

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**

**FACULTAD DE INFORMÁTICA**



**COMPETICIÓN POLÍTICA. MODELOS  
GEOMÉTRICOS**

**TESIS DOCTORAL**

**Isabel Lillo Villalobos**

Lda. en Ciencias Matemáticas

2009

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**

**FACULTAD DE INFORMÁTICA**

**COMPETICIÓN POLÍTICA. MODELOS  
GEOMÉTRICOS**

**TESIS DOCTORAL**

**Isabel Lillo Villalobos**

Lda. en Ciencias Matemáticas

2009



**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA**

Facultad de Informática

**COMPETICIÓN POLÍTICA. MODELOS GEOMÉTRICOS**

**TESIS DOCTORAL**

Presentada por

**Isabel Lillo Villalobos**

Lda. en Ciencias Matemáticas

Dirigida por

**María Dolores López González**

Doctora en Ciencias Matemáticas

**Javier Rodrigo Hitos**

Doctor en Ciencias Matemáticas

2009

*A todos los míos*

*“Después, en la oscuridad, aunque nadie lo vea, sonríe”.*

Dino Buzzati

*El desierto de los tártaros*

# Resumen

En esta tesis se plantea la aplicación de técnicas de la Geometría Computacional para el análisis de problemas relacionados con la Economía. Se elige un modelo de Competición Política para el que se estudia la existencia de equilibrios utilizando la Teoría de Juegos. De esta forma, una de sus aportaciones más relevantes es la de relacionar conceptos de la Geometría Computacional y de la Teoría de Juegos.

La Geometría Computacional tiene numerosas aplicaciones en diferentes áreas, entre ellas la Economía. La Ubicación de Servicios, en concreto, utiliza sus herramientas para localizar la posición óptima de determinados servicios en una población de forma que puedan dar cobertura a sus habitantes.

La Teoría de Juegos es una rama de la Matemática Aplicada que se desarrolló en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la Economía. Estudia las estrategias a seguir por dos o más competidores en conflicto para maximizar su ganancia. Aunque se originó para el análisis de modelos económicos, es posible encontrarla en otras disciplinas. Por ejemplo, en Geometría Computacional, se estudia el Juego de Voronoi que se plantea como un juego entre dos competidores que quieren ganar la mayor área posible de una arena de juego. En la Competición Política se plantean modelos como el de Downs en el que la esencia es parecida, pero aplicada a la Economía Política. Tanto el Juego de Voronoi como el modelo de Downs son de tipo continuo.

En esta tesis se presenta la novedad de aplicar técnicas geométricas para el estudio de posiciones óptimas. Es decir, son opciones desde las que un partido capta el mayor número de votantes posible. También se aplican a la búsqueda de posiciones de

equilibrio y en definitiva, de soluciones a un problema que se plantea entre los partidos políticos considerando una población discreta.

En un principio, el problema básico se considera con dos partidos políticos y  $n$  votantes en el plano, trabajando con la distancia euclídea. Para este modelo se obtienen resultados análogos a los que aparecen en los modelos clásicos con respecto a las posiciones y existencia de equilibrio: si el equilibrio existe, es único y con los dos partidos eligiendo la misma política. Pero, al ser el modelo presentado discreto, las técnicas que se utilizan para llegar a este resultado, tomadas de la Geometría Computacional, difieren de las que se aplican en el caso continuo. Además, se construyen algoritmos que permiten localizar dichas posiciones de equilibrio, basados en la intersección de cierres convexos.

Pero la realidad política es sensiblemente diferente a esta unicidad de equilibrio. Aunque los partidos mayoritarios ofrecen unas políticas similares en muchos campos, se quiere encontrar una representatividad de separación entre ideologías. Para ello, se introducen variaciones sobre el problema básico como relajar la definición de equilibrio e introducir una definición de equilibrio débil. En este contexto se pueden encontrar más tipos de soluciones para el problema.

Dado que es posible tantear al electorado, a través de encuestas de opinión, para conocer sus opiniones acerca de algunos temas determinantes sobre su opción de voto, puede ser interesante permitir una flexibilidad en las políticas. Así, un partido puede cambiar su programa electoral, teniendo en cuenta ciertas restricciones, con el objetivo de ganar más votantes y, si es posible, ganar las elecciones. Esto se refleja en el trabajo por medio de un entorno circular.

Al aplicar el algoritmo construido considerando entornos, a una encuesta de opinión real, se observa la necesidad de mayor información por parte de los ciudadanos de datos cuantitativos sobre las políticas a adoptar por los partidos. Se implementa este algoritmo, añadiendo una simulación, para aplicarlo a un ejemplo de competición política en España. Este trabajo permite concluir que la utilización de técnicas de la Geometría Computacional a la Economía Política da resultados provechosos.

# Abstract

In this thesis, we have applied techniques used in the discipline of Computational Geometry in order to analyze problems related to the economy. Utilizing Game Theory, we have chosen a model of political competition in order to study the existence of equilibrium. In this regard, one of the most important relationships in this study is that between Computational Geometry and Game Theory.

Computational Geometry has a number of applications, including the economy. The Location of Services utilizes tools for locating the optimal position of determined services in a population that can give assistance to its citizens.

Game Theory is one subset of Applied Mathematics that, in the beginning, was developed as a tool for understanding economic behaviour. The discipline of Game Theory studies the strategies used by two or more competitors for maximizes their payoff. Although it was originated in order to analyze economic models, it is possible to see its use in other disciplines. For example, in Computational Geometry, the Voronoi Game is one between two competitors that want to win the largest area possible in a game arena. In addition, in Political Competition, similar models are used, but are applied to the study of Political Economy.

In this thesis, we will present the novelty of applied geometric techniques for the study of optimal positions. More specifically, these techniques are options that a political party can use to create strategies for obtaining the greatest number of votes possible. They are also applied to the search of positions of equilibrium and for solutions to a problem between the two political parties given a discrete population.

Initially, the basic problem is considered with two political parties and a discrete number  $n$  of voters in a plan, working with the concept of Euclidean distance. From



this model, we have obtained results analogous to those obtained in classical models with respect to positions and the existence of equilibrium: if equilibrium exists, it only occurs when two political parties choose the same policies. Nonetheless, the techniques used for obtaining this result, borrowed from Computational Geometry, differ from those applied in the continuous case. In addition, we have constructed algorithms in order to localize possible positions of balance, based in the intersection of convex hulls.

In reality, however, the nature of politics is different from this equilibrium. Although the majority parties believe in similar policies in many regards, it is necessary to find a representation of ideological difference. In order to accomplish this, we have introduced variations to the basic problem that have changed the definition of equilibrium to one that is more flexible. With this change, more types of solutions were found.

Given that it is possible to create a false simulation of the electorate, through opinion polls for understanding political opinions related to determined topics about voting options, it is interesting to allow flexibility in policies. With this flexibility, a political party can change its campaign strategies, under certain restrictions, with the objective of winning the most number of votes (and in turn, the election).

Upon applying the constructed algorithm to real survey of political opinion, we have observed the citizen need for more quantitative data related to the policies adopted by political parties. we have simulated this algorithm in an application to an example of political competition in Spain. This thesis allows us to conclude that the utilization of Computational Geometric techniques in the discipline of Political Economy yields reliable results.

# Prólogo

La finalidad de esta tesis es la resolución de problemas de competición política mediante la aplicación de técnicas de Geometría Computacional. Por tanto, se unen dos disciplinas muy utilizadas en Economía Política y en Matemática Aplicada, respectivamente. Buscando aplicaciones de las herramientas matemáticas encontramos interesante el estudio del diseño de los programas de los partidos políticos con la meta de ganar las elecciones. De forma objetiva se concluye que las promesas electorales de los dos partidos mayoritarios no se pueden distinguir demasiado si lo que se busca es convencer al mayor número de votantes. Esta tesis está dividida en seis capítulos:

El Capítulo 1 es una introducción: En primer lugar, explicaremos el problema de Competición Política, estudiaremos el concepto de Equilibrio de Nash de Teoría de Juegos, así como los modelos económicos clásicos de Downs y Wittman. En segundo lugar, expondremos las herramientas matemáticas de Geometría Computacional que necesitamos (Cierres Convexos, Diagramas de Voronoi, Arreglos de Curvas, Bisectores y Localización de puntos).

En el Capítulo 2 comenzaremos presentando una versión discreta del conocido como juego de Voronoi. Estableceremos estrategias de victoria, estudiaremos el equilibrio y veremos que es, a su vez, un modelo equivalente a un planteamiento discreto del juego de Downs.

En el Capítulo 3 proponemos el planteamiento de una debilitación de la condición de equilibrio en el juego político sin restricciones. Así, podemos asegurar que:

- Por un lado, cuando no existan posiciones de equilibrio, buscando este equilibrio débil, encontremos posiciones de uno de los partidos para las que el otro partido no

pueda aumentar “mucho” su ganancia.

- Y por otro, que este nuevo equilibrio débil se alcance en posiciones que no sean que los dos partidos elijan la misma política.

Los resultados pueden aplicarse a todo tipo de juegos discretos entre dos competidores.

En el Capítulo 4 consideramos una flexibilización en las políticas por parte de los partidos políticos si tuvieran la posibilidad de tantear previamente al electorado, aceptando algunos cambios en las ofertas de sus programas con el propósito de obtener un mayor número de votantes. Matemáticamente, lo podemos identificar con entornos en los que aceptamos que se muevan los puntos que representan a los partidos.

En el Capítulo 5 presentamos un ejemplo electoral empírico basado en una encuesta de opinión pública y política fiscal en España y tratado con el algoritmo desarrollado en el capítulo 4.

Por último, el Capítulo 6 trata las conclusiones y líneas futuras de investigación que se pueden proponer variando los problemas de competición política o los problemas geométricos.

# Índice

<b>Capítulo 1: Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Introducción a la teoría política .....</b>	<b>3</b>
<b>1.1.1. Teoría de Juegos.....</b>	<b>5</b>
<b>1.1.2. Modelos económicos.....</b>	<b>7</b>
<b>1.2. Introducción a la Geometría Computacional.....</b>	<b>10</b>
<b>1.2.1. Herramientas de Geometría Computacional.....</b>	<b>12</b>
<b>1.3. Utilización de las encuestas electorales .....</b>	<b>15</b>
<b>Capítulo 2: Versión discreta del juego de Downs. Estudio geométrico del equilibrio... ..</b>	<b>17</b>
<b>2.1. Introducción .....</b>	<b>17</b>
<b>2.2. Estudio de estrategias en el juego planteado .....</b>	<b>19</b>
<b>2.3. Equilibrios en este juego.....</b>	<b>21</b>
<b>2.3.1. Existencia de equilibrio.....</b>	<b>21</b>
<b>2.3.2. Unicidad del equilibrio .....</b>	<b>27</b>
<b>2.4. Estudio de casos particulares.....</b>	<b>30</b>
<b>2.4.1. Propositiones sobre casos concretos.....</b>	<b>30</b>
<b>2.4.2. Ejemplos.....</b>	<b>38</b>
<b>2.5. Algoritmo para encontrar la intersección de los cierres convexos .....</b>	<b>42</b>
<b>2.5.1. Propositiones previas.....</b>	<b>42</b>
<b>2.5.2. Algoritmo .....</b>	<b>51</b>
<b>2.6. Conclusiones .....</b>	<b>62</b>
<b>Capítulo 3: Equilibrio débil.....</b>	<b>65</b>

3.1. Introducción.....	65
3.2. Debilitación del equilibrio .....	66
3.2.1. Condiciones de equilibrio.....	66
3.2.2. Ejemplos .....	72
3.3. Estudio del equilibrio débil en posición general.....	81
3.4. Conclusiones .....	91
<b>Capítulo 4: Juego político con consideraciones de entornos .....</b>	<b>93</b>
4.1. Introducción.....	93
4.2. Planteamiento del problema para $k=2$ .....	94
4.3. Algoritmo de resolución.....	96
4.3.1. Clasificación de los puntos de la nube .....	96
4.3.2. Desarrollo del algoritmo .....	97
4.4. Problema en el caso general: $k>2$ .....	100
4.5. Variaciones.....	102
4.5.1. El entorno es un segmento .....	102
4.5.2. El entorno es un polígono convexo.....	103
4.5.3. Se mueven los dos puntos $p$ y $q$ .....	106
4.5.4. La distancia elegida es $L_1$ .....	107
4.5.5. Restricción de las distancias de $p$ o $q$ a los puntos de la nube.....	107
4.6. Conclusiones .....	108
<b>Capítulo 5: Simulación de un problema de competición política nacional con restricciones.....</b>	<b>111</b>
5.1. Introducción.....	111
5.2. Planteamiento teórico del problema .....	112
5.3. Las encuestas de opinión.....	113
5.3.1. Encuesta de opinión pública y política fiscal n° 2616 del CIS .....	113

5.3.2. Simulación de un ejemplo en política nacional.....	114
5.4. El algoritmo y su aplicación al ejemplo .....	116
5.4.1. Implementación del algoritmo .....	116
5.4.2. Resultados .....	117
5.5. Conclusiones .....	120
Capítulo 6: Conclusiones y líneas futuras de investigación.....	123
6.1. Conclusiones .....	123
6.2. Líneas futuras de investigación .....	129
6.2.1. Nuevos problemas en competición política .....	129
6.2.2. Problemas geométricos .....	131
Anexo: Código fuente.....	133
Bibliografía .....	147

# Capítulo 1

## Introducción

El problema que se trata es, básicamente, el siguiente: si tenemos una cierta población de votantes, dos partidos políticos y una serie de parámetros que describen las ofertas electorales de cada partido en diversos temas, ¿cuáles deben ser los valores de los parámetros elegidos por cada partido para captar el mayor número de votantes? Traducido al lenguaje matemático, asimilamos los votantes a una nube de puntos del plano, es decir, nos centramos en dos aspectos que medimos con sendos parámetros, y buscamos los puntos óptimos del plano que nos den la posición en la que se situarán los partidos políticos. Un ciudadano votará a un cierto partido si su posición está a menor distancia de la que ocupa este partido que de la del otro. En realidad, tenemos una repartición del plano entre dos puntos donde la condición es que la zona correspondiente a cada uno contenga los puntos más próximos a él. Tenemos una estructura de Geometría Computacional conocida como Diagrama de Voronoi, pero, como el número de puntos de la nube es finito, y sólo hay dos regiones, es el caso discreto más sencillo. Para el planteamiento económico, utilizamos, por un lado, las funciones de utilidad como medida de las preferencias de los votantes, y, por otro, el estudio de las posiciones de los partidos en las que, si se mueve cualquiera de ellos, no se consiguen más votos, que es la base del Equilibrio de Nash.

También es importante señalar que la teoría desarrollada en el problema político concreto se puede aplicar con otros significados. Así podríamos tratar temas del

funcionamiento de una empresa, de ofertas comerciales de empresas de seguros y, en general, de localización de todo tipo de servicios (Ghosh et al., 1993; Eiseis et al., 1993).

La planificación estratégica de procesos y cambios políticos implica un severo análisis de la situación actual, una definición clara de adversarios y partidarios, un análisis puntual de las relaciones de poder, una clara idea del objetivo que se quiere alcanzar y la concentración de todas las fuerzas para lograr dicho objetivo. En política, en cuanto a acción estratégica se refiere, continúa prevaleciendo el comportamiento táctico y la acción a corto plazo. Es requisito indispensable para lograr el éxito continuado y a largo plazo una planificación de estrategias en la ejecución de políticas y en la confección de campañas. De esta forma, los partidos políticos modelan y varían sus propuestas, dentro de unos márgenes, en relación a las acciones de sus adversarios. Dichas propuestas son más relevantes cuando tratan sobre temas de gran interés para los ciudadanos en un cierto período. La relevancia del tema a tratar por los partidos políticos es un parámetro difícil de medir que puede considerarse como una componente subjetiva que puede consultarse a través de las encuestas de opinión. El hecho es que los partidos políticos discuten en base a proposiciones poco claras y sujetas a múltiples interpretaciones.

En cualquier proceso de toma de decisiones, el modelo matemático empleado se verá afectado por los valores numéricos introducidos. Debemos tener en cuenta que la validez de los resultados puede depender de la asignación numérica de parámetros desconocidos para los que sólo podemos estimar o conjeturar. No obstante, el modelo presentado tiene en cuenta estos factores y arroja resultados fiables que pueden ser aplicados por los partidos políticos.

En problemas de competición política se trata de predecir un futuro que depende de las acciones de unos agentes que actúan en el presente. Es decir, se crea una realidad que a su vez actúa sobre el agente. Este mecanismo de retroalimentación hay que tenerlo muy presente a la hora de aplicar cualquier modelo. La esencia de la estrategia política es prever el futuro y eso depende de unas expectativas que pueden ser



irracional y cambiar en cualquier momento, alterando el resultado. Así, la aplicación de un modelo debe someterse a revisión cada vez que la dinámica del proceso así lo aconseje.

En este trabajo abordamos el diseño de estrategias políticas óptimas ante cualquier cambio importante de la situación en la que resulta necesario flexibilizar las exigencias. El estudio se realiza a través de un modelo geométrico discreto basado en técnicas de Geometría Computacional. La utilidad de esta ciencia no es sólo descriptiva sino de ayuda a la toma de decisiones.

### **1.1. Introducción a la teoría política**

El escenario de la competición política es una democracia en el que todas las opciones políticas son posibles y hay libertad para los ciudadanos a la hora de votar. Suponemos que los votantes están interesados en los programas políticos y se molestan en estudiarlos para poder escoger lo que se acerca más a sus preferencias. Partimos de un modelo de bipartidismo donde las ofertas electorales se refieren a dos temas concretos y que se puedan considerar determinantes a la hora de reflexionar la opción política personal, como puede ser inversión en Sanidad y Educación, gastos militares y en Investigación, etc. Suponemos que el objetivo de los partidos es ganar las elecciones o por lo menos, encontrar la posición óptima en el sentido de que, si la posición cambia no se pueden obtener más votos.

La Economía Política hace un balance entre los intereses de los diferentes votantes en conflicto y los partidos políticos (Roemer, 2001). Estudia las preferencias políticas de la distribución de los votantes de una población atendiendo a factores socioeconómicos que se incorporan a la política pública. Estos se derivan de las diferencias de renta, edad, situación laboral, etc. (Enelow et al., 1982). Los modelos unidimensionales del espacio sobre el que se distribuyen las preferencias de los votantes son excesivamente simplistas, ya que representar todas las áreas políticas de un partido por un solo parámetro no ilustra la realidad. Por ejemplo, si analizamos conjuntamente la Política Fiscal y la Política Exterior, un partido que tiene ideas intervencionistas en

Política Exterior no tiene por qué apoyar también una Política Fiscal recaudadora, es decir, un solo valor no caracteriza las dos políticas a la vez.

Además, la resolución de estos problemas en los que se utiliza la Teoría de Juegos para estudiar posibles estrategias, consiste, básicamente, en la búsqueda del llamado *votante mediano*, es decir, aquél que corresponde con la posición de la mediana o elemento central.

Los dos modelos clásicos de competición política, Downs y Wittman, parten de un continuo de ciudadanos, se supone que todos votan y los dos partidos tienen sus funciones de ganancias o pagos. Dado un conjunto de tipos, la población se caracteriza por la fracción de población que tiene un cierto rasgo (que clasifican a la población atendiendo a un cierto rasgo común, podría ser su renta), las políticas diferentes pertenecen a un espacio y cada ciudadano tiene su función de utilidad que contabiliza sus preferencias (Roemer, 2001; Downs, 1957). El objetivo es alcanzar equilibrio político que adopta el concepto de equilibrio de Nash.

El análisis político pretende ayudar a comprender la complejidad de las componentes que aparecen en política aplicando modelos (Hinich et al., 1981). Este proceso de abstracción sirve para simular una realidad más simple que la del mundo en que vivimos.

El modelo espacial político ha ido evolucionando (Hinich, 2005). Es posible considerar las posiciones políticas de los partidos como puntos en un espacio. Este espacio político puede describir una o varias cuestiones. Cada una de ellas se asocia con una dimensión espacial. Todo modelo espacial desglosa el análisis de la política en tres componentes:

- La elección del votante: elige al candidato o a la política más cercana a su ideal de lo que se debería hacer.
- La política de los partidos: los partidos conocen los gustos de la población y hacen propuestas con la idea de captar el mayor número de votos.
- Los resultados: en ciertas condiciones, los partidos convergen hacia el centro de la distribución de votantes.

La idea general se centra en asignar una función de preferencia a cada votante que describa lo que piensa acerca de las distintas políticas. Con ellas, podremos analizar las reacciones de los votantes ante cada propuesta.

Las bases de la competencia espacial son de Hotelling(1929) y de Smithies(1941) que utilizaron el espacio para describir la necesidad de las compañías de estar cerca de los mercados. Se adaptó a la política analítica por Downs(1957) y Black(1958) que aportaron dos de las contribuciones más importantes de la teoría política:

- El poder político se halla en la zona media de la distribución de los votantes.
- La estabilidad de los sistemas políticos es una variable a analizar.

Con estas ideas, en este trabajo se propone un modelo político particular y se abordan los problemas usuales de la competición política bajo un tratamiento puramente geométrico.

En la mayor parte del presente estudio se desarrollan los resultados teóricos en un espacio bidimensional y un sistema bipartidista. Algo que se ajusta a la realidad de muchos países con dos partidos mayoritarios. De todas formas, en muchos de los casos, extrapolamos el estudio a mayor número de dimensiones y de partidos.

### **1.1.1. Teoría de Juegos**

La Teoría de Juegos estudia situaciones de conflicto y cooperación a las que denominamos juegos, en los que interactúan individuos racionales analizando los comportamientos y resultados que se esperan, bien mediante decisiones individuales (juegos no cooperativos) bien mediante acuerdos entre los participantes (juegos cooperativos).

La Teoría de Juegos ha aportado instrumentos que han servido para analizar de forma eficaz muchas situaciones de tipo económico, social, político y legal (Ordeshook, 1986).

Como instrumento matemático serio para estudiar el comportamiento humano empezó realmente en 1944 con la publicación de *Theory of Games and Economic*

*Behavior* por John Von Neumann y Oskar Morgensten. Además, se incrementó su conocimiento y presencia pública a partir de la concesión, en el mismo año, del Premio Nobel de Economía a tres de sus primeros y más importantes creadores (John Forbes Nash, Reinhard Selton y John C. Hasanyi).

En un juego, cada jugador intenta conseguir el mejor resultado posible (maximizar su utilidad) pero teniendo en cuenta que el resultado del juego no depende sólo de sus acciones, sino, también de las acciones de los otros jugadores. Por eso podemos considerar que la Teoría de Juegos es la teoría de la decisión interactiva, diferente de la teoría de la decisión individual (Gibbons, 1992).

Podemos distinguir dos tipos básicos de juegos: cooperativos y no cooperativos. Entre los no cooperativos, podemos hacer dos distinciones básicas, juegos estáticos o dinámicos, y juegos con y sin información completa. En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultáneamente, mientras que en los dinámicos, los jugadores pueden conocer las decisiones de otro antes de decidir.

En los juegos con información completa, todos los jugadores conocen las consecuencias del conjunto de decisiones tomadas, para sí mismos y para los demás, mientras que en los juegos con información incompleta, algún jugador desconoce alguna de sus consecuencias (Pérez, 2004).

Sea  $X$  un conjunto de alternativas posibles, mutuamente excluyentes, entre las que debe elegir un agente. En  $X$  suponemos definida la relación binaria,  $\succsim$ , llamada *relación de preferencia*.

Una función  $U : X \rightarrow R$  es una *función de utilidad* que representa la relación de preferencia  $\succsim$ , si para todo  $x, y \in X$   $x \succsim y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$ . Los pagos o ganancias para cada jugador será la utilidad que reporta a cada uno el resultado del juego.

El concepto de equilibrio de Nash nos proporciona una condición necesaria (y en algunos casos, también suficiente) para que un perfil de estrategias sea la solución del juego, es decir, una predicción válida sobre el comportamiento de jugadores racionales.

En el juego  $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$  decimos que el perfil de estrategias  $(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*)$  es un *Equilibrio de Nash (EN)* si para cada jugador  $i$ ,

$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_i, s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$  para todo  $s_i$  de  $S_i$ , donde  $S_i$  es el conjunto de estrategias que puede adoptar el jugador  $i$  y  $u_i$  es su función de utilidad (Pérez et al., 2004).

Esto no significa que en un EN cada jugador esté alcanzando el mejor resultado posible, sino el mejor resultado condicionado por el hecho de que los demás jugadores jueguen las estrategias indicadas para ellos en dicho perfil. Cada jugador predice que estas estrategias van a ser usadas por el resto de jugadores, entonces el EN requiere que esas predicciones sean correctas. Ningún jugador debe tener incentivos para jugar de un modo diferente, y no debe tener interés en desviarse de la predicción (Gibbons, 1997).

### 1.1.2. Modelos económicos

Para trabajar con el problema que nos ocupa de aquí en adelante, necesitamos una serie de conceptos y modelos de la competición política (Roemer, 2001). Partimos de un conjunto de tipos  $H$  y de un conjunto medible  $S \subset H$  tal que la población se caracteriza por  $F$ , siendo  $F(S)$  la fracción de población que tiene rasgo  $h$ . Si se conoce la distribución del tipo de votantes es un modelo con certidumbre y si sólo se conoce una distribución de probabilidad será un modelo con incertidumbre. El espacio de políticas  $T$  es un intervalo. Cada ciudadano tiene un orden de preferencia sobre las políticas, representado por una función de utilidad  $v : T \rightarrow R$ . Denotamos la función de utilidad de un ciudadano del tipo  $h$  como  $v(., h)$ . Cuando hay dos políticas a elegir, un votante vota la que prefiere. Si el votante es indiferente entre dos políticas, porque le dan la misma utilidad, vota a cada política con una probabilidad  $\frac{1}{2}$ .

Hay dos partidos políticos que tienen unas funciones de ganancias o pagos dadas por:  $\Pi^i : T \times T \rightarrow R$ ,  $i = 1, 2$ . El equilibrio político es el equilibrio de Nash en el juego

de dos partidos. Así que, traduciendo en nuestro caso, la posición  $(t^{1*}, t^{2*})$  es un *equilibrio político* si:

$$\begin{cases} \Pi^1(t^{1*}, t^{2*}) \geq \Pi^1(t, t^{2*}), \forall t \in T \\ \Pi^2(t^{1*}, t^{2*}) \geq \Pi^2(t^{1*}, t), \forall t \in T \end{cases}$$

Suponemos que los dos partidos conocen la distribución de la población y la función de utilidad de los votantes,  $v$ .

Dadas las políticas  $t^1$  y  $t^2$  ofertadas por los partidos 1 y 2, si el conjunto de tipos que prefieren  $t^1$  a  $t^2$  es  $\Omega(t^1, t^2) \subset H$  y el conjunto de tipos que son indiferentes entre las dos es  $I(t^1, t^2)$ , la fracción de votantes que eligen  $t^1$  vendrá dada por  $\rho(t^1, t^2) = F(\Omega(t^1, t^2)) + \frac{1}{2}F(I(t^1, t^2))$  y  $\rho(t^1, t^2)$  es mayor, igual o menor que  $\frac{1}{2}$ . En el primer caso gana el partido 1, en el segundo, cada partido gana con probabilidad  $\frac{1}{2}$  (si hay empate, se echa una moneda al aire) y, en el tercero, pierde el partido 1. Por tanto, si llamamos  $\pi(t^1, t^2)$  a la probabilidad de que gane el partido 1, que nos servirá para definir las funciones de ganancias  $\Pi^i$  de cada candidato, tenemos:

$$\pi(t^1, t^2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho(t^1, t^2) > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \rho(t^1, t^2) = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \rho(t^1, t^2) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para el *modelo de Downs* los dos partidos en competición persiguen, únicamente, ganar el poder. Los votantes piensan en sus preferencias políticas pero los candidatos no. Para conseguir ganar el poder cada partido desea maximizar su probabilidad de victoria. Esto es:

$$\begin{cases} \Pi^1(t^1, t^2) = \pi(t^1, t^2) \\ \Pi^2(t^1, t^2) = 1 - \pi(t^1, t^2) \end{cases}$$

Si llamamos *ganador Condorcet* estricto a una política  $t^*$  tal que  $\pi(t^*, t) = 1$  para toda política  $t \neq t^*$ , se comprueba que el único equilibrio político es  $(t^*, t^*)$ .

Si la función de utilidad de los votantes,  $v$ , tiene un único máximo en  $T$ , y el conjunto de tipos indiferentes entre dos políticas cualesquiera,  $t^1 \neq t^2$  tiene medida cero, un teorema demuestra que existe equilibrio político en el juego de Downs. Y si tenemos que la función que nos da la fracción de población cuyas políticas ideales (las que maximizan su utilidad) sean menores que  $t$ , para todo  $t$  del espacio de políticas, es continua y estrictamente creciente, este equilibrio es único y de la forma  $(t^*, t^*)$  con  $t^*$  la política en la que la función anterior vale  $\frac{1}{2}$  (política mediana).

Si la competición política es entre partidos que tienen preferencias sobre las políticas que proponen, tenemos el *modelo de Wittman*. Para este caso, las funciones de ganancias de los partidos vienen dadas por:

$$\begin{cases} \Pi^1(t^1, t^2) = \pi(t^1, t^2)v^1(t^1) + (1 - \pi(t^1, t^2))v^1(t^2) \\ \Pi^2(t^1, t^2) = \pi(t^1, t^2)v^2(t^1) + (1 - \pi(t^1, t^2))v^2(t^2) \end{cases}$$

siendo  $v^1$  y  $v^2$  las preferencias de dos grupos de ciudadanos a los que representan los dos partidos.

El equilibrio político es único y de la forma  $(t^*, t^*)$  siendo  $t^*$  la política mediana, bajo unas condiciones parecidas a las del equilibrio de Downs.

La aplicación práctica de estos modelos es lo que llamamos *programas redistributivos*, es decir, el estudio de cómo las preferencias de los votantes determinan los programas electorales. Nos encontramos ejemplos de redistribución según conflictos de los tipos: ricos-pobres, jóvenes-viejos, empleados-desempleados, diferentes regiones, etc. (Enelow et al., 1982).

Para nuestro planteamiento nos interesa reflejar las preferencias en función de la distancia entre puntos y analizar si existen casos en los que se alcanza equilibrio político, si hay situaciones en que es único y si puede existir equilibrio fuera de que los dos partidos elijan la misma política. Aplicando la Geometría Computacional, además,

buscamos algoritmos que nos permitan localizar estas posiciones de equilibrio dado un conjunto de datos. La aplicación de técnicas de la Geometría Computacional en nuestro modelo se debe a que el espacio de políticas elegido es bidimensional y el conjunto de votantes finito, por lo que no se pueden aplicar los resultados de equilibrio en la política mediana anteriormente expuestos.

## **1.2. Introducción a la Geometría Computacional**

La Geometría Computacional utiliza algoritmos para resolver problemas geométricos conceptualmente sencillos usando el menor número de recursos en el mínimo tiempo posible. La mayoría de los estudios algorítmicos que abordan estos problemas han ido apareciendo desde hace ciento cincuenta años, pero sobre todo en los últimos treinta. Sólo recientemente, han sido realizados estudios sistemáticos de algoritmos geométricos y cada día, más investigadores se sienten atraídos por la disciplina a la que dio nombre Shamos en 1975.

Hasta hace poco, Geometría Computacional se refería al diseño y análisis de algoritmos geométricos, pero últimamente ha ampliado su campo, y ahora también incluye el estudio de problemas geométricos desde un punto de vista computacional como convexidad computacional, topología computacional y complejidad combinatoria de disposiciones de poliedros (Berg et al., 1997). Además, ha aumentado el número de áreas en las que se aplican los resultados de esta disciplina: ingeniería, cristalografía, diseño asistido por ordenador, sistemas de posicionamiento global, robótica, sistemas de detección de errores, modelado geométrico, optimización combinatoria, visión por ordenador, reconocimiento de patrones y modelado sólido.

El nexo de unión de la Geometría Computacional con la Economía lo encontramos, como base del problema, con el Juego de Voronoi (Cheong, 2002) y, en el sentido de las aplicaciones, con lo que conocemos como Ubicación de Servicios (Ahn et al., 2004).

