

notas al cálculo de esfuerzos en tableros de puentes

AVELINO SAMARTIN QUIROGA

Dr. Ingeniero de Caminos

INTRODUCCION

1. El crecimiento de nuestra red viaria y el proyecto de nuevas autopistas ha incrementado extraordinariamente el número de obras de fábrica a construir. Es evidente, entonces, la importancia económica de estudios más detallados que intenten optimizar estas estructuras.

2. En contrapartida, la complejidad de las estructuras exigidas por las necesidades de las modernas intersecciones es creciente. Complicaciones geométricas y estructurales, tales como planta curva, espesor variable, apoyos arbitrariamente dispuestos, aislados y continuos, etc., son encontradas frecuentemente en los proyectos actuales. De aquí la necesidad perentoria de utilizar métodos de cálculo distintos de los convencionales.

3. La aparición de los ordenadores electrónicos, descargando al proyectista de la parte más rutinaria de su trabajo —el cálculo— ha exigido a los nuevos procedimientos de análisis de estructuras una mayor fidelidad en su representación de la realidad y la posibilidad de un tratamiento único a muy distintas estructuras.

4. En opinión del autor, los procedimientos de cálculo de esfuerzos en los tableros de puentes, presentando las características anteriores, deben ser buscados entre los de tipo numérico, como diferencias finitas [1] o elementos finitos [2], que si bien pueden presentar dificultades de convergencia y errores numéricos, en cambio son muy convenientes para un tratamiento general de estructuras complejas.

5. Entre los métodos numéricos de cálculo más extendidos se encuentra el método de asimilación del tablero a un emparrillado plano [3]. (“Método de emparrillado plano”).

Este método que puede considerarse incluido dentro de los métodos en elementos finitos, presenta, aparte de las características comunes con éstos, peculiaridades que se comentan a continuación.

ESTUDIO DE EMPARRILLADO PLANO

6. La popularidad de este método de análisis de tableros de puentes se debe principalmente a la utilización de un programa de cálculo electrónico (emparrillado plano), que es muy general y fácilmente asequible en cualquier librería de programas de ordenador (STRESS, STRUDL, etc.).

7. Sin embargo, el proceso de discretización de la estructura continua (tablero) a una discontinua (emparrillado plano) exige un conocimiento profundo del cálculo de estructuras, pues se introducen en dicho proceso unas "formas" o "direcciones" de trabajo de la estructura que pueden ser muy diferentes de las reales (fig. 1).

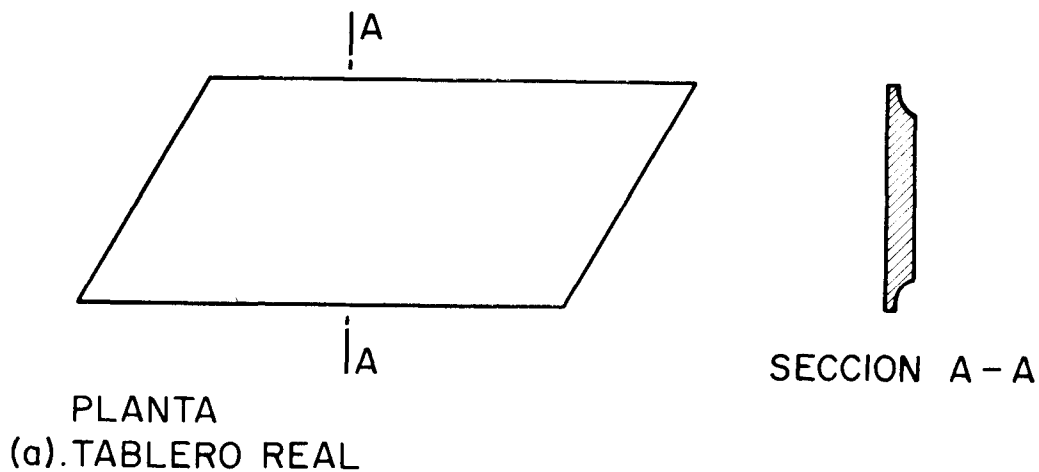
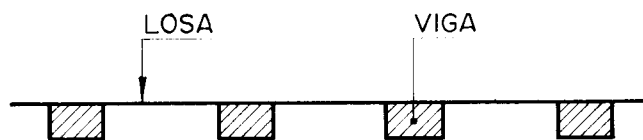


Figura 1.

8. Con los programas estándar de cálculo de emparrillados, la entrada de datos suele ser muy laboriosa. Por este motivo es muy conveniente la obtención automática, por ordenador, de estos datos de entrada, a partir de otros más sencillos, que definiendo el tablero realicen su “discretización” según los criterios comentados en el apartado anterior.

9. La sustitución de una losa maciza por un emparrillado recto conduce, en general, a resultados aceptables. Debe observarse, sin embargo, que la influencia del coeficien-

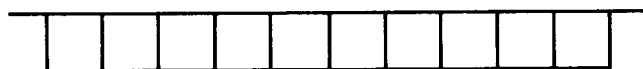


SECCION TRANSVERSAL . PUENTE DE VIGAS

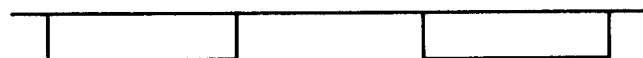
Figura 2.

te de Poisson, de importancia en algunos esfuerzos de la placa, queda disminuida en el emparrillado y la inercia a torsión J de una viga del emparrillado equivalente es doble de su inercia a flexión I .

10. Se obtienen excelentes resultados al aplicar el “método de emparrillado plano” a puentes de vigas, es decir, tableros constituidos por losas y vigas netamente diferenciados (fig. 2). No obstante, en el caso de losas ortótropas, aligeradas o puentes cajón (figu-



(a). SECCION TRANSVERSAL . LOSA ALIGERADA



(b). SECCION TRANSVERSAL . PUENTE CAJON

Figura 3.

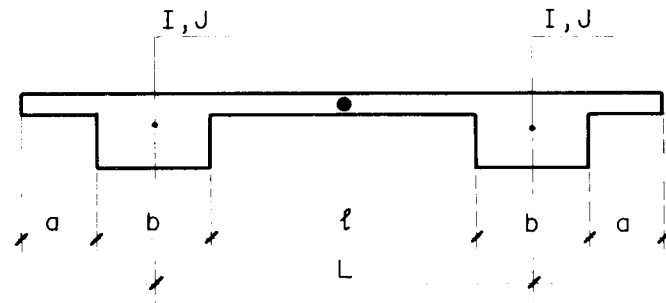
ra 3), con almas del cajón muy separadas, los resultados que se obtienen pueden ser muy pobres, a causa de la incertidumbre en el valor de las características mecánicas de las barras del emparrillado equivalente.

11. En algunos casos se ha intentado determinar las características mecánicas $E I$ y $G J$ de los emparrillados equivalentes a losas aligeradas, utilizando una idealización del

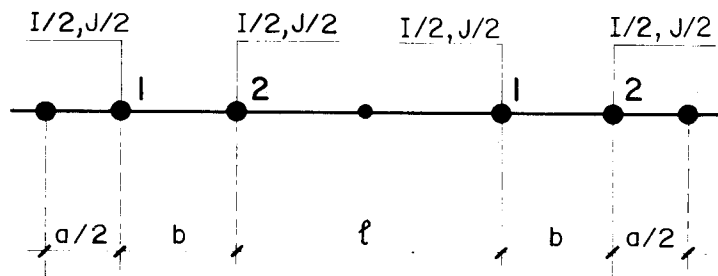
tipo viga Vierendel y, también, introduciendo una constante de ortotropía adicional, “la flexibilidad a cortante del medio transversal”, que se incluía en un programa de emparrillado modificado [4] y [5]. Se observó entonces una mejor concordancia entre los resultados del cálculo y los obtenidos por experimentación.

12. Dentro de los puentes de vigas se presentan frecuentemente casos en los que la anchura de las vigas del tablero es apreciable, por lo que debe ser tomada en cuenta, principalmente, con referencia a la luz real de la losa entre vigas.

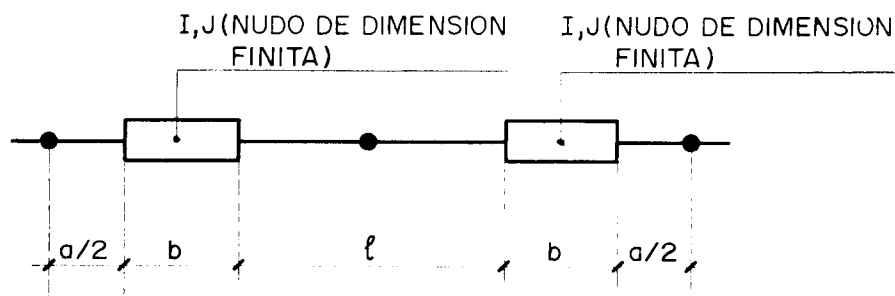
13. La sección de la figura 4, a, corresponde al caso indicado en el apartado ante-



(a). SECCION TRANSVERSAL. TABLERO REAL



(b). SECCION TRANSVERSAL. EMPARRILLADO



(c). SECCION TRANSVERSAL. EMPARRILLADO CON NUDOS DE DIMENSION FINITA

Figura 4.

rior. A veces se suele analizar la viga real introduciendo en el emparrillado dos vigas (1 y 2) por alma, unidas por una viga de gran canto, como se indica en la figura 4, b.

