

Modelo numérico basado en el método de los elementos finitos para el estudio de la hidrodinámica de bahías y estuarios (*)

Por P. TABUENCA y J. CARDONA

Escuela Superior de la Marina Civil. Universidad de Santander

y A. SAMARTIN

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Se ha desarrollado un modelo implícito no lineal 2-D en EF para la resolución de las ecuaciones de aguas poco profundas. La discretización espacial se ha realizado por medio de elementos lagrangianos isoparamétricos. Se ha aplicado la integración numérica de Simpson para obtener las matrices elementales y para la integración temporal se han utilizado diferentes esquemas en diferencias finitas, comprobándose el modelo con diferentes ejemplos.

1. INTRODUCCION

Se describe un modelo no lineal, basado en una formulación de Galerkin de las ecuaciones 2-D para la hidrodinámica de estuarios con discretización espacial por medio de elementos finitos cuadráticos. La integración numérica de Simpson permite simplificar el cálculo de las matrices. Para la integración temporal, se han elegido dos esquemas en diferencias finitas: el método iterativo de Cranck Nicholson y el de las diferencias centrales.

2. ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS

Las ecuaciones de gobierno de la hidrodinámica de estuarios, obtenidas promediando las ecuaciones de continuidad y del momento a través de la profundidad para fluidos homogéneos e incomprensibles, son:

$$\frac{\delta H}{\delta t} + \frac{\delta (HU)}{\delta x} + \frac{\delta (HV)}{\delta y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\delta U}{\delta t} + U \frac{\delta U}{\delta x} + V \frac{\delta U}{\delta y} - fV + g \left| \frac{\delta \zeta}{\delta x} - \frac{KW^2}{H} \cos \Psi + \frac{gU (U^2 + V^2)^{1/2}}{HC^2} \right. = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\delta V}{\delta t} + U \frac{\delta V}{\delta x} + V \frac{\delta V}{\delta y} + fU + g \frac{\delta \zeta}{\delta y} - \frac{KW^2}{H} \sin \Psi + \frac{gV (U^2 + V^2)^{1/2}}{HC^2} = 0 \quad (3)$$

donde f es el parámetro de Coriolis, K es un coeficiente adimensional función de la velocidad del viento W, C es el coeficiente de Chezy y Ψ es el ángulo entre el vector velocidad del viento y el eje X. Los demás parámetros se definen en la figura 1.

Con objeto de obtener los valores de H, U y V de las ecuaciones (1), (2) y (3), se deben considerar las condiciones iniciales y de contorno. Existen dos clases de condiciones de contorno: las

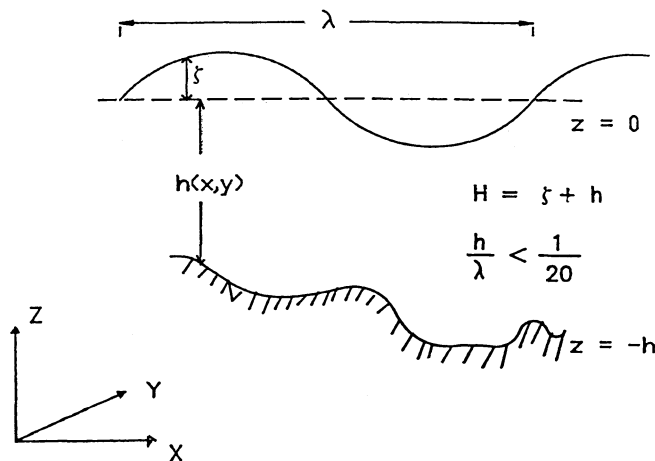


Figura 1.—Geometría.

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 30 de noviembre de 1990.

correspondientes a bordes abiertos (desembocadura de un río o mar abierto) o las correspondientes a bordes fijos (línea de la costa).

En el primer caso se fijan la velocidad normal v_n , el nivel del mar ζ , o ambas. Para los bordes fijos, se considera nulo el flujo a través de la línea que bordea la costa ($\bar{v}_n = 0$). Asimismo, deben ser conocidas las condiciones iniciales.

