

“Superficies desarrollables racionales a trozos”

Leonardo Fernández-Jambrina

Universidad Politécnica de Madrid

Ciudad/País Madrid/España

Correo electrónico leonardo.fernandez@upm.es

Resumen Con esta charla se pretende revisar avances recientes en el estudio de las superficies desarrollables NURBS, en particular, la extensión a superficies racionales del formalismo desarrollado para superficies desarrollables por el autor. Aparte de la inclusión de pesos en la parametrización de las superficies desarrollables, este formalismo permite tratar con facilidad problemas como la elevación del grado de la superficie desarrollable.

Palabras clave NURBS, superficies desarrollables

Técnicas de representación

Abstract In this talk recent developments in research of NURBS developable surfaces are reviewed, mainly the extensión to rational surfaces of a previous formalism devised by the autor. Besides the inclusion of weights in the parametrization of developable surfaces, this formalism allows to tackle easily problems such as degree-elevation of the developable surface.

Keywords NURBS, developable surfaces

Representation techniques

1. INTRODUCCIÓN

Las superficies desarrollables han sido objeto de numerosas aplicaciones en varios ámbitos de la ingeniería por sus buenas propiedades. Al representar superficies de curvatura nula, son susceptibles de modelizar hojas de material sometidas a doblamientos y cortes, pero no a deformaciones. Por ello, se han empleado normalmente para diseñar planchas de acero en la industria naval, tejidos y calzado en la industria textil o incluso estructuras arquitectónicas.

Sin embargo, a pesar de su notable importancia, su tratamiento dentro de las actuales aplicaciones de diseño gráfico basadas en superficies y curvas NURBS dista mucho de ser adecuado. Ciertamente conos y cilindros son fácilmente representables mediante superficies NURBS, pero no es así para el caso genérico de las superficies desarrollables.

El motivo de esta discrepancia se halla en el carácter no lineal de la condición de curvatura nula, que exige resolver ligaduras de tercer grado en los vértices de los polígonos de control de las curvas que limitan la superficie.

Durante años [1],[2], las maneras de abordar este problema se basaron en tratar de resolver las ligaduras, al menos para grados bajos [3],[4],[5], o en emplear técnicas de geometría proyectiva [6], basadas en una representación NURBS, pero dual [7] en la cual se intercambiaban los papeles de puntos y planos. El enfoque basado en los algoritmos tipo de Casteljaou [8] permitió atacar el problema con mejores perspectivas de éxito, como muestra la caracterización de las superficies polinómicas desarrollables [9] y el empleo del algoritmo de de Boor para representar las superficies desarrollables *spline* [10].

Siguiendo con esta línea de desarrollo, en este trabajo se pretende dar un paso más allá y dar un criterio simple de desarrollabilidad para superficies NURBS generales.

El trabajo se estructura como sigue: la sección 2 se dedicará a introducir brevemente las superficies desarrollables y su clasificación.

En la sección 3 se recordará la construcción de curvas racionales y se aplicará a la

generación de superficies desarrollables, obteniéndose una sencilla relación entre vértices y pesos de la superficie que exprese la condición de superficie desarrollable.

En la sección 4 se generalizará la construcción anterior a superficies desarrollables racionales a trozos, NURBS, dedicándole unos párrafos a la generación de las mismas por medio del algoritmo de de Boor.

2. SUPERFICIES DESARROLLABLES

Las superficies desarrollables son un caso particular de superficies regladas en el que la curvatura total es nula, es decir, son superficies intrínsecamente planas. La apariencia curva surge al sumergir la superficie plana en el espacio ordinario.

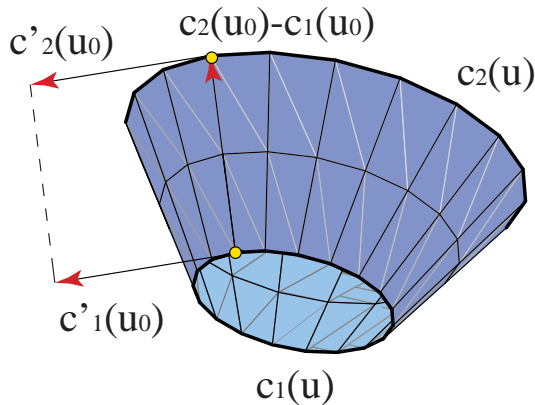


Fig. 1. Condición de curvatura nula.