14. La técnica de cálculo descrita en el apartado anterior debe ser utilizada con cierta prudencia, pues aumenta considerablemente el número de nudos del emparrillado, además de introducir unas barras ficticias transversales (1-2 de la figura 4, b), cuyas rigideces pueden ser muy superiores a las del resto de las barras. Estos dos efectos, incremento del número de nudos e introducción de barras con fuertes rigideces, empeoran extraordinariamente la sensibilidad de la matriz de rigidez total de la estructura y el sistema resultante puede ser mal condicionado numéricamente.

15. Ambos inconvenientes pueden ser evitados sustituyendo el tablero real por un emparrillado de nudos rígidos de dimensión finita (fig. 4, c). La técnica de cálculo difiere ligeramente del caso usual de nudos rígidos puntuales y puede verse en [6].

16. Conviene resaltar que la sustitución de un tablero de puente por un emparrillado plano, ignora el comportamiento laja (o membrana) del tablero y considera únicamente el estado placa (o de flexión). Es decir, una distribución de esfuerzos rasantes, por ejemplo, no puede ser deducida, en principio, mediante un análisis por emparrillado.

17. Paralelas dificultades a las encontradas en el proceso de discretización del tablero existen en la interpretación de los resultados obtenidos en un estudio por emparrillado. Estas dificultades deberán resolverse de acuerdo, principalmente, con el tipo de discretización previamente realizado.

18. En general, puede adoptarse como esfuerzo en un nudo de la estructura, la media aritmética de los esfuerzos existentes en los extremos de las barras del emparrillado que en él concurren.

19. Similares consideraciones a las hechas en el apartado 8 con respecto al gran volumen de información que era necesario suministrar como datos al ordenador, existen con respecto a los resultados, que en un programa general de emparrillado aparecen en forma muy poco manejable para cálculos posteriores.

RESULTADOS

20. A fin de comparar los diferentes procesos de aplicación del “método de emparrillado plano”, se estudia un tablero de puente de las siguientes características:

Luz: 24,00 m.

Condiciones de apoyo: Simple apoyo y rígido a torsión en sus extremos.

Módulo de elasticidad: $E = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$.

Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,15$ (1).

Carga: 10 t/ml extendida linealmente a toda la luz y aplicada sucesivamente en las posiciones 1, 2... 7 y simétricas, con objeto de obtener las líneas de influencia (figura 5).

21. El caso anterior puede ser analizado “exactamente” dentro de las hipótesis usuales de la elasticidad lineal [7], obteniéndose los resultados indicados en las tablas I y II, basados en una solución tipo M. Levi para 1 y 7 términos de desarrollo de la carga en serie de Fourier.

(1) Se ha adoptado para ν este valor, a efectos comparativos entre los resultados de los distintos métodos de cálculo. Para el hormigón armado se debería suponer $\nu = 0,20$, como especifica la Instrucción actual E.H.-68.

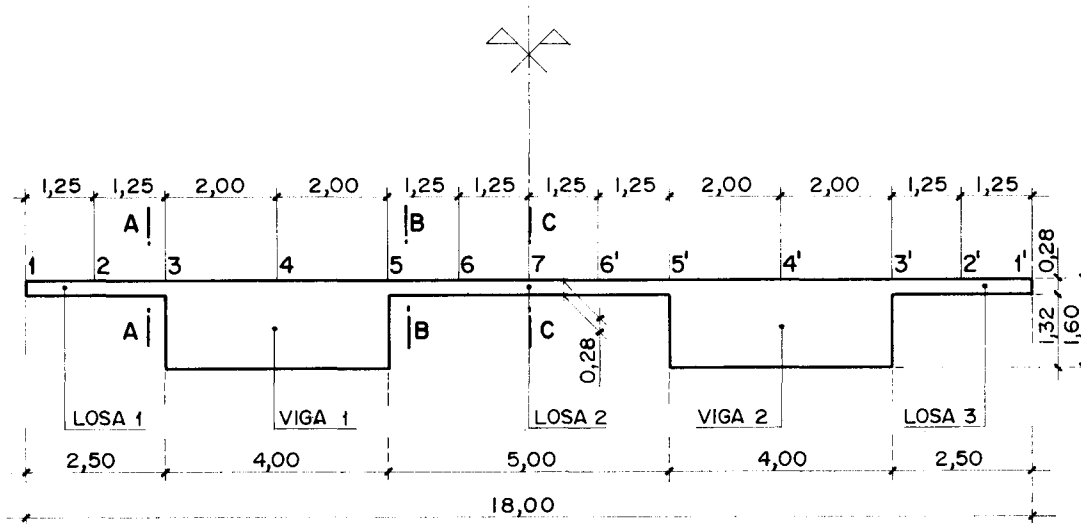
Para las características mecánicas de las vigas se han adoptado los siguientes valores:

Area: $S = 6,400 \text{ m}^2$.

Inercia a torsión: $I_1 = 4,080 \text{ m}^4$.

Inercia a flexión horizontal: $I_2 = 8,533 \text{ m}^4$.

Inercia a flexión vertical: $I_3 = 1,365 \text{ m}^4$.



SECCION TRANSVERSAL

ESCALA = 1:100

Figura 5.

TABLA I

RESULTADOS EN VIGAS										
Posición de la carga	W		M_F		M_T		Q		N	
	1 arm.	7 arm.	1 arm.	7 arm.	1 arm.	7 arm.	1 arm.	7 arm.	1 arm.	7 arm.
1	10,07	10,02	471,13	452,40	444,48	490,79	86,82	101,48	291,18	284,24
2	9,85	9,80	461,05	442,30	343,88	384,72	84,75	100,32	282,50	275,55
3	9,66	9,61	452,18	433,20	239,89	270,31	82,90	99,50	274,44	267,43
4	9,37	9,32	438,50	419,67	67,91	68,24	80,00	96,52	261,70	254,73
5	9,08	9,03	424,82	406,13	-104,07	-133,81	77,11	93,54	248,95	242,03
6	8,01	7,97	374,91	359,48	-159,58	-191,74	67,40	80,47	212,15	206,35
7	5,90	5,87	276,14	267,05	-142,44	-162,67	48,34	55,76	141,21	137,62
6'	3,79	3,78	177,56	174,55	-99,28	-105,33	24,31	31,78	70,25	68,84
5'	2,73	2,73	128,03	127,84	-72,15	-71,57	19,63	19,80	33,28	33,01
4'	2,45	2,45	114,87	114,62	-65,34	-65,19	16,76	16,84	20,02	20,11
3'	2,17	2,17	101,70	101,40	-58,52	-58,81	13,89	13,88	6,75	7,21
2'	2,00	2,00	93,91	93,57	-54,49	-54,98	12,18	12,13	-1,23	-0,59
1'	1,85	1,85	86,79	86,43	-50,83	-51,45	10,59	10,52	-8,87	-8,10

TABLA II

RESULTADOS EN LOSAS										
Posición de la carga	m_A		m_B		m_C		n_A		n_B	
	1 arm.	7 arm.	1 arm.	7 arm.	1 arm.	7 arm.	1 arm.	7 arm.	1 arm.	7 arm.
1	— 29,77	— 24,46	2,52	2,60	— 0,57	— 0,56	19,37	20,89	18,74	20,94
2	— 15,10	— 12,00	3,22	3,28	— 0,40	— 0,39	18,51	20,12	18,46	20,74
3	0,17	0,14	3,97	3,99	— 0,23	— 0,23	17,68	19,45	18,23	20,57
4	0,07	0,06	5,22	5,16	0,04	0,04	16,35	18,35	17,90	20,02
5	— 0,02	— 0,00	6,47	6,34	0,32	0,32	15,01	17,26	17,57	19,47
6	— 0,06	— 0,03	— 3,92	— 1,96	2,39	2,00	12,44	14,27	15,32	16,88
7	— 0,05	— 0,04	— 7,24	— 5,58	8,34	6,52	7,90	8,87	10,57	11,64
6'	— 0,04	— 0,03	— 6,80	— 6,12	2,39	2,00	3,58	3,77	5,61	6,22
5'	— 0,03	— 0,03	— 5,71	— 5,63	0,32	0,32	1,65	1,52	2,69	3,01
4'	— 0,02	— 0,02	— 5,09	— 5,04	0,04	0,04	1,71	1,66	0,90	0,93
3'	— 0,02	— 0,02	— 4,47	— 4,46	— 0,23	— 0,23	1,77	1,80	— 0,88	— 1,14
2'	— 0,02	— 0,02	— 4,10	— 4,11	— 0,40	— 0,39	1,80	1,87	— 1,96	— 2,34
1'	— 0,02	— 0,02	— 3,76	— 3,79	— 0,57	— 0,56	1,84	1,94	— 3,01	— 3,46

En estas tablas:

W es el desplazamiento vertical, en mm, del centro de gravedad de la viga 1 en el centro de la luz.

M_F es el momento flector, en m, de la viga 1 en el centro de la luz.

M_T es el momento torsor, en m, de la viga 1 en la sección de apoyos.

Q es el cortante, en t, de la viga 1 en la sección de apoyos.