3. MODELO EN ELEMENTOS FINITOS

En el método de los elementos finitos, cada variable se expresa por medio de un conjunto discreto de funciones $\phi_j(x, y)$ y de los valores nodales $U_j(t)$, $V_j(t)$, $\zeta_j(t)$, por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{j=1}^N U_j(t) \phi_j(x, y), \\ \zeta &= \sum_{j=1}^N \zeta_j(t) \phi_j(x, y), \\ V &= \sum_{j=1}^N V_j(t) \phi_j(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

Los restantes parámetros se expresan usando las mismas funciones base ϕ_j . La sustitución de las ecuaciones (4) en las (1), (2) y (3), y la aplicación del método de Galerkin, da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_{ij} \zeta'_i &= E_{\zeta i} \\ M_{ij} U'_j &= E_{U i} \\ M_{ij} V'_j &= E_{V i} \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} E_{\zeta i} &= - (k_{xijk} = k_{xikj}) \cdot (\zeta_j + h_j) \cdot U_k - \\ &\quad - (k_{yijk} + k_{yikj}) \cdot (\zeta_j + h_j) \cdot V_k \\ E_{U i} &= k_{xijk} \cdot U_j \cdot U_k - k_{yijk} \cdot U_j \cdot V_k + C_{ijk} \cdot V_j \cdot \\ &\quad f_k - g \cdot D_{xij} \cdot \zeta_j + E_{ij} \cdot K_j \cdot W_j^2 \cos \psi_j - \\ &\quad - \frac{g}{C^2} \cdot R_{ij} \cdot U_j \\ E_{V i} &= k_{xijk} \cdot V_j \cdot U_k - k_{yijk} \cdot V_j \cdot V_k + \\ &\quad + C_{ijk} \cdot U_j \cdot f_k - g \cdot D_{yij} \cdot \zeta_j + \\ &\quad + E_{ij} \cdot K_j \cdot W_j^2 \sin \psi_j - \frac{g}{C^2} \cdot R_{ij} \cdot V_j \end{aligned} \quad (6)$$

con

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_A \phi_i \cdot \phi_j \cdot dA \\ C_{ijk} &= \int_A \phi_i \cdot \phi_j \cdot \phi_k \cdot dA \\ k_{xijk} &= \int_A \phi_i \cdot \phi_j \cdot \frac{\delta \phi_k}{\delta x} \cdot dA \\ k_{yijk} &= \int_A \phi_i \cdot \phi_j \cdot \frac{\delta \phi_k}{\delta y} \cdot dA \\ D_{xij} &= \int_A \phi_i \cdot \frac{\delta \phi_j}{\delta x} \cdot dA \\ D_{yij} &= \int_A \phi_i \cdot \frac{\delta \phi_j}{\delta y} \cdot dA \\ E_{ij} &= \int_A \frac{\phi_i \cdot \phi_j}{\Sigma (\zeta_k + h_k) \cdot \phi_k} \cdot dA \\ R_{ij} &= \int_A \phi_i \cdot \phi_j \cdot \\ &\quad \cdot \frac{[(\Sigma U_k \cdot \phi_k)^2 + (\Sigma V_k \cdot \phi_k)^2]^{1/2}}{\Sigma (\zeta_k + h_k) \cdot \phi_k} \cdot dA \end{aligned} \quad (7)$$

El sistema (5) de ecuaciones diferenciales de primer orden es no lineal porque los coeficientes R_{ij} dependen de las incógnitas ζ_i , U_i , V_i mientras que los restantes son función únicamente de la geometría del elemento. Por tanto, el problema a resolver es integrar en el dominio del tiempo para los valores nodales, el sistema (5) de ecuaciones acopladas. Para ello deben expresarse las condiciones de contorno además de especificarse las condiciones iniciales.

La discretización espacial se ha realizado por medio de elementos lagrangianos cuadráticos. En la figura 2 se muestra la correspondiente transformación isoparamétrica. Para la integración en el tiempo, se ha aplicado la fórmula de integra-