El *Juego de Voronoi básico* consiste en que dos jugadores colocan puntos de forma alternativa y uno cada vez en lo que llamamos arena de juego, hasta que cada uno



de ellos haya terminado de situar sus  $n$  puntos. La arena se subdivide según la regla del vecino más próximo, por lo tanto, consideraremos el diagrama de Voronoi de  $2n$  puntos. El jugador cuyos puntos controlen un área mayor es el que gana. El problema es que nadie sabe cómo se puede ganar este juego, incluso en muchos recintos restringidos. Es un problema de tipo continuo (Fekete et al., 2003). Sobre este juego se han hecho variaciones como que la zona de juego sea un recinto (círculo, segmento recto) o que los jugadores puedan colocar más de un punto cada vez para poder estudiar estrategias de ganancia. El Juego de Voronoi más natural es el que utiliza una zona de juego bidimensional y la métrica euclídea.

El problema *de Ubicación de Servicios*, desarrollado en el ámbito de la Investigación Operativa, estudia la localización óptima de un nuevo servicio, entendiéndolo como un servicio a la comunidad, con respecto a un conjunto dado de consumidores. Es decir, es un problema de competición entre diferentes jugadores con el objetivo de conseguir el mayor número de, llamémosles, clientes. Para su estudio se necesita combinar conceptos de Teoría de Juegos y de Geometría. De hecho, la Geometría Computacional está permitiendo obtener soluciones eficientes (Preparata, Shamos, 1985). Los resultados más recientes en el área de la ubicación de servicios se han resuelto con la ayuda de herramientas como los diagramas de Voronoi, los Cierres convexos o las herramientas que se utilizan en problemas de Visibilidad, entre otros. Podemos encontrar aplicaciones en diversos campos como pueden ser la Economía y la Organización Industrial.

No vamos a tratar todos los temas que abarca esta disciplina ni todas las aplicaciones, ya que no es el objetivo de esta tesis. La idea es exponer aquéllos que se han utilizado para la resolución de problemas de competición en el marco político.

### 1.2.1. Herramientas de Geometría Computacional

#### Localización de puntos

Una cuestión básica para las aplicaciones informáticas de estructuras geométricas (por ejemplo, en DAC, sistemas de información geográfica, robótica, bases de datos, etc.) es la pregunta “en qué lugar estoy”. Dado un conjunto de objetos geométricos, el *problema de localización del punto* pregunta por el objeto que contiene a un determinado punto. Existen numerosas variantes de este problema en función de la dimensión, del tipo de objetos y de si el conjunto es estático o dinámico. Las soluciones varían en el preproceso usado, el espacio necesario y el tiempo de respuesta. La localización ha inspirado numerosas técnicas de modelado de datos geométricos, algunas de las cuales serán examinadas.

*Query time:* ¿Cuánto tiempo se requiere, en caso peor o mejor, para responder a la cuestión?

*Storage:* ¿Cuánta memoria se necesita para estructurar y almacenar los datos?

*Processing time:* ¿Cuánto tiempo es necesario para la búsqueda?

*Update time:* Dado un elemento específico, ¿cuánto tiempo tardaremos en añadirlo o borrarlo de la estructura de datos?

La variante más simple y no trivial de la localización es la búsqueda en una lista. Los objetos son puntos  $x_1 \leq \dots \leq x_n$  en la recta real, en orden arbitrario, y los intervalos entre ellos  $(x_i, x_{i+1})$  para  $1 \leq i \leq n$ . La respuesta a una pregunta  $q$  es el nombre del objeto que contiene a  $q$ . La búsqueda lineal no necesita ninguna estructura de datos adicional. Los árboles de búsqueda binaria o árboles aleatorios requieren un orden total y la capacidad de hacer comparaciones (Drmotá, 2009; Alonso, Schott, 1995). Un argumento contrario muestra que estos algoritmos basados en comparaciones requieren  $\Omega(\log n)$  comparaciones, donde  $n$  es el número de puntos. Van Emde Boas (1977) mostró cómo se pueden aplicar técnicas *hashing* en árboles de búsqueda para contestar en tiempo del orden  $\log(\log U)$ , si los puntos son enteros  $\{1, \dots, U\}$ . Un método usado en

la práctica es la partición del rango de entrada en  $b$  subconjuntos de igual tamaño, y responder la consulta buscando el subconjunto que contiene el objeto a encontrar.

### Problemas de proximidad

Existen muchas aplicaciones a problemas habituales en los que es necesario tener en cuenta cuestiones relativas a distancias entre puntos y conocer en cada momento el punto o conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor o mayor que el resto (Smid, 1997). Existen diferencias entre si se quiere maximizar o minimizar distancias. Dada una nube de  $n$  puntos en el plano, el par de puntos que están más alejados entre sí serán vértices del cierre convexo. Por lo tanto, el cálculo de éste nos llevaría fácilmente a encontrar el par más lejano, lo que puede hacerse en tiempo  $O(n \log n)$ . Sin embargo, el par más cercano no tiene por qué cumplir ninguna relación con el cierre convexo, lo que nos lleva a desarrollar otras técnicas. Los problemas que desarrollaremos a continuación utilizan propiedades métricas y si no se afirma lo contrario, se referirán a la distancia euclídea. Sobre el coste de problemas conocidos de proximidad tenemos el siguiente teorema:

**TEOREMA:** Cualquier algoritmo que resuelve alguno de los problemas siguientes: “par más cercano”, “búsqueda del vecino más cercano”, “todos los vecinos más cercanos”, EMST y “el círculo vacío más grande” tendrá un coste computacional mínimo de  $O(n \log n)$ .

Para resolver problemas de proximidad es muy interesante la estructura de *diagrama de Voronoi*.

### Diagramas de Voronoi

Uno de los temas más estudiados en la Geometría Computacional son los diagramas de Voronoi (Aurenhammer et al., 2000). Sea un conjunto  $S$  de  $n$  sitios o puntos en el plano y la distancia euclídea:

$d(p, x) = \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$  con  $p = (p_1, p_2)$  y  $x = (x_1, x_2)$ . El segmento que une  $p$  y  $q$  lo denotamos por  $\overline{pq}$ . Y llamamos el *bisector* de  $p$  y  $q$  al conjunto:

$B(p, q) = \{x / d(p, x) = d(q, x)\}$ , que es la línea perpendicular a  $\overline{pq}$  por su punto medio.

El bisector separa el semiplano que contiene a  $p$  del que contiene a  $q$ . Llamamos *región de Voronoi de  $p$*  con respecto a  $S$  a

$$VR(p, S) = \bigcap_{q \in S, q \neq p} D(p, q) \text{ con } D(p, q) \text{ el semiplano que contiene a } p.$$

Finalmente, el *diagrama de Voronoi* de  $S$  se define como:

$$V(S) = \bigcup_{p, q \in S, p \neq q} \overline{VR(p, S)} \cap \overline{VR(q, S)}$$

(denotando  $\overline{A}$  como la adherencia o clausura del conjunto  $A$ ). Cada región de Voronoi es un abierto y convexo y las diferentes regiones son disjuntas entre sí. Los diagramas de Voronoi aparecen en muchas áreas diferentes ya que es una estructura geométrica muy natural (Okabe et al., 2000).

La estructura que más aparece en la geometría computacional es el cierre convexo, mencionado anteriormente. Es útil por sí mismo y como herramienta para la construcción de otras estructuras. Además, se puede considerar que el estudio de la computación del cierre convexo es el origen del área de la geometría computacional. Hay diversas definiciones de *cierre convexo* de un conjunto de puntos  $S$ , pero, tal vez, las más claras e intuitivas son: la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $S$ , entendiendo como *conjunto convexo* al que verifica que dada cualquier pareja de puntos de dicho conjunto, el segmento que los une está contenido en ese conjunto y la intersección de todos los semiespacios que contienen al conjunto (en dos dimensiones, tendremos semiplanos). El cierre convexo tiene aplicaciones en estudios de colisiones y análisis de formas, por ejemplo. Existen numerosos algoritmos que nos permiten su construcción, en dos y tres dimensiones, por métodos como el *divide y vencerás* y el incremental.

La tercera estructura, en importancia, utilizada en la geometría computacional son los arreglos (Abellanas et al., 2004). Los diagramas de Voronoi, los cierres convexos y los arreglos están muy relacionados. El caso básico son los *arreglos de rectas*: un conjunto de rectas ordenadas en el plano induce una partición del mismo en

regiones convexas o caras, lados y vértices. Consideramos que, tanto las caras como los lados son abiertos. Encontramos aplicaciones de los arreglos en problemas de Visibilidad y en la búsqueda de polígonos convexos vacíos, por ejemplo. Podemos generalizar la estructura considerando arreglos de curvas y, en concreto, las que a nosotros nos van a interesar que son los arreglos de círculos.

### **1.3. Utilización de las encuestas electorales**

Para aplicar los modelos y algoritmos de esta tesis a ejemplos utilizaremos las encuestas y estudios de opinión para predecir o estimar la intención de voto, es decir, el grado de acercamiento de los votantes a las diferentes posturas posibles sobre algunas cuestiones. Concretamente, queremos encontrar elementos significativos para la sociedad en momentos cercanos a los procesos electorales y estudiarlos para estimar el número de votantes que estarían más cercanos a unos u otros. Esto permitiría a los partidos poder rectificar en cierta medida sus programas y políticas a ofertar para asegurarse un mayor número de votantes. Está claro que tanto las opiniones de los votantes como los programas políticos resultan variables de carácter borroso, imposible, en la mayoría de los casos, de medirse con exactitud (Fiorina, 1978).

Es conveniente recordar que los estudios de opinión pública y mercado, incluidas las encuestas políticas, son válidos y útiles en la medida en que se utilizan correctamente las técnicas más apropiadas de acuerdo con los objetivos que se persiguen con cada estudio. Una encuesta predictiva debe tener en cuenta los radicales cambios producidos en el comportamiento electoral, que se expresan, por ejemplo, en el incremento del voto nulo, la abstención y la tendencia a retardar la decisión de voto (Feddersen, Pessendorfer, 1999). Esto determina que, cuanto más lejana del día de la elección, menor es el valor predictivo de la encuesta.



## Capítulo 2

### Versión discreta del Juego de Downs.

### Estudio geométrico del equilibrio

#### 2.1. Introducción

Se han realizado trabajos de localización en el marco de la economía (Eiselt et al., 1993) con modelos en lo continuo (Ghosh and Harche, 1993) y en lo discreto (Hodgson, 1981; Hakimi, 1986; Hakimi, 1990), y en lo discreto como adaptación de lo continuo (Mehrez and Stulman, 1982; Church, 1984). En este capítulo comenzaremos presentando una versión discreta del conocido como juego de Voronoi (Fekete and Meijer, 2003, Ahn, et al., 2004). Estableceremos estrategias de victoria, estudiaremos el equilibrio y veremos que es, a su vez, un modelo equivalente a un planteamiento discreto del juego de Downs (Roemer, 2001).

El problema que vamos a tratar es el siguiente: Dos jugadores eligen su posición sobre el plano, en el cual se encuentran situados  $n$  puntos dados por sus dos coordenadas. Consideramos que cada jugador atrapa aquellos puntos que están más próximos a él que al contrario. Para contabilizar los puntos ganados por cada jugador, trazamos la mediatriz del segmento que une las posiciones de los dos jugadores. Cada uno se llevará, por tanto, los puntos situados en su semiplano. El ganador será el

jugador que consigue más puntos (Serra and Reville, 1994; Smid, 1997; Aurenhammer and Klein, 2000; Okabe et al., 2000).

Este sencillo juego puede traducirse en términos de Economía Política: Se pueden considerar los dos jugadores como dos partidos políticos  $p$  y  $q$ , cuyas posiciones vienen dadas por las políticas ofrecidas,  $t^1$  y  $t^2$ , del espacio de políticas bidimensional  $T=R^2$ , y la nube de puntos  $v_i=(v_{i1}, v_{i2})$  con  $i=1, \dots, n$ , las correspondientes posiciones de los votantes de una cierta población, con  $v_i$  perteneciente al conjunto de tipos  $H=\{v_1, \dots, v_n\} \subset R^2$ .

El juego planteado es una versión discreta del juego de Downs, si se toma una función de utilidad y una función de distribución adecuadas. Las funciones de ganancias,  $\Pi^i(t^1, t^2)$ ,  $i=1,2$ , si las políticas elegidas son  $t^1$  y  $t^2$ , respectivamente, vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \Pi^1(t^1, t^2) &= n_{t^1} \text{ si } t^1 \neq t^2 \\ \Pi^2(t^1, t^2) &= n_{t^2} \end{aligned}$$

y

$$\Pi^1(t^1, t^2) = \frac{n}{2} = \Pi^2(t^1, t^2), \text{ si } t^1 = t^2$$

Donde  $n_{t^1}$  es el número de votantes que ocupan una posición más próxima a  $t^1$  que a  $t^2$ , y los que están a igual distancia de los dos, y  $n_{t^2}$  es el número de votantes más cercanos a  $t^2$  que a  $t^1$ . De esta forma, en el caso en que los puntos sean equidistantes a las dos políticas, se ha decidido que el votante elige la política del primer partido, no que elija cada una con probabilidad  $\frac{1}{2}$  como en algunos ejemplos estudiados en Economía Política (Person and Tabellini, 1999; Roemer, 2001). En caso de elegir la misma política, cada partido tendrá la mitad de los votantes.

Veremos, a continuación, si es posible que un partido tenga posibilidad de ganar en el juego expuesto, siempre que conozca la política ofrecida por el otro partido.



## 2.2. Estudio de estrategias en el juego planteado

A diferencia de otros planteamientos (Abellanas et al., 2006), consideramos nuestro juego sin restricciones, es decir, trazaremos la mediatriz entre las posiciones de los partidos  $t^1$  y  $t^2$ , y cada partido se llevará a los votantes que están en su semiplano. La idea se centra en permitir a los partidos cambiar su posición, es decir, flexibilizar sus posturas políticas en ciertas líneas, con la finalidad de captar el mayor número de votantes (Okabe and Suzuki 1987; Watson, 2002). De esta forma se plantean estrategias para que un partido elija una posición de manera que mejore su ganancia cuando conoce la posición del otro partido (Wendell and McKelvey, 1981).

### Proposición 2.2.1:

Si  $n$  es par, hay una estrategia para  $p$  mediante la cual consigue empatar cualquiera que sea la posición de  $q$ , sin ponerse en la posición de  $q$ .

*Demostración:*

Trazamos rectas paralelas tales que ninguna de ellas contenga más de un punto de la nube. Cuando tenemos una recta que deja exactamente  $\frac{n}{2}$  puntos de la nube en cada semiplano abierto determinado por ella, situamos  $p$  en el simétrico de  $q$  respecto a esa recta. Entonces,  $p$  obtendrá exactamente  $\frac{n}{2}$  puntos de la nube (Figura 2.1).#

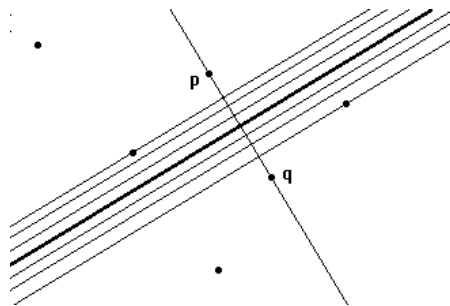


Figura 2.1: Si  $n$  es par,  $p$  puede empatar con  $q$

**Observación:**

Hay ejemplos para  $n$  par en los que es imposible ganar, como el de la figura 2.2. En este caso, es imposible situar a  $p$  para que gane tres puntos de esa nube, ya que el semiplano que contenga a esos tres puntos, contendrá a su cierre convexo (de Berg et al., 1997), al que pertenece  $q$ , luego serán puntos capturados por  $q$ . Por lo tanto,  $p$  sólo puede, como mucho, empatar.

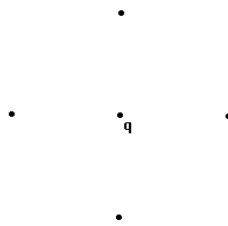


Figura 2.2: En esta situación,  $p$  no puede ganar.

**Proposición 2.2.2:**

Para  $n$  impar, hay una estrategia para situar a  $p$  y ganar  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  votantes, siempre que  $q$  no se encuentre en la posición de algún votante.

*Demostración:*

En primer lugar, trazaremos las rectas que unen los puntos de la nube de dos en dos y elegimos una recta de pendiente distinta a las de estas rectas, y a las que contengan un punto de la nube y el punto  $q$ . Barremos, de arriba a abajo, con rectas paralelas a ella.

En el momento que alcancemos el punto  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ , situamos  $p$ , primero, en el punto simétrico a  $q$  respecto de esta recta y luego un poco más cerca de dicha recta (Figura 2.3). #

**Observación:**

Por esta proposición podemos afirmar que, si el número de puntos de la nube es impar, siempre hay una estrategia para que  $p$  gane a  $q$ , lo que no ocurre para un número par de puntos. En resumen, para cualquier posición de un partido,  $t_0^1$ , existe una posición del

otro partido  $t^{2*}$  en la que éste consigue la mitad de los votantes, si  $n$  es par, y la mitad más uno, si  $n$  es impar, y  $t_0^1$  no es ningún punto de la nube

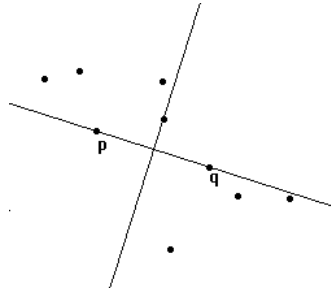


Figura 2.3: Si  $n$  es impar,  $p$  siempre puede ganar a  $q$  si  $q$  no está situado en la posición de un votante

### 2.3. Equilibrios en este juego

Según lo establecido en la introducción, las funciones de ganancias en el juego planteado vendrán dadas por:

$$\Pi^1(t^1, t^2) = n_{t^1} = \text{número de puntos } v_i \text{ tales que } d(v_i, t^1) \leq d(v_i, t^2)$$

$$\Pi^2(t^1, t^2) = n_{t^2} = \text{número de puntos } v_i \text{ tales que } d(v_i, t^1) > d(v_i, t^2) = n - \Pi^1(t^1, t^2)$$

$$\text{si } t^1 \neq t^2$$

$$\text{y } \Pi^1(t^1, t^2) = \Pi^2(t^1, t^2) = \frac{n}{2}, \text{ si } t^1 = t^2, \text{ es decir, cada uno conseguiría la mitad de los}$$

votantes.

Estudiaremos el equilibrio en el juego planteado como un equilibrio político en el sentido de equilibrio de Nash en el juego para dos partidos (Roemer, 2001).

#### 2.3.1. Existencia de equilibrio

En primer lugar, vamos a dar condiciones para la existencia de equilibrio en el juego. Empezamos dando una condición necesaria.

**Proposición 2.3.1:**

Las situaciones de equilibrio, necesariamente, son posiciones en las que cada partido se lleva la mitad de los votantes, es decir,  $t_0^1, t_0^2$  tales que  $\Pi^1(t_0^1, t_0^2) = \Pi^2(t_0^1, t_0^2)$ .

*Demostración:*

Sea un punto de equilibrio  $(t_0^1, t_0^2)$ . Si, por ejemplo,  $\Pi^2(t_0^1, t_0^2) < \frac{n}{2}$ , entonces el partido  $q$  puede cambiar de posición provechosamente, por lo que vimos en las proposiciones 2.2.1. y 2.2.2. Si llamamos  $t^{2*}$  a esta posición y situamos el segundo partido en  $t^{2*}$ , tenemos que  $\Pi^2(t_0^1, t^{2*}) > \Pi^2(t_0^1, t_0^2)$ , y, entonces,  $(t_0^1, t_0^2)$  no es una posición de equilibrio. Así que,  $\Pi^1(t_0^1, t_0^2) \geq \frac{n}{2}$ ,  $\Pi^2(t_0^1, t_0^2) \geq \frac{n}{2}$ , y, ninguna puede ser mayor estrictamente, por lo que  $\Pi^1(t_0^1, t_0^2) = \Pi^2(t_0^1, t_0^2) = \frac{n}{2}$ .#

Vamos a ver una caracterización de las posiciones de un partido para que el otro partido no le pueda quitar  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, se ponga en la posición que se ponga. Para ello, estudiamos en primer lugar, cuál es la localización de  $q$  que le permitiría captar dichos puntos y, por tanto, ganar.

**Proposición 2.3.2:**

Dados  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de una nube de  $n$  puntos, y una posición del punto  $p$ , entonces, existe una localización del segundo punto,  $q$ , en la que esos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos están más próximos a él, si y sólo si,  $p$  no pertenece al cierre convexo de los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos.

*Demostración:*

$\Leftrightarrow$  Primero, vamos a demostrar que dado el cierre convexo de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube y un punto  $p$  exterior a él, existe una recta que separa el punto del cierre convexo.

Consideramos la parte visible del cierre desde  $p$ . Como el cierre convexo es un compacto, la parte visible tendrá dos puntos soporte  $p_1$  y  $p_2$ . Llamamos  $p_1$  al que tiene mayor orden si los ordenamos angularmente en el sentido de las agujas del reloj desde  $p$ .

Podemos suponer que  $p$  está a la derecha del cierre convexo. Entonces, la recta que pasa por  $p$  y  $p_1$  deja el cierre en un semiplano. Así, girando "infinitesimalmente" la recta en el sentido de las agujas del reloj, con centro en  $p$  y trasladándola "infinitesimalmente" en la dirección del cierre convexo, tendremos una recta que deja  $p$  a un lado y el cierre a otro (Figura 2.4).

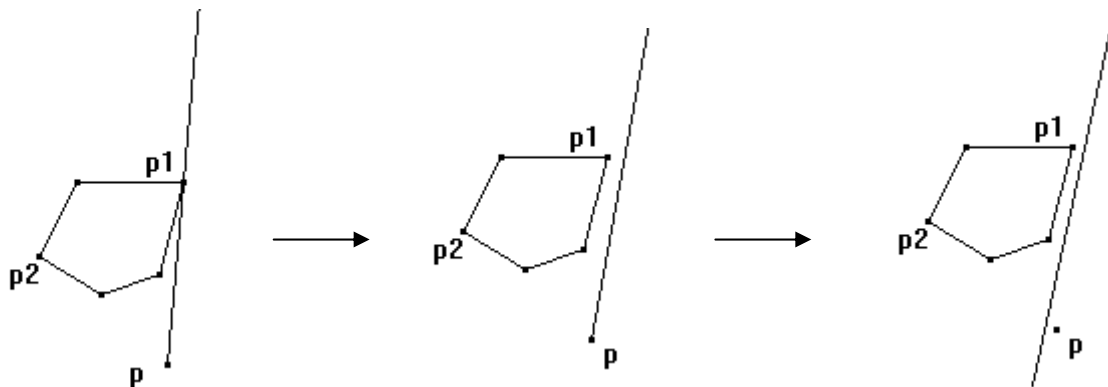


Figura 2.4: Girando y luego trasladando infinitesimalmente la recta que pasa por  $p$  y  $p_1$  separamos  $p$  y el cierre convexo

De esta forma, situando  $q$  en el simétrico de  $p$  respecto de esa recta, tendría los

$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos en su semiplano. (Figura 2.5).

$\Rightarrow$ ) Si  $p$  está en el cierre convexo de los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos, entonces, no hay ninguna posición para  $q$  tal que se lleve esos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos, ya que cualquier semiplano que los contenga contendrá a su cierre convexo, y, por tanto, será el semiplano al que pertenece  $p$ .#

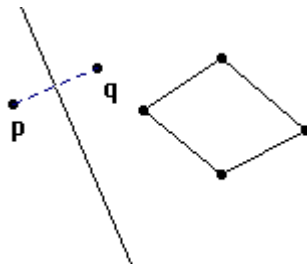


Figura 2.5: Situamos  $q$  en el simétrico de  $p$

En términos del juego planteado, podemos afirmar lo expresado en la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.3:**

Dadas las  $n$  posiciones de los votantes  $v_1, \dots, v_n$ , tomamos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  de esas  $n$  posiciones de todas las maneras posibles, y consideramos el cierre convexo de esos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos.

Entonces, existen posiciones para un partido en las que el otro partido no le puede quitar  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos si y sólo si la intersección de los cierres convexos considerados es distinta del vacío. Cualquier punto en la intersección de los cierres convexos será una de esas posiciones.

*Demostración:*

$\Leftarrow$ ) Si la intersección de los cierres convexos es distinta del vacío, poniéndose  $p$  ahí, asegura que el otro no se puede llevar ninguna combinación de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  votantes por la proposición 2.3.2.

$\Rightarrow$ ) Si la intersección de los cierres convexos fuese vacía, para cualquier posición de  $p$  habrá  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos tal que  $p$  no está en el cierre convexo de esos  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos, y  $q$  puede llevárselos por la proposición 2.3.2.#

Ahora, aplicamos la proposición 2.3.3. para encontrar las posiciones de equilibrio en el juego propuesto.

**Proposición 2.3.4:**

En el juego que nos ocupa existen posiciones de equilibrio si y sólo si la intersección de los posibles cierres convexos que se pueden formar con  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos de la nube es no vacía. En este caso, las únicas posiciones de equilibrio serán cualquier situación  $(t^1, t^2)$  tales que  $t^1$  y  $t^2$  estén en la intersección. Se incluyen, por tanto, equilibrios de la forma  $(t, t)$ .

*Demostración:*

$\Leftarrow$ ) Veamos que si la intersección es no vacía, cualquier par  $(t^1, t^2)$  con  $t^1$  y  $t^2$  pertenecientes a la intersección, es un equilibrio.

Si  $p$  está en la posición  $t^1$ , sabemos por la proposición 2.3.3. que en cualquier otra localización del partido  $q$ , éste no se puede llevar más de  $\frac{n}{2}$  votantes, luego,

$\Pi^2(t^1, t) \leq \frac{n}{2}$  para todo  $t$ . Se aplica el mismo razonamiento al primer partido cuando  $q$

está en  $t^2$ . Por otro lado, en la posición  $(t^1, t^2)$  cada partido se lleva  $\frac{n}{2}$  votantes, ya que  $\Pi^1(t^1, t^2) \leq \frac{n}{2}$ ,  $\Pi^2(t^1, t^2) \leq \frac{n}{2}$ , y las ganancias de votos son complementarias. Entonces,  $\Pi^2(t^1, t) \leq \frac{n}{2} = \Pi^2(t^1, t^2)$  y lo mismo pasaría para el partido  $p$ , así que  $(t^1, t^2)$  es una posición de equilibrio.

Se puede demostrar que no hay posiciones de equilibrio además de las anteriores: Si  $(t^1, t^2)$  es una posición de equilibrio, entonces,  $\Pi^1(t^1, t^2) = \Pi^2(t^1, t^2) = \frac{n}{2}$  (proposición 2.3.1.). Por ejemplo, si  $t^1$  no pertenece a la intersección, entonces hay una estrategia del segundo partido para conseguir  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube en una posición  $t$  (proposición 2.3.3.), así que,  $\Pi^2(t^1, t) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 > \Pi^2(t^1, t^2)$ , una contradicción puesto que  $(t^1, t^2)$  es una posición de equilibrio.

$\Rightarrow$ ) Si la intersección es vacía y existe una posición de equilibrio  $(t^1, t^2)$  entonces, una de las funciones de ganancias,  $\Pi^2$ , satisface que  $\Pi^2(t^1, t^2) \leq \frac{n}{2}$ , ya que los números de votantes ganados son complementarios. Pero, por lo visto en la proposición 2.3.3., al ser la intersección vacía, dada cualquier posición  $t^1$  del partido  $p$ , existe una posición  $t$  del partido  $q$  en la que se puede llevar  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos, luego,  $\Pi^2(t^1, t) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 > \frac{n}{2} \geq \Pi^2(t^1, t^2)$ , y el partido  $q$  se puede mover de forma provechosa.

Esto es una contradicción con que  $(t^1, t^2)$  sea un equilibrio. #



### 2.3.2 Unicidad del equilibrio

Hemos estudiado geoméricamente, qué tienen que verificar las posiciones de equilibrio para el juego presentado, si existen, y, dónde están situadas. La clave es el estudio de la intersección de cierres convexos. Por ello, vamos a analizar las condiciones que nos asegurarán en qué casos tendremos unicidad.

#### a) Estudio para $n$ impar:

##### Proposición 2.3.5:

La intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de una nube de  $n$  puntos es vacía o es en un punto de la nube, si  $n$  es impar.

*Demostración:*

Si en la intersección hubiera algún punto que no fuera de la nube, y colocamos  $p$  en él,  $q$  no podría ganar  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos. Pero vimos en la proposición 2.3.2. que si  $n$  es impar, había una estrategia para que  $q$  se lleve  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de una nube de  $n$  puntos si  $p$  no estaba colocado en ningún punto de la nube, contradicción. #

#### b) Estudio para $n$ par

##### Proposición 2.3.6:

Sea  $v'$  un punto de la nube en la frontera del cierre convexo de los  $n$  puntos, entonces existe una recta que une  $v'$  con otro punto de la nube que deja los mismos puntos en cada semiplano.

*Demostración:*

Dado un punto cualquiera de la nube en la frontera del cierre convexo existe una recta que lo contiene y que deja a todo el convexo en el mismo semiplano (de Berg et al., 1997). Supondremos, sin pérdida de generalidad, que el convexo queda por debajo de la recta. Tomamos como  $v'$  el punto de la nube más alto en la recta. Ordenamos

angularmente los demás puntos de la nube tomando como origen  $v'$  y como ángulo el que forma la semirrecta por debajo de  $v'$ . Así tenemos que, como todos los puntos de la nube quedan al mismo lado de la recta, el que está en la mitad de este ordenamiento cumple que la recta que lo une con  $v'$  deja el mismo número de puntos a cada lado. (Figura 2.6) #

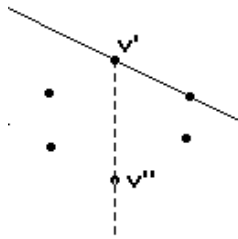


Figura 2.6: Ordenación angular y elección del punto que, junto a  $v'$ , deja la mitad del número de puntos de la nube

**Observación:**

En caso de que los puntos no estén en posición general, si la recta que une  $v'$  con  $v''$  contiene a más de dos puntos de la nube, los que están entre  $v'$  y  $v''$  se considerarán del semiplano en el que están los angularmente menores que  $v''$ , y los que están más lejanos de  $v'$  que  $v''$ , se considerarán del otro semiplano.

**Proposición 2.3.7:**

Si los  $n$  puntos de la nube no están alineados, con  $n$  par, entonces la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube está contenida en un punto.

*Demostración:*

Tomando un punto cualquiera de la frontera del cierre convexo de la nube, sabemos por la proposición 2.3.6. que hay otro punto de la nube de tal forma que la recta que los une deja  $\frac{n}{2} - 1$  puntos a cada lado. Entonces, la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos correspondientes a cada lado y a los dos de la recta es un

segmento contenido en la recta. Como los puntos de la nube no están alineados, habrá un punto de la nube, de la frontera, que no esté en la recta, luego, por la proposición 2.3.6., habrá otro punto de la nube de manera que la recta que une a los dos puntos deja  $\frac{n}{2} - 1$  puntos a cada lado. Entonces, la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos correspondientes será otro segmento contenido en esta recta. Y la intersección de los dos segmentos está contenida en la intersección de las dos rectas, que es, a lo más, en un punto, ya que las dos rectas no son coincidentes porque hemos cogido un punto de la frontera de la nube fuera de la primera recta. Por tanto, la intersección de los cuatro cierres convexos, que es la de los dos segmentos, está contenida en un punto, y la intersección de todos los posibles cierres convexos está contenida en un punto.#

**Observación:**

Por tanto, si  $n$  es par y los puntos no están alineados, el equilibrio, si existe, es único. En general, para todo  $n$  par hay posiciones de  $n$  puntos en las que hay infinitas situaciones de equilibrio: si tenemos  $n$  puntos alineados (Figura 2.7), entonces, la intersección será en el segmento determinado por los dos puntos que están en medio, y cualquier posición  $(t^1, t^2)$ , con  $t^1, t^2$  pertenecientes al segmento, serán de equilibrio.

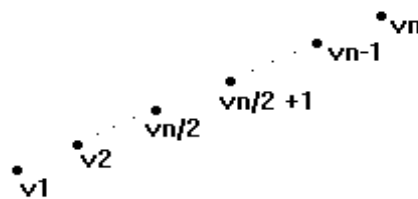


Figura 2.7: Si  $n$  es par, a veces hay infinitas posiciones de equilibrio

### c) Resultado general

Uniendo los resultados establecidos en los casos a) y b), es posible enunciar el siguiente resultado general:

#### Proposición 2.3.8:

La intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube es, a lo más, en un punto, a no ser que los puntos estén alineados con  $n$  par. Por tanto, el equilibrio en nuestro juego, si existe, es único y de la forma  $(t, t)$  a no ser que los puntos estén alineados con  $n$  par.

## 2.4. Estudio de casos particulares

Como hemos comprobado que el estudio del equilibrio se basa en analizar la intersección de los posibles cierres convexos, vamos a considerar casos particulares de éstos.