N es el esfuerzo axil, en t, de la viga 1 en el centro de la luz.

m_A es el momento flector transversal en m/ml, en el arranque de la losa 1 (sección A A) en la sección central.

m_B es el momento flector transversal, en m/ml, en el arranque de la losa 2 (sección B B) en la sección central.

m_C es el momento flector transversal, en m/ml, en el centro de la losa 2 (sección C C) en la sección central.

n_A es el rasante, en t/ml, en la sección A A.

n_B es el rasante, en t/ml, en la sección B B.

Para cada una de estas sollicitaciones se dan en las tablas, en columnas separadas, los valores correspondientes a 1 y 7 armónicos del desarrollo en serie.

22. Un análisis basado en el método de emparrillado plano puede ser utilizado mediante la discretización que se indica en la figura 6.

Dada la simetría de la estructura y cargas, se puede considerar la semiplanta indicada, imponiendo las pertinentes condiciones de borde, con lo que el problema tiene $35 \times 3 = 105$ incógnitas.

Los datos introducidos han sido, aparte de las coordenadas de los nudos y la definición de las barras, las siguientes características mecánicas para éstas:

— Vigas longitudinales:

Tipo I: $I = 0,0046 \text{ m}^4$; $J = 0,0091 \text{ m}^4$.

Tipo II: $I = 1,8650 \text{ m}^4$; $J = 4,0300 \text{ m}^4$.

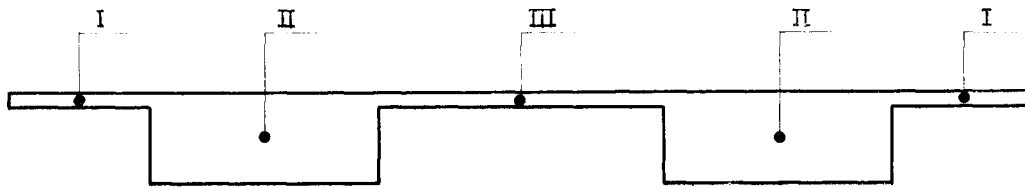
Tipo III: $I = 0,0091 \text{ m}^4$; $J = 0,0183 \text{ m}^4$.

— Vigas transversales:

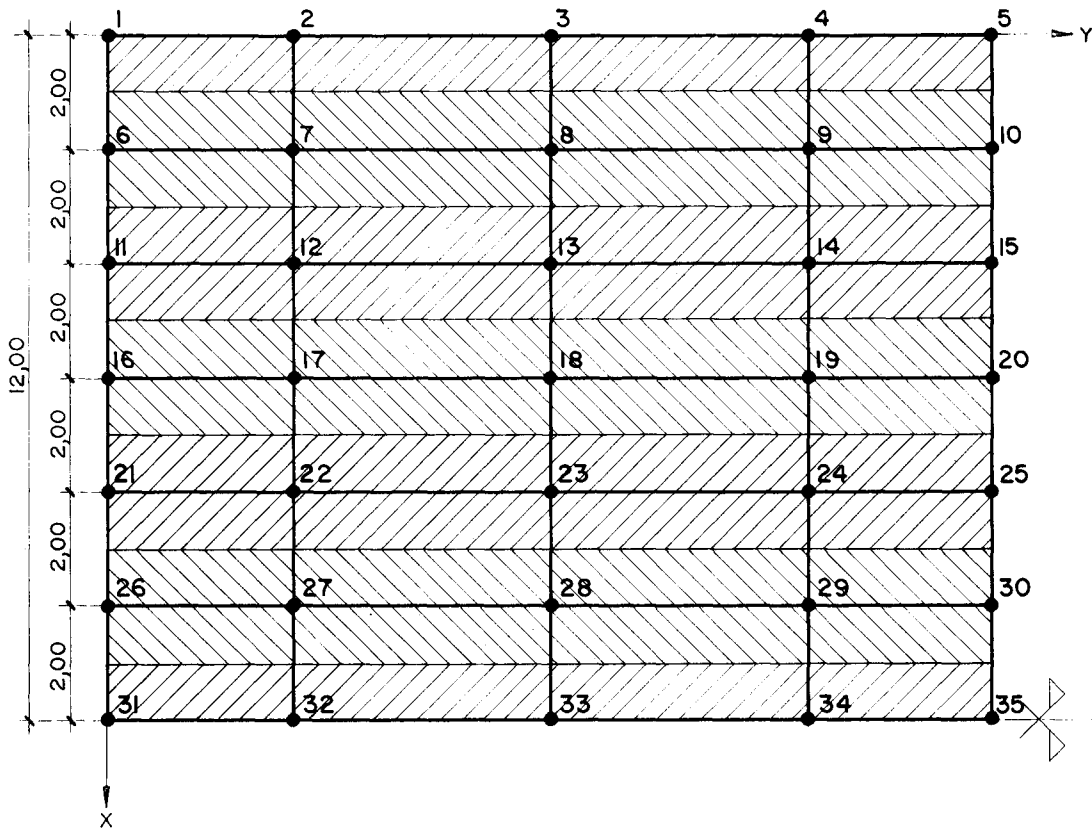
Extremas (en bordes): $I = 0,0018 \text{ m}^4$; $J = 0,0037 \text{ m}^4$.

Intermedias: $I = 0,0037 \text{ m}^4$; $J = 0,0073 \text{ m}^4$.

Para las posiciones 3, 4, 5 y simétricas se ha supuesto una carga vertical, uniforme,



SECCION TRANSVERSAL



SEMI-PLANTA

Figura 6.

actuando sobre la viga longitudinal conjuntamente con un momento torsor, uniforme, igual al producto de la carga anterior por su distancia al centro de gravedad de la viga. Para las restantes posiciones se ha considerado la carga actuando sobre las vigas transversales.

TABLA III

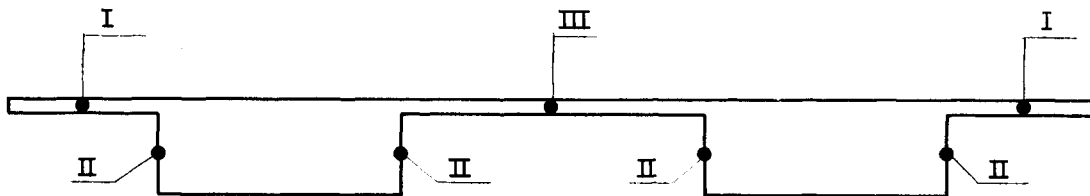
RESULTADOS EN VIGAS								
Posición de la carga	W		M _F		M _T		Q	
	N.D.F.	Normal I	N.D.F.	Normal I	N.D.F.	Normal I	N.D.F.	Normal I
1	12,13	10,96	630,55	688,40	504,72	407,88	95,56	89,13
2	9,95	10,95	618,81	686,25	395,58	311,23	94,03	94,41
3	9,76	10,98	602,85	681,39	297,68	254,95	105,22	115,30
4	9,44	10,89	582,42	675,55	74,38	20,83	102,54	114,60
5	9,11	10,80	561,97	669,78	— 148,92	— 213,29	99,85	114,00
6	7,94	7,72	493,70	483,66	— 190,50	— 124,10	76,91	69,94
7	5,77	5,72	360,50	359,01	— 168,56	— 110,39	53,40	49,82
6'	3,54	3,72	224,06	234,20	— 115,77	— 82,17	30,65	31,61
5'	2,43	0,75	155,78	47,86	— 84,14	— 23,05	19,78	5,74
4'	2,11	0,66	135,32	42,05	— 74,39	— 21,01	17,09	5,01
3'	1,79	0,57	114,86	36,24	— 64,64	— 18,97	14,40	4,28
2'	1,59	0,52	102,04	33,21	— 58,53	— 17,84	12,72	3,91
1'	1,40	0,47	90,29	30,04	— 53,00	— 16,75	11,19	3,51