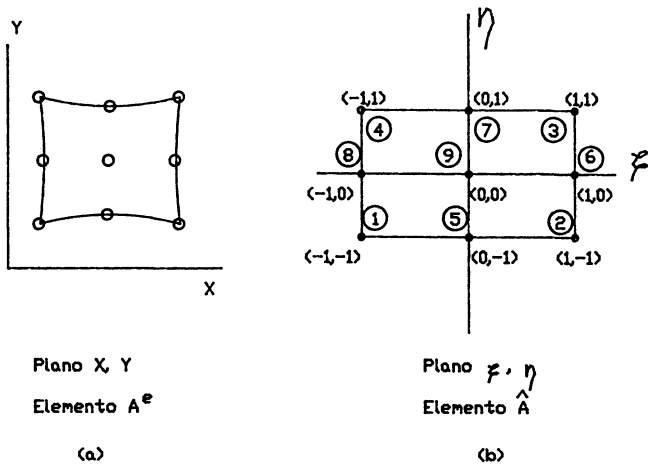


Figura 2.—Transformación isoparamétrica.

ción de Simpson para nueve puntos de integración. De esta forma se hacen coincidir los puntos de integración con los nudos de interpolación, con lo que el sistema (5) es:

$$\begin{aligned}
 M_i \zeta_i &= E_{\zeta_i} \\
 M_i U_i &= E_{U_i} \\
 M_i V_i &= E_{V_i}
 \end{aligned} \tag{8}$$

con

$$\begin{aligned}
 E_{\zeta_i} &= -k_{xik} [(\zeta_i + h_i) \cdot U_k + (\zeta_k + h_k) \cdot U_i] - \\
 & - k_{yik} [(\zeta_i + h_i) \cdot V_k + (\zeta_k + h_k) \cdot V_i]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{U_i} &= -k_{xik} [U_i U_k + g\zeta_k] - k_{yik} V_i U_k + \\
 & + C_i f_i V_i + E_i K_i W^2 \cos \psi_i - gR_i U_i / C^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 E_{V_i} &= -k_{xik} U_i V_k - k_{yik} [V_i V_k + g\zeta_k] - C_i f_i U_i + \\
 & + E_i K_i W^2 \sin \psi_i - gR_i V_i / C^2
 \end{aligned}$$

Para la integración temporal, se han usado dos procedimientos en diferencias finitas:

i) Método de Cranck-Nicholson. Las derivadas temporales se aproximan por medio de las expresiones:

$$M \cdot \zeta(t + \Delta t) = M \cdot \zeta(t) + \frac{\Delta t}{2} [E_{\zeta}(t) + E_{\zeta}(t + \Delta t)]$$

$$M \cdot U(t + \Delta t) = M \cdot U(t) + \frac{\Delta t}{2} [E_U(t) + E_U(t + \Delta t)] \tag{10}$$

$$M \cdot V(t + \Delta t) = M \cdot V(t) + \frac{\Delta t}{2} [E_V(t) + E_V(t + \Delta t)]$$

ii) Método de las diferencias centrales. En este caso, las derivadas temporales se aproximan por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 M \cdot \zeta(t + \Delta t) &= M \cdot \zeta(t - \Delta t) + 2 \cdot \Delta t \cdot E_{\zeta}(t) \\
 M \cdot U(t + \Delta t) &= M \cdot U(t - \Delta t) + 2 \cdot \Delta t \cdot E_U(t)
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$M \cdot V(t + \Delta t) = M \cdot V(t - \Delta t) + 2 \cdot \Delta t \cdot E_V(t)$$

Con cualquiera de los dos procedimientos anteriores, las condiciones iniciales se usan como valores de arranque.

El intervalo de tiempo Δt está limitado por la condición de Courant

$$\Delta t \leq \frac{\Delta L}{\sqrt{gH}}$$

El primer método (i) da resultados más precisos que el método (ii) de las diferencias centrales. Sin embargo, necesita más tiempo de CPU, porque la matriz M debe ser invertida en cada intervalo Δt .

Con cualquiera de los procedimientos antes mencionados, el sistema de ecuaciones diferenciales se transforma en el sistema de ecuaciones algebraicas⁵:

$$\begin{aligned}
 M \cdot \zeta(t + \Delta t) &= R_{\zeta} \\
 M \cdot \dot{U}(t + \Delta t) &= R_U \\
 M \cdot \dot{V}(t + \Delta t) &= R_V
 \end{aligned} \tag{13}$$

donde R_{ζ} , R_U y R_V son los segundos miembros de las ecuaciones (10) o (11).

Para resolver (13), es necesario considerar las condiciones de contorno. Los valores especificados de ζ , U y V deben ser introducidos en el análisis en cada intervalo de tiempo a lo largo del borde⁵.