En primer lugar, expondremos las proposiciones adecuadas para poder hallar la intersección de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube en diversos casos y en segundo lugar, consideraremos ejemplos en los que se halla esa intersección para valores particulares del número de puntos de la nube.

### 2.4.1. Proposiciones sobre casos concretos

#### Proposición 2.4.1:

Si los  $n$  puntos están en posición convexa, es decir, si la frontera del cierre convexo de  $n$  puntos contiene a los  $n$  puntos, con  $n$  impar, y el interior del cierre convexo es no vacío,

se cumple que la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos es vacía.

*Demostración:*

Un punto  $v_i$  de la nube estará en la frontera del cierre convexo de los  $n$  puntos, que es un polígono, luego tendrá un segmento a la izquierda y otro a la derecha en ese polígono. Si hay más de un punto alineado con  $v_i$ , consideramos el segmento a la izquierda, que se puede prolongar a la derecha (Figura 2.8).



Figura 2.8: El segmento a la izquierda de  $v_i$  se puede prolongar por la derecha, si hay más de un punto alineado con él

Llamamos  $l$  al número de puntos de la nube en el segmento y a la izquierda de  $v_i$ ,  $r$  al número de puntos de la nube en el segmento y a la derecha de  $v_i$ . (Si el segmento no se prolonga a la derecha  $r=0$ ). Se cumple que  $l+r+1$  es el número de puntos de la nube en el segmento. Al estar el segmento en la frontera del cierre convexo, se verifica que la recta que contiene a este segmento deja a todo el convexo en un semiplano (supongamos que el de abajo).

Tomamos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube en los que no esté  $v_i$ . Para que  $v_i$  esté en el cierre convexo de esos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos, debe haber al menos un punto de los  $l$  y otro de los de  $r$  en esos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos. Si no fuera así, todo el cierre convexo queda por debajo de la recta, estrictamente, salvo, a lo más, un segmento a la derecha de  $v_i$  o un segmento a la izquierda, con lo que  $v_i$  no estaría en el cierre convexo (Figuras 2.9 y 2.10).

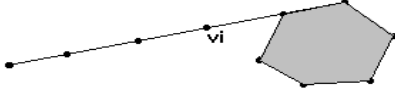


Figura 2.9: Un segmento a la derecha de  $v_i$

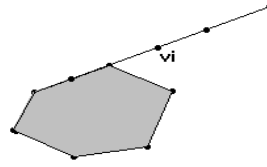


Figura 2.10: Un segmento a la izquierda de  $v_i$

Pero, para que siempre un punto de los de están a la derecha de  $v_i$ , o el propio  $v_i$ , esté en el cierre convexo de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, se ha de cumplir que

$n - (r + 1) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ . Por lo mismo, para que un punto de los que están a la izquierda de  $v_i$ , o

el propio  $v_i$ , esté en el cierre convexo de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, se ha de cumplir que

$n - (l + 1) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ .

Si sumamos las dos desigualdades, obtenemos:

$$2n - r - l - 2 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = (\text{por ser } n \text{ impar}) = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} = n-1 \Rightarrow r + l + 1 \geq n \Rightarrow r + l + 1 = n$$

Entonces, los puntos de la nube están alineados, contradicción con que el cierre convexo de los  $n$  puntos tiene interior no vacío. Por tanto, ningún punto de la nube está en la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos, así que, ésta es vacía (por la proposición 2.3.5.). #

**Observación:**

En el caso de  $n$  par, la ecuación anterior quedaría:

$$2n - r - l - 2 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \Leftrightarrow r + l \geq n - 2$$

Si  $r+l \geq n-1 \Rightarrow r+l+1 \geq n \Rightarrow r+l+1 = n$ , y los  $n$  puntos están alineados (contradicción), por tanto,  $r+l=n-2$ , habría  $r+l+1 = n-1$  puntos en el segmento, y el otro punto no estaría alineado con ellos. Además, si, por ejemplo,  $r > \frac{n-2}{2}$ , entonces sería  $l < \frac{n-2}{2}$ , por lo que,  $n-(l+1) > \frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , contradicción con lo de antes, por lo que  $r=l = \frac{n-2}{2}$ .

Entonces, para  $n$  par, si los puntos de la nube se sitúan en la frontera de su cierre convexo y el interior es no vacío, la única posibilidad para que la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube sea en un punto de la nube, es que  $n-1$  puntos estén alineados y el otro esté fuera de dicha línea. En este caso, la intersección sería el punto que está en el lugar medio (mediana) de los  $n-1$  alineados (Figura 2.11).

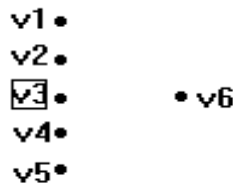


Figura 2.11: Si todos están alineados menos uno, la intersección es el del medio.

**Observación:**

Dados cinco puntos que están en la frontera de su cierre convexo y no todos alineados, la intersección de todos los posibles "triángulos" que se pueden hacer con esos cinco puntos es vacía, como consecuencia de la proposición anterior. Vamos a comprobarlo en diferentes casos (Figura 2.12):

Si no hay tres puntos alineados, los triángulos determinados por los vértices  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_1, v_4, v_5$  sólo intersecan en el vértice  $v_1$ , por lo que la intersección con el triángulo  $v_2, v_3, v_4$  es vacía.

Si hay tres puntos alineados, los triángulos determinados por los vértices  $v_1, v_2, v_4$  y  $v_2, v_3, v_5$  sólo intersecan en el vértice  $v_2$ , y  $v_3, v_4, v_5$  no lo contiene, luego la intersección es vacía.

Si hay cuatro puntos alineados, los triángulos determinados por los vértices  $v_1, v_2, v_5$  y  $v_3, v_4, v_5$  sólo intersecan en el vértice  $v_5$ , y  $v_1, v_2, v_3$  no lo contiene, luego la intersección es vacía.

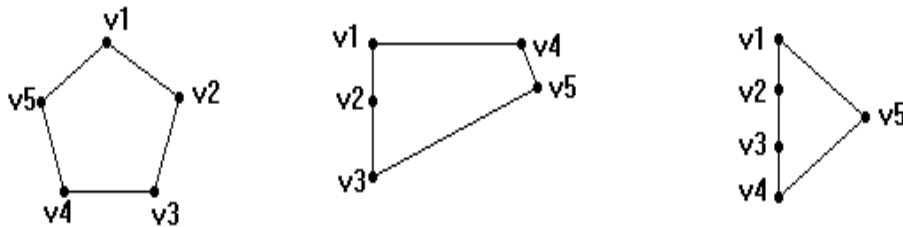


Figura 2.12: Casos posibles en un conjunto de cinco puntos no todos alineados

En las demostraciones anteriores de intersección vacía, hemos demostrado que si los  $n$  puntos de la nube están en la frontera de su cierre convexo y no todos alineados, los puntos de la nube no están en la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube. De esta forma, podemos extender la proposición 2.4.1. para afirmar:

**Proposición 2.4.2:**

La intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de una nube de  $n$  puntos no todos alineados es siempre en el interior del cierre convexo de los  $n$  puntos,



salvo en el caso en que  $n$  es par y hay  $n-1$  puntos alineados y el otro no. En este caso, la intersección total es el punto que está en el lugar medio de los  $n-1$  alineados.

*Demostración:*

Si  $n$  es impar, la intersección, si no es vacía, es en el interior del cierre convexo de los  $n$  puntos, por las proposiciones 2.3.5. y 2.4.1.

Si  $n$  es par, donde la intersección no tiene por qué ser en un punto de la nube, también se cumple esto, salvo en el caso que hemos visto de  $n-1$  puntos alineados, ya que si la

intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2}+1$  puntos tiene algún punto  $t$

de la frontera, y no de la nube, entonces el segmento de la frontera donde está este punto intersección, tendrá  $l$  puntos de la nube a la izquierda y  $r$  puntos a la derecha con  $l+r$  el número de puntos de la nube en el segmento. Así que, tendrá que haber, forzosamente,

algún punto de los  $\frac{n}{2}+1$  puntos que se cogen para el cierre convexo a la derecha de  $t$ , y

alguno a la izquierda, para que  $t$  esté en el cierre convexo de los  $\frac{n}{2}+1$  puntos, por tanto,

$$n-r \leq \frac{n}{2}, n-l \leq \frac{n}{2} \Rightarrow 2n-l-r \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \Rightarrow l+r \geq n \text{ con lo que } l+r=n, \text{ y los } n$$

puntos están alineados (contradicción). #

Tenemos una caracterización para que la intersección de todos los posibles

cierres convexos de  $\frac{n}{2}+1$  puntos de la nube sea en un punto de la nube, si  $n$  par, para

un caso especial:

**Proposición 2.4.3:**

Para el caso en que  $n$  es par y no hay tres puntos alineados, existe un punto  $p$  de la nube

de tal forma que toda recta que une ese punto con otro de la nube deja  $\frac{n-2}{2}$  puntos a

cada lado, si y sólo si, la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube es en un punto de la nube.

*Demostración:*

$\Leftarrow$ ) Si existe una recta que une  $p$  punto intersección de los cierres convexos con un punto de la nube,  $q$ , que deja más de  $\frac{n-2}{2}$  puntos en un semiplano, entonces el cierre convexo de los  $\frac{n}{2} + 1$  puntos tomados de entre los puntos de ese semiplano y  $q$ , no contiene a  $p$ , contradicción con que  $p$  sea la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube. Como se puede ver en la figura 2.13, el único punto de la recta que pertenece al cierre convexo de los  $\frac{n}{2} + 1$  puntos será  $q$ , ya que los  $\frac{n}{2}$  puntos estarán contenidos en el semiplano abierto al no haber más de dos puntos alineados.

$\Rightarrow$ ) Si hubiera  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de tal forma que  $p$  no está en su cierre convexo, entonces, considerando la parte visible desde  $p$  de ese convexo, se cumplirá que la recta que une a  $p$  con uno de los puntos soporte de la parte visible,  $q$ , deja  $\frac{n}{2}$  puntos contenidos en un semiplano abierto, ya que no hay más de dos puntos alineados, contradicción (Figura 2.14).#

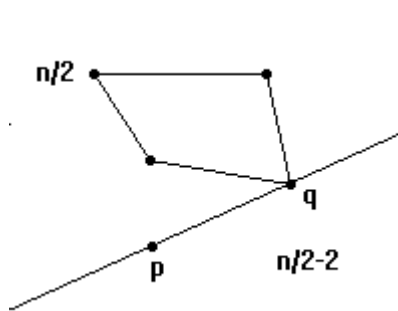


Figura 2.13: Si la recta que une  $p$  con  $q$  dejara más de  $\frac{n-2}{2}$  puntos en un semiplano, existe un cierre convexo de  $\frac{n}{2}+1$  puntos que no contiene a  $p$

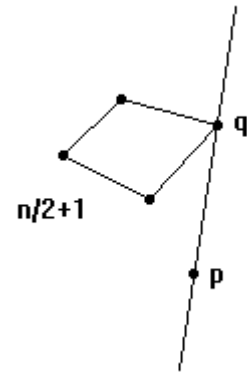


Figura 2.14: Si hubiera  $\frac{n}{2}+1$  puntos de tal forma que  $p$  no está en su cierre convexo, la recta que une  $p$  con  $q$  dejaría  $\frac{n}{2}$  puntos en un semiplano

(Entonces, si la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+1$  puntos de la nube es un punto  $v'$  de la nube, cualquier recta que une  $v'$  con un punto de la nube es un bisector (Erdős et al., 1973)).

**Observación:**

Si hay más de dos puntos de la nube alineados, aunque no lo estén todos, la implicación hacia la derecha no tiene por qué ser cierta, como en el caso que se puede ver en la figura 2.15 en el que el punto  $v_3$  unido a cualquier punto de la nube deja el mismo número de puntos a cada lado si consideramos que los puntos en la recta son del semiplano que convenga. Si es un punto del segmento  $\overline{v_1, v_8}$ , consideramos dos de los puntos del segmento en el semiplano del punto  $v_2$ , y el otro, en el semiplano del punto  $v_6$  y si es un punto del segmento  $\overline{v_2, v_6}$ , consideramos los otros dos puntos del segmento en el semiplano del punto  $v_1$ . En cambio, la intersección de los posibles cierres convexos de cinco puntos de la nube no es en el punto  $v_3$ , ya que no está en el cierre convexo de  $v_4$ -  $v_8$ .

La otra implicación sí se cumple aunque haya más de dos puntos alineados, ya que si la recta que une el punto intersección de los cierres convexos,  $p$ , con otro punto  $q$  deja más de  $\frac{n-2}{2}$  puntos a un lado, entonces no puede dejar  $\frac{n}{2}$  puntos en un semiplano. Si los dejara, el cierre convexo de esos  $\frac{n}{2}$  puntos y  $q$  no contendría a  $p$ , contradicción. Por lo tanto, dejará  $t < \frac{n}{2}$  puntos en el semiplano, y  $r > 0$  en la recta. Entonces, el número de puntos que deja a un lado es  $t + r = \frac{n-2}{2} + \alpha$ , con  $\alpha > 0$ , por lo que  $\frac{n-2}{2} + \alpha = t + r < \frac{n}{2} + r \Rightarrow r > \alpha - 1$ ; luego el número de puntos que deja en la recta es  $r \geq \alpha$ , así que, considerando  $\alpha$  puntos de la recta como pertenecientes al otro semiplano, tendremos que la recta deja  $\frac{n-2}{2}$  en cada semiplano).

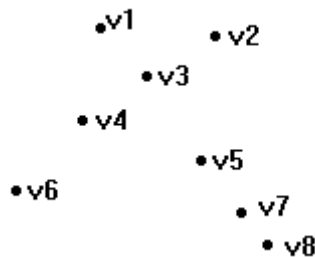


Figura 2.15: La recta que une  $v_3$  con cualquier punto de la nube deja el mismo número de puntos en cada semiplano, pero la intersección de los cierres convexos no es en  $v_3$

### 2.4.2. Ejemplos

A continuación, se verá el procedimiento para construir la intersección de los posibles cierres convexos considerando diferentes valores de  $n$ , es decir, distintas cantidades de puntos de la nube. Esto nos servirá para comprobar que la intersección es vacía o en un

punto cuando los puntos no están todos alineados, y encontrar unas pautas que nos permitan generalizar los casos de  $n$  par ó  $n$  impar en el algoritmo.

**Si  $n=1$ ,**  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = 1$ , sólo hay un cierre convexo a intersecar, que es el punto de la nube, luego la intersección es no vacía y el único equilibrio es  $(t^1, t^2) = (v_1, v_1)$ .

**Si  $n=2$ ,**  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = 2$ , sólo hay un cierre convexo a intersecar, que es el segmento que une a los dos puntos, luego la intersección es no vacía y  $t^1, t^2$  en cualquier punto de ese segmento están en equilibrio (Figura 2.16). Hay, por tanto, infinitas posiciones de equilibrio, no hay unicidad.

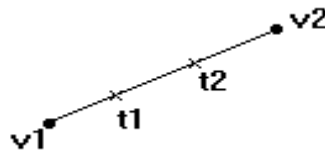


Figura 2.16: Si hay dos puntos, hay infinitas posiciones de equilibrio

**Si  $n=3$**  y los puntos están en posición convexa, no hay equilibrio pues la intersección de los cierres de cada par de puntos es vacía (Figura 2.17). Si están alineados, el único equilibrio es  $(t^1, t^2) = (v_2, v_2)$  (punto mediano de los alineados).

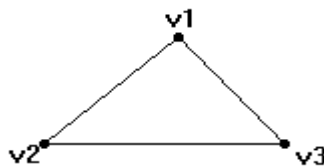


Figura 2.17: En posición convexa no hay equilibrio

Si  $n=4$ , hay siempre posiciones de equilibrio:

Si  $n=4$  y en la frontera del cierre convexo de esos cuatro puntos están todos ellos, siendo el interior del cierre no vacío y no habiendo más de dos puntos alineados, entonces, la intersección de dos de los cuatro posibles triángulos que se pueden formar, es un segmento. La intersección de los otros dos posibles triángulos es un segmento no paralelo al anterior, luego, la intersección total es un único punto (Figura 2.18). Por lo tanto, el único equilibrio lo tenemos situando los dos partidos en dicho punto.

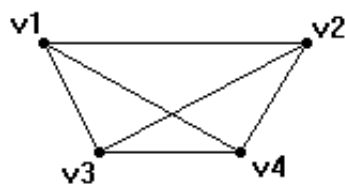


Figura 2.18: Intersección en un único punto

Si  $n=4$  y tres de ellos están en la frontera del cierre convexo de esos cuatro puntos y el punto restante está en el interior, entonces, la intersección de los cuatro cierres convexos de tres puntos de la nube es el punto de dentro (Figura 2.19), luego hay un único equilibrio  $(t^1, t^2)=(v_3, v_3)$ .

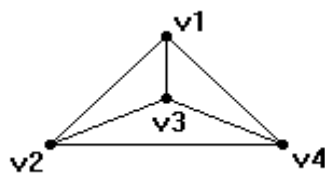


Figura 2.19: La intersección es el punto interior

Si  $n=4$  y están todos los puntos en la frontera de su cierre convexo, siendo el interior del cierre no vacío y estando tres alineados (Figura 2.20), entonces, por lo visto anteriormente, la intersección de los cuatro posibles cierres convexos es el punto que está en medio de los tres alineados (proposición 2.4.2.), es decir,  $\{v_2\}$ , luego el único equilibrio es  $(t^1, t^2)=(v_2, v_2)$ .

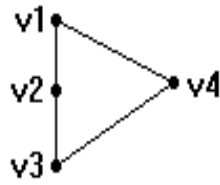


Figura 2.20: La intersección es el punto  $v_2$

Si  $n=4$  y en la frontera del cierre convexo de esos cuatro puntos están todos ellos, siendo el interior del cierre vacío, es decir, si los cuatro puntos están alineados, (Figura 2.21), la intersección de los cuatro posibles cierres convexos es el segmento que une los puntos  $v_2$  y  $v_3$ . Luego hay infinitas posiciones de equilibrio: cualquier  $(t^1, t^2)$  con  $t^1$  y  $t^2$  pertenecientes al segmento.

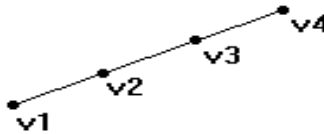


Figura 2.21: Hay infinitas posiciones de equilibrio entre  $v_2$  y  $v_3$

**Para  $n=5$**  hay casos de equilibrio aunque los puntos no estén alineados, como el de la figura 2.22, en el que el punto central es la intersección de los posibles cierres convexos de tres puntos de la nube.

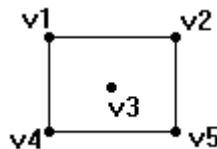


Figura 2.22: Caso de  $n=5$  y puntos no todos alineados con equilibrio

**Para  $n=6$**  hay casos como el de la figura 2.23. Los cierres de los puntos  $v_1, v_4, v_6, v_3$  y de los puntos  $v_1, v_2, v_5, v_4$  sólo tienen en común el segmento que une los puntos  $v_1$  y  $v_4$ , que es disjunto con el cierre convexo de los puntos  $v_2, v_5, v_6, v_3$ , luego la intersección de todos los cierres es vacía. Por tanto, en esta situación no hay equilibrio.

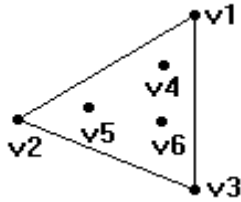


Figura 2.23: Caso de  $n = 6$  sin equilibrio

## 2.5. Algoritmo para encontrar la intersección de los cierres convexos

El objetivo es encontrar un algoritmo que permita localizar posiciones de equilibrio, si existen, para cualquier nube de puntos. Para ello, es necesario primero encontrar algunas propiedades de tipo geométrico.

### 2.5.1. Proposiciones previas

#### Caso $n$ par:

Vamos a ver una condición suficiente para que la intersección de los cierres convexos sea no vacía en este caso:

#### Proposición 2.5.1:

Si se pueden tomar  $\frac{n}{2}$  segmentos uniendo dos a dos los  $n$  puntos de la nube,  $n$  par, que tengan intersección no vacía, entonces la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube es no vacía (es decir, si existe un emparejamiento de los  $n$



puntos de la nube tal que la intersección de todas sus aristas es no vacía, entonces, la intersección de todos los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos es no vacía).

*Demostración:*

Si tomamos  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube, siempre habrá, al menos, uno con su emparejado, luego en el cierre convexo estará el segmento que los une, por tanto, la intersección de los cierres convexos contiene a la intersección de los emparejamientos que es distinta del vacío. #

**Observación:**

El recíproco no es cierto, como se puede ver en el ejemplo de la figura 2.24, en el que la intersección de todos los posibles triángulos es el punto interior, pero no es posible encontrar un emparejamiento de los vértices tal que los segmentos se corten.



Figura 2.24: No existe emparejamiento de vértices tal que los segmentos se corten

Vamos a ver un caso especial en el que sí se da la doble implicación. Para ello, necesitamos un resultado previo:

**Proposición 2.5.2:**

Si el número de puntos de la nube es  $n$  par y la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube contiene a  $p$  (no de la nube), y  $p$  pertenece a una recta que contiene a dos o más puntos de la nube, entonces, el número de puntos de la nube que están en la recta es par,  $k=2s$ . Y, si los ordenamos de arriba abajo (o, de izquierda a derecha si están a la misma altura),  $p$  pertenece al segmento que une los puntos que ocupan los lugares  $s$  y  $s+1$ .

*Demostración:*

Si el número de puntos de la nube sobre la recta fuera impar,  $k=2s+1$ , entonces, habría, al menos,  $s+1$  puntos de la nube en la recta y a un lado, por ejemplo, a la derecha de  $p$ , o debajo de  $p$  si la recta es vertical.

Por otro lado, habrá  $l$  puntos en el semiplano abierto debajo de la recta, y  $n-k-l$  en el semiplano abierto encima de la recta (o en los semiplanos a la izquierda y derecha de la recta, si ésta es vertical). Tendremos  $s+l+1$  puntos de la nube que están en el semiplano debajo de la recta, o en la recta y a la derecha de  $p$ .

Si  $s+l+1 \geq \frac{n}{2} + 1$ , el cierre convexo de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube de los  $s+l+1$ , no contiene a  $p$ , contradicción con que la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube contenga al punto  $p$ . (Figura 2.25).

Si  $s+1+l < \frac{n}{2} + 1$ , entonces,  $l < \frac{n}{2} - s \Rightarrow (n-k-l) + s+1 > n-k - \frac{n}{2} + s + s+1 = \frac{n}{2}$

$$\Rightarrow n-k-l+s+1 \geq \frac{n}{2} + 1$$

Podemos repetir el razonamiento tomando, esta vez,  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube de los  $n-k-l+s+1$  que están en el semiplano abierto encima de la recta, o en la recta, a la derecha de  $p$ . Llegamos a contradicción. Luego el número de puntos de la nube en la recta es par,  $k=2s$ .

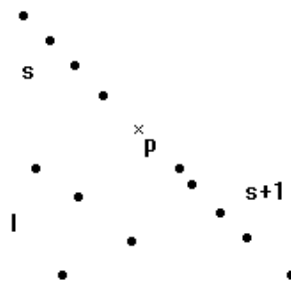


Figura 2.25: Al menos hay  $s+1$  puntos a la derecha de  $p$  y  $l$  debajo de la recta. El cierre convexo no contiene a  $p$

Si ordenamos de arriba a abajo los puntos de la nube en la recta y  $p$  no está en el segmento medio, es decir, en  $\overline{v_s, v_{s+1}}$ , habrá al menos,  $s+1$  puntos de la nube sobre la recta y a un lado de  $p$ , por ejemplo, a la derecha, y podemos considerar, como antes, que hay  $l$  puntos de la nube en el semiplano abierto debajo de la recta y  $n-l-2s$  en el semiplano abierto encima de la recta.

Entonces, si  $s+l+1 < \frac{n}{2}+1$ , se cumplirá que  $l < \frac{n}{2}-s$ , por lo que  $n-l-2s+s+1 > n-\frac{n}{2}+s-2s+s+1 = \frac{n}{2}+1$ , luego se podrán tomar  $\frac{n}{2}+1$  puntos de la nube entre los que están sobre la recta a la derecha de  $p$  y los del semiplano abierto encima de la recta, cuyo cierre convexo no contiene a  $p$  (contradicción).#

**Proposición 2.5.3:**

Sea una nube de  $n$  puntos,  $n$  par. Si la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2}+1$  puntos de la nube contiene a un punto  $p$  que no es de la nube, entonces, existe un emparejamiento de los  $n$  puntos de tal forma que las aristas del emparejamiento cumplen que su intersección contiene a  $p$ .

*Demostración:*

Si la intersección de los cierres convexos contiene a  $p$ , que no es de la nube, entonces, uniendo  $p$  con un punto de la nube tenemos que, por el resultado anterior, habrá un número par  $2s$  de puntos de la nube pertenecientes a esa recta y que  $p$  estará en el segmento medio  $\overline{v_s, v_{s+1}}$ . Entonces, emparejando los puntos de la nube en la recta como  $v_1$  con  $v_{2s}$ ,  $v_2$  con  $v_{(2s-1)}$ , ...,  $v_s$  con  $v_{(s+1)}$ , tenemos que la intersección de las aristas es el segmento  $\overline{v_s, v_{s+1}}$  que contiene a  $p$ . Uniendo  $p$  con otro punto de la nube que no esté en la recta anterior, si existe tal punto, y, repitiendo el procedimiento, obtenemos otro emparejamiento de más puntos de la nube cuya intersección de aristas contiene a  $p$ . Repitiendo el proceso hasta que están todos los puntos de la nube en esas rectas,

llegamos a un emparejamiento de los  $n$  puntos de la nube cuya intersección contiene a  $p$ .

Entonces, por las proposiciones 2.5.1. y 2.5.3. tenemos la siguiente equivalencia:

**Proposición 2.5.4:**

Sea una nube de  $n$  puntos,  $n$  par, la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube contiene a un punto  $p$  que no es de la nube si y sólo si existe un emparejamiento de los  $n$  puntos cuyas aristas se intersecan en un punto  $p$  que no es de la nube.

Vemos un resultado análogo al de la proposición 2.5.2., para el caso en que la intersección de los cierres convexos es en un punto de la nube, con  $n$  par.

**Proposición 2.5.5:**

Si el número de puntos de la nube es  $n$  par y la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube contiene a  $p$ , y  $p$  pertenece a la nube, entonces, cualquier recta que contenga a  $p$  y a otro punto de la nube, cumple que:

- $p$  es el punto que ocupa el lugar medio de los puntos de la nube en la recta, si el número de puntos de la nube en la recta es impar.
- $p$  pertenece al segmento medio de los segmentos que se forman con los puntos de la nube en la recta, si el número de puntos de la nube en la recta es par.

Además, el número de rectas que contienen un número par de puntos de la nube, estando entre ellos  $p$ , es impar.

*Demostración:*

- El número de puntos de la nube en la recta que contiene a  $p$  y a otro punto de la nube es impar,  $2s+1$ . Si  $p$  no está en el lugar  $s+1$ , habrá al menos  $s+1$  puntos de la nube, por

ejemplo, a la derecha de  $p$  y en la recta,  $l$  en el semiplano abierto debajo de la recta y  $n-(2s+1+l)$  en el semiplano abierto por encima de la recta.

Si  $l + s + 1 \geq \frac{n}{2} + 1$ , podemos tomar  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube de entre los que están a la derecha de  $p$  o en el semiplano de abajo cuyo cierre convexo no contiene a  $p$  (contradicción).

$$\text{Si } l + s + 1 < \frac{n}{2} + 1 \Rightarrow l < \frac{n}{2} - s,$$

entonces  $n - 2s - 1 - l + s + 1 = n - l - s > n - \frac{n}{2} + s - s = \frac{n}{2}$  por lo que

$n - (2s + 1 + l) + s + 1 \geq \frac{n}{2} + 1$ , luego podemos tomar  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube de entre los que están a la derecha de  $p$  o en el semiplano de arriba cuyo cierre convexo no contiene a  $p$  (contradicción).

- El número de puntos de la nube en la recta es par,  $2s$ . Si  $p$  no está en el segmento medio que forman los puntos de la nube, es decir,  $p$  no ocupa el lugar  $s$  ni el  $s+1$ , entonces, podemos repetir el argumento del caso  $n$  par y la intersección de los cierres convexos en un punto  $p$  que no es de la nube para llegar a contradicción, ya que se dejan igualmente, al menos,  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube en la semirrecta a un lado de  $p$  unión con uno de los semiplanos.

Si llamamos  $R$  a una recta que contiene a  $p$  y a otro punto de la nube y  $n_R$  el número de puntos de la nube en  $R$ , se cumple que:

$$n = \sum_{R/n_R \text{ par}} (n_R - 1) + 1 + \sum_{R/n_R \text{ impar}} (n_R - 1) = \sum_{R/n_R \text{ par}} n_R - |\{R/n_R \text{ par}\}| + 1 + \sum_{R/n_R \text{ impar}} (n_R - 1).$$

Para que el tercer miembro de la igualdad sea par,  $|\{R/n_R \text{ par}\}|$  tiene que ser impar. Es decir, el número de rectas tal que el número de puntos de la nube sobre ellas es par, tiene que ser impar.#

**Caso  $n$  impar:**

Veremos un resultado análogo a éste para el caso  $n$  impar, pero antes, necesitamos una proposición previa.

**Proposición 2.5.6:**

Si la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos de la nube es un punto  $p$  de la nube y  $p$  pertenece a una recta que contiene a otros puntos de la nube, el número de puntos de la nube en la recta es impar,  $k = 2s+1$ , y  $p$  es el punto que ocupa el lugar medio de ellos.

*Demostración:*

Si  $k=2s$ , entonces  $p$  deja al menos  $s$  puntos a un lado sobre la recta, por ejemplo, a su derecha, y la recta deja  $l$  puntos en un semiplano y  $n-k-l$  en el otro. Si  $s+l \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \frac{n+1}{2}$ , entonces, repitiendo el argumento del caso  $n$  par, tenemos un cierre convexo de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos de la nube que no contiene a  $p$  (contradicción).

Si  $l+s < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \frac{n+1}{2}$ , entonces,  $l < \frac{n+1}{2} - s$ , por lo que

$(n-l-2s)+s > n - \frac{n+1}{2} + s - 2s + s = \frac{n+1}{2}$ , luego se puede repetir el argumento con

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos de entre los  $(n-l-2s)+s$  a un lado de la recta o en la recta a un lado

de  $p$ , llegando también a contradicción. Por tanto  $k=2s+1$ .

Si  $p$  no es el punto medio de los  $2s+1$  alineados, entonces  $p$  dejará, al menos,  $s+1$  puntos de la nube a un lado suyo, y la recta dejará  $l$  puntos de la nube a un lado, y  $n-l-2s-1$  al otro.

Si  $l + s + 1 \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = \frac{n+1}{2}$ , entonces podemos coger, como antes,  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube a un lado de la recta, o en la recta a un lado de  $p$ , con lo que su cierre convexo no contendrá a  $p$  (contradicción).

Si  $l + s + 1 < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ , entonces,  $l < \frac{n+1}{2} - s - 1$ , por lo que

$$n - l - (2s + 1) + s + 1 > n - \frac{n+1}{2} + s + 1 - 2s - 1 + s + 1 = \frac{n-1}{2}.$$

Se puede repetir el argumento con  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de entre los  $n - l - (2s + 1) + s + 1$  al otro lado de la recta, o en la recta a un lado de  $p$ , llegando otra vez a contradicción. Por tanto,  $p$  es el punto que está en el lugar medio.#

**Observación:**

Esto da otra forma de ver, distinta a la de la proposición 2.3.5., que, para  $n$  impar la intersección de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, si es no vacía, es en un punto de la nube. Porque si tomamos la recta que une a un punto de la intersección,  $p$ , con un punto de la nube, por el argumento de la demostración, llegamos a que la recta contendrá un número impar de puntos de la nube y  $p$  será necesariamente el punto que ocupa el lugar medio de ellos. Por tanto,  $p$  será de la nube.

Otra consecuencia de este resultado es que, si  $n$  es impar mayor que uno, y la intersección de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube es no vacía, entonces hay un número impar, mayor que dos, de puntos de la nube alineados.

Vemos ahora el resultado de emparejamientos correspondiente al caso de número de puntos de la nube impar.

**Proposición 2.5.7:**

Sea una nube de  $n > 1$  puntos,  $n$  impar, no todos alineados, la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube es en un punto  $p$  si y sólo si existe un emparejamiento de los  $n-1$  puntos de la nube, que no son  $p$ , cuyas aristas se intersecan en el punto de la nube  $p$ .