TABLA IV

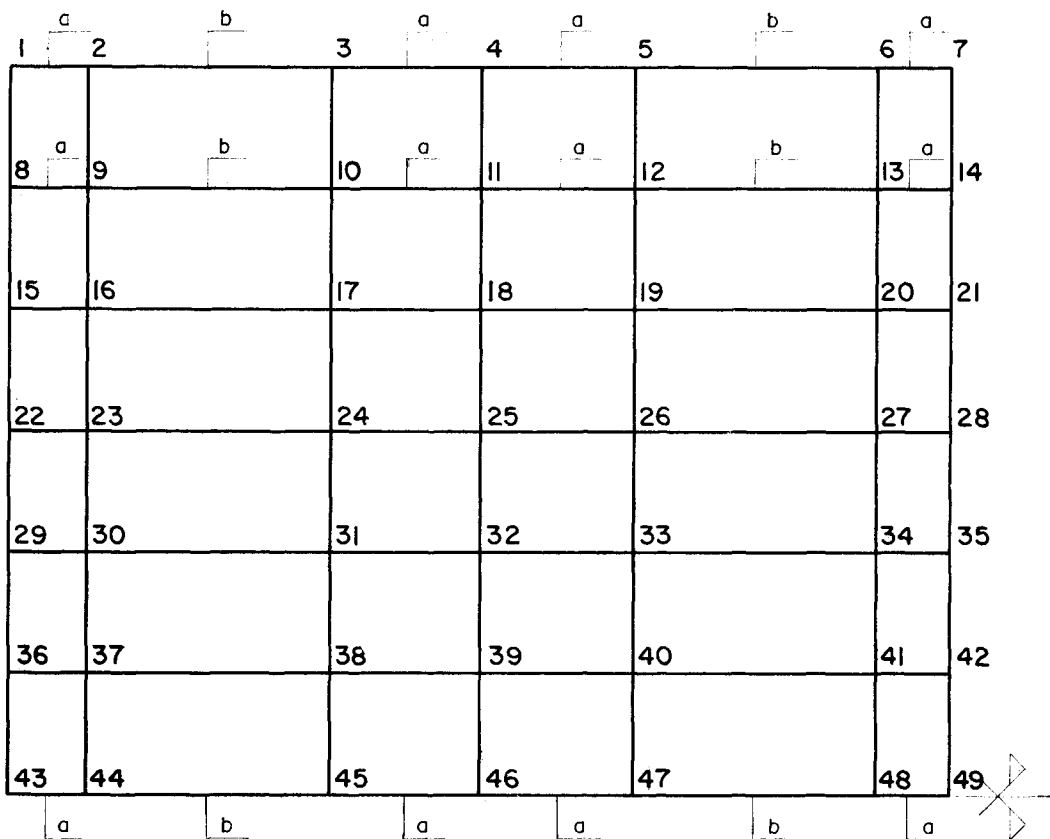
RESULTADOS EN LOSAS										
Posición de la carga	m _A		m _B		m _C		n _A		n _B	
	N.D.F.	Normal I	N.D.F.	Normal I	N.D.F.	Normal I	N.D.F.	Normal I	N.D.F.	Normal I
1	— 24,24	— 43,11	2,76	1,53	— 0,61	— 0,33	VALORES NO OBTENIBLES POR ESTE METODO	VALORES NO OBTENIBLES POR ESTE METODO	VALORES NO OBTENIBLES POR ESTE METODO	VALORES NO OBTENIBLES POR ESTE METODO
2	— 12,14	— 31,31	3,41	1,85	— 0,45	— 0,25				
3	— 0,04	0,18	4,10	2,16	— 0,28	— 0,18				
4	— 0,03	0,08	5,21	2,75	— 0,02	— 0,03				
5	— 0,03	— 0,01	6,32	3,34	0,25	0,12				
6	— 0,03	— 0,02	— 2,25	— 11,89	1,89	6,03				
7	— 0,04	— 0,02	— 5,66	— 11,09	6,57	11,44				
6'	— 0,02	— 0,01	— 6,14	— 8,56	1,89	6,03				
5'	— 0,01	— 0,01	— 5,70	— 2,95	0,25	0,12				
4'	0,06	— 0,01	— 5,18	— 2,70	— 0,02	— 0,03				
3'	0,02	— 0,01	— 4,66	— 2,44	— 0,28	— 0,18				
2'	0,02	— 0,01	— 4,34	— 2,30	— 0,45	— 0,25				
1'	0,02	— 0,01	— 4,03	— 2,16	— 0,61	— 0,33				

Con la designación de "Normal I" y "N.D.F." (Nudo de dimensión finita) se indican los dos tipos distintos de emparrillado utilizados para el cálculo: el emparrillado estándar (Normal I) y la modificación obtenida al considerar que los nudos 2-7-12-17-22-27-32 y 4-9-14-19-24-29-34 tienen una dimensión, a cada lado, de 2,00 m (semiancho de la viga longitudinal), en la que se comportan como elementos rígidos (N.D.F.) (fig. 6).

23. Se puede considerar el ancho real de las vigas, utilizando solamente el método del emparrillado estándar, procediendo como se ha indicado en el apartado 13 y conforme a la discretización de la figura 7. (Emparrillado Normal II.)



SECCION TRANSVERSAL



SEMI-PLANTA

Figura 7.

El problema tiene ahora $49 \times 3 = 147$ incógnitas, un 40 por 100 más que el caso anterior, lo que representa, en tiempo de ordenador para la resolución del sistema, del orden del doble. En el ejemplo actual, este tiempo no es significativo dentro del tiempo total del cálculo, pero al elevarse el número de nudos, la importancia de la duración del proceso de la resolución del sistema llega a ser decisiva.

Las características mecánicas de las barras consideradas han sido:

— Vigas longitudinales:

Tipo I: $I = 0,0046 \text{ m}^4$; $J = 0,0091 \text{ m}^4$.

Tipo II: $I = 0,9325 \text{ m}^4$; $J = 2,0400 \text{ m}^4$.

Tipo III: $I = 0,0091 \text{ m}^4$; $J = 0,0183 \text{ m}^4$.

— Vigas transversales:

Extremas (en bordes): Tipo *a*: $I = 0,0018 \text{ m}^4$; $J = 0,0037 \text{ m}^4$.

Tipo *b*: $I = 0,3247 \text{ m}^4$; $J = 0,6493 \text{ m}^4$.

Intermedias: Tipo *a*: $I = 0,0037 \text{ m}^4$; $J = 0,0073 \text{ m}^4$.

Tipo *b*: $I = 0,6493 \text{ m}^4$; $J = 1,2986 \text{ m}^4$.

Los casos de carga calculados han sido idénticos a los de los apartados anteriores, obteniéndose los siguientes resultados (tabla V).

TABLA V

EMPARRILLADO NORMAL II					EMPARRILLADO NORMAL II				
RESULTADOS EN VIGAS					RESULTADOS EN LOSAS				
Posición de la carga	W	M_F	M_T	Q	m_A	$m_B^{(*)}$	m_C	n_A	n_B
1	9,79	608,61	306,43	90,81	— 24,44	4,02	— 0,36	VALORES NO OBTENIBLES POR ESTE METODO	VALORES NO OBTENIBLES POR ESTE METODO
2	9,68	601,54	237,57	93,32	— 12,23	4,40	— 0,27		
3	9,57	590,98	164,12	103,56	0,08	4,79	— 0,18		
4	9,37	578,32	47,51	101,99	0,04	5,46	— 0,03		
5	9,16	564,72	— 72,71	100,23	0,00	6,18	0,25		
6	8,03	484,77	— 112,54	82,68	— 0,01	— 0,65	3,32		
7	5,78	361,55	— 98,62	53,59	— 0,02	— 5,84	6,42		
6'	3,54	217,09	— 69,48	34,25	— 0,01	— 6,23	3,32		
5'	2,42	155,12	— 51,04	19,66	— 0,01	— 5,80	0,25		
4'	2,21	141,49	— 47,16	17,81	— 0,01	— 5,45	— 0,03		
3'	2,01	128,84	— 43,54	16,23	— 0,01	— 5,11	— 0,18		
2'	1,89	121,42	— 41,42	15,27	— 0,01	— 4,91	— 0,27		
1'	1,78	114,21	— 39,37	14,34	— 0,01	— 4,71	— 0,36		

(*) Los valores de m_B , en este caso, son los que corresponden, directamente a los extremos 1 y 2, respectivamente, de las barras 45-46 y 46-47, sin promediarlos con los valores de las barras adyacentes (barras ficticias tipo *b*).

CONCLUSIONES

24. Los resultados de las tablas I a V se resumen y comparan gráficamente en las figuras 8 y siguientes.

En general, se observa que los resultados obtenidos utilizando el emparrillado normal I presentan una discontinuidad en su curvatura entre los puntos 5 y 6 (y sus simétricos 5' y 6'). Este hecho puede ser explicado porque, para las posiciones 5, 6 y simétricas, se han introducido en el cálculo las cargas con criterios distintos. En efecto, ha parecido más representativo suponer que, en la posición 5 (y 5') actuaban, sobre la viga longitudinal, una carga vertical y un momento torsor igual al producto de dicha carga por su distancia al centro de gravedad de la viga, en lugar de un momento torsor igual al momento de empotramiento rígido producido por la carga actuando sobre las vigas transversales comprendidas entre las dos longitudinales principales.

La divergencia de los resultados obtenidos con este método respecto a los otros es debida a ser inadecuada su aplicación, por el "exagerado" ancho supuesto para las vigas longitudinales, por lo que no se tendrá en cuenta en los comentarios que siguen.

