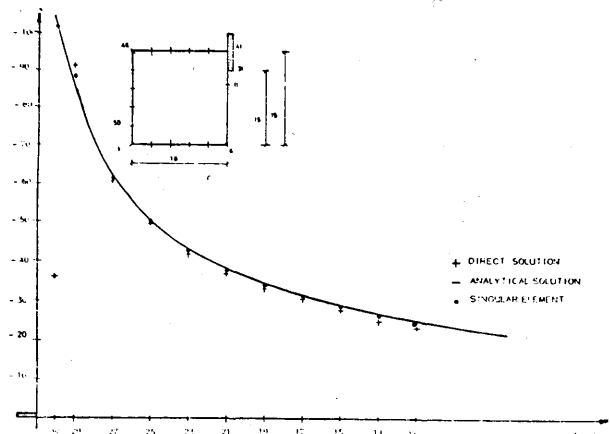


la discretización utilizada es la siguiente



Los resultados obtenidos se recogen en la tabla y figura siguiente

NODO	COORD. Y.	u'(ANALI.)	u' directa	u' SING.
11	13	-25	-23.74	-23.81
13	13.2	-26.86	-26.07	-26.18
15	13.4	-28.67	-28.33	-28.48
17	13.6	-31.06	-30.74	-30.93
19	13.8	-34.09	-33.65	-33.92
21	14.	-37.79	-37.33	-37.71
23	14.2	-42.87	-42.22	-42.80
25	14.4	-50.25	-49.20	-50.18
27	14.6	-62.5	-60.61	-62.38
29	14.8	-89.80	-92.91	-87.72
30	14.9	-128.03	-35.83	-135.60



CONCLUSIONES

Se ha presentado una nueva formulación para el tratamiento de singularidades en problemas de la teoría del potencial, tratados con el Método de los Elementos de Contorno.

Los resultados obtenidos han sido comparados con los de otras opciones anteriores (Refinamiento de la discretización, Análisis asintótico, utilización de funciones de forma especiales), encontrándose que la solución presentada mejora notablemente las anteriores, puesto que además de la calidad de los resultados obtenidos, no ha sido preciso realizar ni discretización especial ni tratamiento de los resultados obtenidos. Sólo la programación del Método se ha complicado, sin que ello conlleve un mayor tiempo de resolución.

El proceso seguido es fácilmente extrapolable a la teoría de la Elasticidad donde la naturaleza de las singularidades puede representarse en forma análoga.

REFERENCIAS

Alarcón, E., Martín, A y Faris, F. (1978). "Some minor problems with B.I.E.M.". I Congress Applied Numerical Modelling. Madrid

Paris, F., Gomez, S., Alarcón, E. (1980) "B.I.-E.M. and concentration Factors". Second International Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods. University of Southampton.

Paris, F. (1979) "El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad". Tesis Doctoral. Madrid

Alarcón, E., Martín, A., Paris, F. (1979) "B.I.-E.M. in potential and Elasticity Theory". Computers and Structures. Vol 10, pp -- 351-362.

Cruse, T.A. (1968). "The direct Potential - - Method in Three-Dimensional Elastostatics". Dept. of Mech. Engineering Carnegie Institute of Technology. Pittsburg.

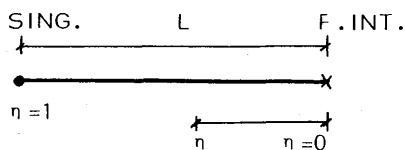
Jaswon & Symm (1977) "Integral equation methods in potential theory and elastostatics". Academic Press.

AFENDICE I.

A continuación se detallan las integraciones que es preciso efectuar en los casos mas representativos.

1.--La singularidad y el punto donde se aplica la ecuación integral están en el mismo elemento. A su vez se pueden presentar dos casos:

1.1.-- No coinciden en el mismo punto la singularidad y el punto de integración



las expresiones a integrar y los resultados obtenidos son:

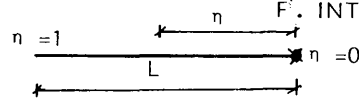
$$B_1 = \int_0^1 \frac{1-\eta}{\sqrt{L(1-\eta)}} \ln \frac{1}{L_\eta} L d_\eta =$$

$$= -\sqrt{L} \left(-\frac{2}{3} \ln L - 0.853645 \right)$$

$$B_2 = \int_0^1 \frac{\eta}{\sqrt{L(1-\eta)}} \ln \frac{1}{L_\eta} L d_\eta =$$

$$= \sqrt{L} \left(-\frac{4}{3} \ln L + 0.370132 \right).$$

1.2.-- Coinciden en el mismo punto. F. INT \equiv SING.



$$B_1 = \int_0^1 \frac{1-\eta}{\sqrt{L_\eta}} \ln \frac{1}{L_\eta} L d_\eta =$$

$$= -\sqrt{L} \left(\frac{4}{3} \ln L - 2.514794 \right)$$

$$B_2 = \int_0^1 \frac{\eta}{\sqrt{L_\eta}} \ln \frac{1}{L_\eta} L d_\eta =$$

$$= -\sqrt{L} \left(\frac{2}{3} \ln L - 0.447764 \right)$$

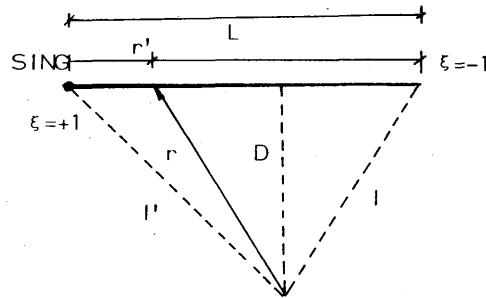
Las integrales intermedias que aparecen en la forma:

$$I = \int_0^1 f(\eta) \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) d_\eta$$

Son evaluadas numéricamente mediante la cuadratura de Gauss con 4 puntos de integración:

$$I = \sum_{i=1}^n \omega_i f(\eta_i)$$

2.-- La singularidad y el punto de integración no están en el mismo elemento



Es preciso efectuar una cuidadosa integración por partes, para eliminar el término singular del integrando. Esquemáticamente, las integraciones que es preciso realizar son las siguientes:

$$B_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{r''}} N_1(\xi) \ln \frac{1}{r} \frac{L}{2} d\xi =$$

$$= \sqrt{\frac{L}{2}} \left[-2\sqrt{2} \ln l - \int_{-1}^1 (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{r} d\xi \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi)^{3/2}}{2r^2} L \sqrt{r^2 - D^2} d\xi \right]$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{r''}} N_2(\xi) \ln \frac{1}{r} - \frac{L}{2} d\xi = \\
 &= \frac{L}{2} \int_{-1}^1 (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \left[\ln \frac{1}{r} - \frac{1+\xi}{2r^2} L r^2 - D^2 \right] d\xi
 \end{aligned}$$

Las integrales que aparecen en las expresiones de B_1 y B_2 son evaluadas numéricamente mediante cuadratura de Gauss con 4 puntos.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \omega_i f(\xi_i)$$

SUMMARY

The subject of this paper is the modelling of singularities in potential problems, using the Boundary Integral Equation Method.

As a logical alternative to classical methods (discretization refinement, asymptotic analysis, high order interpolatory functions) a new hypothesis is presented: the singularity responsible term is included in the interpolatory shape function.

As shown by several examples results are splendid and computer time radically shortened.