Si consideramos que la superficie reglada se apoya sobre dos curvas parametrizadas, $c(u)$, $d(u)$, $u \in [0,1]$,

$$c(u,v) = (1-v)c(u) + vd(u),$$

la condición de curvatura total nula para la superficie se expresa de manera sencilla como

$$d'(u) \cdot c'(u) \times (d(u) - c(u)) = 0.$$

Es decir, las tangentes $c'(u)$, $d'(u)$, a las curvas en puntos de igual parámetro u y el segmento de recta generatriz que los une, $d(u) - c(u)$, definen un plano, que es el plano tangente a todos los puntos de la superficie reglada a lo largo de la generatriz, tal como se muestra en la Figura 1.

La sección 5 se dedica a las conclusiones del trabajo y a perspectivas futuras de trabajo. Finalmente se incluyen las referencias bibliográficas empleadas.

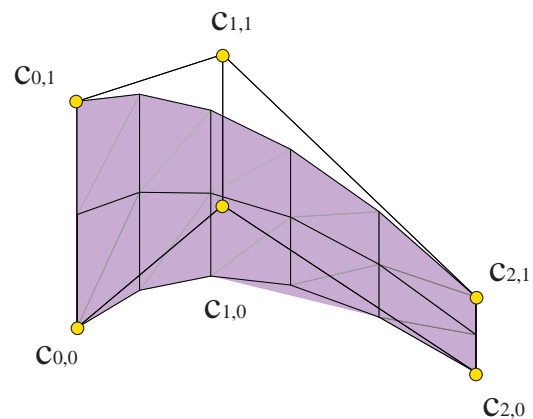


Fig. 2. Superficie cilíndrica

Según esto, hay varios casos particulares de superficies desarrollables:

1. Superficies planas: por su sencillez no será preciso tratarlas.
2. Superficies cilíndricas: las rectas generatrices son paralelas entre sí, tal como se muestra en la Figura 2. No presentan puntos singulares.
3. Superficies cónicas: todas las rectas generatrices se cortan en un punto, llamado vértice del cono, como en el ejemplo de la Figura 1. El vértice es el único punto singular de la superficie.
4. Superficies tangentes: superficies formadas por las rectas tangentes a una curva dada. Esta curva contiene todos los puntos singulares de la superficie. Es la llamada línea de estricción de la superficie. Es el caso más general de superficies desarrollables. Un ejemplo de superficie tangente se muestra en la Figura 3.

Los tres primeros casos son fácilmente abordables desde el punto de vista del diseño. En cambio el caso general es el

que presenta más problemas y es el que se abordará en este trabajo.

3. SUPERFICIES DESARROLLABLES RACIONALES

Supongamos ahora que las dos curvas sobre las que se apoya la superficie desarrollable son curvas racionales.

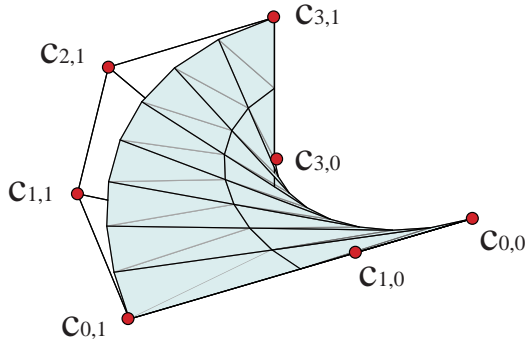


Fig. 3. Superficie tangente

Ambas curvas estarán descritas, por tanto, por sus respectivos polígonos de control, $\{c_0, \dots, c_n\}$, $\{d_0, \dots, d_n\}$, y, por ser racionales, por sus respectivas listas de pesos, $\{w_0, \dots, w_n\}$, $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$,

$$c(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i c_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(u)}, \quad d(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i d_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(u)},$$

donde $B_i^n(u)$ son los polinomios de Bernstein de grado n .