4. EXPERIMENTACION NUMERICA

El modelo se ha aplicado a algunos casos simples a fin de comprobar la eficiencia y precisión del método numérico utilizado.

Caso 1.—*Lago rectangular*.—Este caso corresponde al estudio de la circulación en un lago rectangular de dimensiones 125.000 X 31.250 m y de profundidad $h = 80$ m. No existen mareas y la circulación es debida exclusivamente al viento, influyendo posteriormente el efecto Coriolis. Se

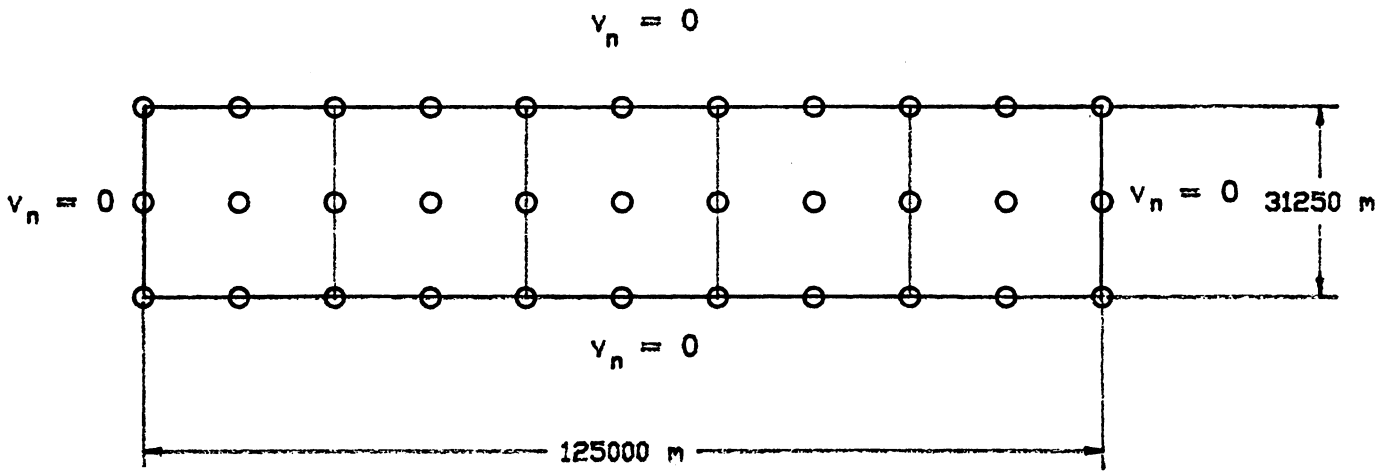


Figura 3.—Malla de E.F. para el lago rectangular.

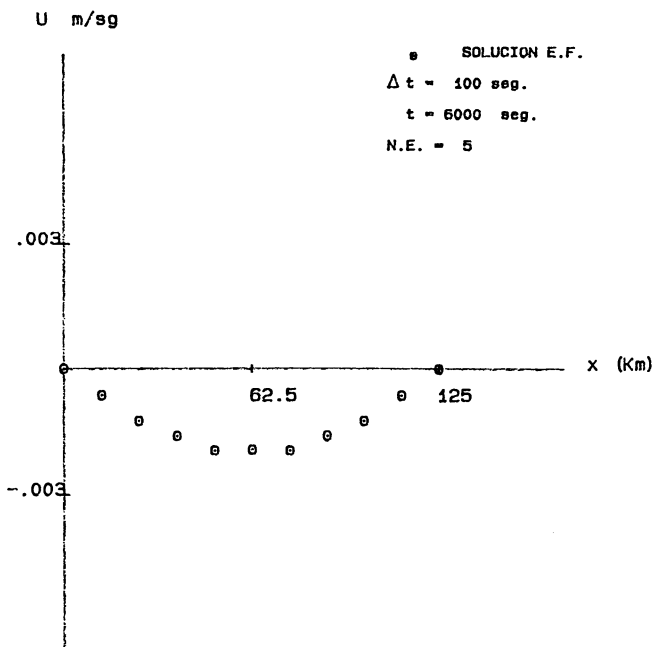


Figura 4.—Lago rectangular. U (x) para t = 6.000 sg.