*Demostración:*

$\Leftrightarrow$ ) Siempre que tomemos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = \frac{n-1}{2} + 1$  puntos de la nube entre los que no esté el no emparejado  $p$ , tendremos algún punto de la nube y su pareja. Entonces el segmento que los une estará en el cierre convexo, y por tanto estará  $p$ . Si tomamos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos entre los que está  $p$ ,  $p$  estará en el cierre convexo. Por lo tanto, la intersección de todos los posibles cierres convexos contendrá a  $p$ , y como estamos en el caso  $n$  impar, esa intersección será sólo  $p$ .

$\Rightarrow$ ) Si unimos  $p$  con otro punto de la nube, sabemos, por el resultado anterior, que en esa recta habrá  $2s+1$  puntos de la nube, y que  $p$  será el punto del medio (el punto numerado  $s+1$ ). Entonces, emparejando  $v_1$  con  $v_{2s+1}, \dots, v_s$  con  $v_{s+2}$ , tenemos que la intersección de las aristas de ese emparejamiento es el segmento  $\overline{v_s, v_{s+2}}$ , que contiene a  $p$ .

Si repetimos el proceso con  $p$  y otro punto de la nube que no esté en la anterior recta, emparejamos otros puntos de la nube cuya intersección es otro segmento que no está en la recta del anterior y que, también, contiene a  $p$ . Luego la intersección de las aristas de estos dos emparejamientos es  $p$ . Si repetimos el proceso hasta que no queden más puntos por emparejar, obtendremos un emparejamiento de los  $n-1$  puntos de la nube que no son  $p$  cuyas aristas intersecan en  $p$ .#



**Observación:**

Otra forma de demostrar esta última implicación es:

Si quitamos el punto  $p$ , queda una nube de  $n-1$  puntos en la que la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{n-1}{2}+1$  puntos contendrá a  $p$ , no de la nube. Entonces, como  $n-1$  es par, aplicando el resultado de la proposición 2.5.3., tenemos que hay un emparejamiento de los  $n-1$  puntos cuya intersección contiene a  $p$ . Como los  $n$  puntos no están alineados, la intersección de los segmentos será sólo en  $p$ , que es el otro punto de la nube inicial.

Por lo tanto, en este caso siempre hay doble implicación, no como el caso  $n$  par en el que  $p$  no tenía que ser de la nube para que hubiera doble implicación.

Vamos a construir el algoritmo que nos permita calcular la intersección de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de una nube de  $n$  puntos, considerando dos casos: en posición general, es decir, suponemos que no hay tres puntos alineados y en posición no general, para poder cubrir casos degenerados.

A partir de ahora, llamamos *punto mediano* al punto que ocupa el lugar medio cuando consideramos ordenados los puntos de la nube, concepto que coincide con el de mediana de un conjunto de datos.

**2.5.2. Algoritmo**

**a) Posición general**

Por considerar el caso de puntos en posición general,  $n$  debe ser par, ya que si no la intersección de los posibles cierres convexos es vacía si  $n > 1$  (proposición 2.5.6.). (Si  $n=1$ , la intersección de los posibles cierres convexos es el punto). Los pasos son:

- Dado un punto de la envolvente convexa de la nube de puntos, encontrar su mediano en la ordenación angular de los puntos de la nube respecto a dicho punto y determinar la recta que los une.

- Dado otro punto de la envolvente convexa que no esté en la recta anterior, determinar su mediano en la ordenación angular de los demás puntos de la nube, y determinar la recta que los une. (Si  $n=2$ , entonces la intersección de los posibles cierres convexos es el segmento que une los puntos).

- Intersecar las rectas anteriores. El punto intersección es la posible intersección de los cierres convexos buscada (idea en la proposición 2.3.7.).

- Si la intersección es en un punto que no es de la nube  $v'$ , se ordenan angularmente los puntos de la nube desde  $v'$  usando una doble lista: por un lado se ordenan los puntos con ordenada mayor que la de  $v'$ , o con igual ordenada pero mayor abscisa, a partir de la semirrecta horizontal a la derecha de  $v'$ , y por otro lado los de ordenada menor que la de  $v'$ , o los de igual ordenada pero menor abscisa, a partir de la semirrecta horizontal a la izquierda de  $v'$ . Si en las dos listas existen los mismos ángulos, entonces la intersección de todos los cierres convexos es en  $v'$ . En caso contrario, es vacía.

- Si la intersección es un punto de la nube  $v$ , se ordenan angularmente como antes los demás puntos respecto a él. Si el punto en el que se alcanza el menor ángulo entre las dos listas está en una lista, el punto en el que se alcanza el segundo menor ángulo debe estar en la otra, y así sucesivamente. Si ocurre esto, la intersección de los cierres convexos es en  $v$ . En caso contrario, será vacía.

**Observaciones:**

1) La complejidad del algoritmo viene dominada por la complejidad de la ordenación angular que es  $O(n \log n)$ . Por tanto, la complejidad del algoritmo es  $O(n \log n)$ .

2) Si la intersección de las rectas es en  $v'$  que no es de la nube, los resultados se apoyan en las proposiciones 2.3.7., 2.5.1. y 2.5.2.

3) Vamos a ver que si la intersección de las rectas es en un punto de la nube  $v$  y no se cumple que, cuando un punto está en una determinada lista, el siguiente punto de la nube, ordenado por el ángulo desde  $v$  está en la otra, entonces, la intersección de los cierres convexos es vacía.

Tomamos el punto  $p_1$  de menor ángulo en la ordenación desde  $v$ , y, suponemos, sin pérdida de generalidad, que está en la primera lista, es decir, que está por encima de la horizontal que pasa por  $v$ . Entonces, la recta que pasa por  $p_1$  y  $v$  dejará en uno de los semiplanos los puntos posteriores a  $p_1$  en la primera lista y en el otro, a los de la segunda lista. Si no deja el mismo número de puntos en cada semiplano, entonces no se cumplirá la condición de alternancia en las listas. Esto es porque si, por ejemplo, hay  $\frac{n}{2}$  puntos en la primera lista, aparte de  $p_1$ , y  $\frac{n}{2}-2$  en la segunda, cuando alterne los  $2 \cdot \left(\frac{n}{2}-2\right) = n-4$  primeros puntos y vuelva a la primera lista con el punto  $n-3$ , quedarán otros dos puntos en la primera lista por lo que no habrá alternancia. Y, si hay  $\frac{n}{2}-2$ , aparte de  $p_1$ , en la primera lista y  $\frac{n}{2}$  en la segunda, cuando se llegue al punto  $2 \cdot \left(\frac{n}{2}-1\right) = n-2$  en el orden angular, que estará en la segunda lista, el que queda, también está en la segunda lista, por lo que no hay alternancia. En este caso, la intersección de los cierres convexos es vacía, ya que habrá un cierre convexo de  $\frac{n}{2}+1$  puntos, los del semiplano en que hay más de  $\frac{n}{2}-1$  puntos y  $p_1$ , al que no pertenece el punto  $v$ .

Si deja el mismo número de puntos en cada semiplano, es decir, si en la primera lista hay un punto más que en la segunda, tomamos el siguiente punto en la ordenación angular,  $p_2$ , que estará en la segunda lista. La recta que une  $p_2$  con  $v$  deja, también,  $\frac{n}{2}-1$  puntos en cada semiplano: en un semiplano los de la segunda lista y el de la primera lista de menor ángulo que él,  $p_1$ , y, en el otro, los de la primera lista de mayor ángulo que él, todos menos  $p_1$ . Respecto a los semiplanos de  $p_1$  y  $v$ , el semiplano que ahora pierde a  $p_2$ , gana a  $p_1$ .

En general, si se van alternando las listas, la recta que une  $p_i$  con  $v$  deja  $\frac{n}{2} - 1$  puntos en cada semiplano: en un semiplano deja a los posteriores a  $p_i$  en esa lista y a los que tienen menos ángulo que  $p_i$  en la otra lista, y, en el otro semiplano a los anteriores a  $p_i$  en su lista, y a los que tienen más ángulo que  $p_i$  en la otra lista.

Respecto a los semiplanos que determina la recta que une  $p_{i-1}$  con  $v$ , en el que se pierde a  $p_i$  (mayor ángulo que  $p_{i-1}$  en la otra lista), se gana  $p_{i-1}$ . Pero si el siguiente punto,  $p_{i+1}$ , está en la misma lista que  $p_i$ , entonces en el semiplano en el que estaban los anteriores a  $p_i$  en su lista y los de la otra lista de ángulo mayor que el de  $p_i$ , estará, además,  $p_i$ . Así que tendrá  $\frac{n}{2}$  puntos de la nube, por lo que el cierre convexo de los  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube, que son los anteriores y  $p_{i+1}$ , no contendrá al candidato  $v$ .

Luego la intersección de todos los cierres convexos será vacía.

Si observamos la figura 2.26 vemos que como  $p_3$  y  $p_4$  no cumplen la alternancia de ángulos (tampoco la cumplen  $p_5$  y  $p_6$ ). La recta que une  $p_4$  con  $v$  deja  $\frac{8}{2} = 4$  puntos en un semiplano, por lo que el cierre convexo de  $\frac{8}{2} + 1 = 5$  puntos de la nube:  $p_1, p_3, p_4, p_5$  y  $p_6$  no contiene a  $v$ .

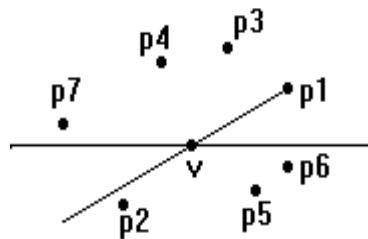


Figura 2.26: Los puntos  $p_3$  y  $p_4$  no cumplen la alternancia de ángulos

## **b) Posición no general**

### **Caso $n$ par:**

- Si la intersección de las rectas del apartado a) es en un punto que no es de la nube  $v'$ , hay que ver no sólo que en las dos listas hay los mismos ángulos, sino, además, que hay el mismo número de puntos en las dos listas con cada ángulo.
- Si la intersección de las rectas es en un punto de la nube  $v$ , hay que ver que para todos los ángulos, la diferencia entre el número de puntos con ese ángulo en cada lista es menor o igual que uno. Además, si para un determinado ángulo hay un punto más de la nube con ese ángulo en una lista que en otra, para el siguiente ángulo en el que hay diferente número de puntos en las listas, tendrá que haber más puntos de la nube en la que antes había menos. Si se cumplen estas condiciones, la intersección de los cierres convexos es en  $v$ , si no, es vacía.

### **Observación:**

Si todos los puntos estuvieran alineados, la intersección de los cierres convexos sería en el segmento medio.

### **Caso $n$ impar:**

Tomamos el punto mediano de la nube en la ordenación de los puntos por la primera coordenada (si existen varios medianos con la misma primera coordenada, tomar de entre ellos el mediano por la segunda coordenada, si existe un número impar de puntos en la vertical. Si hay un número par la intersección de los cierres convexos será vacía por la proposición 2.5.6.) Tomamos el punto mediano de la nube en la ordenación por la segunda coordenada (si hay un número impar mayor que uno en la horizontal, es decir varios medianos con la misma segunda coordenada, tomar de entre ellos el mediano por la primera coordenada, si no existe, la intersección es vacía). Si esos dos medianos son distintos la intersección es vacía.

Si el punto es el mismo, llamémosle  $v$ , se ordenan los puntos de la nube angularmente desde él y se repite el proceso realizado para el caso  $n$  par e intersección de las rectas en un punto no de la nube.

### Observaciones

- 1) El caso  $n$  impar se apoya en la proposición 2.5.6. y la observación de la proposición 2.5.6.
- 2) En el caso  $n$  par y la intersección de las rectas en un punto de la nube, el que la intersección de los cierres convexos sea vacía cuando la diferencia del número de puntos en cada lista con un determinado ángulo no sea menor o igual que uno, se basa en la proposición 2.5.5.

En el caso  $n$  impar, si el punto mediano en la ordenación por la primera componente no es el mismo que en la ordenación por la segunda, la garantía de que la intersección de los cierres convexos es vacía se basa en:

El cierre convexo de los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = \frac{n-1}{2} + 1$  puntos de la nube que son los  $\frac{n-1}{2}$  anteriores al punto mediano en la ordenación por la primera componente y este mediano, están contenidos en un semiplano abierto: el que deja a la izquierda la recta vertical que pasa por el mediano, unión con esa recta, pero debajo del mediano. Y el cierre convexo de los  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos de la nube que son el mediano y los  $\frac{n-1}{2}$  posteriores a él en la ordenación por la primera componente, está contenido en otro semiplano abierto: el que queda a la derecha de la vertical, unión con la semirrecta encima del mediano. Luego la intersección de los dos cierres convexos será este mediano.

Análogamente, la intersección del cierre convexo de los  $\frac{n-1}{2}$  anteriores al mediano en la ordenación por la segunda componente unión con este mediano, y el cierre convexo del mediano con los  $\frac{n-1}{2}$  puntos posteriores es en el mediano. Luego, si es distinto al anterior, la intersección de los cuatro cierres convexos será vacía y con ello vacía la de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube. Si los dos

medianos coinciden, ese punto será la posible intersección de los cierres convexos de los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube.

Cuando no se dan las condiciones del algoritmo en el caso  $n$  par, los puntos en posición no general y la intersección de las rectas en un punto  $v$  de la nube, la intersección de los cierres convexos es vacía. Para comprobarlo, necesitamos un resultado previo:

**Proposición 2.5.8:**

Si en una semirrecta abierta con origen en  $v$ , unión con uno de los semiplanos abiertos que define la recta que contiene a la semirrecta anterior, hay  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, entonces la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube es vacía.

*Demostración:*

En ese caso, el cierre convexo de los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos comentados no contiene al candidato  $v$ .#

Vemos ahora que la intersección de los cierres convexos es vacía en el caso con  $n$  par comentado:

*Demostración:*

Sea un punto de la nube  $p_i$ , si en la región formada por la semirrecta abierta con origen en  $v$  que pasa por  $p_i$  unión con uno de los semiplanos abiertos que define hay  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, la intersección de los cierres convexos es vacía. Lo mismo pasará si

hay  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube en la región formada por la semirrecta abierta opuesta a la anterior unión con uno cualquiera de los semiplanos (proposición 2.5.8.).

Vamos a ver, entonces, que siempre se da esta situación si  $n$  es par y  $v$  es un punto de la nube. Para ello, partimos el conjunto de puntos de la nube en los siguientes subconjuntos:

$P_i^1$  el conjunto de los puntos de la primera lista con ángulo mayor o igual que el que forma  $p_i$  con  $v$ .

$P_{2,i}$  el conjunto de los puntos de la segunda lista con ángulo menor que el que forma  $p_i$  con  $v$ .

$P_{1,i}$  el conjunto de los puntos de la primera lista con ángulo menor que el que forma  $p_i$  con  $v$ .

$P_i^2$  el conjunto de los puntos de la segunda lista con ángulo mayor o igual que el que forma  $p_i$  con  $v$ .

Supongamos, por tanto lo contrario, que para todo  $p_i$  de la nube,  $p_i \neq v$ , hay menos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube en la región del tipo anterior, en la que están los puntos de  $P_i^1$ , y los de  $P_{2,i}$ . Supongamos, también, que hay menos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube en la región en la que están los puntos de  $P_{1,i}$ , y los de  $P_i^2$ . Entonces, en una de esas regiones habrá  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  puntos de la nube y en la otra  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ , ya que son regiones disjuntas cuya unión es todo el plano menos el punto  $v$ .

Además, si para un cierto punto  $p_i$ , que podemos suponer de la primera lista, hay el mismo número de puntos en las dos listas con el ángulo que forma  $p_i$  con  $v$ , al llegar a un punto  $p_{i+1}$  en el que se alcanza el siguiente ángulo, se cumple que en la región en que están los puntos de  $P_{1,i+1}$ , y los de  $P_{i+1}^2$ , hay el mismo número de puntos que en la región



en que están los puntos de  $P_{1,i}$ . Esto es porque para la nueva región se ganan los puntos de la primera lista que tenían el mismo ángulo que  $p_i$ , pero se pierden los de la segunda lista con el mismo ángulo, que son el mismo número de puntos.

Si hay un punto más con el ángulo de  $p_i$  en una de las listas, supongamos la primera, entonces, al llegar al siguiente ángulo para cierto punto  $p_{i+1}$ , se cumple que en la región en que están los puntos de  $P_{1,i+1}$ , y los puntos de  $P_{i+1}^2$ , hay un punto más que los que había en la región en que están los puntos de  $P_{1,i}$ , y los de  $P_i^2$ . Esto es así porque en la nueva región se ganan los puntos de la primera lista que tienen el mismo ángulo que  $p_i$ , y se pierden los puntos de la segunda lista que tienen el ángulo de  $p_i$ , que son uno menos. (Si  $p_i$  tiene el máximo ángulo entonces consideraremos que el siguiente ángulo es el menor de las dos listas, que se alcanzará para un cierto  $p_{i+1}$ . En este caso, la región en la que aumenta en uno el número de puntos es la que contiene a todos los puntos de la primera lista).

Entonces, si hay dos puntos  $p_i, p_{i+1}$  en una de las listas, por ejemplo, la primera, para los que hay un punto más con su ángulo en la primera lista que en la segunda, siendo estos ángulos consecutivos, por lo visto anteriormente, al llegar a un punto  $p_{i+2}$  en el que se alcanza el siguiente ángulo, en la región en la que están los puntos de  $P_{1,i+2}$  y los de  $P_{i+2}^2$ , habrá dos puntos más que los que había en la región en que estaban los de  $P_{1,i}$ , y los de  $P_i^2$ , por lo que en la nueva región habrá, al menos,  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, contradicción con lo que habíamos supuesto. Entonces habrá un  $p_i$  de forma que en la región en la que están los puntos de  $P_{1,i}$ , y los de  $P_i^2$ , o bien al contrario, hay al menos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, contradicción con lo que habíamos supuesto. Por tanto, la intersección de los cierres convexos es vacía. (Si el ángulo de  $p_{i+1}$  es el máximo, entonces, el siguiente ángulo, que se alcanza en  $p_{i+2}$ , será el menor, y la región

en la que aumenta en dos el número de puntos de la nube, será en la que están los puntos de la primera lista y, por tanto, habrá al menos  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ . (Figura 2.27)#

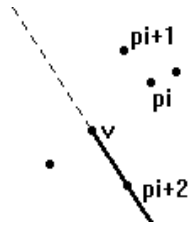


Figura 2.27: Caso en que para  $p_i, p_{i+1}$  no hay alternancia, por lo que  $p_{i+2}$  deja 4 puntos en una región unión de semirrecta y semiplano abierto

Vamos a ver, por último, que, cuando se cumple la condición de alternancia de ángulos, la intersección de todos los posibles cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos de la nube es en  $v$ , tanto en el caso en que los puntos están en posición general como en el degenerado, por lo que el algoritmo es correcto en todo caso:

Supongamos que existe un cierre convexo de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  puntos de la nube que no contenga a  $v$ . Entonces, existirá una recta que pasa por  $v$  que deja el cierre convexo contenido en uno de los semiplanos  $\pi$ , que define. Tomamos dos puntos de la nube  $p_1, p_2$  en  $\pi$ , de la primera lista, con sus ángulos  $\alpha_1, \alpha_2$ . Si hay un punto más en la primera lista que en la segunda, y consecutivos, es decir, que no existe un punto en la primera lista con un ángulo intermedio a  $\alpha_1, \alpha_2$  de tal forma que con ese ángulo haya un punto más en la primera lista, por la condición de alternancia, habrá un ángulo intermedio a  $\alpha_1, \alpha_2$  de manera que haya un punto más con ese ángulo en la segunda lista que en la primera, estando esos puntos en el semiplano opuesto a  $\pi$ . Esto es porque las semirrectas con origen en  $v$  que pasan por  $p_1, p_2$  están contenidas en  $\pi$ , luego cualquier semirrecta con origen en  $v$  y con ángulo intermedio entre  $\alpha_1, \alpha_2$  estará contenida en  $\pi$ , pero ésta es la semirrecta opuesta.

De igual forma, si tomamos dos puntos  $q_1, q_2$  de  $\pi$  y de la segunda lista formando ángulos  $\beta_1, \beta_2$  en los que hay un punto más en la segunda lista y consecutivos, existirá un ángulo entre  $\beta_1$  y  $\beta_2$  para el que hay un punto más en la primera lista que en la segunda. En este caso los puntos de la primera lista están fuera de  $\pi$ , y los de la segunda, si hay, en  $\pi$ . Análogamente, supongamos que hay un punto  $p$  en  $\pi$  con el máximo ángulo, de la primera lista, por ejemplo, y un punto más con ese máximo ángulo en la primera lista que en la segunda, estando por tanto los puntos de la primera lista en  $\pi$ , y los de la segunda, si hay, fuera de  $\pi$ . Supongamos que hay un punto  $q$  en  $\pi$  con el menor de los ángulos de la segunda lista, habiendo un punto más en la segunda lista con ese ángulo que en la primera, estando ahora los de la segunda lista en  $\pi$  y los de la primera, si hay, fuera de  $\pi$ . Entonces, por la condición de alternancia, el mínimo de todos los ángulos se alcanzará para un ángulo en el que hay un punto más en la primera lista que en la segunda, estando los puntos de la primera lista fuera de  $\pi$  (si el mínimo está en la segunda lista y el máximo en la primera, por la condición de alternancia de ángulos habría un número impar de puntos en la nube).

Hemos visto, entonces, que a toda recta que pasa por  $v$ , en la que hay un punto más de la nube en  $\pi$  que fuera de  $\pi$ , le corresponde otra recta en la que hay un punto más fuera de  $\pi$  que en  $\pi$  (la que se alcanza para el siguiente ángulo). Esto le ocurre a todas las rectas salvo a la última, ya que vimos que el número de rectas que pasan por  $v$  para las que hay un punto más en una de las semirrectas abiertas que determina  $v$  que en la otra, es un número impar (proposición 2.5.5.). Así que, fuera de  $\pi$  habrá al menos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  puntos y entonces el número de puntos será mayor que  $n$ , contradicción. (Figura 2.28).

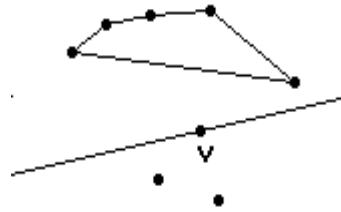


Figura 2.28: Cuando hay un cierre convexo de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$  en que no está  $v$ , no puede haber alternancia de ángulos

## 2.6. Conclusiones

Se ha presentado un juego político discreto de gran significado geométrico, equivalente a una discretización del modelo de Downs. Han sido desarrolladas para él las diversas estrategias de victoria en función del conjunto de votantes y se ha analizado la existencia y unicidad de posiciones de equilibrio.

Se ha comprobado que, en general, cuando existen posiciones de equilibrio en el juego planteado éstas son únicas y se alcanzan cuando los dos partidos eligen la misma política para ofrecer a sus votantes. Es decir, los dos partidos tenderán a un programa político parecido, en esencia, si lo que quieren es alcanzar dicha posición de estabilidad. Lo que hará que uno u otro gane las elecciones será un número pequeño de diferencias.

Aunque este trabajo propone una simulación simplificada de la situación real, es curioso observar cómo los dos partidos mayoritarios de un país cada vez se parecen más en el grueso de su oferta electoral, con lo que nuestro modelo se ajustaría a este hecho.

Resaltamos que la comparación de este modelo con el modelo de Downs continuo arroja resultados paralelos. Por la equivalencia establecida entre el juego presentado y una discretización del modelo de Downs, tenemos resultados de equilibrio para este último.

Para la búsqueda del equilibrio de Nash en el juego planteado hemos desarrollado técnicas geométricas basadas en la utilización de construcciones como son

los cierres convexos. Además, presentamos un algoritmo de búsqueda eficiente que permite encontrar dicho equilibrio, tanto en el caso general (útil para problemas reales, donde carece de sentido que, por ejemplo, todos los puntos estén alineados) como en casos particulares, donde el interés es puramente teórico.



# Capítulo 3

## Equilibrio débil

### 3.1. Introducción

En el capítulo 2 hemos propuesto un modelo de competición política entre dos partidos, que es una versión del juego de Downs. Hemos comprobado que, en general, cuando existen posiciones de equilibrio, en el sentido de Nash, son únicas y se alcanzan si los dos partidos eligen la misma política para ofrecer a sus votantes. Es decir, que con la definición clásica de equilibrio, si los dos partidos buscan ganar las elecciones, consiguiendo el mayor número posible de votantes, tienen que ofertar un programa político muy parecido (Roemer, 2001; Person and Tabellini, 1999). Este resultado puede ser poco útil en la práctica, porque siempre tiene que haber diferencias entre los partidos para que tenga sentido un sistema democrático. Por ello, proponemos el planteamiento de una debilitación de la condición de equilibrio en este juego político sin restricciones. Así, podemos asegurar que, por un lado, cuando no existan posiciones de equilibrio, buscando este equilibrio débil un partido tenga posiciones donde el otro partido no pueda aumentar “mucho” su ganancia, y por otro, que este nuevo equilibrio débil se alcance en posiciones diferentes de  $(t, t)$ . Los resultados pueden aplicarse a todo tipo de juegos discretos entre dos competidores.

### 3.2. Debilitación del equilibrio

Según lo establecido en el juego planteado en el capítulo 2, las funciones de ganancias vienen dadas por:

$$\Pi^1(t^1, t^2) = \text{número de puntos } v_i \text{ tales que } d(v_i, t^1) \leq d(v_i, t^2)$$

$$\Pi^2(t^1, t^2) = \text{número de puntos } v_i \text{ tales que } d(v_i, t^1) > d(v_i, t^2) = n - \Pi^1(t^1, t^2)$$

si  $t^1 \neq t^2$

Y definimos  $\Pi^1(t_1, t_2) = \Pi^2(t_1, t_2) = \frac{n}{2}$  si  $t_1 = t_2$ .

Recordamos que el equilibrio de Nash establece que  $(t_0^1, t_0^2)$  es una posición de equilibrio si:  $\Pi^1(t^1, t_0^2) \leq \Pi^1(t_0^1, t_0^2)$ ,  $\Pi^2(t_0^1, t^2) \leq \Pi^2(t_0^1, t_0^2) \quad \forall t^1, t^2 \in T$ . Es decir, son aquellas posiciones donde se pueden situar los jugadores de forma que si se mueven no mejoran sus ganancias. (Persson and Tabellini, 1999).

Planteamos una debilitación de esta definición:

Se dice que una posición  $(t_0^1, t_0^2)$  es de equilibrio débil si  $\Pi^1(t^1, t_0^2) \leq \Pi^1(t_0^1, t_0^2) + 1$ ,  $\Pi^2(t_0^1, t^2) \leq \Pi^2(t_0^1, t_0^2) + 1 \quad \forall t^1, t^2 \in T$ .

A continuación, desarrollamos un análisis geométrico para el estudio de la existencia y búsqueda de las posiciones de equilibrio según la definición anterior.

#### 3.2.1. Condiciones de equilibrio

Encontraremos condiciones necesarias y suficientes para que un punto determinado por las políticas de los dos partidos sea una posición de equilibrio débil, según nuestra definición. Además, estudiaremos diferentes casos que nos podemos encontrar, dependiendo del número de puntos de la nube, es decir, de votantes de la población.



**Proposición 3.2.1:**

En una posición de equilibrio débil:  $(t_0^1, t_0^2)$ , necesariamente

$$\Pi^1(t_0^1, t_0^2) \geq \frac{n}{2} - 1, \quad \Pi^2(t_0^1, t_0^2) \geq \frac{n}{2} - 1$$

*Demostración:*

Es sabido que, si  $n$  es par hay una estrategia para  $p$  mediante la cual consigue empatar cualquiera que sea la posición de  $q$ . Y, si  $n$  es impar, hay una estrategia para situar a  $p$  y ganar  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  votantes y, de esta forma, ganar a  $q$ , siempre que éste no esté situado en la posición de algún votante (proposiciones 2.2.1. y 2.2.2.)

Sea  $(t_0^1, t_0^2)$  una posición de equilibrio débil. Supongamos, por ejemplo, que  $\Pi^1(t_0^1, t_0^2) < \frac{n}{2} - 1$ . Aplicando lo anterior, para cualquier posición del segundo partido  $t_0^2$ , existe una del primero  $t$ , tal que  $\Pi^1(t, t_0^2) \geq \frac{n}{2}$ . Así,  $\Pi^1(t, t_0^2) > \Pi^1(t_0^1, t_0^2) + 1$  lo que contradice que  $(t_0^1, t_0^2)$  sea posición de equilibrio débil. #

Este resultado es una debilitación de lo establecido para el caso de equilibrio de Nash en la proposición 2.3.1.

**Observación:**

Como las ganancias son complementarias, en una posición de equilibrio débil con  $n$  par se debe cumplir que las ganancias son:  $\frac{n}{2} - 1$ ,  $\frac{n}{2} + 1$ , ó las dos iguales a  $\frac{n}{2}$ . En una con  $n$  impar se ha de cumplir que dichas ganancias sean:  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n-1}{2}$ ,  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = \frac{n+1}{2}$ , ó las dos iguales a  $\frac{n}{2}$  si  $t^1 = t^2$ .

Buscamos ahora condiciones necesarias y suficientes para que un punto sea posición de equilibrio débil:

**Proposición 3.2.2:**

En el juego planteado existen posiciones de equilibrio débil si y sólo si la intersección de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube es no vacía ( $n > 2$ ).

*Demostración:*

$\Leftarrow$ ) Sea  $t$  un punto perteneciente a la intersección de los cierres convexos de los subconjuntos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube, veamos que las posiciones  $(t, t)$ , son de equilibrio débil:  $\Pi^1(t, t) = \Pi^2(t, t) = \frac{n}{2}$ . Si, por ejemplo,  $\Pi^1(t^1, t) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$ , para alguna posición  $t^1$  del primer partido, existe una recta que separa a  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube, al menos, y a  $t$ , por lo que  $t$  no pertenecería al cierre convexo de esos  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos.

Contradicción con la hipótesis de partida.

$\Rightarrow$ ) Si la intersección de los cierres convexos es vacía, entonces existe un cierre convexo de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube en el que no está el partido que tiene ganancia superior o igual al otro, por ejemplo  $q$  en una posición  $t^2$ . Situemos entonces a  $p$  (de ganancia inferior o igual a  $\frac{n}{2}$ ) en el simétrico de  $t^2$  respecto a la recta que separa  $t^2$  del cierre convexo. Entonces  $\Pi^1(t, t^2) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 > \Pi^1(t^1, t^2) + 1$  con lo que ninguna posición es de equilibrio débil. #

**Estudio de los diferentes casos:****a) Si  $n$  es impar:**

Las posiciones de equilibrio débil son  $(t^1, t^2)$  con  $\Pi^1(t^1, t^2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ,  $\Pi^2(t^1, t^2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ ,

siendo  $t^1$  perteneciente a la intersección de los cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3$  puntos de la

nube y  $t^2$  a la intersección de los cierres de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$  puntos de la nube. De esta manera,

$t^2$  no puede ganar  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3$  puntos y aumentar en dos su ganancia y  $t^1$  no puede ganar

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$  puntos y aumentar en dos su ganancia. Éstas resultan las únicas posiciones de

equilibrio débil puesto que si algún partido no está en la intersección correspondiente, el

otro puede separarle de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3$  ó de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$  puntos, respectivamente, y aumentar en

dos sus ganancias. Estas posiciones tienen sentido cuando  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3 \leq n$ , es decir,  $n \geq 5$ .

Otras posiciones de equilibrio débil serán  $(t, t)$  con  $t$  perteneciente a la intersección de los cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$  puntos de la nube.

Las posiciones  $(t^1, t^2)$  tales que  $\Pi^1(t^1, t^2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ ,  $\Pi^2(t^1, t^2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , con  $t^1$  perteneciente a la intersección de los cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$  puntos de la nube y  $t^2$

en la intersección de los cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3$  puntos de la nube, también son de equilibrio débil.

No existen más posiciones de equilibrio débil con otras ganancias ya que no cumplirían la condición necesaria.

**Observación:**

En el caso  $n=1$ , toda posición  $(t^1, t^2)$  con  $t^1, t^2 \in R^2$  es de equilibrio débil, pues se cumple que ninguno aumenta su ganancia en más de 1 si se mueve.