Estas expresiones también se pueden obtener por medio del algoritmo de de Casteljaou por medio de iteraciones sucesivas de un proceso de interpolación entre los vértices de los polígonos. En la Figura 4 se refleja la aplicación del algoritmo de de Casteljaou a una curva de grado dos.

Definiendo vectores de cuatro coordenadas,

$$\vec{c}_i = (w_i, w_i c_i), \quad \vec{d}_i = (\omega_i, \omega_i d_i),$$

el algoritmo de de Casteljaou se escribe así

$$\begin{aligned} \vec{c}_i^{(1)}(u) &= (1-u)\vec{c}_i + u\vec{c}_{i+1}, \\ \vec{c}_i^{(j)}(u) &= (1-u)\vec{c}_i^{(j-1)} + u\vec{c}_{i+1}^{(j-1)}, \\ j &= 1, \dots, n, i = 0, \dots, n-j, \\ \vec{c}(u) &= (w(u), w(u)c(u)) = \vec{c}_0^{(n)}(u), \end{aligned}$$

y de modo similar para la curva $d(u)$.

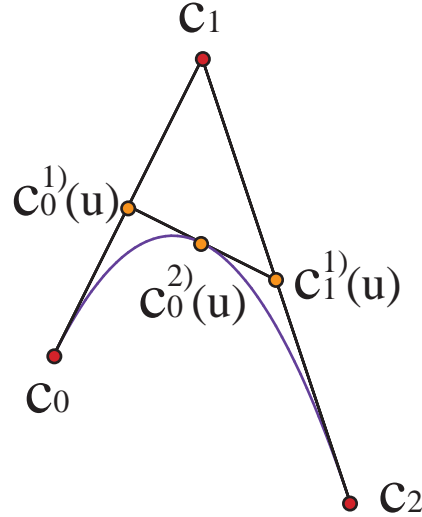


Fig. 4. Algoritmo de de Casteljaou.

Usando notación de corchetes para indicar la lista de iteraciones del algoritmo de de Casteljaou, podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{c}[u^{<n-1>}, 0] &= \vec{c}_0^{(n-1)}(u), \quad \vec{c}[u^{<n-1>}, 1] = \vec{c}_1^{(n-1)}(u), \\ \vec{c}[u^{<n>}] &= \vec{c}(u), \end{aligned}$$

expresión que nos permite calcular los puntos de la curva racional como iteración enésima del algoritmo.

En particular, por ejemplo, los vértices de los polígonos de control se recuperan como

$$\vec{c}_i = \vec{c}[0^{<n-i>}, 1^{<i>}].$$

Aparte de para calcular los puntos de la curva racional, este algoritmo permite obtener las derivadas de la misma,

$$c'(u) = \frac{nw_0^{n-1}(u)w_1^{n-1}(u)}{w_0^n(u)^2} (c_1^{(n-1)}(u) - c_0^{(n-1)}(u)).$$

Esta expresión es especialmente importante, ya que nos indica que las derivadas de ambas curvas están definidas como combinaciones de los puntos que se obtienen como penúltimo paso del algoritmo de de Casteljaou, $c_0^{(n-1)}(u), c_1^{(n-1)}(u), d_0^{(n-1)}(u), d_1^{(n-1)}(u)$.

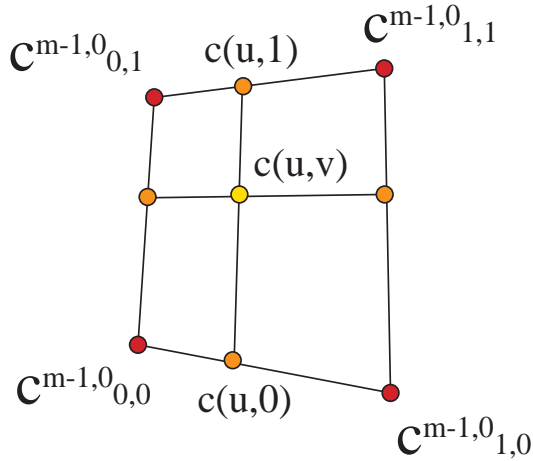


Fig. 5. Condición de desarrollabilidad.