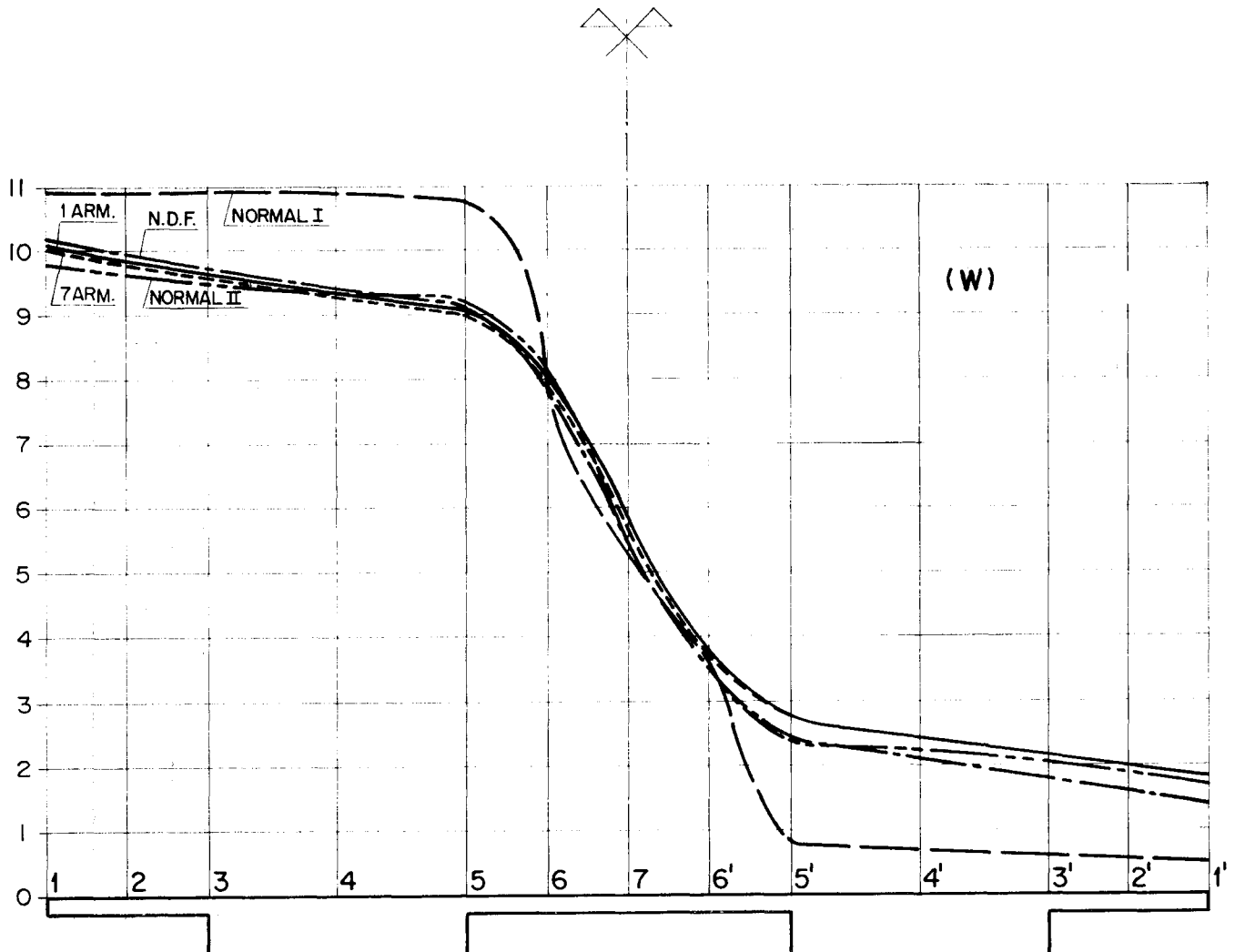


Figura 8.

25. De la comparación de las figuras 8 a 16 se pueden deducir las siguientes conclusiones, válidas para la sección transversal en estudio, y que pueden ser extendidas provisionalmente a otras secciones análogas:

Los valores de la flecha pueden ser obtenidos, con buena aproximación, por cualquiera de los métodos citados.

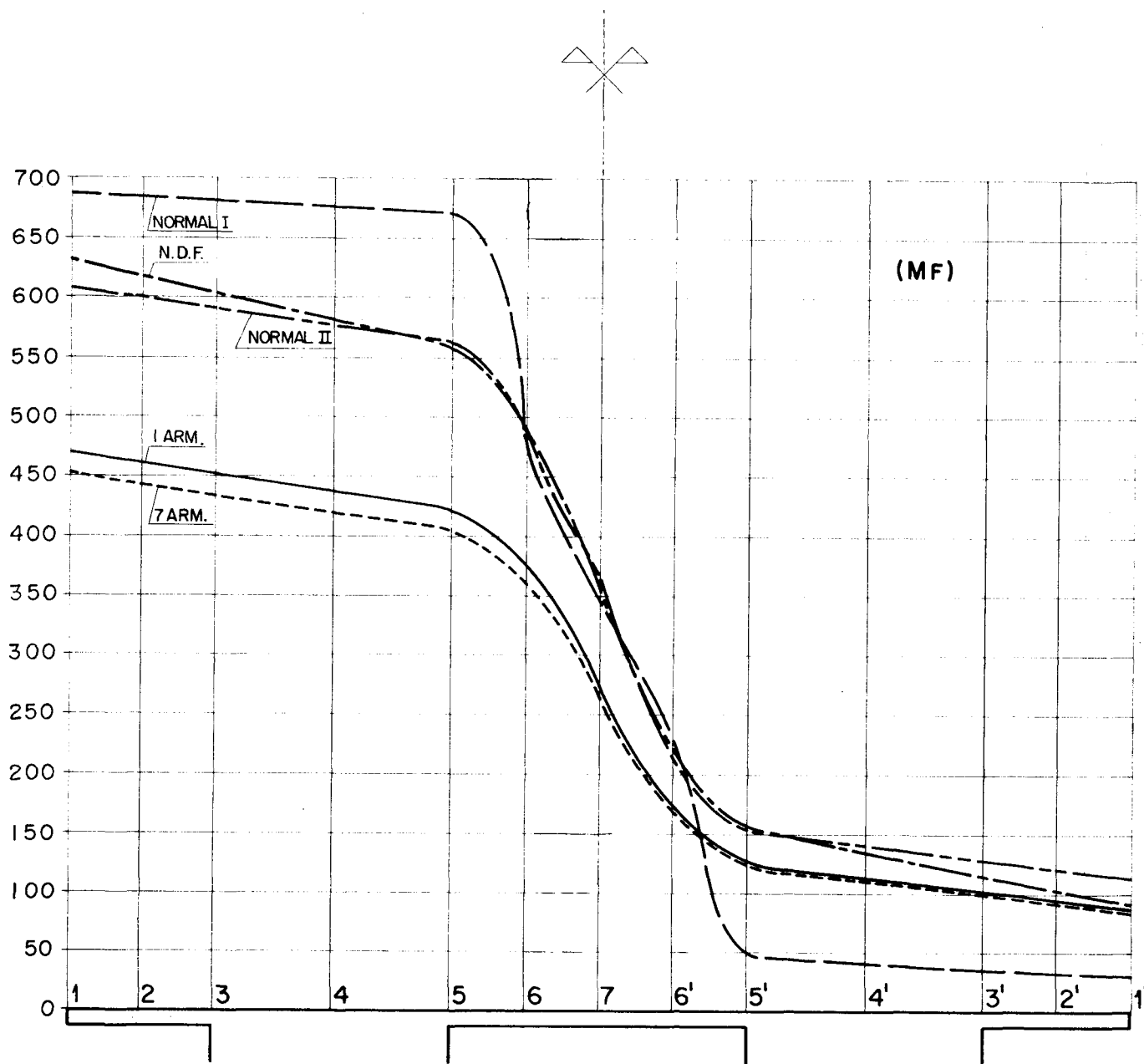


Figura 9.

La línea de influencia de momentos flectores presenta una forma análoga a la de influencia de flechas, por lo que puede estar justificado, a veces, adoptar el coeficiente de excentricidad de flechas como coeficiente de excentricidad de momentos.

El momento flector M_F , obtenido por el método de emparrillados planos, se refiere

al resistido por la viga y forjado conjuntamente. En el método elástico (1 y 7 armónicos) este valor es el resistido por la viga longitudinal sola. Es, por tanto, lógica la diferencia de los valores obtenidos mediante ambos procesos. Comparando los valores de los restantes métodos entre sí, se observa una gran aproximación (diferencias menores del 10 por 100).

Con respecto a los valores de M_T , resalta el hecho de las diferencias existentes entre las curvas de 1 y 7 armónicos y N.D.F., y la curva Normal II que, en general, en los casos