Si  $n=3$  y uno de los partidos gana 1 y el otro gana 2, la posición será de equilibrio débil si el de ganancia 2 está en el cierre convexo de los tres puntos de la nube, ya que el de ganancia 1 no puede aumentar ésta en más de 1. En otra posición con esas ganancias no habrá equilibrio débil, ya que el de ganancia 1 podría aumentarla en 2 separando al otro del cierre convexo de los tres puntos. Otras posiciones de equilibrio débil serían las  $(t, t)$ , con  $t$  perteneciente a la intersección de los cierres convexos de  $\left[\frac{3}{2}\right] + 2 = 3$  puntos de la nube, es decir, con  $t$  en el cierre convexo de los 3 puntos de la nube.

**b) Si  $n$  es par:**

Las posiciones de equilibrio débil serán:

Aquellas en las que uno de los partidos tiene ganancia  $\frac{n}{2} - 1$  y está en la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 3$  puntos de la nube y el otro tiene ganancia  $\frac{n}{2} + 1$  y está en la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos, si ésta es no vacía y  $n > 4$ , ya que en estas posiciones, ninguno de los partidos puede aumentar sus ganancias en 2 moviéndose. Son éstas las únicas posiciones de equilibrio con estas ganancias, pues si algún partido no está en la intersección, el otro puede separarle de un cierre convexo que aumente en 2 sus ganancias.

Otras posiciones son aquellas en las que los dos partidos tienen ganancia  $\frac{n}{2}$  y están en la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 2$  puntos de la nube. En este

caso ninguno de los dos puede aumentar en 2 su ganancia moviéndose. Son éstas las únicas posiciones de equilibrio débil con estas ganancias ya que si algún partido no está en dicha intersección, el otro le puede separar de alguna combinación de  $\frac{n}{2} + 2$  puntos de la nube y aumentar en 2 sus ganancias.

No existen más posiciones de equilibrio débil con otras ganancias ya que no cumplirían la condición necesaria.

**Observación:**

Cuando  $n=2$ , será posición de equilibrio débil si al menos uno de los partidos está en el segmento que une los 2 puntos de la nube, pues, aunque el otro tenga ganancia 0, no podrá moverse para tener ganancia 2 al estar el primero en el cierre convexo de los 2 puntos de la nube. Y, al tener éste ganancia mayor o igual que 1, ya que el otro no puede tener ganancia 2, tampoco puede aumentar en 2 su ganancia moviéndose.

También serán posiciones de equilibrio débil aquellas  $(t^1, t^2)$  con  $t^1, t^2 \notin$  segmento anterior y  $\Pi^1(t^1, t^2) = \Pi^2(t^1, t^2) = 1$ , pues en este caso ninguno de los dos partidos puede aumentar en dos su ganancia moviéndose.

Con  $n=4$ , serán posiciones de equilibrio débil si uno de los partidos tiene ganancia 1 y el otro está en la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{4}{2} + 1 = 3$  puntos de la nube, que vimos en los ejemplos del capítulo 2, era siempre no vacía, y en un punto, a no ser que los 4 puntos de la nube estén alineados. En este caso, el primero no se puede mover para ganar 3 puntos y aumentar en 2 su ganancia, y el segundo no puede aumentar en 2 su ganancia al tener ganancia 3. Éstas son las únicas posiciones de equilibrio débil con esas ganancias ya que, si el que tiene ganancia 3 no está en la intersección de los posibles cierres convexos de 3 puntos de la nube, el otro le puede separar de 3 puntos de la nube y aumentar así su ganancia en 2. Las otras posiciones de equilibrio débil son las ya dichas de los dos partidos con ganancia 2, y en la intersección

de los cierres convexos de  $\frac{4}{2} + 2 = 4$  puntos de la nube, es decir, en el cierre convexo de los 4 puntos de la nube.

### 3.2.2. Ejemplos

- 1) En el caso  $n$  impar,  $n > 1$ , todas las posiciones  $(t^1, t^2)$  con  $t^1, t^2$  pertenecientes a la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube son de equilibrio débil. En esas posiciones es seguro que, si  $t_1 \neq t_2$ , las ganancias de los partidos son  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  por lo que se cumplen las condiciones de equilibrio débil del caso a). Pero no son necesariamente las únicas posiciones de equilibrio débil. Por ejemplo, si  $n = 5$  y tenemos los puntos señalados en la figura 3.1, la intersección de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil + 2 = 4$  puntos de la nube es el pentágono sombreado.

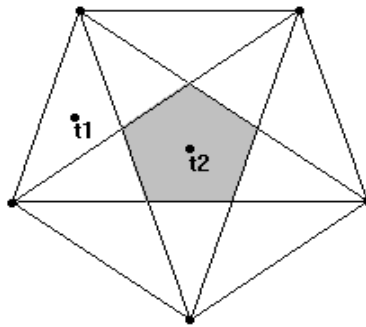


Figura 3.1: Puntos en equilibrio débil para  $n$  impar

Si  $t^1, t^2$  son las posiciones marcadas, se cumple que  $\Pi^1(t^1, t^2) = 2$ ,  $\Pi^2(t^1, t^2) = 3$ . Como  $t^2$  pertenece a la intersección de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil + 2 = 4$  puntos de la nube, el primer partido no puede cambiar

de posición para ganar 4 votantes, luego no puede mejorar en 2 su ganancia. Como  $t^1$  está dentro del pentágono, entonces el segundo partido no puede cambiar su posición para ganar a los 5 votantes, luego tampoco puede mejorar en 2 su ganancia, por lo que la posición es de equilibrio débil, no perteneciendo  $t^1$  a la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil + 2 = 4$  puntos de la nube.

Es importante destacar que en este ejemplo no existe posición de equilibrio en el sentido de Nash (proposición 2.4.1.) con lo que esta situación de búsqueda de equilibrio débil resulta interesante.

- 2) En el caso  $n$  par,  $n > 2$ , no todas las posiciones  $(t^1, t^2)$  con  $t^1, t^2$  pertenecientes a la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 2$  puntos de la nube son de equilibrio débil, ya que en esas posiciones no es seguro que se den las ganancias necesarias para equilibrio débil que vimos para  $n$  par. También se cumple, como en el caso  $n$  impar, que hay posiciones de equilibrio débil no estando los dos partidos en la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 2$  puntos de la nube. Por ejemplo, si  $n = 6$ , en la situación de la figura 3.2, se cumple que  $\Pi^1(t^1, t^2) = 2$ ,  $\Pi^2(t^1, t^2) = 4$ , y como  $t^2$  pertenece a la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{6}{2} + 1 = 4$  puntos de la nube, el primer partido no puede cambiar de posición para ganar 4 votantes. Por tanto, no puede mejorar en 2 su ganancia, y como  $t^1$  está dentro del hexágono, entonces el segundo partido no puede cambiar su posición para ganar a los 6 votantes, luego tampoco puede mejorar en 2 su ganancia. La posición es de equilibrio débil, y  $t^1$  no pertenece a la intersección de los cierres convexos de  $\frac{6}{2} + 2 = 5$  puntos de la nube.

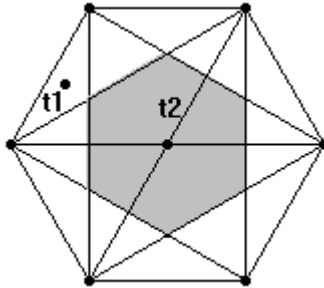


Figura 3.2: Puntos en equilibrio débil para  $n$  par

En este ejemplo existe una única posición de equilibrio en el sentido de Nash de la forma  $(t, t)$ , es decir, con los dos jugadores ocupando la misma posición, tomando la misma política.

Aunque las posiciones de equilibrio débil suelen ser infinitas, aún hay situaciones en las que el equilibrio débil es único y de la forma  $(t, t)$ , o, incluso, en las que no hay equilibrio débil, tanto para  $n$  par como impar:

3) Para  $n=9$ , en la posición de la figura 3.3, la intersección de los cierres convexos de

$$\left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil + 2 = 6, \text{ ó, } \left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil + 3 = 7 \text{ puntos de la nube es en } v_3, \text{ ya que siempre que tomamos 6}$$

ó 7 puntos de la nube entre los que no esté  $v_3$ , siempre tiene que estar  $v_1$  ó  $v_2$  y  $v_4$  ó  $v_5$ , ó bien  $v_8$  ó  $v_9$  y  $v_6$  ó  $v_7$ . Por tanto, en la intersección de los cierres convexos de 6 ó

7 puntos de la nube siempre estará el punto intersección de los segmentos  $\overline{v_7 v_8}$  y

$\overline{v_2 v_4}$  que es  $v_3$ . Y la intersección de los cierres convexos de los siguientes conjuntos

de 7 puntos:  $\{v_1, \dots, v_5, v_8, v_9\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_7\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_3, v_6, \dots, v_9\}$ ,  $\{v_3, \dots, v_9\}$  es  $v_3$ . Por tanto la

única posición de equilibrio débil, en este caso, es  $(v_3, v_3)$ .



(En este caso, se cumple que la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil + 1 = 5$  puntos de la nube es también  $v_3$ , ya que es el punto medio de los dos segmentos que contienen a todos los puntos de la nube, luego  $(v_3, v_3)$  es también la única posición de equilibrio, como se ve en la proposición 2.5.7. del capítulo 2).

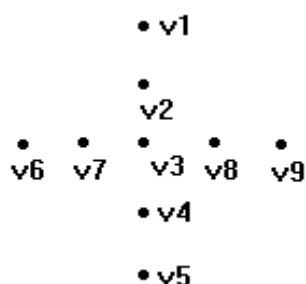


Figura 3.3: La única posición de equilibrio débil es  $(v_3, v_3)$

También hay casos para  $n$  impar en el que hay un único equilibrio débil, de la forma  $(t, t)$ , con  $t$  siendo un punto que no es de la nube, por lo que no hay equilibrio:

- 4) En la nube de la figura 3.4 la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil + 1 = 6$  puntos de la nube es vacía y, por tanto, no hay equilibrio, ya que el posible punto intersección tendrá que estar contenido en el segmento  $\overline{v_1, v_6}$ , y este segmento tiene un número par de puntos de la nube (proposición 2.5.6.).

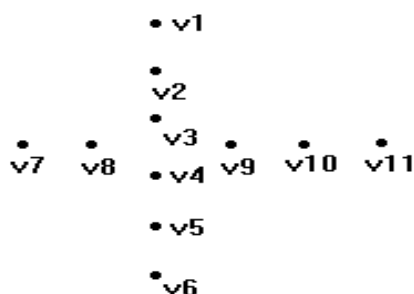


Figura 3.4: No hay equilibrio pero existe una única posición de equilibrio débil

Siempre que tomamos 7 puntos de la nube tiene que haber uno de  $\{v_1, v_2, v_3\}$  y otro de  $\{v_4, v_5, v_6\}$ , o bien, uno de  $\{v_7, v_8\}$  y otro de  $\{v_9, v_{10}, v_{11}\}$ , por lo que tiene que estar el punto intersección de los segmentos  $\overline{v_3, v_4}$  y  $\overline{v_8, v_9}$ , llamémosle  $t$ . Por otro lado, la intersección de los cierres convexos de:

$\{v_1, \dots, v_6, v_9, v_{10}\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_8\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_3, v_7, \dots, v_{11}\}$  y  $\{v_4, \dots, v_{11}\}$  es en  $t$ , por lo que  $t$  está contenido en la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil + 2 = 7$  puntos y la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil + 3 = 8$  puntos está, a su vez, contenida en  $t$ . Entonces, las dos intersecciones son iguales y son el punto  $t$ . Así, la única posición de equilibrio débil es  $(t, t)$ .

También hay casos, para  $n$  impar, en que hay un único equilibrio débil, de la forma  $(t, t)$ , con  $t$  un punto de la nube, y sin embargo, no hay equilibrio:

5) En la nube de la figura 3.5 se cumple que, siempre que tomemos  $\left\lceil \frac{11}{2} \right\rceil + 2 = 7$  puntos de la nube entre los que no esté  $v_3$ , va a haber uno de  $\{v_1, v_2\}$  y otro de  $\{v_4, v_5, v_6\}$ , o bien, uno de  $\{v_7, v_8\}$  y otro de  $\{v_9, v_{10}, v_{11}\}$ , luego en el cierre convexo va a estar siempre la intersección de los segmentos  $\overline{v_2, v_4}$  y  $\overline{v_8, v_9}$ , que es  $v_3$ .

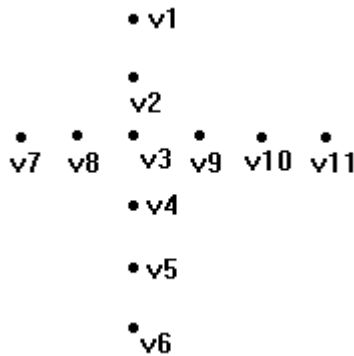


Figura 3.5: Hay un único equilibrio débil en  $v_3$

Por otro lado, la intersección de los cierres convexos de los siguientes conjuntos de

$\left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor + 3 = 8$  puntos de la nube:

$\{v_1, \dots, v_8\}, \{v_1, \dots, v_6, v_9, v_{10}\}, \{v_1, \dots, v_3, v_7, \dots, v_{11}\}, \{v_3, \dots, v_5, v_7, \dots, v_{11}\}$  es en  $v_3$ . Así que,

la intersección de los cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor + 2$  puntos es igual a la intersección

de los cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor + 3 = 8$  puntos, que es igual a  $v_3$  y  $(v_3, v_3)$  es la única

posición de equilibrio débil. Sin embargo, no hay equilibrio, pues el único punto

candidato para la intersección de los cierres convexos de  $\left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor + 1 = 6$  puntos, que

sería  $v_3$ , cumple que tiene un número par de puntos alineados con él, por lo que la intersección es vacía, como vimos en la proposición 2.5.6. del capítulo 2.

Para  $n$  par, se puede dar que haya un solo punto de equilibrio débil, de la forma  $(t, t)$  no siendo  $t$  un punto de la nube, y que ésta sea la única posición de equilibrio.

6) En la nube de la figura 3.6 la intersección de los cierres convexos de

$\frac{12}{2} + 1 = 7, \frac{12}{2} + 2 = 8, \frac{12}{2} + 3 = 9$  puntos de la nube está en la intersección de los

segmentos  $\overline{v_3, v_{10}}$  y  $\overline{v_6, v_7}$ , ya que siempre que tomamos 7 puntos de la nube han de

estar uno de  $\{v_1, v_2, v_3\}$  y uno de  $\{v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$ , o bien, uno de  $\{v_4, v_5, v_6\}$  y otro de

$\{v_7, v_8, v_9\}$ , luego tiene que estar el punto intersección de los segmentos

$\overline{v_3, v_{10}}$  y  $\overline{v_6, v_7}$ , llamémosle  $t$ .

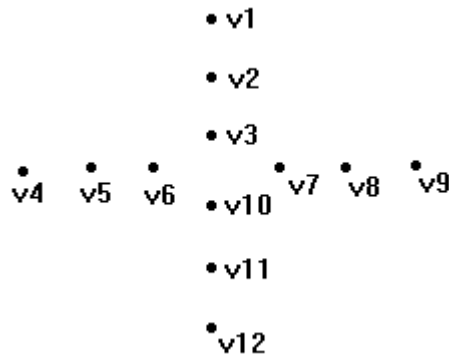


Figura 3.6: Hay única posición de equilibrio y de equilibrio débil en un punto no de la nube

Además, la intersección de los cierres convexos de los siguientes  $\frac{12}{2} + 3 = 9$  puntos de la nube:  $\{v_1, \dots, v_9\}, \{v_4, \dots, v_{12}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_7, \dots, v_{12}\}, \{v_1, \dots, v_6, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$  es en  $t$ . Por esa razón, la intersección de los cierres convexos de  $\frac{12}{2} + 1$  puntos es igual a la intersección de los cierres convexos de  $\frac{12}{2} + 2$  puntos, igual a la intersección de los cierres convexos de  $\frac{12}{2} + 3$  puntos que es  $t$ , y entonces,  $(t, t)$  es la única posición de equilibrio débil, siendo, además, la posición de equilibrio.

También se puede dar el caso, para  $n$  par, de que haya un solo equilibrio débil, de la forma  $(t, t)$ , siendo  $t$  un punto de la nube, y que éste sea el único punto de equilibrio.

7) Consideremos la nube de la figura 3.7:

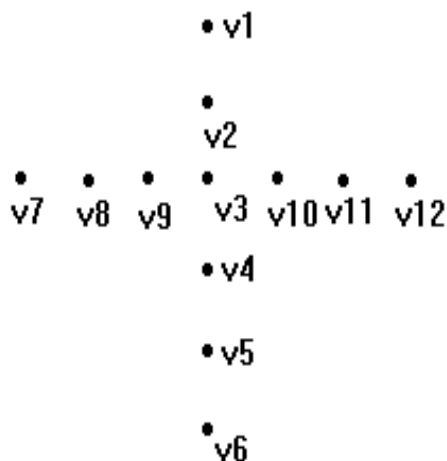


Figura 3.7: El único equilibrio y equilibrio débil es en un punto de la nube

La intersección de los cierres convexos de  $\frac{12}{2} + 1 = 7$ ,  $\frac{12}{2} + 2 = 8$ ,  $\frac{12}{2} + 3 = 9$  puntos de la nube es en  $v_3$ , pues siempre que tomemos 7 puntos de la nube entre los que no esté  $v_3$ , ha de estar uno de  $\{v_1, v_2\}$  y otro de  $\{v_4, v_5, v_6\}$ , o bien, uno de  $\{v_7, v_8, v_9\}$  y otro de  $\{v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$ , ya que si no, como mucho, podemos tomar 6. Por tanto, tiene que estar la intersección de los segmentos  $\overline{v_2, v_4}$  y  $\overline{v_9, v_{10}}$ , que es  $v_3$ . Además, la intersección de los cierres convexos de los siguientes 9 puntos de la nube:  $\{v_1, \dots, v_9\}$ ,  $\{v_3, \dots, v_5, v_7, \dots, v_{12}\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_3, v_7, \dots, v_{12}\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_6, v_{10}, \dots, v_{12}\}$  es en  $v_3$ . Por esa razón, la intersección de los cierres convexos de  $\frac{12}{2} + 1$  puntos es igual a la intersección de los cierres convexos de  $\frac{12}{2} + 2$  puntos que es la intersección de los cierres convexos de  $\frac{12}{2} + 3$  puntos y ésta es  $v_3$ . Entonces,  $(v_3, v_3)$  es la única posición de equilibrio débil, siendo, además, el único equilibrio.

**Observaciones:**

1) Existen casos en los que la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube es vacía, y la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 2$  puntos de la nube es en un punto  $t$  no de la nube, siendo  $n$  par (Figura 3.8), luego, en este caso, la única posición de equilibrio débil es  $(t, t)$ , no siendo  $t$  un punto de la nube, y no habiendo equilibrio.

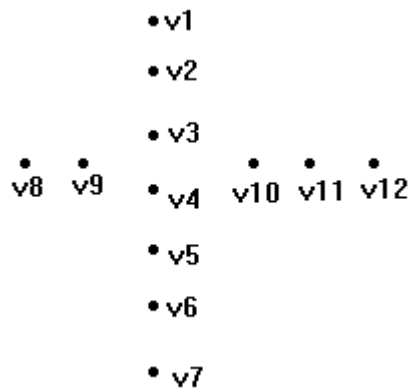


Figura 3.8: No hay equilibrio y sí hay equilibrio débil en un punto que no es de la nube

2) Existen, también, casos en los que la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 1$  puntos de la nube es vacía, y la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 2$  puntos de la nube es en un punto  $t$  de la nube, siendo  $n$  par (Figura 3.9), luego, en este caso, la única posición de equilibrio débil es  $(t, t)$ , siendo  $t$  un punto de la nube, y no habiendo equilibrio.

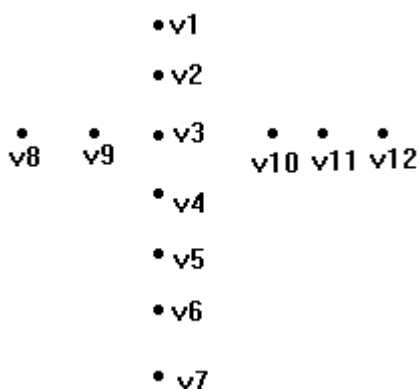


Figura 3.9: No hay equilibrio y sí hay equilibrio débil en un punto de la nube

### 3.3. Estudio del equilibrio débil en posición general

Vamos a analizar si cuando los puntos de la nube están en posición general, hay posibilidad de que el equilibrio débil sea único. Primero, vamos a descartar que éste pueda ser en un punto no de la nube.

#### Proposición 3.3.1:

Si los  $n$  puntos,  $n > 2$ , están en posición general, no se puede dar que la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube sea en  $t$ , punto no de la nube.

*Demostración:*

Para que la intersección de todos los posibles cierres convexos sea en  $t$ , no de la nube, se debe cumplir que una intersección intermedia de cierres convexos sea en un segmento: como no hay más de 2 puntos alineados y  $n > 2$ , el interior del cierre convexo de cualesquiera  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube es no vacío. Entonces, si una intersección de varios cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube tiene interior no vacío y la

intersecamos con otro cierre convexo de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube, esa intersección no puede ser  $\{t\}$ , con  $t$  no de la nube. Esto es porque al intersecar las fronteras de los cierres convexos en  $t$  no de la nube, estas fronteras se atravesarán, y, como los convexos tienen interior no vacío, habrá más puntos que  $t$  en la intersección (contradicción). (Figura 3.10).

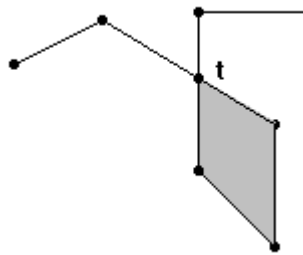


Figura 3.10: La intersección de 2 convexos, con interior no vacío, no puede ser  $\{t\}$ , con  $t$  no de la nube

( $t$  no puede estar en el interior de alguno de los convexos, ya que si no, al intersecar al otro convexo en  $t$ , intersecaría en más puntos además de  $t$ ).

Por tanto, si la intersección de los convexos no es en un segmento, tendrá interior no vacío. Entonces, la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos, tendrá interior no vacío, contradicción con que es  $\{t\}$ . Así que, tiene que haber una intersección parcial de cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube que, al intersecarla con un nuevo cierre convexo de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos, dé un segmento. Pero este segmento, aparte de estar en la frontera del nuevo cierre convexo, estará en la frontera de alguno de los anteriores, ya que si un punto del segmento está en el interior de todos los cierres convexos anteriores, entonces estará en el interior de la intersección parcial. Luego la intersección con el convexo nuevo no puede ser en un segmento. Por tanto, la



recta que contiene a este segmento dejará, al menos,  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  puntos de la nube en cada semiplano abierto que define, ya que los puntos están en posición general (de los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de cada cierre convexo citado antes, los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  que no estén en la recta), por lo que el número de puntos totales sería mayor o igual que  $\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 2 = n+1$ , contradicción, luego la intersección total no puede ser en  $t$  no de la nube. (Figura 3.11).#

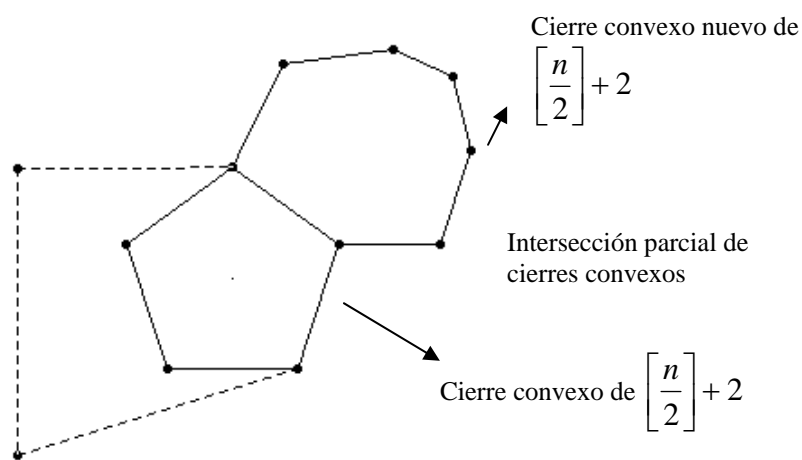


Figura 3.11: La intersección total no puede ser en  $t$  no de la nube

(Como para los casos  $n=1$ ,  $n=2$  vimos que el equilibrio débil tampoco podía ser único, no puede haber equilibrio débil único de la forma  $(t, t)$ , con  $t$  no de la nube, si los puntos están en posición general).

Vamos a ver que, si  $n$  es impar y los puntos están en posición general, el equilibrio débil tampoco puede ser único de la forma  $(t, t)$  con  $t$  de la nube. Necesitamos un resultado previo análogo al de la proposición 2.4.5.

**Proposición 3.3.2:**

Si la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube contiene a  $t$ , con  $t$  de la nube,  $n > 1$  impar, y los puntos en posición general, entonces, la recta que une  $t$  con cualquier otro punto de la nube deja  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$  puntos en uno de los semiplanos abiertos y  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  en el otro.

*Demostración:*

Si en uno de los semiplanos que deja  $t$  con otro punto de la nube  $t'$  hubiera  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube, entonces habría un cierre convexo de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube al que no pertenecería  $t$  por un razonamiento análogo al de la demostración de la primera implicación de la proposición 2.4.3, contradicción.

Entonces, el número de puntos en cada semiplano es menor o igual que  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , y en ninguno puede ser menor que  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 = \frac{n-3}{2}$ , ya que si en alguno de los dos lo fuera, como el número total de puntos en los dos semiplanos es  $n-2$ , en el otro semiplano el número de puntos de la nube sería mayor que  $\frac{n+3}{2} - 2 = \frac{n-1}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , contradicción. Por tanto, en uno de los semiplanos habrá  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 = \frac{n-3}{2}$  puntos de la nube, y en el otro  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n-1}{2}$  #

**Proposición 3.3.3:**

Si la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube es un punto  $p$ , con  $n$  impar, y los puntos están en posición general, entonces la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$  puntos de la nube es infinita.

*Demostración:*

Como la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$  puntos de la nube contiene a la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube,  $p$  pertenece a todos los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$  puntos de la nube. Además, estará en interior de todos ellos, ya que si pertenece a la frontera de alguno, la recta que lo une con su adyacente en la frontera, dejará  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$  puntos de la nube en un semiplano abierto, y el cierre convexo de los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube (los del semiplano y el adyacente a  $p$ ) no contendrá a  $p$ , contradicción. Por tanto,  $p$  pertenecerá al interior de la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$  puntos de la nube y ese interior será no vacío e infinito, luego la intersección es infinita. #

Vemos, ahora, el resultado anunciado.

**Proposición 3.3.4:**

Si  $n$  es impar y los  $n$  puntos están en posición general, no puede haber una posición única de equilibrio débil.

*Demostración:*

Si  $n > 1$  y la intersección de cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube es  $t$ , entonces  $n > 3$  y, como se observa en la demostración de la proposición anterior, la intersección de los posibles cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$  puntos de la nube es infinita y  $t$  está en su interior. Además,  $t$  es de la nube, como vimos en la proposición 3.3.1.

Entonces, la recta  $R$  que une  $t$  con cualquier otro punto de la nube  $t'$  deja  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$  puntos de la nube en uno de los semiplanos abiertos y  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  en el otro, por la proposición

3.3.2. Girando  $R$  para que  $t'$  quede en el semiplano en el que están los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$  puntos obtenemos una nueva recta  $R'$ , y, trasladándola hasta que  $t$  quede en el semiplano en el que estaban los  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  puntos, y que el simétrico de  $t$  respecto a esta nueva recta  $R''$ ,  $t''$ ,

esté en la intersección de los cierres convexos de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$ , (se puede conseguir porque  $t$  está en el interior de esta intersección), y que en la banda abierta entre  $R'$ ,  $R''$  no haya ningún punto de la nube, (se puede conseguir porque el número de puntos de la nube es finito). Se cumple que  $(t, t'')$  es una posición de equilibrio débil, ya que

$\Pi^1(t, t'') = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ ;  $\Pi^2(t, t'') = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ,  $t$  pertenece a la intersección de los cierres convexos

de  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$  puntos de la nube,  $t''$  pertenece a la intersección de los cierres convexos de

$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$ , y cualquier otra posición  $(t, t_1)$  con  $t_1$  perteneciente al segmento que une  $t, t''$

es de equilibrio débil, al ser las ganancias las mismas que antes, luego existen infinitas posiciones de equilibrio débil.

Por tanto, si  $n$  es impar,  $n > 3$ , y los puntos están en posición general, si existen posiciones de equilibrio débil, éstas son infinitas. (Figura 3.12). #

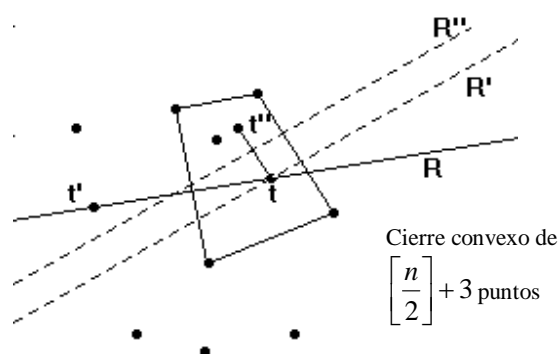


Figura 3.12: Las posiciones  $(t, t_1)$  con  $t_1$  en el segmento que une  $t$  y  $t''$  son de equilibrio débil

(Para  $n=1$ ,  $n=3$ , vimos en la observación del caso  $a$ ), que también había siempre infinitas posiciones de equilibrio débil tanto si los puntos están en posición general como si no lo están).

Veamos que en el caso  $n$  par, sí que puede haber una única posición de equilibrio débil, aún estando los puntos en posición general.

### Ejemplo:

Partimos del ejemplo para  $n=4$  en el que la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{4}{2} + 1 = 3$  puntos de la nube es en el punto del interior. (Figura 3.13).

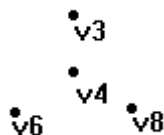


Figura 3.13: El punto  $v_4$  es la intersección de todos los posibles cierres convexos de 3 puntos

Añadimos a los puntos anteriores otros seis puntos de manera que todos queden en posición general. (Figura 3.14).

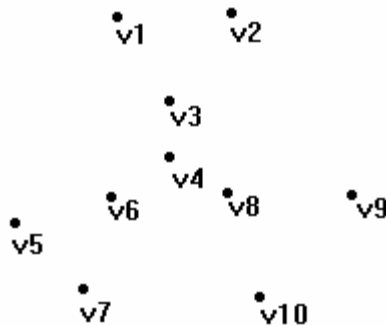


Figura 3.14: Por cada vértice del triángulo, añadimos dos que a su vez forman triángulo con éstos

En este caso, la intersección de los cierres convexos de los siguientes  $\frac{10}{2} + 2 = 7$  puntos de la nube:  $\{v_1, \dots, v_7\}, \{v_1, \dots, v_4, v_8, \dots, v_{10}\}$  es el cierre convexo de  $\{v_1, \dots, v_4\}$ , que intersecado con el cierre convexo de estos otros siete puntos de la nube  $\{v_4, \dots, v_{10}\}$  da el punto  $v_4$ . Luego la intersección de los cierres convexos de siete puntos de la nube está contenida en  $v_4$ . Por otro lado, siempre que tomemos siete puntos entre los que no esté  $v_4$ , tendrá que estar uno del triángulo  $\{v_1, v_2, v_3\}$ , otro de  $\{v_5, v_6, v_7\}$ , y otro de  $\{v_8, v_9, v_{10}\}$ , y su cierre convexo contendrá a  $v_4$ , es decir, la intersección de los cierres convexos de  $\frac{10}{2} + 2 = 7$  puntos de la nube es  $v_4$ . Como el cierre convexo de  $\{v_5, \dots, v_{10}\}$  no contiene al único candidato posible  $v_4$ , la intersección de  $\frac{10}{2} + 1 = 6$  puntos de la nube es vacía, por lo que la única posición de equilibrio débil es  $(v_4, v_4)$ .

Vamos a ver que cuando  $n$  es par, los puntos están en posición general, y existe una posición de equilibrio, las posiciones de equilibrio débil son infinitas, por un resultado análogo a la proposición 3.3.3.

**Proposición 3.3.5:**

Si la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+1$  puntos de la nube es un punto  $p$ , y los puntos están en posición general, entonces, la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+2$  puntos de la nube es infinita.