Por tanto, si imponemos la condición de que la superficie reglada que se apoya en las curvas racionales $c(u)$, $d(u)$, sea desarrollable, llegamos a la conclusión de que estos cuatro puntos han de definir un plano para cada valor del parámetro u , tal como se muestra en la Figura 5.

O lo que es lo mismo, tienen que definir un espacio tridimensional los vectores $\vec{c}_0^{n-1}(u), \vec{c}_1^{n-1}(u), \vec{d}_0^{n-1}(u), \vec{d}_1^{n-1}(u)$. La Figura 6 muestra el proceso de proyección de los vectores de cuatro coordenadas sobre puntos del espacio.

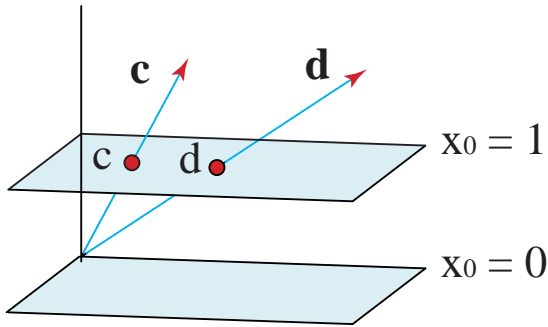


Fig. 6. Proyección sobre el espacio afín.

Resumiendo, hemos caracterizado la condición de superficie desarrollable por la condición de dependencia lineal de los puntos correspondientes al penúltimo paso del algoritmo de de Casteljaou,

$$\vec{d}_1^{n-1} = (1 - \lambda - \eta)\vec{c}_0^{n-1} + \lambda\vec{c}_1^{n-1} + \eta\vec{d}_0^{n-1},$$

o más convenientemente,

$$(1 - \Lambda)\vec{c}_0^{n-1} + \Lambda\vec{c}_1^{n-1} = (1 - M)\vec{d}_0^{n-1} + M\vec{d}_1^{n-1},$$

ya que de este modo ambos lados del igual tienen el aspecto de una iteración del

algoritmo de de Casteljaou para valores de parámetro Λ o M respectivamente,

$$\vec{c}[u^{<n-1>}, \Lambda] = \vec{d}[u^{<n-1>}, M],$$

para algunos valores Λ , M .

Si estos coeficientes fuesen constantes, por un sencillo resultado del Álgebra Lineal, esta expresión se traduce en la misma igualdad, pero para valores del parámetro no necesariamente iguales en cada iteración del algoritmo de de Casteljaou,

$$\vec{c}[u_1, \dots, u_{n-1}, \Lambda] = \vec{d}[u_1, \dots, u_{n-1}, M].$$

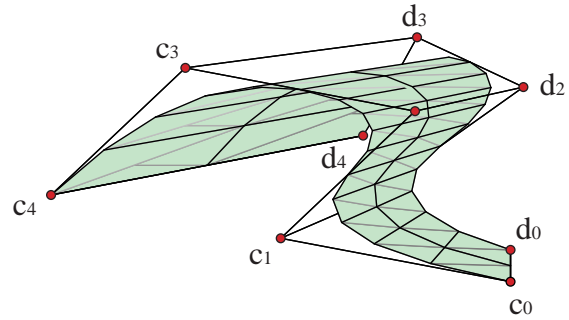


Fig. 7. Superficie desarrollable racional

Si aplicamos este resultado a sucesiones de ceros y unos, estaremos expresando la condición de desarrollabilidad en función de vértices y pesos de las curvas directrices de la superficie reglada racional,

$$(1 - \Lambda)\vec{c}_i + \Lambda\vec{c}_{i+1} = (1 - M)\vec{d}_i + M\vec{d}_{i+1},$$

para $i = 0, \dots, n - 1$.