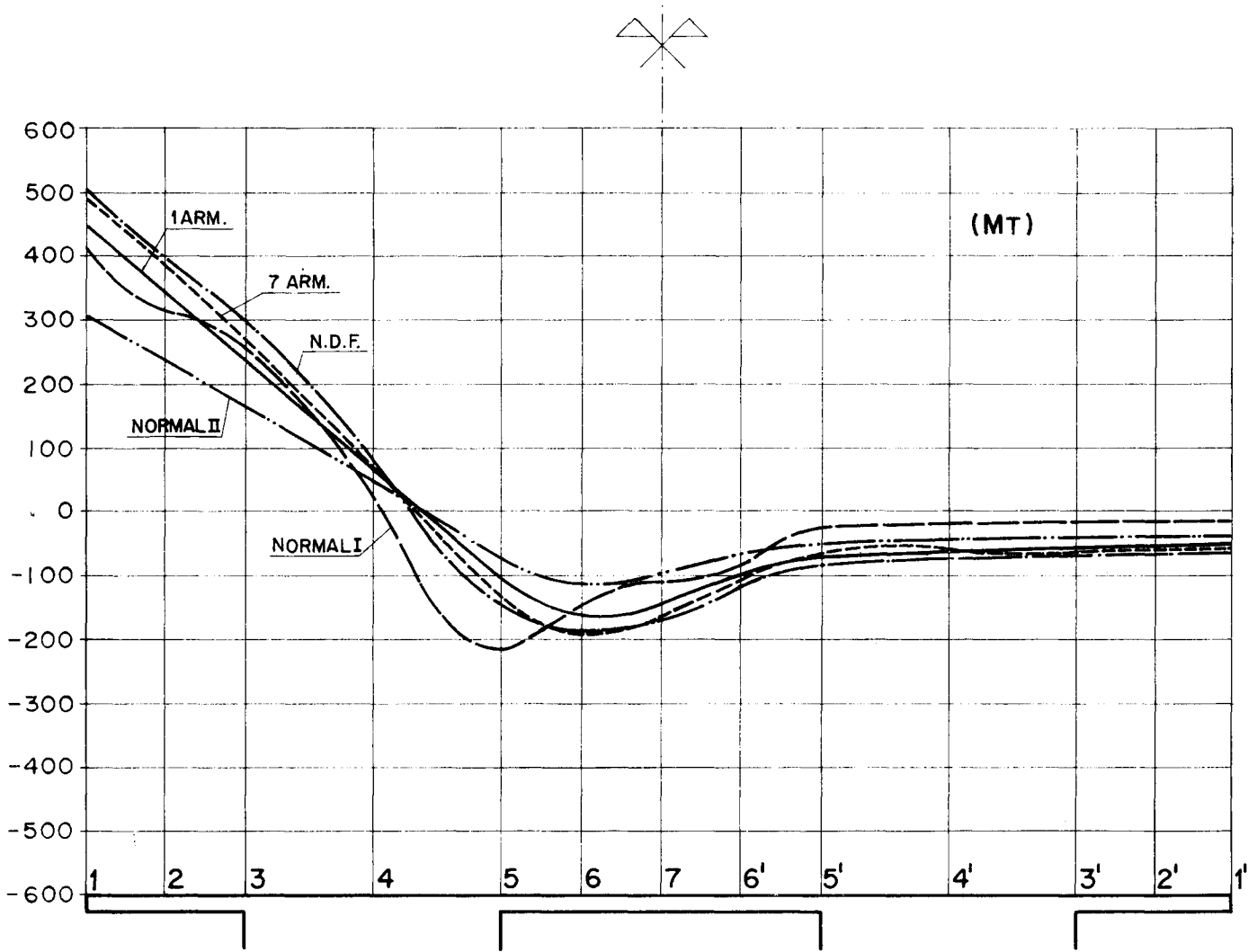


Figura 10.

de las otras solicitaciones obtenidas, se aproximaba excelentemente a las tres anteriores. La causa será, probablemente, la introducción de una cierta rigidez finita, a flexión, entre las dos vigas longitudinales ficticias que definen cada viga longitudinal real (vigas 1 y 2 de la fig. 4, b).

Las mayores discrepancias entre todas las curvas se presentan, como era previsible, para los valores de Q , ya que este valor es de lenta convergencia en la mayoría de las soluciones analíticas. Afortunadamente, su importancia en el proyecto no suele ser decisiva. Además, existe una caída en los valores de las líneas de influencia obtenidas por el mé-

todo de los emparrillados, en los puntos 1 y 2, para la que no se encuentra, fácilmente, una explicación satisfactoria.

Las líneas de influencia de momentos en el forjado, obtenidas por el método de los emparrillados, se encuentran situadas entre las líneas de 1 y 7 armónicos, que representan teóricamente los valores "exactos". La aproximación es, pues, notable.

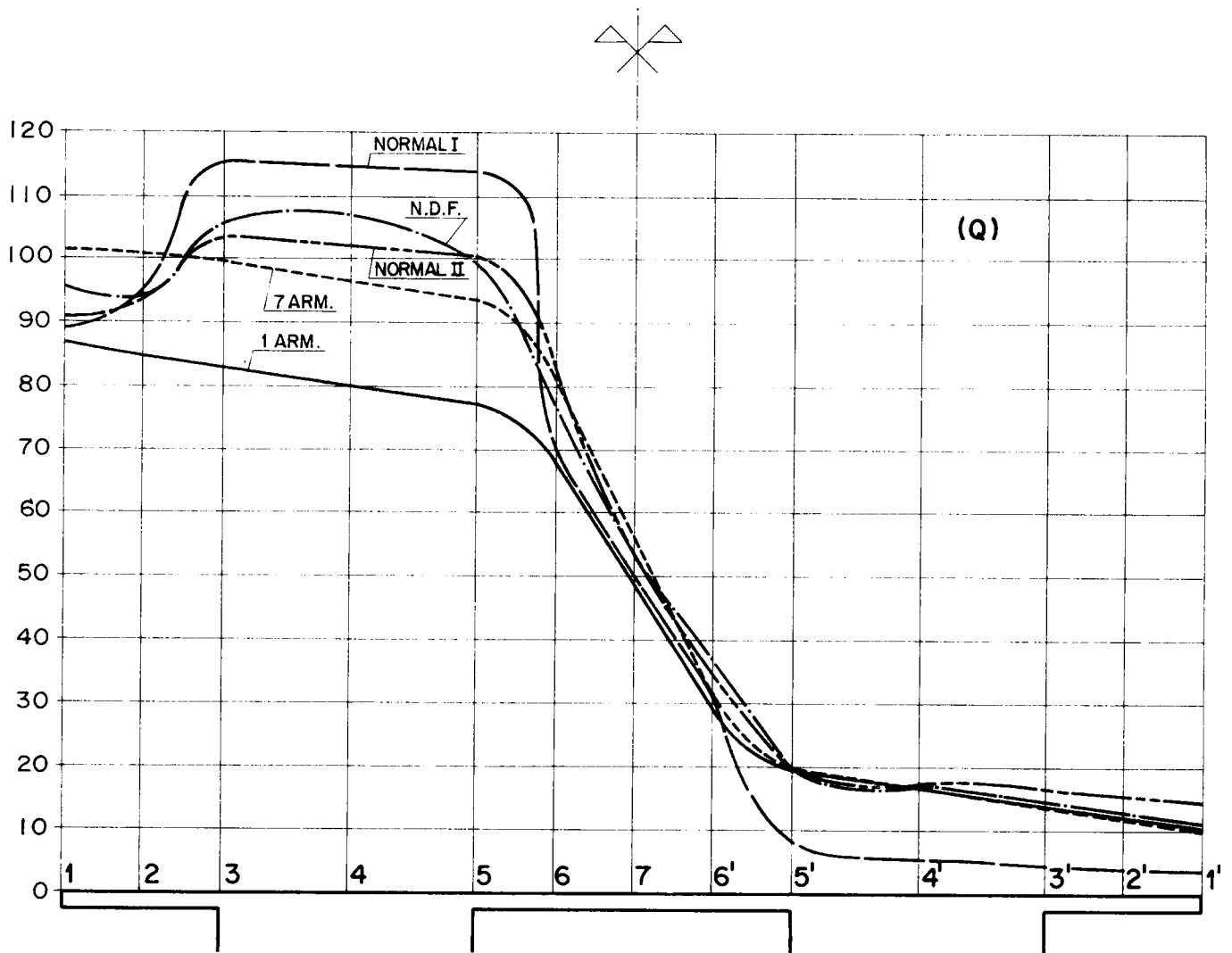


Figura 11.

Por último, interesa poner de relieve la imposibilidad de un estudio "laja" utilizando el método de los emparrillados, por lo que las líneas de influencia de los rasantes entre vigas y forjados no pueden deducirse directamente mediante su aplicación.

Las figuras 15 y 16 representan un aspecto de estas líneas de influencia, calculadas utilizando la solución analítica.

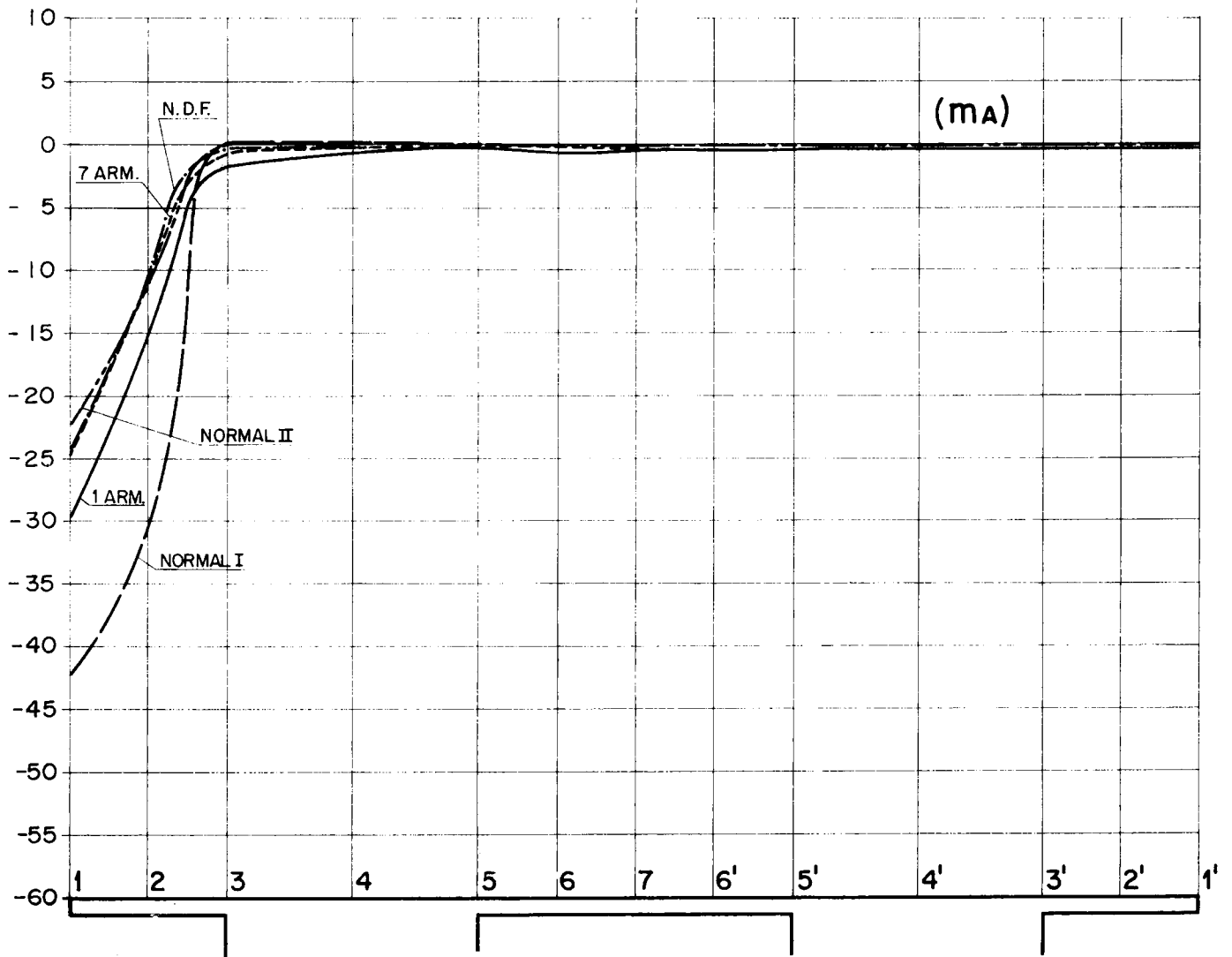
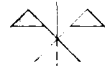