*Demostración:*

Como la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+2$  puntos de la nube contiene a la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+1$  puntos de la nube, el punto  $p$  pertenece a todos los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+2$  puntos. Además,  $p$  pertenece al interior de esos cierres convexos, ya que si  $p$  está en la frontera de alguno de ellos, la recta que une  $p$  con su adyacente en la frontera, deja, al menos,  $\frac{n}{2}$  puntos de la nube en uno de los semiplanos abiertos que define, ya que no hay más puntos de la nube en esa recta, al estar los puntos en posición general. Entonces, en el cierre convexo de esos  $\frac{n}{2}$  puntos y el adyacente a  $p$  no está el punto  $p$ , contradicción con que la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+1$  puntos de la nube sea  $p$ .

Por tanto,  $p$  está en el interior de la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+2$  puntos de la nube. Así que, el interior es infinito y la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+2$  puntos de la nube es infinita. #

Por tanto, existirán en este caso infinitas posiciones de equilibrio débil de la forma  $(t, t)$  con  $t$  perteneciente a la intersección de los cierres convexos de  $\frac{n}{2}+2$  puntos de la nube.

**Ejemplo:**

Existen nubes de  $n$  puntos, para  $n$  arbitrariamente grande, en los que no existen posiciones de equilibrio débil. Para comprobarlo, vemos que hay ejemplos de  $n$  puntos, tanto en posición general como otras, en los que la intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{2n}{3}$  puntos de la nube es vacía ( $n$  múltiplo de 3):

En el ejemplo de la figura 3.15, el cierre convexo de  $\frac{2n}{3}$  puntos de la nube, considerando los de la izquierda y los de abajo, intersección con el cierre convexo de  $\frac{2n}{3}$  puntos entre los de la derecha y los de abajo, da el conjunto sombreado, que es disjunto con el cierre convexo de los  $\frac{2n}{3}$  puntos de arriba.

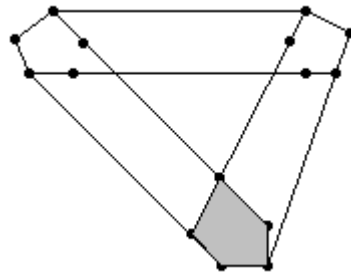


Figura 3.15: La intersección de los posibles cierres convexos de  $\frac{2n}{3}$  puntos de la nube es vacía

En esos casos, y si  $n$  es par, cuando  $\frac{2n}{3} \geq \frac{n}{2} + 2 \Leftrightarrow \frac{n}{6} \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 12$ , las intersecciones de los posibles cierres convexos de  $\frac{n}{2} + 2$  puntos de esas nubes son vacías, por lo que no existen posiciones de equilibrio débil por la condición necesaria y suficiente vista en la proposición 3.2.2. (si  $n$  es impar  $\frac{2n}{3} \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 = \frac{n+3}{2} \Leftrightarrow n \geq 9$ , es decir, a partir de nueve puntos tenemos ejemplos en los que no hay equilibrio débil).



### **3.4. Conclusiones**

Al hacer el estudio del equilibrio, en la mayoría de los juegos de competición, nos encontramos con que dichas posiciones no existen, es decir, no se puede encontrar posiciones para los jugadores que garanticen que si se mueven de ellas no aumentarán su ganancia y, lo que es más relevante, que su competidor no aumente su ganancia moviéndose. Se ha propuesto un equilibrio debilitado en el marco de una competición política en un juego discreto que permite garantizar a un jugador que, en las posiciones de este equilibrio, aunque su competidor se mueva no le será posible aumentar su ganancia en más de una unidad. Dicho equilibrio puede resultar de utilidad en los casos donde el equilibrio tradicional (en el sentido de Nash) no exista.

Además, las posiciones para este equilibrio débil son en general regiones, es decir infinitas, lo que representa mayor variedad de elección para el jugador. En el caso de equilibrio tradicional, cuando existen estas posiciones, son únicas y en el mismo punto, es decir, con los jugadores en la misma posición, algo que en la mayoría de los casos no es viable o carece de sentido.

Puede comprobarse que los resultados obtenidos para el caso débil se corresponden con los presentados para el equilibrio general del capítulo 2. Las técnicas aplicadas son una adaptación de las desarrolladas en ese caso general.

De la misma forma, hemos realizado el estudio de la existencia y unicidad de esas posiciones de equilibrio débil tanto si los puntos están en posición general como en el caso en que no lo están.

Aunque se comprueba que el equilibrio débil, cuando existe, en general, no es único, se proporcionan los siguientes ejemplos de casos con equilibrio débil único:

#### **Más de dos puntos alineados, pero no todos alineados:**

- Caso  $n$  impar:
  - Ejemplo de equilibrio débil único en el punto de equilibrio.

- Ejemplo de equilibrio débil único en un punto no de la nube, en un caso en que no hay equilibrio.
- Ejemplo de equilibrio débil único en un punto de la nube, y no hay equilibrio.
- Caso de  $n$  par:
  - Ejemplo de equilibrio débil único en un punto no de la nube, que es el punto de equilibrio.
  - Ejemplo de equilibrio débil único en un punto de la nube, que es el punto de equilibrio.
  - Ejemplo de equilibrio débil único en un punto no de la nube, y no hay equilibrio.
  - Ejemplo de equilibrio débil único en un punto de la nube, y no hay equilibrio.

**Posición general:**

Para  $n$  par, ejemplo de equilibrio débil en un punto de la nube, no hay equilibrio.

A pesar de que la debilitación de las condiciones de equilibrio hace que éste, casi siempre, exista, hemos presentado ejemplos en los que esta debilitación no es suficiente para garantizar la existencia, para un número de votantes arbitrariamente grande.

## Capítulo 4

# Juego político con consideraciones de entornos

### 4.1. Introducción

Si los diversos partidos políticos tuvieran la posibilidad de tantear previamente al electorado al enfrentarse en las elecciones, podrían aceptar algunos cambios en las ofertas de sus programas con el propósito de obtener un mayor número de votantes. Matemáticamente, podemos identificar esta flexibilización en las políticas con entornos en los que aceptamos que se muevan los puntos que representan a los partidos. Utilizando el juego planteado en el capítulo 2, el problema es el siguiente:

Consideramos  $k$  partidos políticos dados por las coordenadas de  $p_1, \dots, p_k$  y la localización de los  $n$  votantes, dentro del plano de políticas. Construimos su diagrama de Voronoi correspondiente (Aurenhammer, Klein, 2000) y así, podemos calcular cuál es el número de votantes que elige a cada partido por proximidad a sus ideas. Con el objetivo de conseguir el mayor número posible, aceptamos que un partido cambia sus políticas dentro de un cierto entorno. Buscamos encontrar las situaciones óptimas para éste dentro del entorno, es decir, aquéllas para las que la región de Voronoi correspondiente contiene mayor número de votantes.

Este problema se puede ver como una versión discreta del Juego de Voronoi. En aquél, dos jugadores sitúan varios puntos en el plano con la finalidad de ganar la mayor área posible. En el presente problema se sitúan dos puntos con la finalidad de ganar el mayor número posible de puntos en vez de mayor área.

En primer lugar, estudiaremos el caso de dos partidos y la posibilidad de variación del punto  $p$  en un entorno circular. Después, se examina el caso general para  $k$  partidos con el modelo de entorno circular para el movimiento de uno de ellos. Y, por último, estudiamos variaciones tales como que los dos partidos puedan modificar su política dentro de un entorno distinto al circular o que la postura de los votantes se encuentre restringida, es decir, que su voto esté garantizado sólo si el partido político defiende una postura no muy alejada de la suya.

## 4.2. Planteamiento del problema para $k=2$

Si asumimos que cada partido muestra su programa político eligiendo, por ejemplo, sus presupuestos en Sanidad y en Educación por medio de dos parámetros (como veremos en el ejemplo expuesto en el capítulo 5) tendremos las coordenadas de dos puntos y determinaremos nuestro plano de políticas.

Como ya se expuso en el capítulo 2, sean los partidos políticos  $p$  y  $q$  situados en los puntos  $t^1$  y  $t^2$  y  $v_i=(v_{i1},v_{i2})$  con  $i=1,\dots, n$ , la nube de  $n$  puntos que representan los  $n$  votantes de una cierta población.

El conjunto de votantes del partido  $p$  estará más cerca de la posición de  $p$  que de la de  $q$ , por ello utilizamos la construcción de Geometría Computacional que se llama diagrama de Voronoi. Para nuestro caso, el diagrama de Voronoi consta de las dos regiones en que queda dividido el recinto al trazar la mediatriz del segmento  $\overline{pq}$ .

Admitamos que en política puede merecer la pena una ligera variación en los programas de los partidos con el fin de conseguir un mayor número de votos. En una primera etapa de nuestro problema, admitimos que sólo el partido  $p$  flexibiliza sus

opciones, es decir, se mueve en un cierto entorno. El entorno en el que  $p$  se puede mover es el disco de radio  $r$ . Buscamos la mejor situación para  $p$  dentro de este entorno, aquélla desde la que consigue acercarse a un mayor número de votantes.

**Proposición 4.2.1:**

Una situación óptima para  $p$  siempre se encuentra sobre la frontera del entorno en el que se mueve  $p$ , y en el arco más próximo a  $q$  situado entre las dos tangentes trazadas desde  $q$  a la circunferencia (parte visible del entorno de  $p$  desde  $q$ ).

*Demostración:*

Consideramos un punto  $p'$  de la frontera situado fuera del arco más próximo a  $q$  y trazamos la mediatriz correspondiente a  $p'$  y  $q$ . El punto  $p''$  intersección de la recta que une  $p'$  y  $q$  con el arco dicho tiene una mediatriz de  $\overline{p''q}$  paralela a la calculada. Por lo tanto, su región de Voronoi contendrá a la anterior, por lo que el número de puntos en la región de Voronoi será mayor o igual que el que había en la anterior (Figura 4.1).

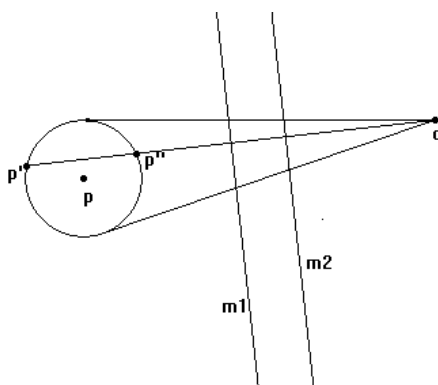


Figura 4.1: El punto  $p''$  intersección de la recta que une  $p'$  y  $q$  con el arco descrito tiene una mediatriz de  $p''q$  paralela a la calculada

(Evidentemente, si consideramos un punto del interior del entorno, tendremos, también, una región menor que la correspondiente a un punto tipo  $p''$ ).#

### 4.3. Algoritmo de resolución

Desarrollamos ahora el algoritmo que nos permite obtener para el partido  $p$  la región de la parte visible desde  $q$  que consigue el máximo número de votantes.

#### 4.3.1. Clasificación de los puntos de la nube

Los puntos de la nube se clasifican en tres conjuntos según puedan o no ser capturados por la región de Voronoi de las posibles localizaciones de  $p$ ,  $p^*$ , al moverlo en la circunferencia centrada en  $p$  y de radio  $r$ :

1.- Puntos que nunca se pueden atrapar:

Los puntos  $(v_{i1}, v_{i2})$  que pertenecen al conjunto siguiente:

$\{(x,y)/d[(x,y),\text{circunferencia}] > d[(x,y),q]\}$ , es decir,

$\{(x,y)/d[(x,y),p]-r > d[(x,y),q]\} = \{(x,y)/d[(x,y),p]-d[(x,y),q] > r \}$

La frontera del conjunto es  $\{(x,y)/d[(x,y),p]-d[(x,y),q] = r \}$ : la rama de la hipérbola de focos  $p$  y  $q$  y distancia  $2a=r$ , más próxima a  $q$ . (Zona 1 en figura 4.2).

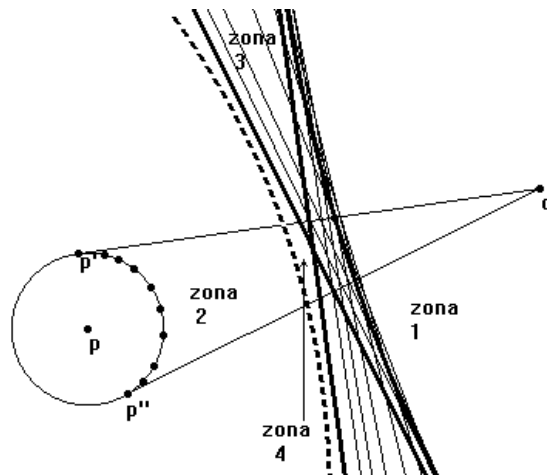


Figura 4.2: Las distintas zonas en que podemos clasificar los puntos

2.- Puntos que siempre se atrapan:

Los puntos  $(v_{i1}, v_{i2})$  que pertenecen al conjunto:

$$\{(x,y)/\text{máximo}\{d[(x,y),c_1],c_2\} \text{ con } (c_1,c_2) \in \text{circunferencia}\} < d[(x,y),q]\}$$

es decir,  $\{(x,y)/d[(x,y),p] + r < d[(x,y),q]\}$ . Así  $\{(x,y)/d[(x,y),q] - d[(x,y),p] > r\}$ .

La frontera del conjunto es  $\{(x,y)/d[(x,y),q] - d[(x,y),p] = r\}$ , la rama de la hipérbola de focos  $p$  y  $q$  y distancia  $2a=r$ , más próxima a  $p$ . Esta zona se puede ampliar ya que la posición de  $\hat{p}$  se restringe al arco visible y, en realidad, se amplía a la limitada por las mediatrices. (Zonas 2 y 4 en figura 4.2).

3.- Puntos que se pueden ganar, los dudosos:

Por la proposición 4.2.1., un punto óptimo se encuentra en el arco más cercano a  $q$  comprendido entre  $p'$  y  $p''$ , (puntos de tangencia de las rectas tangentes desde  $q$  a la circunferencia).

Por tanto, sólo se podrán coger como puntos dudosos de la nube los situados en la región limitada por las dos mediatrices de  $qp'$  y  $qp''$  y el arco de hipérbola más cercano a  $q$ . (Zona 3 en figura 4.2). Se demuestra fácilmente que:

- Las mediatrices correspondientes recorren una zona central delimitada por la rama de hipérbola más cercana a  $q$  cuyas asíntotas son las mediatrices entre  $q$  y los puntos de tangencia, y por dichas asíntotas por el lado cercano a  $p$ .
- Los puntos de la nube de esta zona central, según dónde estén situados, entrarán y saldrán de la región de Voronoi según movemos el punto  $p$  una o dos veces.

**4.3.2. Desarrollo del algoritmo**

El algoritmo que se describe a continuación se basa en la localización de intersecciones de circunferencias. Por un lado, tenemos la circunferencia centrada en  $p$  que nos indica el entorno de variabilidad para el partido político correspondiente, por otro, para cada votante  $v_i$  la circunferencia centrada en dicho punto y que pasa por  $q$ , ya que si la

distancia a  $p$  es menor que a  $q$ , el primer partido podrá contabilizar a  $v_i$  como votante propio.

Sea  $C$  la circunferencia frontera del círculo centrado en el punto  $p$  en el que éste puede moverse. Supondremos que el punto  $q$  es exterior a  $C$ . Sean  $p'$  y  $p''$  los puntos de tangencia entre  $C$  y las rectas tangentes a  $C$  trazadas desde  $q$ ,  $p'$  el punto de tangencia derecho y  $p''$  el izquierdo vistos desde  $q$ .

Supondremos que los puntos  $v_i$  son exteriores a  $C$ . Para cada punto  $v_i$  sean  $x'_i$  y  $x''_i$  los puntos de intersección entre  $C$  y la circunferencia centrada en  $v_i$  que pasa por  $q$ . Sea  $x'_i$  el punto de intersección derecho y  $x''_i$  el izquierdo vistos desde  $v_i$ . (Figura 4.3).

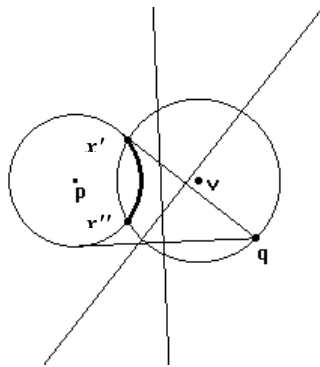


Figura 4.3:  $x'$  y  $x''$  son los puntos de intersección (derecho e izquierdo vistos desde  $v$ ) entre  $C$  y la circunferencia centrada en  $v$  que pasa por  $q$

El algoritmo es como sigue:

**Paso 1:** Hallar los puntos  $p'$  y  $p''$  e iniciar un contador  $c'$  con el valor inicial cero.

**Paso 2.** Iniciar una lista  $L$  vacía y un contador  $m$  con el valor inicial cero. Para cada punto  $v_i$  hallar la intersección de  $C$  con la circunferencia centrada en  $v_i$  que pasa por  $q$ .

**2.1.** En caso de que no se corten, porque la circunferencia  $C$  está contenida en el círculo centrado en  $v_i$  que pasa por  $q$ , aumentar el contador  $m$  una unidad.

**2.2.** Si no se cortan por ser disjuntos los correspondientes círculos, el contador  $m$



conserva su valor.

**2.3.** Si se cortan en dos puntos y ninguno pertenece al arco visible, aumentar  $m$  una unidad.

**2.4.** En otro caso, realizar las siguientes operaciones:

**2.4.1.** Si ambos pertenecen al arco de  $C$  visible desde  $q$ , incluirlos en la lista  $L$ .

**2.4.2.** Si  $x'_i$  pertenece a dicho arco y  $x''_i$  no, incluir  $x'_i$  en  $L$ .

**2.4.3.** Si  $x''_i$  pertenece a dicho arco y  $x'_i$  no, incluir  $x''_i$  en  $L$  y aumentar una unidad el contador  $c'$ .

**Paso 3.** Ordenar los puntos de la lista  $L$  angularmente respecto de  $p$  en sentido horario.

**Paso 4.** Iniciar un contador  $c$  con el valor de  $c'+m$  y asignar a una variable  $x$  el punto  $p'$ . Recorrer la lista  $L$  efectuando en cada elemento las siguientes operaciones:

**4.1.** Si es un punto  $x'_i$ , aumentar el contador  $c$  una unidad y, en caso de que  $c$  sea mayor que  $m$ , asignar a  $m$  el valor  $c$  y a  $x$  el punto  $x'_i$ .

**4.2.** Si es un punto  $x''_i$ , disminuir el contador  $c$  una unidad.

**Observación:**

En caso de que los puntos  $x'_i$  y  $x''_i$  coincidan por ser las correspondientes circunferencias tangentes, se considerará  $x'_i$  anterior a  $x''_i$  en la lista  $L$ .

Al finalizar la ejecución del algoritmo, el contador  $m$  indica el máximo número de puntos  $v_i$  que el punto  $p$  puede conseguir más próximos a él que a  $q$ , situándose en un punto del arco de  $C$  cuyo extremo inicial es el punto almacenado en la variable  $x$  y el final, el siguiente a dicho punto en la lista  $L$ .

La complejidad del algoritmo, en el peor caso, es  $O(n \log n)$ : el paso 1 se realiza en tiempo constante; el paso 2 realiza una cantidad constante de operaciones por cada punto  $v_i$ , por lo que se ejecuta en total en tiempo lineal; el paso 3 es el que requiere  $O(n \log n)$  operaciones en el peor caso, pues se trata de una ordenación de una lista de  $n$

elementos. Y el paso 4 requiere una cantidad de operaciones proporcional al número de elementos de la lista  $L$ , que en el peor caso es lineal.

### Observaciones:

En referencia a la clasificación de los puntos según las zonas a las que corresponden (ver apartado 4.3.1. y figura 4.2), podemos afirmar que cada tipo de puntos de nuestro algoritmo pertenece a una de ellas. Así:

- Los puntos  $v_i$  del paso 2.1. son los que están en la zona 2.
- Los puntos  $v_i$  del paso 2.2. son los que están en la zona 1, puntos que nunca votarán al partido  $p$ .
- Los puntos del paso 2.3. están en la zona 4 que, junto con los de la zona 2, siempre son ganados por el partido  $p$ .
- Y por último, los del paso 2.4. son de la zona 3, puntos que hemos llamado dudosos, ya que pueden acabar votando a  $p$ . Los del paso 2.4.1 están situados entre las mediatrices, que son asíntotas de la hipérbola, y la rama de la hipérbola más cercana a  $q$ . Los del paso 2.4.2. estarán en la parte izquierda, mirando desde  $q$ , situada entre las dos mediatrices. Y los del paso 2.4.3. en la parte derecha desde  $q$  entre las mismas rectas.

## 4.4. Problema en el caso general: $k > 2$

Planteamos el mismo problema generalizando a  $k$  partidos políticos. Ahora tenemos  $p_1, \dots, p_k$  puntos que representan dichos partidos y la nube de  $n$  puntos que son los votantes  $v_1, \dots, v_n$ .

Para cada  $v_i$  hay que ver cuál es el partido,  $p_j$ , que tiene más próximo, y trazar la circunferencia centrada en  $v_i$  que pasa por  $p_j$ . Para decidir quién es  $p_j$ , construimos el diagrama de Voronoi de  $p_1, \dots, p_k$  y comprobamos a qué región de Voronoi pertenece  $v_i$  (Figura 4.4). El partido  $p_1$  se puede mover, igual que antes, en un círculo de radio determinado. Por lo tanto, dentro de la región de movimiento de  $p_1$ , se busca la zona de

máxima superposición de los  $n+1$  círculos. Utilizaremos la construcción de Geometría Computacional que se llama arreglo de círculos, cuyo algoritmo requiere una complejidad de  $O(n^2 \log n)$ , (Abellanas et al., 2004). (Figura 4.5).

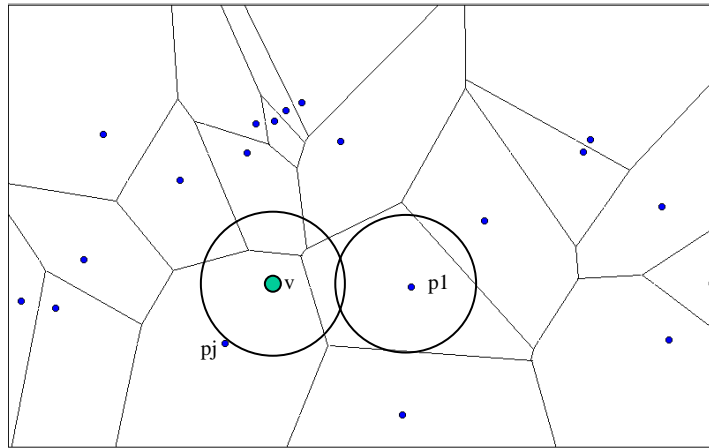


Figura 4.4: Diagrama de Voronoi de  $n$  puntos:  $p_1, \dots, p_n$

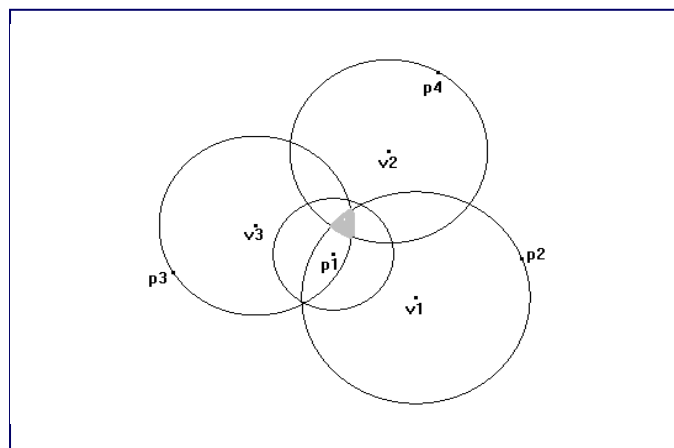


Figura 4.5: Arreglo de círculos para el caso general

## 4.5. Variaciones

### 4.5.1. El entorno es un segmento

En este caso, consideramos que el partido  $p$  puede modificar su posición de manera lineal entre dos posiciones extremas. Geométricamente, el punto  $p$  se mueve sobre un segmento mientras  $q$  queda fijo.

Ahora, los puntos de la nube se pueden clasificar en las siguientes zonas, según podemos ver en la figura 4.6:

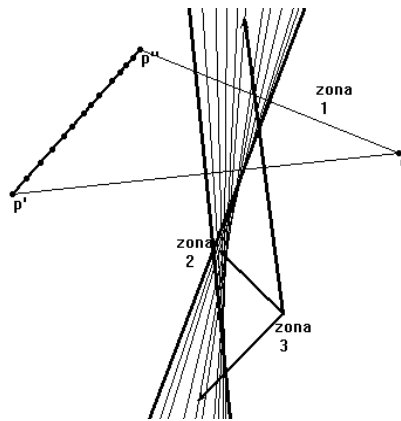


Figura 4.6: Clasificación de puntos cuando el entorno es un segmento

*Zona 1: Puntos que nunca atrapa  $p$  al moverse sobre el segmento.*

Los puntos  $(v_{i1}, v_{i2})$  que pertenecen al conjunto:

$$\{(x, y) / d((x, y), \text{segmento}) > d((x, y), q)\}$$

La distancia al segmento es: la distancia a  $p'$ , la distancia a  $p''$  o la distancia del punto de la nube a la recta. La frontera será la parábola de foco  $q$  y directriz la recta que contiene al segmento y dos segmentos de las mediatrices entre  $p'$  y  $q$ ,  $p''$  y  $q$ .

*Zona 2: Puntos que seguro atrapa  $p$ .*

Los puntos  $(v_{i1}, v_{i2})$  que pertenecen al conjunto:

$\{(x, y) / \max d((x, y), \text{segmento}) < d((x, y), q)\}$  . Pero la máxima distancia de un punto de la nube al segmento se alcanza en uno de los extremos de dicho entorno. Por lo tanto,  $d((v_{i1}, v_{i2}), p') < d((v_{i1}, v_{i2}), q)$  ó  $d((v_{i1}, v_{i2}), p'') < d((v_{i1}, v_{i2}), q), i = 1, \dots, n$  . Las fronteras de estos conjuntos son las mediatrices entre  $p'$  y  $q$ , y entre  $p''$  y  $q$ .

*Zona 3: Puntos dudosos.*

El resto de puntos.

El desarrollo del algoritmo será análogo al del apartado 4.3.2., pero los arcos óptimos que se obtienen como intersecciones de circunferencias, son ahora partes del segmento. Éstas quedan determinadas por los puntos intersección de las circunferencias con dicho entorno.

#### 4.5.2. El entorno es un polígono convexo

El entorno sobre el que consideramos el movimiento del punto  $p$ , es un polígono convexo de  $m$  lados (Figura 4.7).

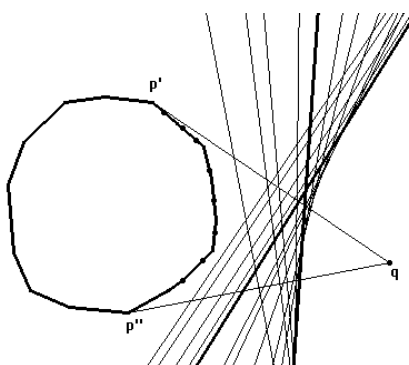


Figura 4.7: Clasificación de puntos cuando el entorno es un polígono convexo

Aplicando el algoritmo del apartado 4.3.2 a cada uno de los lados, tendríamos una complejidad de  $O(mn \log n)$ .

Con demostración análoga al caso de la circunferencia, se cumpliría la siguiente proposición, que permitirá mejorar la complejidad del algoritmo:

**Proposición 4.5.1:**

La situación óptima para  $p$  siempre se encuentra sobre la frontera del polígono situada entre las dos rectas soporte trazadas desde  $q$  al polígono, que es la cadena poligonal más próxima a  $q$ .

Estudiamos esta cadena poligonal visible desde  $q$ . Lo primero que tenemos que hacer es localizar los puntos donde se apoyan las rectas soporte lanzadas desde  $q$ , es decir, los puntos donde las rectas que pasan por  $q$  y por puntos del polígono sólo tienen una intersección con nuestro entorno. Para ello utilizamos una búsqueda binaria a partir de los  $m$  vértices del polígono (de Berg et al., 1997).

Una vez localizados los puntos  $p'$  y  $p''$ , tenemos la cadena poligonal visible desde  $q$ . Igual que antes, buscamos las intersecciones de las circunferencias centradas en los puntos de la nube,  $(v_{i1}, v_{i2})$ , y que pasan por  $q$ , con dicha cadena.

Vamos a analizar la complejidad del algoritmo:

- Encontrar  $p'$  y  $p''$  en  $O(\log m)$
- Cada intersección de circunferencia en  $O(\log m)$ .
- Todas las intersecciones  $O(n \log m)$
- Ordenar estos puntos  $O(n \log n)$
- Buscar el máximo solapamiento  $O(n)$

En total tenemos una complejidad de  $O(n \log m n)$ .

Se comprueba que la intersección de las circunferencias con la cadena visible sólo puede ser, como máximo, dos puntos para asegurar que un algoritmo similar al desarrollado en el apartado 4.3.2 es válido en este caso. Incluso, de forma más general, demostramos el siguiente lema.

**Lema 4.5.1:**

Sean dos puntos  $p$  y  $q$ . Se considera un entorno convexo de  $p$  y la cadena convexa visible desde  $q$  de dicho entorno. La intersección de la cadena visible con cualquier convexo que contenga a  $q$  no puede ser en más de dos puntos no alineados.

*Demostración:*

Supongamos que en la intersección hay tres puntos no alineados  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Supongamos que  $a$ ,  $b$  y  $c$  están ordenados en torno a  $q$  en sentido positivo. Por ser  $a$ ,  $b$  y  $c$  visibles desde  $q$  y ser convexo el entorno de  $p$ , existe una recta  $r$  que pasa por  $b$  y separa  $q$  del entorno de  $p$ . Como  $a$ ,  $b$  y  $c$  no están alineados, dicha recta separa  $q$  de  $a$  y  $c$ . Por ser convexo el entorno de  $q$ , existe una recta  $s$  que pasa por  $b$  que deja a dicho entorno en un semiplano. En consecuencia, tanto  $q$  como los tres puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  están en dicho semiplano. La única posibilidad de que se cumplan estas condiciones es que las dos rectas coincidan y los tres puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  estén en dicha recta. Pero esto contradice la hipótesis de que  $a$ ,  $b$  y  $c$  no estén alineados. (Figura 4.8). #

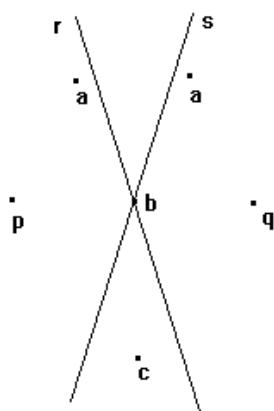


Figura 4.8: Como  $a$ ,  $b$  y  $c$  no están alineados, la recta  $r$  separa  $q$  de  $a$  y  $c$ .

Por ser el entorno de  $q$  convexo, existe una recta  $s$  que deja a dicho entorno en un semiplano

**Observación:**

Si los tres puntos estuvieran alineados, el segmento que los une estaría contenido en la intersección. Sería el caso en el que este segmento estuviese contenido en algún lado de los polígonos convexos.

**4.5.3. Se mueven los dos puntos  $p$  y  $q$**

Ahora consideramos que los dos partidos políticos flexibilizan sus posiciones. Los dos puntos  $p$  y  $q$  se mueven en dos entornos circulares que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, de igual radio.

En una primera etapa, podemos pensar que se mueve  $p$  y se deja fijo  $q$  y después, se mueve  $q$  y se deja fijo  $p$ . Con este planteamiento sería repetir dos veces el caso anterior.

En una segunda etapa, estudiamos la situación para un movimiento simultáneo, no determinista, de los dos puntos (Watson, 2002). Sean  $p^*$  y  $q^*$  las posibles situaciones de los puntos  $p$  y  $q$ , respectivamente.

En este caso los puntos de la nube que seguro atrapa  $p^*$  son los  $(v_{i1}, v_{i2})$  que pertenecen al conjunto:  $\{(x, y) / \max [d((x, y), p^*)] < \min [d((x, y), q^*)]\}$ .

La frontera será la hipérbola  $\{(x, y) / d((x, y), p) - d((x, y), q) = 2r\}$ .

De las posibilidades a analizar, escogemos la más conservadora: la idea es buscar el caso menos arriesgado para  $p$ , es decir, buscar las posturas de  $p$ ,  $p^*$ , para las que asegure el máximo número de votantes, sea cual sea la posición de  $q$ .