O lo que es lo mismo, pesos y vértices están relacionados por

$$(1 - \Lambda)w_i + \Lambda w_{i+1} = (1 - M)\omega_i + M\omega_{i+1},$$

$$(1 - \Lambda)w_i c_i + \Lambda w_{i+1} c_{i+1} =$$

$$(1 - M)\omega_i d_i + M\omega_{i+1} d_{i+1},$$

Por tanto, hemos resuelto en este caso la condición no lineal de curvatura nula, reduciéndola a sencillas relaciones lineales de pesos y vértices de las curvas directrices.

Un ejemplo de aplicación de esta construcción se puede ver en la Figura 7.

4. SUPERFICIES DESARROLLABLES NURBS

El mismo tipo de razonamiento, *mutatis mutandi*, se puede aplicar al caso más general de superficies desarrollables NURBS, es decir, superficies racionales a trozos.

En este caso, la diferencia principal es que las curvas, aparte de estar definidas por listas de vértices y de pesos, $\{c_0, \dots, c_L\}$, $\{d_0, \dots, d_L\}$, $\{w_0, \dots, w_L\}$, $\{\omega_0, \dots, \omega_L\}$, donde el número de vértices está relacionado con el grado n y el número s de tramos de las curvas mediante

$$L = n + s,$$

requieren además una sucesión de valores del parámetro u , los llamados *nudos*, $\{u_0, \dots, u_K\}$,

$$K = L + n - 1,$$

que indican los intervalos del parámetro por los que se extiende cada tramo de la curva compuesta.

Así el primer tramo de la curva está definido en el intervalo $[u_{n-1}, u_n]$ y así consecutivamente el resto.

Los nudos que no están comprendidos en ningún intervalo, los $n-1$ primeros nudos y los los $n-1$ últimos, se denominan *nudos auxiliares* y se toman iguales,

$$u_0 = \dots = u_{n-1}, \quad u_{K-n+1} = \dots = u_K.$$

En este caso, el algoritmo que generaliza el de de Casteljaou para proporcionar de manera iterativa los puntos de la curva es el llamado algoritmo de de Boor y los polinomios de Bernstein se reemplazan por unas funciones polinómicas a trozos más complicadas llamadas funciones nodales, $N_i^n(u)$,

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha logrado expresar de una forma geométrica sencilla la condición para que una superficie reglada sea desarrollable para los casos en los que la superficie es racional y racional a trozos introduciendo dos funciones dependientes del parámetro de la curva.

Particularizando para el caso en el que estos coeficientes son constantes se han obtenido construcciones simples de estas superficies desarrollables, que involucran expresiones lineales que relacionan los vértices, los pesos y, en su caso, los nudos de las curvas

$$c(u) = \frac{\sum_{i=0}^L w_i c_i N_i^n(u)}{\sum_{i=0}^L w_i N_i^n(u)}, \quad d(u) = \frac{\sum_{i=0}^L \omega_i d_i N_i^n(u)}{\sum_{i=0}^L \omega_i N_i^n(u)},$$

dependientes de la lista común de nudos.

Pues bien, omitiendo detalles técnicos prolijos, podemos afirmar que las dos curvas racionales a trozos, $c(u)$, $d(u)$, definen una superficie desarrollable si y sólo si los puntos penúltimos obtenidos por la aplicación del algoritmo de de Boor, están relacionados por

$$\vec{c}[u^{<n-1>}, \Lambda^*] = \vec{d}[u^{<n-1>}, M^*],$$

donde en esta ocasión los coeficientes dependen del tramo de las curvas.

$$\Lambda^* = (1 - \Lambda)u_{N-1} + \Lambda u_N, M^* = (1 - M)u_{N-1} + M u_N,$$

correspondiente al intervalo $[u_{N-1}, u_N]$.

La relación que se obtiene entre vértices, pesos y nudos de las curvas es algo más complicada, pero igualmente compacta,

$$(u_{i+n} - \Lambda^*)\vec{c}_i + (\Lambda^* - u_i)\vec{c}_{i+1} = (u_{i+n} - M^*)\vec{d}_i + (M^* - u_i)\vec{d}_{i+1}.$$

Esta expresión generaliza los resultados precedentes de Aumann [9] para superficies desarrollables polinómicas y para superficies desarrollables *spline* [10].

directrices sobre las que se apoya la superficie desarrollable.