Figura 12.

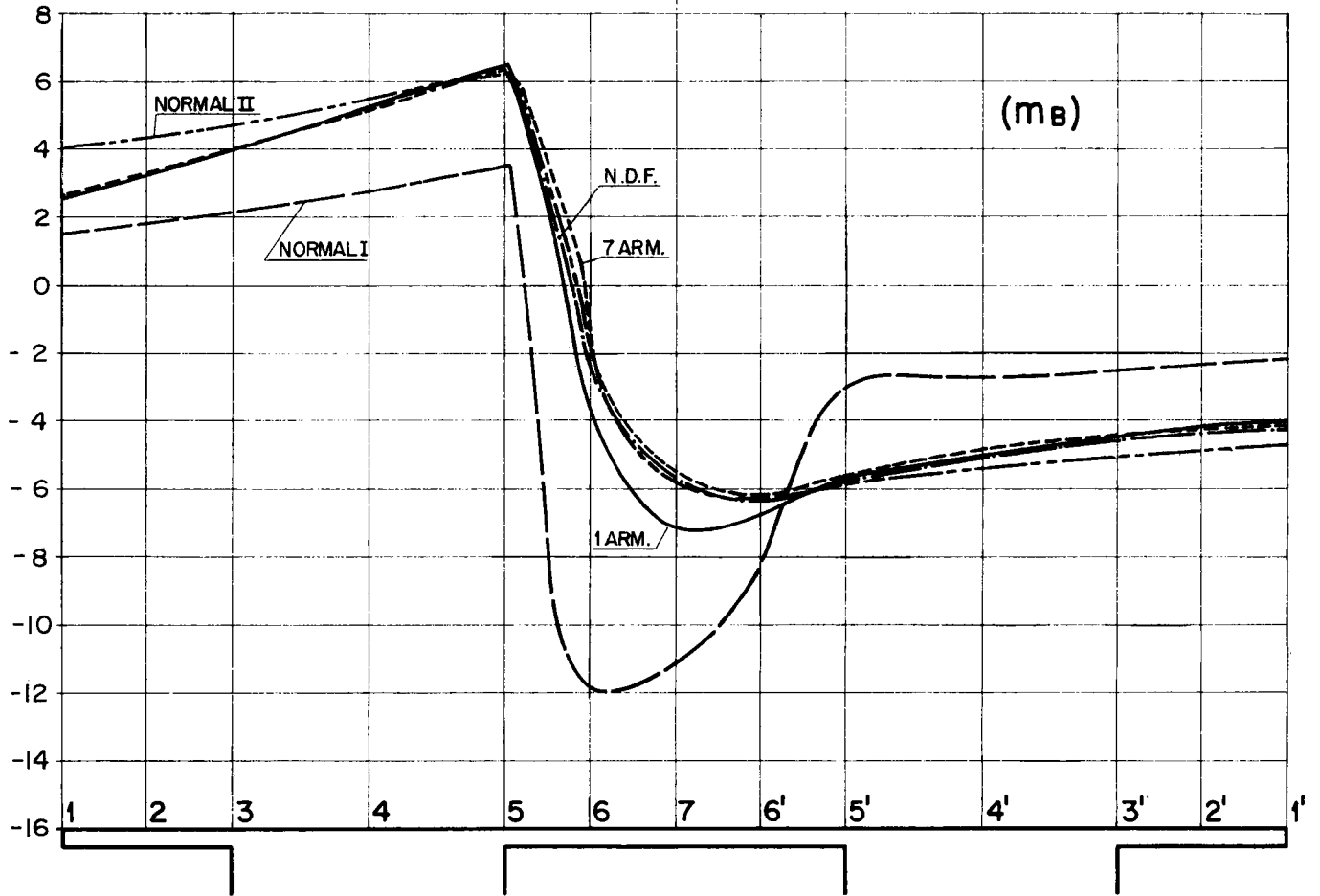
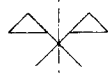


Figura 13.

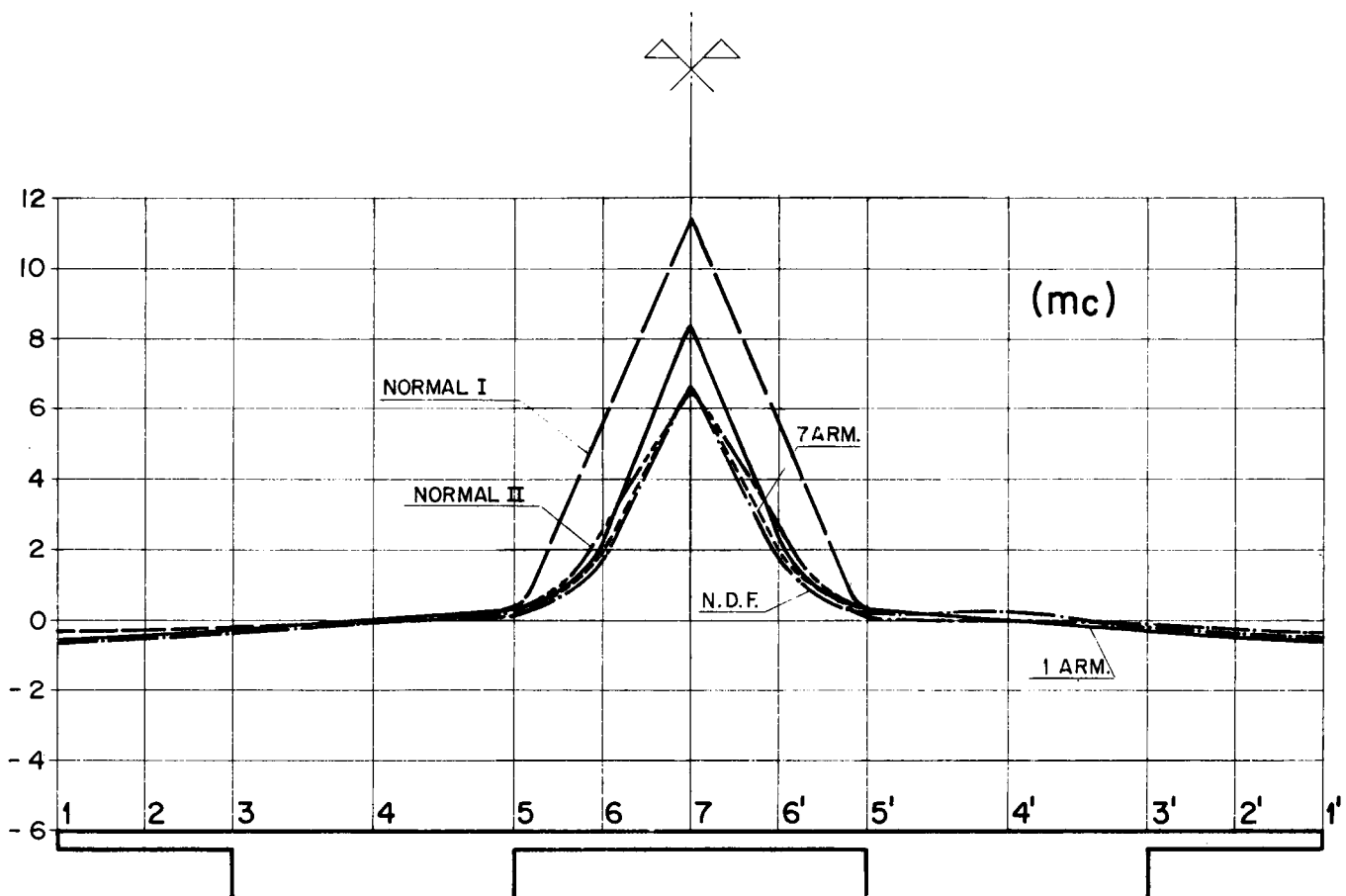


Figura 14.