Estudiamos cuál es el caso en que un punto  $(v_{j1}, v_{j2})$  se lo lleva  $p^*$  y no lo puede atrapar  $q^*$ , en cualquiera de sus posiciones sobre su entorno. Trazamos la circunferencia centrada en  $(v_{j1}, v_{j2})$  y de radio la mínima distancia de  $(v_{j1}, v_{j2})$  a  $q^*$  que es  $d((v_{j1}, v_{j2}), q) - r$ . Calculamos las intersecciones como en los casos anteriores, y tendremos las localizaciones de  $p^*$  que atraparían a dicho punto de la nube. Al hacerlo con todos los puntos, nos quedamos con la región con mayor número de solapamientos o al menos el número que asegure ganar unas elecciones.



Otra estrategia sería suponer que  $q$  también es conservador y realiza el mismo proceso y entonces a  $p$  le convendría arriesgar al elegir su posición. El desarrollo sería análogo, ya que lo único que lo diferencia es que hay que limitar dónde puede estar  $q$ .

#### 4.5.4. La distancia elegida es la $L_1$

Consideramos el problema planteado en el apartado 4.3. para la distancia  $L_1$ . En este caso, las circunferencias son ahora cuadrados y la mediatriz de los puntos  $p$  y  $q$  serán los puntos  $(x,y)$  tales que

$$d((x, y), p) = d((x, y), q) \Rightarrow |x - p_1| + |y - p_2| = |x - q_1| + |y - q_2|.$$

Pero, de igual manera, calcularemos las intersecciones de los cuadrados centrados en cada uno de los puntos de la nube con el cuadrado centrado en  $p$  (Figura 4.9). Como los cuadrados son polígonos convexos, según lo tratado en el apartado 4.5.2., la complejidad del algoritmo será, igualmente,  $O(n \log n)$ .

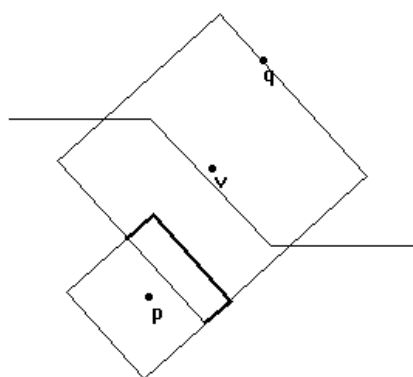


Figura 4.9: Situación gráfica del problema con la distancia

#### 4.5.5. Restricción de las distancias de $p$ o $q$ a los puntos de la nube

Es lógico pensar que los partidos muevan sus posiciones políticas para acercarse a un mayor número de votantes pero, hasta cierto punto. Es decir, siempre habrá unos ciudadanos tan alejados de las opciones políticas presentadas por los partidos, que se abstendrán en las votaciones. Existen numerosos estudios de la abstención en las elecciones (Feddersen, Pessendorfer, 1999; Llavador, H., 2000).

Diremos que consideramos *despreciables* aquellos puntos que están demasiado alejados de las posiciones de los partidos  $p$  y  $q$ . El límite en el alejamiento de las ideas políticas de cada votante se reflejaría en el algoritmo por medio de circunferencias centradas en cada punto de la nube cuyo radio representa esa máxima distancia tolerada por el votante. Al desarrollo del algoritmo de la sección 4.3.2. hay que añadir, por tanto, dichas circunferencias. De esta forma, por cada punto de la nube habrá que considerar dos circunferencias.

Se plantearán casos distintos dependiendo de la proporción entre radios. Sólo en el caso que el radio de tolerancia sea menor que la distancia de  $v$  a  $q$  se modificará el algoritmo, quedando restringida la zona de captación. (Figura 4.10).

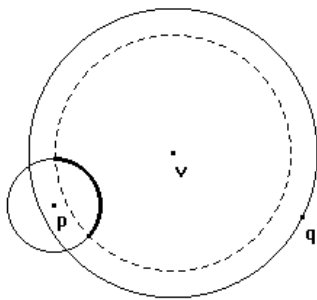


Figura 4.10: Caso 1

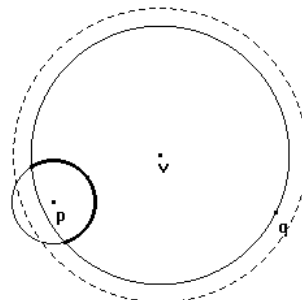


Figura 4.10: Caso 2

## 4.6. Conclusiones

Este capítulo analiza la búsqueda de la posición óptima de un jugador dentro de un entorno, que representa las posibilidades de flexibilizar sus decisiones o posturas en determinados aspectos. Hemos tratado diferentes tipos de entornos adecuados para distintos estudios: entornos circulares, segmentos o polígonos convexos.

El tratamiento más profundo ha sido el realizado para entornos circulares. Para este caso hemos construido un algoritmo que permite encontrar esa posición óptima.

El algoritmo desarrollado permite considerar variaciones del problema inicial del capítulo 2, que puede ilustrar diferentes situaciones reales como son la flexibilidad en los programas políticos con la intención de conseguir ganar las elecciones y la

consideración de unos límites en la intención del votante para apoyar unas políticas concretas de un partido.

La complejidad de los algoritmos considerados que nos permiten obtener soluciones óptimas para la captación de votos es, generalmente, menor que cuadrática.

La utilidad o el funcionamiento del algoritmo se ponen de manifiesto en el capítulo siguiente, donde se aplica a un problema concreto de la política nacional. Puede verse, entonces, la implementación del mismo.



## **Capítulo 5**

# **Simulación de un problema de competición política nacional con restricciones**

### **5.1. Introducción**

Existen numerosos trabajos estadísticos para el estudio de la intención de voto de los ciudadanos. En esa línea podemos destacar las encuestas de opinión en temas políticos y fiscales relacionados con los impuestos, contraprestaciones que recibe la sociedad por el pago de impuestos, funcionamiento de los servicios públicos, el fraude fiscal, valoración de los políticos. La mayoría de los trabajos que estudian la competición política y elecciones de los ciudadanos están basados en la Teoría Espacial del Voto, inicialmente desarrollada por Black y Downs con las posteriores contribuciones de Hinich y Pollard (1981), Shepsle y Weingstag (1981), Enelow y Hinich (1982) o Hinich y Munger (1994) entre otros. Hay también literatura empírica donde se han probado los métodos teóricos: Enelow y Hinich (1984) y Ghobarah (1998) estudian las elecciones presidenciales de E.E.U.U. aplicando la metodología de Cahoon-Hinich (1978). Lin et al. (1996) aplicaron la estadística para analizar las elecciones presidenciales de Taiwan. Pappi y Eckstein (1998) lo aplicaron en Alemania.

Encontramos trabajos de Rusk y Weisberg (1972) o Hinich (2005) aplicados a un conjunto de datos de encuestas de Turquía.

Este capítulo presenta un ejemplo electoral empírico basado en una encuesta de opinión pública y política fiscal en España y tratado con nuestro algoritmo. La base teórica que subyace es la que hemos desarrollado a lo largo de los anteriores capítulos. En este estudio queremos poner de manifiesto, a través de un ejemplo concreto, la influencia que cierto tipo de información cuantitativa podría tener a la hora de adoptar estrategias políticas por parte de los partidos de cara a unas elecciones, y cómo mayor información y cultura económica y política por parte de la ciudadanía tendría efectos notorios sobre la decisión de voto y los resultados electorales. La novedad de nuestro ejemplo aplicado consiste en la consideración de entornos para la localización de los jugadores (partidos políticos) y un tratamiento discreto. El algoritmo desarrollado en el capítulo anterior permite estudiar la influencia en la decisión de los votantes de las estrategias adoptadas por los partidos, acerca de dos cuestiones que se detectan importantes por las encuestas de opinión. Queremos destacar que no consideramos que estos temas sean decisivos en el resultado global de las elecciones, pero pueden tener suficiente trascendencia a la hora de realizar un análisis político de los programas de los partidos.

## **5.2. Planteamiento teórico del problema**

Para llevar a cabo el desarrollo de un estudio concreto, nos basamos en el modelo teórico presentado en la introducción del capítulo 2. Dicho modelo es el utilizado en trabajos de competición política, con alguna variación (Abellanas et al. 2006).

Como hemos visto en el capítulo 4, en política tiene sentido admitir una ligera variación en los programas de los partidos con el fin de conseguir un mayor número de votos. Consideramos que sólo uno de los partidos flexibiliza sus opciones, es decir, se mueve en un cierto entorno. El entorno en el que se puede mover es un disco de radio  $r$ .

Buscamos la mejor situación para dicho partido dentro de este entorno, es decir, aquella desde la que consigue acercarse a un mayor número de votantes.

En este capítulo se pone en práctica el algoritmo del capítulo 4. Un algoritmo de búsqueda de esa posición óptima que se basa en ideas geométricas, y utiliza técnicas de Geometría Computacional adaptadas al problema (Preparata, Shamos 1985).

### **5.3. Las encuestas de opinión**

Son abundantes las encuestas y estudios estadísticos sobre gran número de temas, que entidades como el CIS (Centro de Investigaciones Sociológicas), el INE (Instituto Nacional de Estadística), el CEACS (Centro de Estudios Avanzados en Ciencias Sociales), entre otros, llevan a cabo a lo largo de los años en España. Como ejemplo de encuestas e información que se puede tener en la actualidad sobre los contenidos que aquí nos interesan, comentamos la encuesta de opinión y política fiscal nº 2616 del CIS. Con sus resultados, por un lado simularemos la información restante que es necesaria para el desarrollo del trabajo que se presenta. Por otro se pondrán de manifiesto las necesidades de otro tipo de estudios y la carencia de información y preparación de los ciudadanos en ciertas áreas.

#### **5.3.1. Encuesta de opinión pública y política fiscal nº 2616 del CIS**

##### **FICHA TÉCNICA**

- **Ámbito:** Nacional.
- **Universo:** Población de ambos sexos de 18 años o más.
- **Tamaño de la muestra:** Diseñada: 2500 entrevistas. Realizada: 2483 entrevistas.
- **Puntos de muestreo:** 167 municipios y 47 provincias.
- **Procedimiento:** Selección de las unidades de muestreo de forma aleatoria por rutas aleatorias y cuotas de sexo y edad.

- Los cuestionarios se han aplicado mediante entrevista personal en domicilios
- Error muestral: Para un nivel de confianza del 95,5%, el error es de  $\pm 2.0\%$  para el conjunto de la muestra y en el supuesto de muestreo aleatorio simple.
- Fecha de realización: Del 1 al 13 de Julio del 2005.
- Se ocupa entre otras de preguntas del tipo:

Opinión sobre el grado de exigencia de los ciudadanos a los distintos servicios públicos. Contraprestaciones que recibe el ciudadano por el pago de impuestos. Evaluación de la cantidad de recursos que el Estado dedica a los diversos servicios públicos. Opinión sobre la necesidad de subir los impuestos para la mejora de los servicios. Valoración de la cantidad de impuestos que pagan los españoles. Justicia en la distribución del pago de impuestos.

Todas estas preguntas se responden a través de opciones del tipo: nada, poco, bastante o mucho.

### **5.3.2. Simulación de un ejemplo en política nacional**

Siguiendo el modelo de competición política de la sección 5.1, la idea es simular unos datos basados parcialmente en los resultados obtenidos en la encuesta del CIS que permitan realizar la búsqueda de la política óptima de un partido en relación con dos temas relevantes y evaluar cuáles serían los beneficios de haber contado previamente con esta información. Esto nos va a servir como una guía para la generación de datos: el número de entrevistados o las respuestas a cuestiones tales como la evaluación de la cantidad de recursos que el Estado dedica a ciertos servicios, nos permitirá trabajar con datos cercanos a la realidad, para la simulación del problema a nivel nacional. Se propone así acompañar a una encuesta del tipo anterior preguntas en la línea de:

1.- Elija los dos servicios que considera prioritarios de la siguiente lista:

- Educación
- Obras públicas
- Defensa
- Sanidad



- Vivienda
- Justicia
- Trabajo y asuntos sociales
- Transporte y comunicaciones
- Medio ambiente.

2.- Sabiendo que el Gobierno actual dedicó en el 2005 los porcentajes siguientes del gasto total a dichos servicios: ¿qué porcentaje dedicaría usted a los mismos?

3.- ¿Afectaría a su decisión de voto conocer de antemano cuánto dedicarían los partidos políticos a cada uno de los servicios? En su caso ¿qué margen de diferencia con la cantidad que Ud. desea admitiría al partido que votaría?

Preguntas de este tipo nos permiten elegir dos temas de importancia para los ciudadanos con información cuantitativa de sus opiniones y con efectos sobre su posible decisión de voto.

Elegimos como políticas a evaluar la inversión en enseñanza y en sanidad y generamos las respuestas a las preguntas 1, 2 y 3 aleatoriamente basándonos en los porcentajes reales de las respuestas en la encuesta del CIS mencionada en el apartado 5.3.1.

Las políticas de los partidos que se enfrentan se han tomado como:

- $q$  la inversión media en educación y la inversión media en sanidad del PP durante sus 8 años de mandato.
- $p$  la inversión media en enseñanza y la media en sanidad del PSOE en sus 2 años de mandato.

Dichas cantidades se han extraído de los presupuestos generales del estado consolidados (políticas de gasto). Hemos comparado diferentes períodos de gobierno, con diferentes circunstancias de los dos partidos. De acuerdo con estos valores, pensamos que la posibilidad de estudiar cómo afectarían a la elección del votante las

variaciones de las políticas de gasto en educación y sanidad, permite encontrar, dentro de un margen, la política apropiada para conseguir el mayor número de seguidores. Se podría elegir cualquier otra cuestión que los partidos consideren relevante para los ciudadanos en un periodo electoral, tal como hemos expuesto en la primera pregunta de la encuesta.

## 5.4. El algoritmo y su aplicación al ejemplo

### 5.4.1. Implementación del algoritmo

El algoritmo desarrollado en el capítulo 4, se ha implementado en el ordenador utilizando el lenguaje de programación C mediante un compilador bajo entorno Windows. El lenguaje C resulta un lenguaje de programación poderoso, de propósito general, que permite resolver problemas de cualquier área científica con un tiempo de ejecución adecuado.

Datos de entrada:

- Posición de los dos partidos.
- Radio del entorno de flexibilidad política para un partido.
- Posiciones de los votantes  $v_i$   $i=1,\dots,2276$ .

Datos de salida:

- Número de votantes que seguro gana cada partido sin necesidad de flexibilizar políticas.
- Número de votantes que gana el partido que flexibiliza su política situándose en la posición óptima encontrada.
- Posición óptima donde debe situarse el partido para captar el mayor número de votantes.

## **5.4.2. Resultados**

Siguiendo las ideas del apartado anterior:

- El plano de políticas se establece con los porcentajes del gasto dedicado a educación y sanidad, del presupuesto total consolidado para las políticas de gasto (26 elementos).
- La política seguida por el primer partido: PSOE y el segundo partido: PP se han determinado con el porcentaje medio dedicado a estas dos políticas calculado a partir del gasto total en media durante los dos años de mandato del PSOE (años 2005, 2006) y lo mismo para PP (años 1997, 2004):  $p=(0.6, 1.4)$ ,  $q=(1.6, 8.9)$ .
- El entorno de flexibilidad política se va ampliando en los diversos estudios.
- Los votantes y sus preferencias se han generado aleatoriamente a partir de los resultados de la encuesta del CIS citada en el apartado anterior (concretamente con las respuestas a la pregunta sobre la cantidad de recursos que el Estado dedica a los diversos servicios públicos), que se hizo bajo el gobierno del PSOE. Así se tienen:
  - Votantes que desean más inversión en educación o sanidad que la invertida por el gobierno actual.
  - Votantes que están de acuerdo con la inversión en alguno de los elementos.
  - Votantes que prefieren una menor inversión en educación o sanidad.

La situación gráfica del problema queda reflejada en la figura 5.1:

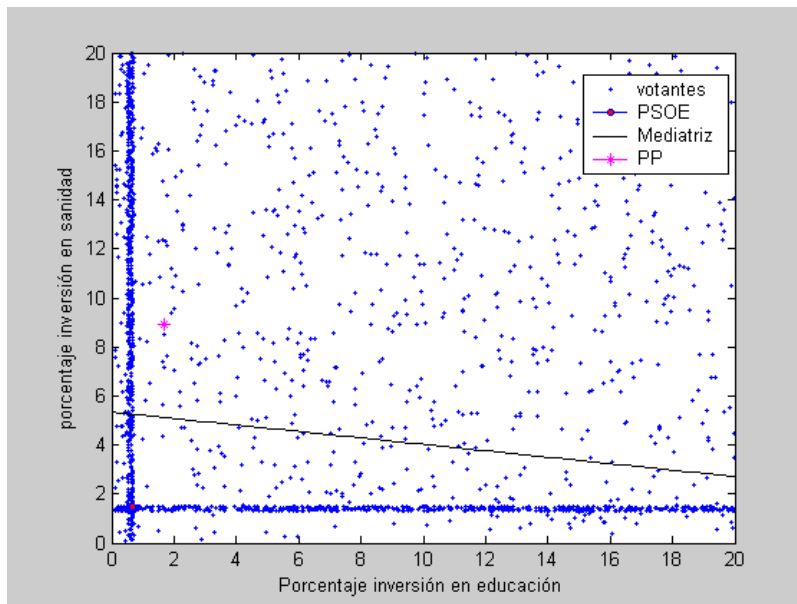


Figura 5.1: Situación gráfica del problema

- Se permitirá una flexibilidad en la política de inversión de cada partido por separado (en el ejemplo de la figura 5.2. de un 0.8% para el partido  $p$ ), para el estudio de la variación de los resultados en la captación de votantes.

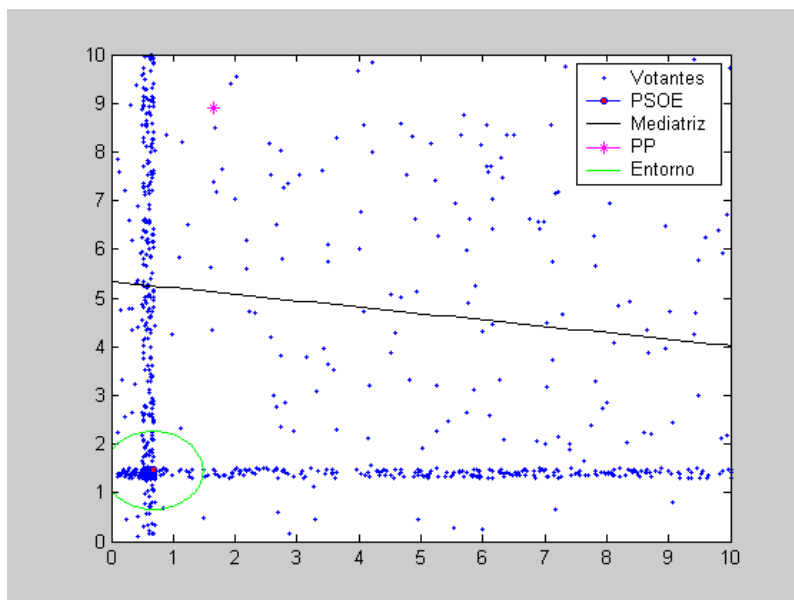


Figura 5.2: Flexibilidad en política de gasto para el primer partido

La ejecución del algoritmo va encontrando votantes que aún con esta flexibilidad no serían captados por el partido y votantes que sí lo serían. (Figura 5.3).

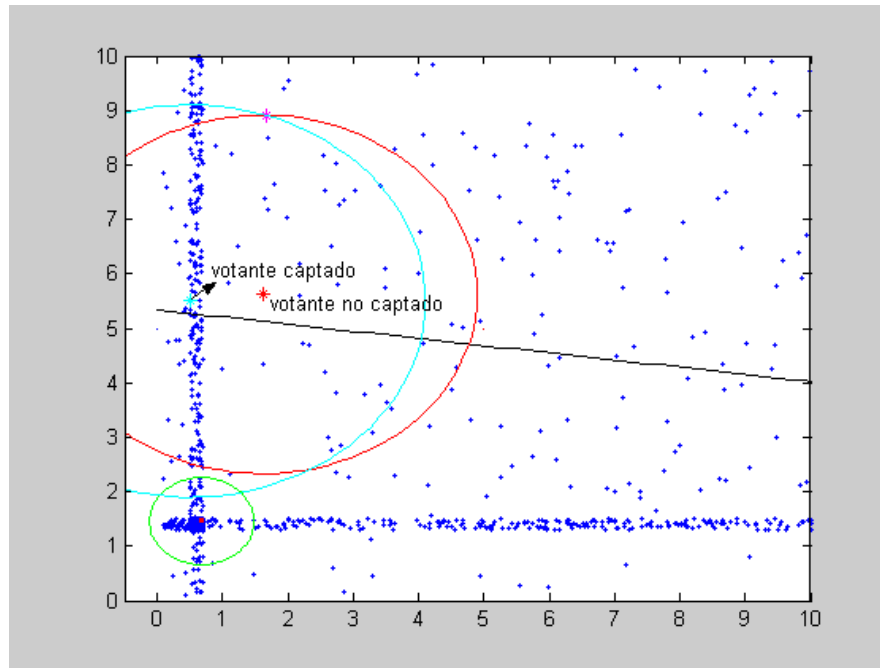


Figura 5.3: Estudio de la ganancia de votantes con la flexibilidad de política

Exponemos a continuación los resultados obtenidos para este ejemplo:

En la situación generada, la intención de voto reflejada para estos dos parámetros daría la victoria al PSOE que se llevaría 1237 votantes frente a los 999 del PP.

### Estudio 1: Flexibilidad para el primer partido: partido vencedor

- Permitimos flexibilidad política del 0,8% al PSOE. Esto le hace aumentar su ganancia hasta 1312 votantes. Esta situación óptima la alcanzaría situándose en el arco de circunferencia delimitado por los puntos  $(x_1, x_2) = (1.32, 1.73)$  y  $(x_1, x_2) = (1.37, 1.59)$ . Lo que supone un gasto en educación,  $x_1$ , entre el 1.32% y el 1.37% y en sanidad,  $x_2$ , entre el 1.59% y 1.73%, con  $(x_1 - 0.6)^2 + (x_2 - 1.4)^2 = (0.8)^2$ .

### Estudio 2: Flexibilidad para el segundo partido: partido perdedor

- Permitimos flexibilidad política del 0,6% al PP. Esto le hace aumentar su ganancia hasta 1078 votantes (sigue perdiendo).
- Flexibilidad del 0.8%. Aumenta su ganancia hasta 1138 votantes. Se produce un empate técnico. Esta situación óptima la alcanzaría situándose en el arco de circunferencia delimitado por los puntos  $(x_1, x_2) = (2.25, 8.44)$  y  $(x_1, x_2) = (2.28, 8.48)$ . Lo que supone un gasto en educación,  $x_1$ , entre el 2.25% y el 2.28% y en sanidad,  $x_2$ , entre el 8.44% y 8.48%, con  $(x_1 - 1.66)^2 + (x_2 - 8.91)^2 = (0.8)^2$ .
- Flexibilidad del 0.9%. Aumenta su ganancia hasta 1166 votantes. Pasa a ser partido vencedor. Esta situación óptima la alcanzaría situándose en el arco de circunferencia delimitado por los puntos  $(x_1, x_2) = (2.312, 8.350)$  y  $(x_1, x_2) = (2.316, 8.355)$ , o en el arco delimitado por  $(x_1, x_2) = (2.332, 8.377)$  y  $(x_1, x_2) = (2.339, 8.386)$ , con  $(x_1 - 1.66)^2 + (x_2 - 8.91)^2 = (0.9)^2$ .

## 5. 5. Conclusiones

Se ha implementado el algoritmo que hemos construido en el capítulo 4, eficiente y creado a partir de técnicas geométricas para la localización de la posición óptima en un juego de competición entre dos partidos a uno de los cuales se le permite moverse dentro de unos márgenes para poder aumentar su ganancia. La metodología geométrica utilizada para la localización de esta posición óptima, así como la limitación en la elección de la localización para el partido, representa un nuevo enfoque con respecto a la literatura existente sobre Teoría Espacial del voto. Dicho algoritmo se ha programado en lenguaje C y se ha ejecutado para un problema de competición política en el entorno nacional. Esta situación ha sido simulada, en parte, a partir de datos reales recogidos en una encuesta de opinión realizada por el CIS. Los resultados obtenidos tras la ejecución pueden resumirse en los siguientes:

- Existen muy pocos datos cuantitativos sobre opiniones en el marco político de los ciudadanos.
- Los partidos políticos son reacios a comprometerse en cuestiones de valoración, no existiendo en sus programas electorales compromisos cuantitativos, por ejemplo en la línea de gasto público e inversiones.
- Tener en cuenta estos elementos y difundirlos para una mayor cultura económica y política de los ciudadanos puede ser determinante a la hora de las decisiones de voto y, con ello, de los resultados electorales.
- La información previa, por parte de los partidos políticos, de las opiniones de los ciudadanos en temas decisivos para ellos y que permitan ser medidos cuantitativamente, puede permitirles elegir una postura que les asegure una mayor captación de votantes. Esta idea se pone de manifiesto en el ejemplo desarrollado dentro de la política presupuestaria de nuestro país en los últimos años: Suponiendo el gasto en enseñanza y sanidad como prioritario para los ciudadanos (algo que apoyan las respuestas de la encuesta del CIS), la variación de la inversión del partido perdedor de las últimas elecciones (PP) en un 0.9% podría ser determinante en los resultados de la misma.
- Este ejemplo, sencillo en esencia, puede desarrollarse en numerosos estudios de competición dentro del marco económico y permite encontrar, de manera eficiente, posiciones óptimas para la búsqueda de la victoria.
- No hemos intentado hacer un análisis global de todos los temas que pueden influir en el voto del ciudadano, debido a su extensión. Proponemos un estudio restringido a dos cuestiones importantes para los votantes en un período específico. La generalización del algoritmo para poder incluir más de dos temas estaría basado en la intersección de entornos de mayor dimensión.





# Capítulo 6

## Conclusiones y líneas futuras de investigación

### 6.1. Conclusiones

En esta tesis se ha presentado la incorporación de técnicas y herramientas de la Geometría Computacional a la resolución de problemas de competición política encuadrados en la Teoría de Juegos. Se han abordado planteamientos típicos de esta teoría, como la búsqueda de estrategias de victoria o posiciones de equilibrio de Nash, para un modelo que surge como la discretización del modelo clásico conocido como juego de Downs y que se ajusta, en gran medida, a situaciones reales de competición política en la actualidad.

En el capítulo 2, donde se presenta el modelo que se desarrolla a lo largo de la tesis, se han encontrado las diversas estrategias de victoria en función del conjunto de votantes y se ha demostrado que el equilibrio en el sentido clásico de Nash, cuando existe, es único y con los dos partidos eligiendo la misma política. Este resultado es análogo a lo establecido en modelos continuos de competición, por lo que la discretización del modelo, que parece ser más adecuada para el tratamiento de problemas reales, no modifica la esencia del juego de Downs. De esta forma, el modelo

propuesto hereda los problemas que acarrea el de Downs que llevaría a los dos partidos a defender un programa político parecido, en esencia, si lo que quieren es conseguir posiciones de equilibrio.

Esta situación de no existencia o de coincidencia de posiciones o posturas, se ha pretendido salvar en el capítulo 3 mediante la definición de un nuevo concepto de equilibrio político que, recogiendo la idea clásica, la debilita permitiendo mayor holgura en las políticas que ofrecen los diferentes partidos para llegar a dicho equilibrio.

La debilitación presentada puede resultar especialmente útil en los casos donde el equilibrio tradicional no exista. Además, las posiciones para este equilibrio débil son, en general, regiones, lo que representa mayor variedad de elección para los partidos políticos.

Tanto el tratamiento del equilibrio tradicional en el nuevo modelo (capítulo 2), como el de equilibrio débil (capítulo 3), se completan con el establecimiento de las posiciones de equilibrio a través de las intersecciones de cierres convexos y con el desarrollo de algoritmos eficientes de búsqueda de dichas posiciones.

Planteando la posibilidad de considerar variaciones del problema inicial enunciado en el capítulo 2 que permitan ilustrar diferentes situaciones reales surgen las ideas del capítulo 4. En este capítulo se abordan algunas de ellas como son: la representación de la flexibilidad en los programas políticos, llevada a cabo mediante la consideración de entornos en las posiciones de los partidos, con la intención de conseguir ganar las elecciones; o como la consideración de unos límites en la intención del votante para apoyar unas políticas concretas de un partido. En este capítulo 4, aun centrándose el estudio en el caso bipartidista con la flexibilidad de un partido considerada como un entorno representado por un disco de centro el partido y de radio dado, se profundiza en el caso general de contar con  $k$  partidos. De la misma forma, se tratan diferentes variedades de entornos (segmentos, polígonos convexos) que pueden ser útiles en diversos problemas concretos. Se destaca la posibilidad de permitir a los dos partidos flexibilizar sus posturas como una generalización del caso anterior. Como resulta lógico, los partidos mueven sus posiciones políticas para acercarse a un mayor

número de votantes, pero hasta cierto punto. Es decir, siempre habrá ciudadanos tan alejados de las opciones políticas presentadas por los partidos, que se abstendrán en las votaciones. Si el límite en el alejamiento de las ideas políticas de cada votante se refleja en el estudio por medio de circunferencias centradas en cada punto de la nube cuyo radio representa esa máxima distancia tolerada por el votante, la teoría desarrollada puede tener en cuenta estas situaciones. El problema inicial del capítulo se resuelve a través de un algoritmo eficiente que puede ser implementado y adaptado a las diferentes variaciones presentadas. Ha sido creado a partir de ideas geométricas. La complejidad de dichos algoritmos que permiten obtener soluciones óptimas para la captación de votos es menor que cuadrática.

El capítulo 5 se ha ocupado de la programación en lenguaje C del algoritmo general del capítulo 4 y de su puesta en práctica para un problema de competición política en el entorno nacional. Esta situación ha sido simulada, en parte, a partir de datos reales recogidos en una encuesta de opinión realizada por el CIS. Los resultados obtenidos tras la ejecución permiten concluir lo siguiente:

- Las técnicas geométricas son válidas para el tratamiento y la resolución de problemas de teoría de juegos y en particular de competición política.
- La discretización de modelos clásicos de competición política resulta adecuada para abordar problemas reales.
- Los algoritmos desarrollados a lo largo de la teoría presentada pueden implementarse y resuelven los problemas de manera eficiente.
- La unión de la Economía Política y la Teoría de Juegos con la Geometría Computacional resulta una mezcla productiva que enriquece a ambas ciencias. Permite plantear soluciones a problemas de búsqueda de posiciones óptimas o estrategias de juego diferentes a las que existen en la literatura.

A modo de conclusión final diremos que la aproximación teórica más usual al comportamiento electoral toma como punto de partida el enfoque de Downs (1957), y supone que los electores votan al partido que en su programa se aproxima más a sus propias preferencias. El modelo se complica cuando el elector debe tomar en cuenta

otras cuestiones como son el valorar no sólo las promesas sino, además, la probabilidad de que el partido en cuestión las cumpla. Por mucho que se sienta atraído por su programa, un elector racional no debería votar a un partido cuyo candidato tiene muy escasas posibilidades de salir elegido o no parece garantizar su competencia.

Nos planteamos la cuestión de las preferencias de los electores. En primer lugar, si éstas son arbitrarias o, como cabe sospechar, guardan alguna relación con la posición individual o familiar en la estructura social. En segundo lugar, la forma en que a partir de estas preferencias, los electores deciden el sentido de su voto. Esta segunda cuestión es más compleja de lo que parece porque sólo admite soluciones unívocas si suponemos que las preferencias son agregables a lo largo de un único eje sobre el que la oferta de los partidos representa puntos discretos, o bien que cada vez se vota sobre una sola cuestión y que los electores tienen preferencias separables (Enelow y Hinich, 1984). Sobre esta base se presenta normalmente la teoría espacial del voto, y es comprensible que así sea, porque si consideramos  $n$  ejes de preferencias nos surge inmediatamente el problema de los ciclos de votación (la paradoja de Condorcet o teorema de imposibilidad de Arrow), es decir, el problema de la inestabilidad de las mayorías.

Lo que ocurre es que, en un proceso electoral, los votantes eligen gobernantes o representantes en función de sus propuestas sobre  $n$  cuestiones, y las preferencias no son separables. Ahora bien, el problema teórico no es tan inmanejable como se le suele considerar: cuando dos candidatos compiten en un espacio  $n$ -dimensional de preferencias, existe un conjunto de puntos que representan propuestas de política que no pueden ser derrotadas, y que constituye algo así como la región central de las preferencias de los votantes (Ordeshook, 1986, McKelvey, 1986). Imponiendo condiciones razonablemente restrictivas, este conjunto representa un núcleo de políticas del que no puede desviarse sustancialmente la oferta de los partidos, y ofrece, por tanto, una versión realista del teorema del votante mediano de Black (1958), sobre la convergencia de la oferta política de los partidos con la mediana de las preferencias de los votantes en un único eje de preferencias.