Este caso sencillo podría parecer no suficientemente general, pero un resultado de Aumann [11] garantiza que las únicas superficies desarrollables polinómicas posibles son las que se obtienen por medio de coeficientes Λ , M constantes, combinadas con elevación del grado de las curvas directrices.

Por tanto, aplicando los habituales algoritmos de elevación de grado a las superficies

desarrollables descritas en este trabajo, se obtienen todas las superficies desarrollables racionales y racionales a trozos.

La argumentación es simple: para el caso de las superficies racionales, éstas pueden verse como superficies polinómicas en dimensión cuatro, sin más que considerar como cuarta coordenada el denominador de las expresiones racionales (el generado por los pesos de las curvas). Y a estas superficies polinómicas se les puede aplicar el resultado de Aumann.

Del mismo modo, las superficies NURBS pueden verse obviamente como unión de superficies a trozos, a los que se puede aplicar el argumento anterior.

Esta construcción es compatible con el algoritmo de inserción de nudos, debido a que se basa en la forma polar de la parametrización de la superficie. Por tanto, es compatible asimismo con todos los algoritmos NURBS que se derivan de él, como la subdivisión de superficies.

Si para construir una superficie desarrollable partimos de una curva $c(u)$ racional o racional a trozos, tenemos libertad para elegir

los vértices d_0 , d_1 y el cociente de pesos ω_1/ω_0 , lo cual hace un total de seis grados de libertad adicionales.

La elevación del grado permite aumentar en uno más los grados de libertad, suficiente para resolver problemas de interpolación entre la curva $c(u)$ y los segmentos de generatriz en los extremos de ésta.

No obstante, la condición de superficie desarrollable racional o racional a trozos es demasiado restrictiva, ya que lo genérico es que la superficie desarrollable entre dos curvas racionales del mismo grado sea una superficie que no es siquiera racional.

Por tanto, de cara al futuro sería conveniente diseñar estrategias para abordar superficies desarrollables, no necesariamente racionales, que interpolen entre dos curvas racionales o racionales a trozos.

El resultado, obviamente, trascendería el formalismo NURBS, con lo cual lo razonable sería abordar el problema de manera aproximada.

6. REFERENCIAS

- [1] M.J. Mancewicz, W.H. Frey, *Developable surfaces: properties, representations and methods of design*, GM Research Publication GMR-7637, 1992.
- [2] W.H. Frey, D. Bindschadler, *Computer aided design of a class of developable Bézier surfaces*, General Motors Research Publication R&D-8057, 1993.
- [3] G. Aumann, *Interpolation with developable Bézier patches*, *Computer Aided Geometric Design*, 8 (1992) 409-420.
- [4] J. Lang, O. Röschel, *Developable (1,n)- Bézier surfaces*, *Computer Aided Geometric Design*, 9 (1995) 291-298.
- [5] J.S. Chalfant, T. Maekawa, *Design for manufacturing using B-spline developable surfaces*, *Journal of Ship Production*, 42 (1998), 207-215.
- [6] R.M.C. Bodduluri, B. Ravani, *Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries*, *Computer-Aided Design*, 25 (1993), 621-632.
- [7] H. Pottmann, G. Farin, *Developable rational Bézier and B-spline surfaces*, *Computer Aided Geometric Design*, 12 (1995), 513-531.
- [8] C.H. Chu, C.H. Séquin, *Developable Bézier patches: properties and design*, *Computer-Aided Design*, 34 (2002), 511-527.
- [9] G. Aumann, *A simple algorithm for designing developable Bézier surfaces*, *Computer Aided Geometric Design*, 20 (2003), 601-619.
- [10] L. Fernández-Jambrina, *Developable spline surfaces*, *Computer Aided Geometric Design*, 24 (2007), 189-196.
- [11] G. Aumann, *Degree elevation and developable Bézier surfaces*, *Computer Aided Geometric Design*, 21 (2004), 667-670.