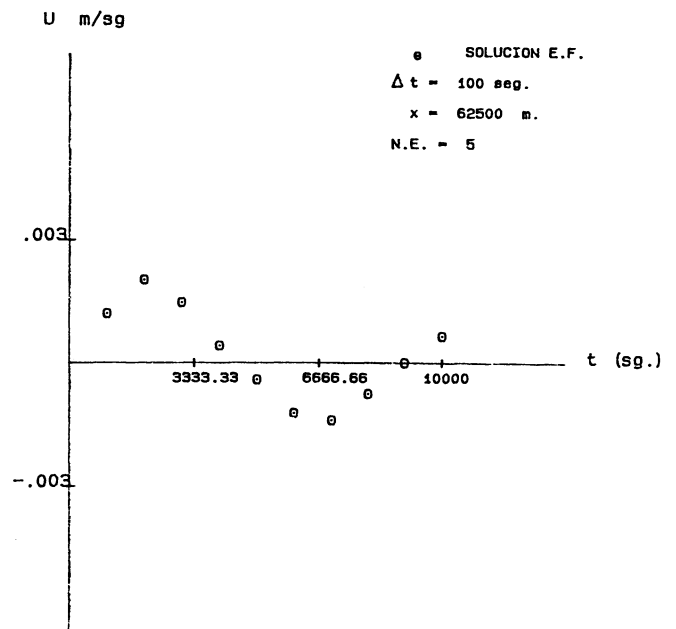


Figura 5.—Lago rectangular. U (t) a x = 62.500 m.

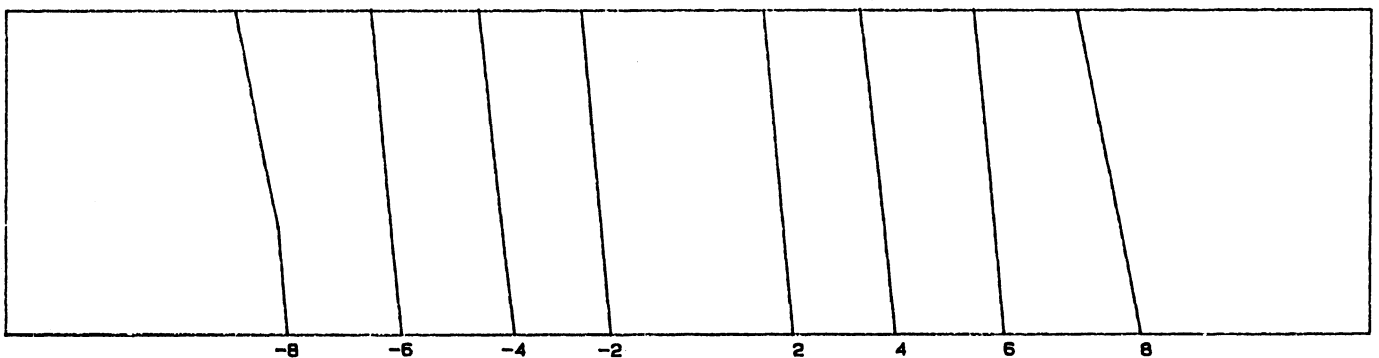


Figura 6.—Lago rectangular. Líneas de nivel.

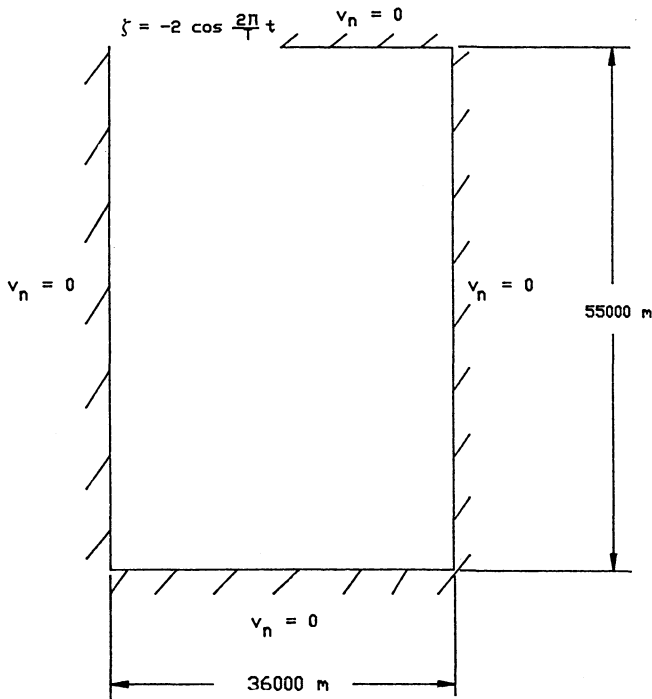


Figura 7.—Bahía rectangular. Geometría.