Estas ideas han sido, en gran parte, verificadas por la teoría desarrollada en la tesis en el estudio del equilibrio y tratadas con un planteamiento novedoso y formulado en términos geométricos.

Si no existe la convergencia planteada en el teorema del votante mediano, carecerá de base la propia teoría democrática, ya que podrían formarse mayorías que no respondieran sustancialmente a las preferencias de los electores. Y la necesidad de plantearse la generalización del teorema de Black a  $n$  dimensiones surge de los estudios empíricos que muestran la existencia de un número creciente de votantes que deciden su voto en función de cuestiones concretas y no necesariamente a partir de la posición global de los partidos en un único eje posicional (ideológico, por ejemplo). En particular, parece evidente que la simple autoidentificación ideológica no explica el sentido del voto, más allá de cualquier otro factor.

Sobre estas ideas se apoya el tratamiento bidimensional trabajado en gran parte de la tesis y, en concreto, en parte del capítulo 4 y el 5 en su totalidad. La idea subyacente en estos dos últimos capítulos, es la de encontrar dos (podrían ser más) cuestiones concretas en el momento de unas elecciones que resultan decisorias para la elección de voto. Se ha demostrado cómo, conociendo de antemano estas cuestiones y las preferencias de los votantes, los partidos políticos pueden alterar sus políticas para maximizar sus beneficios electorales.

De forma más general, la idea de que los ciudadanos deciden su voto en función de cuestiones concretas choca con otra perspectiva muy extendida, que supone que el bienestar material es la cuestión dominante a la hora de decidir el voto, y que el estado y las perspectivas de la economía son el factor decisivo del comportamiento electoral. En su forma más simple, como ilustración de la teoría de la elección racional aplicada a la decisión de votar, se supone que el elector busca maximizar su propio bienestar material, y que decide su voto según las perspectivas económicas que para sus intereses ofrecen los diferentes programas partidarios, con las consabidas complicaciones de valorar la capacidad de los respectivos candidatos, la verosimilitud de sus promesas y las posibilidades reales que tienen de ganar.

Este planteamiento, en general, es el que podríamos llamar del voto económico. Introduce ante todo la idea de que al elector sólo le preocupa el estado de su propio bolsillo, y en segundo lugar la de que el potencial votante valora las perspectivas futuras de la economía a la hora de decidir su voto. Sin embargo, un modelo tan sencillo ofrece serias dificultades a la hora de explicar el voto, en particular la dificultad de valorar la sinceridad y los efectos posibles de las promesas electorales. Ciertamente, en la mayor parte de los países se ha producido una familiaridad creciente de los electores informados con las complejidades de la economía, pero aun así no es tan fácil saber si un programa será llevado realmente a la práctica, si funcionará como se espera, y si sus efectos imprevistos no anularán sus ventajas esperadas. Estas ideas también han quedado reflejadas en las conclusiones del ejemplo que representa el capítulo 5 donde se llega a cómo la cultura económica de los ciudadanos puede ser determinante en los resultados electorales.

Para eludir esta dificultad de la teoría del voto económico se pueden adoptar soluciones como la perspectiva del voto retrospectivo (Fiorina, 1978; Lewis-Beck, 1988), según la cual los electores juzgan al gobierno anterior por sus resultados y le castigan votando a la oposición o le premian revalidando su mandato. Pero desde esta perspectiva ha surgido una variante significativa: lo que influye en el elector es su percepción del estado general de la economía, no el estado de su propio bolsillo. El voto económico sería un voto que valora la situación general de la sociedad, no se centra en su problemática personal (Kinder y Kiewiet, 1979). Cabe interpretar este hecho como una forma de valoración de la competencia de los gobernantes antes que de sus programas, lo que, si bien es racional, no corresponde a lo inicialmente esperable en la teoría.

## 6.2. Líneas futuras de investigación

### 6.2.1 Nuevos problemas en competición política

#### a) Juego discreto ponderado

Tras los resultados obtenidos, queda reflejada la bondad de la aplicación de herramientas geométricas a la resolución de problemas de localización en términos de competición. Por ello, la ampliación del campo de actuación de la teoría presentada a problemas relacionados con los que aquí se han tratado, parece del todo adecuada. A modo de ejemplo, podemos destacar el siguiente planteamiento:

Volviendo al problema inicial que se ha tratado en la tesis: Dos jugadores eligen su posición sobre el plano, en el cual se encuentran situados  $n$  puntos dados por sus dos coordenadas. Se considera que cada jugador atrapa aquellos puntos que están más próximos a él que al contrario. Para contabilizar los puntos ganados por cada jugador, trazamos la mediatriz del segmento que une las posiciones de los dos jugadores. Cada uno se llevará, por tanto, los puntos situados en su semiplano. El ganador será el jugador que consigue más puntos. Que en términos de Economía Política se reduce a considerar los dos jugadores como dos partidos políticos  $p$  y  $q$ , cuyas posiciones vienen dadas por las políticas ofrecidas,  $t^1$  y  $t^2$ , del espacio de políticas bidimensional  $T=R^2$ , y la nube de puntos  $v_i=(v_{i1}, v_{i2})$  con  $i=1, \dots, n$ , las correspondientes posiciones de los votantes de una cierta población, con  $v_i$  perteneciente al conjunto de tipos  $H=\{v_1, \dots, v_n\} \subset R^2$  que clasifican a los votantes según esas políticas. Conviene destacar que, para modelar una situación que se ajuste lo más posible a la realidad política de los diferentes países, debemos considerar que esos tipos  $v_i$  que representan las posiciones de los votantes, no están equidistribuidos. Es decir, existirán posiciones respecto a ciertas políticas que serán respaldadas por tipos de votantes que serán más numerosos que las posturas tomadas por otros tipos. A modo de ejemplo, considerar que tipos que representan posiciones extremas sobre la mayoría de acciones políticas suelen tener representaciones menos numerosas que aquellos que representan posiciones más

moderadas. Por todo ello, parece razonable plantear una distribución ponderada de los tipos.

Entonces, debe considerarse una distribución de los diferentes tipos según una medida de probabilidad  $F$  dada por:

$$F(\{v_i\})=k_i \text{ con } k_1+k_2+\dots+k_n=1, k_i \geq 0$$

Con estas consideraciones el juego planteado se modela de la siguiente forma: Representamos  $t^1, t^2, v_1, \dots, v_n$  como los puntos del plano ya introducidos anteriormente, trazamos la mediatriz entre  $t^1$  y  $t^2$  (suponiendo  $t^1 \neq t^2$ ) y consideramos los dos semiplanos que define dicha mediatriz. Llamamos  $\Omega(t^1, t^2)$  al conjunto de tipos que prefieren a  $t^1$  frente a  $t^2$ , es decir, aquellos que pertenecen al semiplano en el que esté  $t^1$ , supongamos que sean  $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n_1}}$ , donde  $n_{t_1}$  es el número de tipos que pertenecen al semiplano que contiene a  $t^1$ . Se tiene que la fracción de votantes que elegiría la política  $t^1$  será:

$$\rho(t^1, t^2) = F(\Omega(t^1, t^2)) = \sum_{j=1}^{n_{t_1}} k_{i_j} \quad \text{si } t^1 \neq t^2 \text{ siendo } k_{i_j}, j = 1, \dots, n_{t_1}, \text{ la medida de } \{v_{i_j}\}.$$

Con todo ello, las funciones de ganancia quedan de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} \Pi^1(t^1, t^2) = n \sum_{j=1}^{n_{t_1}} k_{i_j} \\ \Pi^2(t^1, t^2) = n - \Pi^1(t^1, t^2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{si } t^1 \neq t^2 \text{ y } \Pi^1(t^1, t^2) = \Pi^2(t^1, t^2) = \frac{n}{2} \\ \text{si } t^1 = t^2. \end{array}$$

Es decir, en el caso  $t^1 \neq t^2$ , si definimos el peso del tipo  $v_{i_j}$  como  $n k_{i_j}$ , la ganancia de la política  $t^1$  será la suma de los pesos de los tipos que están en el mismo semiplano que  $t^1$  (incluyendo los de la mediatriz). Análogo para  $t^2$ .

$$\text{Se cumple que } \sum_{i=1}^n \text{peso}(v_i) = \sum_{i=1}^n n k_i = n.$$

Una línea de continuidad de este trabajo puede ser el de plantear los estudios ya realizados de existencia y unicidad de posiciones de equilibrio en este nuevo juego ponderado.



### **b) Estudio del equilibrio en el juego con restricciones**

Dentro de los problemas de competición política, otra línea en la que se desea profundizar es la unión de las técnicas planteadas en el capítulo 2 para la búsqueda de equilibrio con una de las variaciones del juego enunciado en el capítulo 4 (juego con restricciones). En concreto se pretende abordar el estudio de las posiciones de equilibrio de Nash en el caso en que los dos partidos pueden alterar sus posiciones dentro de sus restricciones de entorno (subsección 4.5.3). Estas consideraciones de entornos hacen prever que las técnicas a emplear sean distintas a las planteadas hasta ahora.

### **6.2.2. Problemas geométricos**

Algunas de las teorías desarrolladas parecen tener aplicación sobre problemas puramente geométricos que trata la Geometría Computacional. Tal es el caso del estudio del mínimo número de  $k$ -set que pueden formarse en un conjunto de  $n$  puntos situados en posición general.

La idea se centraría en hallar este mínimo número de  $k$ -sets mediante el problema previo de determinar el mínimo número de puntos de un conjunto de  $n$  puntos que pueden intervenir en algún  $k$ -set, lo cual tiene mucho que ver con la intersección de los cierres convexos de  $n-k$  puntos de la nube. Estos estudios de intersección de cierres convexos han sido desarrollados en la tesis. Los resultados obtenidos pueden ayudar a dar un nuevo enfoque al tratamiento del problema ahora planteado.



# Anexo

## Código fuente

En este anexo presentamos el código de la implementación realizada en el lenguaje de programación C, del algoritmo desarrollado en el capítulo 4 y puesto en práctica en el capítulo 5 de la tesis:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

float dist(float p[2], float q[2]);
void ordenar(float **L, int n, char * situ, float *P1);

void main()
{
    int n=0,i,j, perte[2]={0,0},m=0, c_pri=0, c, n_puntos, pos, hay_L=0,
hay_mas_arcos=0,*mas_pos, new_m,equidis=0;
    float P[2]={0,0}, Q[2], trasla[2], R, Rv,d_vp, P1[2], P2[2];
    float m1,m2, aux[2], **V,**L, X1[2], X2[2],auxi,den;
    char * situ;
    FILE * pe;
```

```
pe=fopen("datosen2.txt","r");

while(!feof(pe))
{
    fscanf(pe,"%f",&aux[0]);
    n++;
}

n=(n-5)/2;
    printf("n vale %d\n",n);
rewind(pe);
fscanf(pe,"%f %f",&trasla[0], &trasla[1]);
fscanf(pe,"%f %f %f",&Q[0], &Q[1],&R);
Q[0]=Q[0]-trasla[0];
Q[1]=Q[1]-trasla[1];
//Cálculo de los puntos de tangencia (extremos del arco)
m1=(Q[0]*Q[1]+R*sqrt(Q[0]*Q[0]-R*R+Q[1]*Q[1]))/(Q[0]*Q[0]-R*R);
m2=(Q[0]*Q[1]-R*sqrt(Q[0]*Q[0]-R*R+Q[1]*Q[1]))/(Q[0]*Q[0]-R*R);
P1[0]=(2*m1*m1*Q[0]-2*m1*Q[1])/(2*(1+m1*m1));
P2[0]=(2*m2*m2*Q[0]-2*m2*Q[1])/(2*(1+m2*m2));
P1[1]=Q[1]-m1*Q[0]+(pow(m1,3)*Q[0]-m1*m1*Q[1])/(1+m1*m1);
P2[1]=Q[1]-m2*Q[0]+(pow(m2,3)*Q[0]-m2*m2*Q[1])/(1+m2*m2);

//P1 debe ser el de la derecha y P2 el de la izquierda de Q

if(((P[0]-Q[0])*(P1[1]-Q[1])-(P[1]-Q[1])*(P1[0]-Q[0]))>0)
{
    aux[0]=P1[0];
    aux[1]=P1[1];
```

```
P1[0]=P2[0];
P1[1]=P2[1];
P2[0]=aux[0];
P2[1]=aux[1];
}
printf("Puntos de tangencia:\n");
printf("Punto de tangencia derecho: %f %f\n",P1[0]+trasla[0],P1[1]+trasla[1]);
printf("Punto de tangencia izquierdo: %f %f\n",P2[0]+trasla[0],P2[1]+trasla[1]);

V=(float **)malloc(n*sizeof(float*));
L=(float **)malloc(2*n*sizeof(float*));
situ=(char*)malloc(2*n*sizeof(char));
mas_pos=(int*)malloc(2*n*sizeof(int));
if(V==NULL||L==NULL||situ==NULL||mas_pos==NULL){printf("Error de
localizacion");exit(0);}
for(i=0;i<n;i++)
{
V[i]=(float*)malloc(2*sizeof(float));
if(V[i]==NULL){printf("Error de localizacion");exit(0);}
}

for(i=0;i<2*n;i++)
{
L[i]=(float*)malloc(2*sizeof(float));
if(L[i]==NULL){printf("Error de localizacion");exit(0);}
}

for(i=0;i<n;i++)
for(j=0;j<2;j++)
```

```

    {
        fscanf(pe,"%f",&V[i][j]);
        V[i][j]=V[i][j]-trasla[j];
    }
n_puntos=j=0;
for(i=0;i<n;i++)
{
    Rv=dist(Q,V[i]);
    d_vp=dist(P,V[i]);
    if(d_vp<Rv-R)m++;
    else if(d_vp>Rv+R);
        else if(d_vp==Rv+R)
            {equidis++;

                //son tangentes. Se cortan en un punto
                //voy a obtener el punto de corte x1
                auxi=sqrt(-
pow(V[i][0],6)+2*R*R*pow(V[i][0],4)+2*Rv*Rv*pow(V[i][0],4)-
2*pow(V[i][1],2)*pow(V[i][0],4)
                -R*R*R*R*pow(V[i][0],2)-
Rv*Rv*Rv*Rv*pow(V[i][0],2)-pow(V[i][1],4)*pow(V[i][0],2)

+2*R*R*Rv*Rv*pow(V[i][0],2)+2*R*R*pow(V[i][0],2)*pow(V[i][1],2)+2*Rv*Rv*p
ow(V[i][0],2)*pow(V[i][1],2));

                den=pow(V[i][0],2)+pow(V[i][1],2);

                X1[0]=1/(2*V[i][0])*((-pow(V[i][1],4)-
R*R*pow(V[i][1],2)+Rv*Rv*pow(V[i][1],2)-pow(V[i][0],2)*pow(V[i][1],2))/den

```

---

```

        +pow(V[i][1],2)-V[i][1]*auxi/den+R*R-
Rv*Rv+pow(V[i][0],2));

        X1[1]=1/(2*den)*(pow(V[i][1],3)+R*R*V[i][1]-
Rv*Rv*V[i][1]+pow(V[i][0],2)*V[i][1]+auxi);
        // ver si el punto pertenece al arco visible
        if(((P1[0]-P2[0])*(X1[1]-P2[1])-(P1[1]-P2[1])*(X1[0]-
P2[0]))<0)
            perte[0]=1;
            if(perte[0]==0) m++;
            else
                {
                    hay_L=1;
                    L[j][0]=X1[0];
                    L[j][1]=X1[1];
                    L[j+1][0]=X1[0];
                    L[j+1][1]=X1[1];
                    situ[j]='D';
                    situ[j+1]='T';
                    n_puntos=j+1+1;
                    j=j+2;
                }
            }

else if(d_vp<Rv+R)
{

//se cortan en dos puntos

```

```

//primero obtener los puntos de corte X1 y X2
    auxi=sqrt(-
pow(V[i][0],6)+2*R*R*pow(V[i][0],4)+2*Rv*Rv*pow(V[i][0],4)-
2*pow(V[i][1],2)*pow(V[i][0],4)
-R*R*R*R*pow(V[i][0],2)-
Rv*Rv*Rv*Rv*pow(V[i][0],2)-pow(V[i][1],4)*pow(V[i][0],2)

+2*R*R*Rv*Rv*pow(V[i][0],2)+2*R*R*pow(V[i][0],2)*pow(V[i][1],2)+2*Rv*Rv*p
ow(V[i][0],2)*pow(V[i][1],2));

    den=pow(V[i][0],2)+pow(V[i][1],2);

    X1[0]=1/(2*V[i][0])*((-pow(V[i][1],4)-
R*R*pow(V[i][1],2)+Rv*Rv*pow(V[i][1],2)-pow(V[i][0],2)*pow(V[i][1],2))/den
+pow(V[i][1],2)-V[i][1]*auxi/den+R*R-
Rv*Rv+pow(V[i][0],2));

    X1[1]=1/(2*den)*(pow(V[i][1],3)+R*R*V[i][1]-
Rv*Rv*V[i][1]+pow(V[i][0],2)*V[i][1]+auxi);

    X2[0]=1/(2*V[i][0])*((-pow(V[i][1],4)-
R*R*pow(V[i][1],2)+Rv*Rv*pow(V[i][1],2)-pow(V[i][0],2)*pow(V[i][1],2))/den
+pow(V[i][1],2)+V[i][1]*auxi/den+R*R-
Rv*Rv+pow(V[i][0],2));

    X2[1]=1/(2*den)*(pow(V[i][1],3)+R*R*V[i][1]-
Rv*Rv*V[i][1]+pow(V[i][0],2)*V[i][1]-auxi);

//X1 el de la derecha y X2 el de la izquierda de Vi

```



---

```
if (((P[0]-V[i][0])*(X1[1]-V[i][1])-(P[1]-V[i][1])*(X1[0]-V[i][0]))>0)
{
    aux[0]=X1[0];
    aux[1]=X1[1];
    X1[0]=X2[0];
    X1[1]=X2[1];
    X2[0]=aux[0];
    X2[1]=aux[1];
}

    printf("Puntos de corte:\n");
printf("Punto de corte derecho: %f %f\n",X1[0],X1[1]);
printf("Punto de corte izquierdo: %f %f\n",X2[0],X2[1]);

if(((P1[0]-P2[0])*(X1[1]-P2[1])-(P1[1]-P2[1])*(X1[0]-P2[0]))<0)
    perte[0]=1;
    else perte[0]=0;
if(((P1[0]-P2[0])*(X2[1]-P2[1])-(P1[1]-P2[1])*(X2[0]-P2[0]))<0)
    perte[1]=1;
    else perte[1]=0;

    printf("Punto derecho pertenece al arco visible:
%s\n",perte[0]?"si":"no");
    printf("Punto izquierdo pertenece al arco visible:
%s\n",perte[1]?"si":"no");

if(perte[0]==0&&perte[1]==0) m++;
```

```
else if(perte[0]==1&&perte[1]==1)
{
    hay_L=1;
    L[j][0]=X1[0];
    L[j][1]=X1[1];
    L[j+1][0]=X2[0];
    L[j+1][1]=X2[1];
    situ[j]='D';
    situ[j+1]='T';
    n_puntos=j+1+1;
    j=j+2;
}
else if(perte[0]==1&&perte[1]==0)
{
    hay_L=1;
    L[j][0]=X1[0];
    L[j][1]=X1[1];
    situ[j]='D';
    L[j+1][0]=P2[0];
    L[j+1][1]=P2[1];
    situ[j+1]='T';
    n_puntos=j+1+1;
    j=j+2;
}
else if(perte[0]==0&&perte[1]==1)
{
    hay_L=1;
    L[j][0]=P1[0];
    L[j][1]=P1[1];
}
```

```
situ[j]='D';
L[j+1][0]=X2[0];
L[j+1][1]=X2[1];
situ[j+1]='T';
n_puntos=j+1+1;
j+=2;
//c_pri++;
}
}
} //fin del for i
if (hay_L)
{
//ahora hay que ordenar la lista L
printf("L antes de la ordenación angular:\n");
for(i=0;i<n_puntos;i++) printf("%f\t%f\n",L[i][0],L[i][1]);
ordenar(L,n_puntos,situ,P1);
printf("L despues de la ordenación angular:\n");
for(i=0;i<n_puntos;i++) printf("%f\t%f\n",L[i][0],L[i][1]);
c=c_pri+m;
//X[0]=P1[0];
//X[1]=P1[1];
j=0;
for(i=0;i<n_puntos;i++)
if(situ[i]=='D')
{
c++;
if(c>m)
{
m=c;

```

```
                pos=i;
                j=0;
                hay_mas_arcos=0;
            }
            else if(c==m)
            {
                m=c;
                mas_pos[j]=pos;
                j++;
                pos=i;
                hay_mas_arcos=1;
            }
        }
    }
else
    c--;

printf("Solución final:\n");
        printf("Posicion en L:%d\n",pos);
for(i=0;i<n_puntos;i++)
    printf("%c ",situ[i]);
printf("Arco formado por los puntos:\n");

printf("Punto inicial: %f %f\n",L[pos][0]+trasla[0],L[pos][1]+trasla[1]);
printf("Punto final: %f %f\n",L[pos+1][0]+trasla[0],L[pos+1][1]+trasla[1]);
printf("Numero final de votantes:%d\n",m);
        printf("Numero de equidistantes:%d\n",equidis);
```

```
        if(hay_mas_arcos)
        {
            new_m=m;
            printf("\n\nSe obtiene una solución con el mismo número de
votantes ganados en:\n");
            for(i=0;i<j;i++)
            {
                printf("\nArco adicional %d formado por los
puntos:\n",i+1);

                printf("Punto inicial: %f
%f\n",L[mas_pos[i]][0]+trasla[0],L[mas_pos[i]][1]+trasla[1]);
                printf("Punto final: %f
%f\n",L[mas_pos[i]+1][0]+trasla[0],L[mas_pos[i]+1][1]+trasla[1]);

                //if(L[mas_pos[i]][0]==L[pos][0]&&L[mas_pos[i]][1]==L[pos][1]&&L[mas_po
s[i]+1][0]==L[pos+1][0]&&L[mas_pos[i]+1][1]==L[pos+1][1])
                    //            new_m++;

            }
            /*if(new_m>m)
            {
                printf("\n\nSOLUCION FINAL DEFINITIVA:\n");
                printf("Punto inicial: %f
%f\n",L[pos][0]+trasla[0],L[pos][1]+trasla[1]);
                printf("Punto final: %f %f\n",L[pos+1][0]+trasla[0],L[pos+1][1]+trasla[1]);
                printf("Numero final de votantes:%d\n",new_m);
            }*/
        }
    }
```

```
    }
    else
    {
    printf("Numero final de votantes:%d\n",m);
        if (m>0)printf("El arco solución es el arco inicial\n");
    }
}
```

```
float dist(float p[2], float q[2])
{
    return sqrt((q[0]-p[0])*(q[0]-p[0])+(q[1]-p[1])*(q[1]-p[1]));
}
```

```
void ordenar(float **L, int n, char * situ, float *P1)
{

    int i,j,logic=0;
    float * ang,aux,coseno;
    char aux_pos;

    ang=(float*)malloc(n*sizeof(float));
    if(ang==NULL){printf("Error de localizacion");exit(0);}

    //ordenar angularmente respecto P en sentido horario
    //primero formar el ángulo PP1 y PX
    //printf("Vector de angulos:\n");
    for(i=0;i<n;i++)
```

```
{

coseno=(P1[0]*L[i][0]+P1[1]*L[i][1])/(sqrt(P1[0]*P1[0]+P1[1]*P1[1])*sqrt(L[i][0]*L[
i][0]+L[i][1]*L[i][1]));
    ang[i]=acos(coseno);
        // printf("%f\t",ang[i]);

}

for(i=n-1;i>=1;i--)
{
    logic=1;
    for(j=1;j<=i;j++)
    {
        if(ang[j-1]>ang[j])
        {
            aux=ang[j];
            ang[j]=ang[j-1];
            ang[j-1]=aux;
            aux=L[j][0];
            L[j][0]=L[j-1][0];
            L[j-1][0]=aux;
            aux=L[j][1];
            L[j][1]=L[j-1][1];
            L[j-1][1]=aux;
            aux_pos=situ[j];
            situ[j]=situ[j-1];
            situ[j-1]=aux_pos;
                logic=0;
        }
    }
}
```

```
    }  
  }  
  if (logic)return;  
}  
}
```



# Bibliografía

Abellanas, M., Calatayud, A., García-López, J., (2004). *New bound for incremental constructing arrangements of curves*. Proc. 20th European Workshop on Computational Geometry, 213-216. Sevilla

Abellanas, M., Lillo, I., López, M., Rodrigo, J., (2006). *Electoral strategies in a dynamical democratic system: geometric models*. European Journal of Operational Research, 175, 870–878.

Ahn, H.-K., Cheng, S.-W., Cheong, O., Golin, M., Van Oostrum, R., (2004). *Competitive Facility Location: The Voronoi Game*. Theoretical Computer Science, 310, 457-467.

Alonso, L., Schott, R., (1995). *Random Generation of Trees. Random Generators in Computer Science*. Springer, New York.

Aurenhammer, R., Klein, R., (2000). *Voronoi diagrams*. Sack, J.-R. and Urrutia, J. (eds.). Handbook of Computational Geometry. Elsevier, Amsterdam.

De Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O., (1997). *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer, New York.

Black, D., (1958). *The theory of committees and elections*. Cambridge University Press, Cambridge.

Cahoon, L., Hinich, M., Ordeshook, P.C., (1978). *A Statistical Multidimensional Scaling Method Based on the Spatial Theory of Voting*. Graphical Representation of Multivariate Data. R. C. Wang, 243-78. Academic Press, New York.

Cheong, O., Har-Peled, S., Linial, N., Matoušek, J., (2002). *The One-Round Voronoi Game*. Proceedings of the eighteenth annual symposium on Computational Geometry, 97-101. Barcelona.

Church, R., (1984). *The planar maximal covering location problem*. Journal of Regional Science, 24(2), 185–201.

CIS: Sociological Investigations Center of Spain. Opinion surveys. Study nº 2615. (<http://www.cis.es>).

Consolidated General Government Budget, (1997-2006). ([http://www.igae.meh.es/Internet/Cln\\_Principal/ClnPresupuesto/PresupuestosGeneralesEst/PresupuestosGeneralesEstado/](http://www.igae.meh.es/Internet/Cln_Principal/ClnPresupuesto/PresupuestosGeneralesEst/PresupuestosGeneralesEstado/)).

Dehne, F., Klein, R., Seidel, R., Seidel, R., (2002). *Maximizing a Voronoi Region :The Convex Case*. Lectures Notes in Computer Science. Proc. ISAAC, 2518, 624-634.

Downs, A., (1957). *An economic theory of democracy*. Harper & Row, New York.

Drmotá, M., (2009). *Random Trees. An Interplay between Combinatorics and Probability*. Springer Vienna.

Eisets, H.A., Laporte, G., Thisse, J.H., (1993). *Competitive location models: a framework and bibliography*. *Transportation Science*, 27, 44–54.

Enelow J., Hinich M., (1982). *Ideology, Issues and the Spatial Theory of Elections*. *American Political Science Review* 76, 493-501.

Enelow J., Hinich M., (1984). *The Spatial Theory of Voting: An Introduction*. Cambridge University Press. Cambridge.

Erdős, P., Lovász, L., Simmons, A. and Strauss, E. G., (1973). *Dissection graphs of planar point sets, in A Survey of Combinatorial Theory*. J. N. Srivastava. Springer , 139-149.

Feddersen, T., Pessendorfer, W., (1999). *Abstention in Elections with Asymmetric Information and Diverse Preferences*. *The American Political Science Review*, vol. 93, Issue 2.

Fekete, S. Meijer, H., (2003). *The One-Round Voronoi Game Replayed. Workshop on Algorithms and Data Structures*. Springer Lecture Notes in Computer Science, 2748, 150-161.

Fiorina, M.P., (1978). *Economic retrospective voting in American national elections: a microanalysis*. American Journal of Political Science 22: 426-443.

Ghobarah H., (1998). *A Statistical Assessment of Spatial Model of Ideology*. Political Methodology Summer Meeting, San Diego.

Ghosh, A., Harche, F., (1993). *Location-allocation models in the private sector: progress, problems and prospects*. Location Science, 1, 81–106.

Gibbons, R., (1992). *Un primer curso de Teoría de Juegos*. Antoni Bosch, editor. Barcelona.

Hakimi, S.L., (1986). *P-median theorems for competitive location*. Annals of Operations Research, 5, 79–88.

Hakimi, S.L. (1990). *Locations with spatial interaction: competitive locations and games*. Mirchandani PB, Francis RL. Discrete location theory. Wiley, New York.

Hinich M., (2005). *A New Method for Statistical Multidimensional Unfolding*. Communications in Statistics-Theory and Method 34, 2299-2310.

Hinich M., Munger M., (1994). *Ideology and Theory of Political Choice*. The University of Michigan Press, 267.

Hinich M, Pollard W., (1981). *A new Approach to the spatial Theory of Electoral Competition*. American Journal of Political Science 25, 323-341.

Hodgson, M.J., (1981). *A location-allocation model maximizing consumers' welfare*. *Regional Studies*, 15, 493–506.

Hotteling, H., (1929). *Stability in Competition*. *The Economic Journal*, 39, 41-57.

Kinder, D.R., y Kiewiet, D.R., (1979). *Economic discontent and political behavior: the role of personal grievances and collective economic judgments in congressional voting*. *American Journal of Political Science* 23: 495-527.

Lavalle, S.M. (1998). *Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planning*. Computer Science Dept, Iowa State University, Tech. Rep. TR: 98–11.

Lewis-Beck, M.S., (1990). *Economics and elections: the major Western democracies*. Ann Arbor. University of Michigan Press.

Lin T, Yun-Han C, Hinich M., (1996). *Conflict Displacement and Regime Transition in Taiwan. A Spatial Analysis*. *Work Politics* 48, 453-481.

Llavador, H., (2000). *Abstencion and political competition*. *Review of Economic Design* 5, 411-432.

McKelvey, R.D., (1986). *Covering, dominance, and the institution-free properties of social choice*. *American Journal of Political Science* 30: 283-314.

Mehrez, A., Stulman, A., (1982). *The maximal covering location problem with facility placement on the entire plane*. *Journal of Regional Science*, 22(3), 361–365.

Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., Chiu, S., (2000). *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley & Sons, Chichester, U.K.

Okabe, A., Suzuki, A., (1987). *Stability of Spatial Competition of Many Firms in a Bounded Two-Dimensional Space*. Environment and Planning A, vol. 19, 1067-1082.

Ordeshook, P.C., (1986). *Game theory and political theory: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge.

Pappi F, Eckstein G., (1998). *Voters' Party Preference in Multiparty Systems and Their Coalitions and Spatial Implications: Germany After the Unification*. Public Choice 97, 229-55.

Pérez, J., Jimeno, J.L., Cerdá, E., (2004). *Teoría de Juegos*. Pearson Prentice Hall, Madrid.

Persson, T., Tabellini, G., (1999). *Political Economics and Public Finance*. NBER Working Papers Series. Handbook of Public Economics, vol III.

Preparata F., Shamos M., (1985). *Computational Geometry. An introduction*. Springer-Verlag, New York.

Roemer, J. E., (2001). *Political Competition: Theory and Applications*. Harvard University Press, Cambridge.

Rusk, J., Weisberg, H., (1972). *Perception of Presidential Candidates*. Midwest Journal of Political Science 16, 388-410.

Serra, D., Reville, C., (1994). *Market capture by two competitors: the preemptive location problem*. Journal of Regional Science, 34(4), 549-561.

Shepsle K., Weingast B., (1981). *Structure Inducted Equilibrium and Legislative Choice*. Public Choice 37, 503-19.

Smid, M., (1997). *Closest-point problems in computational geometry*. Sack, J.-R., and Urrutia, J. Handbook of Computational Geometry. Elsevier, Amsterdam.

Smithies, A., (1941). *Optimum Location in Spatial Competition*. The Journal of Political Economy 49, 3: 423, 439.

Van Emde Boas, P., Kaas, R., Zijlstra, E., (1977). *Design and Implementation of an Efficient Priority Queue*. Mathematical Systems Theory 10: 99-127.

Von Neumann, J., Morgenstern, O., (1953). *Game Theory and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Watson, J., (2007). *Strategy. An introduction to Game Theory*. W.W. Norton & Company, New York.

Wendell, R.E., McKelvey, R.D., (1981). *New perspectives in competitive location theory*. European Journal of Operational Research, 6, pp 174-182.

## *Bibliografía*

---