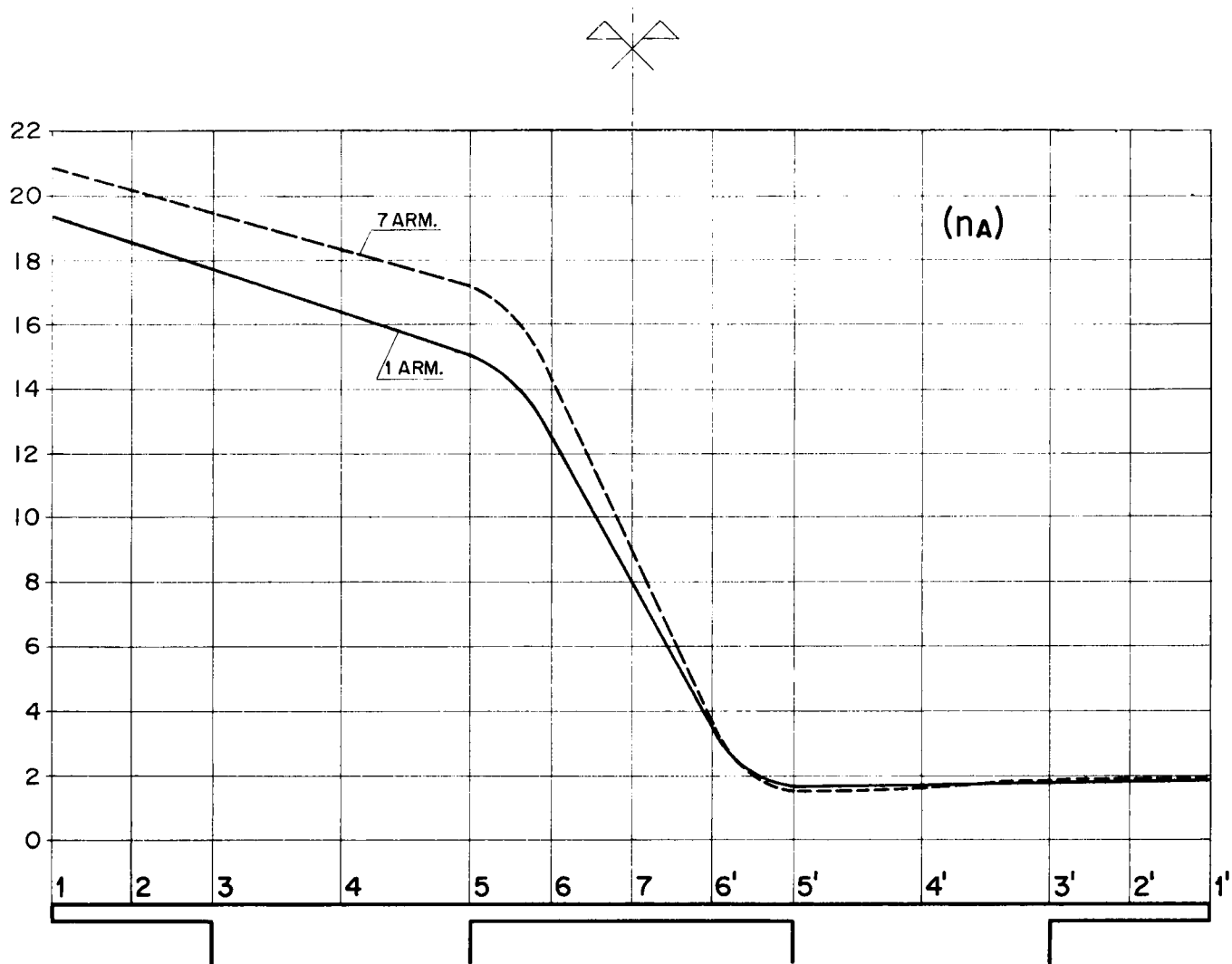


Figura 15.

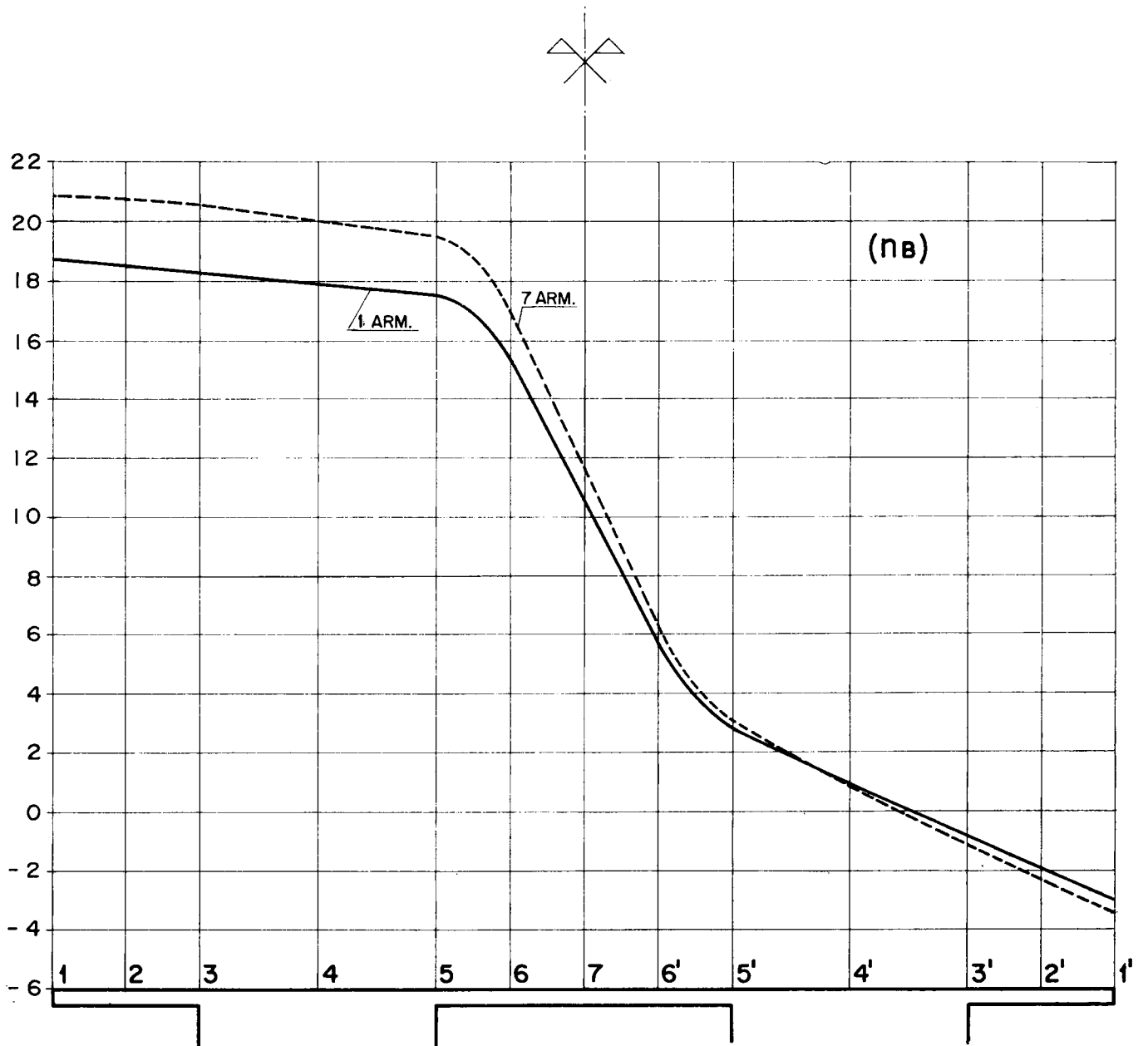


Figura 16.

RECONOCIMIENTO

Agradezco a mi profesor y compañero D. Florencio del Pozo Frutos su amabilidad al acceder a la lectura de este artículo y sus comentarios al mismo. A mi compañero D. Juan Moreno Torres por todas sus sugerencias y discusiones sobre muchos puntos de esta exposición y, en especial, sobre el método de emparrillado normal II, que desde hace varios años utiliza, en el Laboratorio Central de Ensayo de Materiales, en la comprobación de los ensayos de modelos de puentes.

BIBLIOGRAFIA

1. SOUTHWELL, R. V.: "The flexure and extension of perforated elastic plates". *Proc. R. Soc. A.* 193, 1948.
2. LIGHTFOOT, E. and SAWKO, F.: "The analysis of grid frameworks and floor systems by electronic computer". *The Structural Engineer.* Volumen 38, número 3, 1968.
3. CHEUNG, Y. K.; KING, I. P. and ZIENKIEWICZ, O. C.: "Slab bridges with arbitrary shape and support conditions: a general method of analysis based on finite elements".
4. HARRAS, G.: "Bending of beams with perforated webs". *University of Leeds*, 1967.
5. FAZ, C.: "Bending of beams with perforated webs". *University of Leeds*, 1967.
6. LIVESLEY, R. K.: "Matrix methods of structural analysis". *Pergamon Press*.
7. SAMARTÍN, A.: "Una aplicación de los métodos matriciales al cálculo de puentes". Publ. núm. 197. *Laboratorio Central de Materiales*. Madrid.