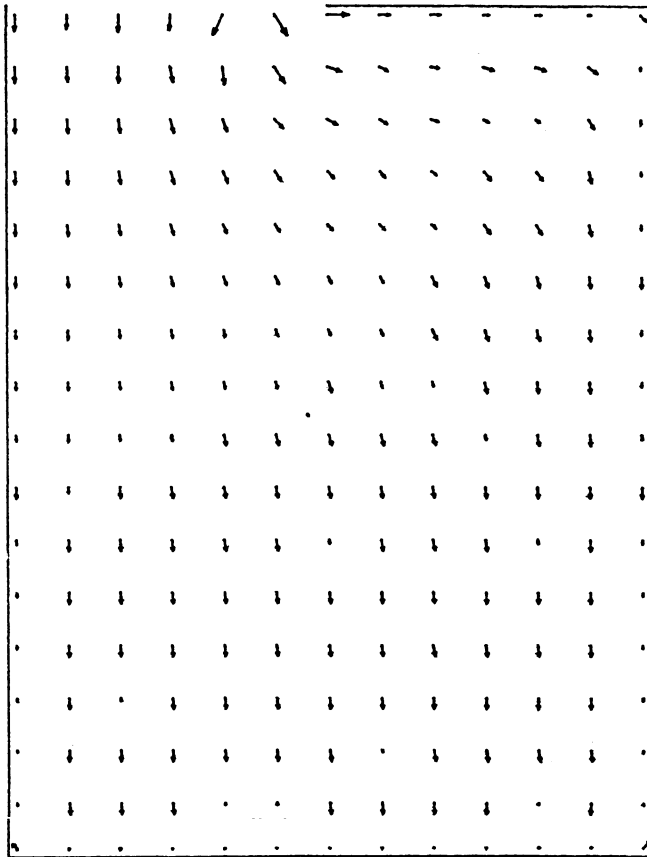


Figura 8.—Bahía rectangular. Campo de velocidades para $t = 20.000$ sg.

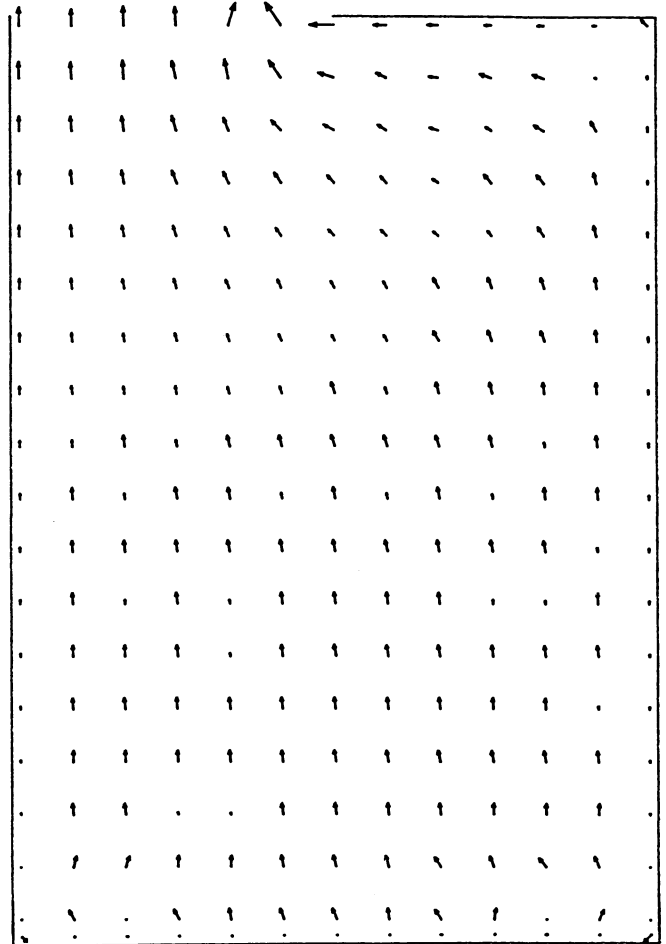


Figura 9.—Bahía rectangular. Campo de velocidades para $t = 40.000$ sg.

toman los siguientes datos: Coeficiente eólico $K = 1$, velocidad del viento $W = 10^{-2}$ m/sg según la dirección del eje X , factor de Coriolis $f \times 10^{-1}$ sg^{-1} y coeficiente de Chezy $C = 10^{10}$ $m^{1/2}/sg$. La malla usada para encontrar la solución numérica se muestra en la figura 3 y está compuesta por cinco elementos y 33 nudos. Las figuras 4 y 5 muestran las respectivas representaciones gráficas de V en función de x en el instante $t = 6.000$ sg y V en función de t para $x = 62.500$ m. Finalmente la figura 6 muestra las curvas de nivel en las que se evidencia el efecto Coriolis.

Caso 2.—*Bahía rectangular*.—Este caso corresponde a la bahía rectangular mostrada en la figura 7. Sus dimensiones son 36.000×55.000 m y su profundidad es de 36 m. La entrada de la bahía está situada al oeste de su borde norte y su longitud es de 18.000 m. La malla de elementos finitos usada tiene 54 elementos y 247 nudos. La amplitud de la marea es de 2 m, su período $T =$

12,4 h., el coeficiente de Chezy $C = 10 \text{ m}^{1/2}/\text{sg}$ y tomamos $\Delta t = 20 \text{ sg}$.

Los resultados se muestran en las figuras 8 y 9 para los instantes $t = 20.000 \text{ sg}$ y $t = 40.000 \text{ sg}$, respectivamente.

5. APLICACION A LA BAHIA DE SANTANDER

El modelo ha sido aplicado a la Bahía de Santander. La geometría de esta Bahía se muestra en la figura 10 y los datos de las profundidades en los diferentes puntos han sido obtenidos de las cartas editadas por la Junta del Puerto. La malla de E. F. utilizada está compuesta por 77 elementos con 355 nudos. Se han tomado los siguientes datos adicionales: coeficiente eólico $K = 10^{-5}$, velocidad del viento $W = 3 \text{ m/sg}$ en la dirección $\psi = \pi/4$, coeficiente de Chezy $C = 5 \text{ m}^{1/2}/\text{sg}$ y factor de Coriolis $f = 0$. Las condiciones de contorno impuestas son:

- i) Nudos del borde norte: $\zeta = -2.0 \cos \frac{2n}{44640} t$
- ii) Nudos del borde sur: $v = 0$
- iii) Borde de tierra: $v_n = 0$

Las figuras 11 y 12 muestran el campo de velocidades para $t = 20.000 \text{ sg}$ (marea entrante) y $t = 30.000 \text{ sg}$ (marea saliente).

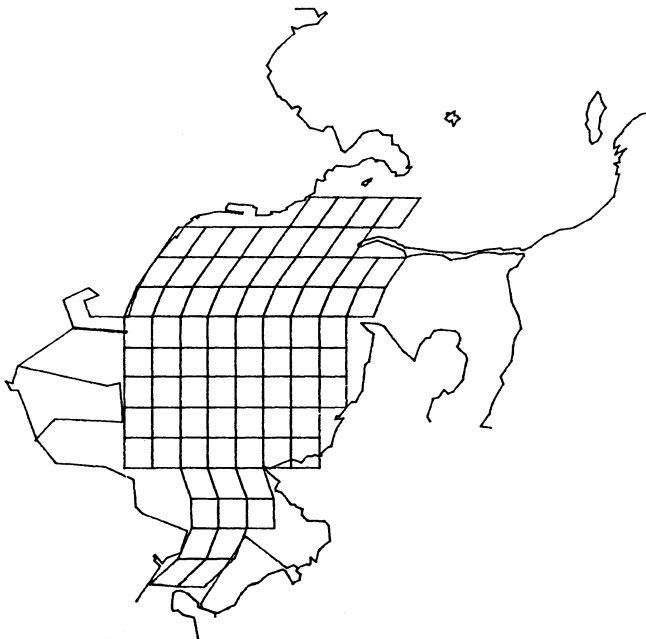


Figura 10.—Bahía de Santander.

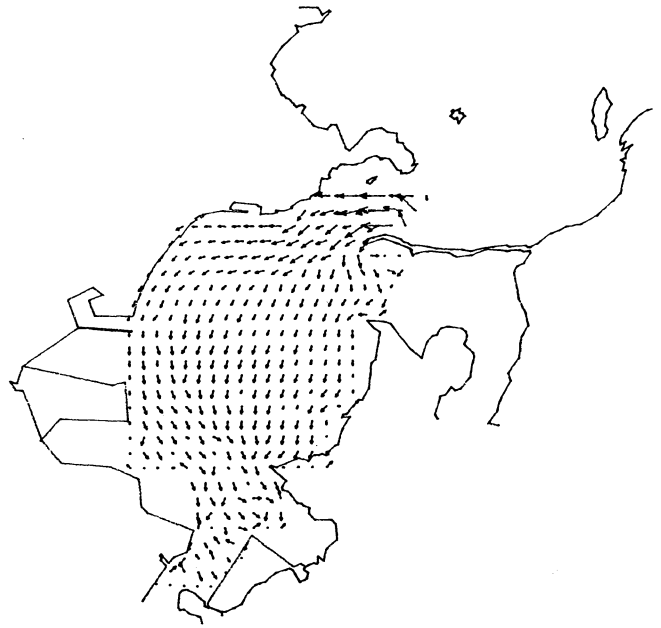


Figura 11.—Bahía de Santander. Campo de velocidades para $t = 20.000 \text{ sg}$.

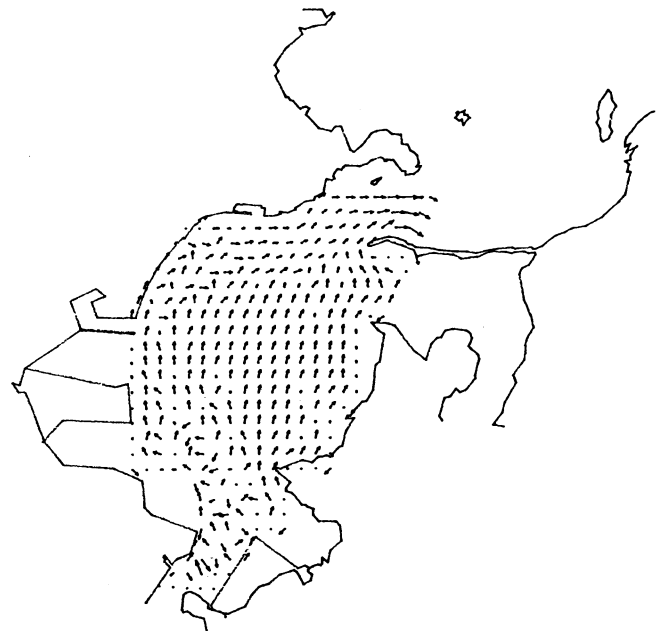


Figura 12.—Bahía de Santander. Campo de velocidades para $t = 30.000 \text{ sg}$.

6. CONCLUSIONES

De la aplicación del modelo descrito se han deducido las siguientes conclusiones:

El esquema utilizado para la integración espacial de Simpson simplifica la construcción del sis-

tema global de ecuaciones y reduce la computación de la matriz elemental a una fórmula de un punto.

La aplicación del modelo a problemas con un gran número de nudos o pequeños intervalos de tiempo ($\Delta t \ll T$), exige el uso de ordenadores de alta velocidad.

Desde el punto de vista de la eficiencia computacional, este modelo es comparable con los métodos en diferencias finitas.

Es necesario incluir los términos disipativos no lineales, ya que su eliminación produce soluciones inestables.

Las soluciones obtenidas en la parte sur de la Bahía de Santander, pueden mejorarse usando una malla de E.F. más fina y haciendo que el ordenador realice varios ciclos de marea.

7. REFERENCIAS

- 1.—STOER, J., y BULIRSCH, R.: "Introduction to Numerical Analysis". Springer-Verlag. 1980.
- 2.—SMITH, A. S., SIEMIENICH, J. L., y GLADWELL, I.: "Evaluation of Noret methods for integrating differential equations in time". Int. Jour. for Num. and Analytical Methods in Geomechanics. John Wiley and Sons. 1977.
- 3.—ZIENHIEWICK, O. C.: "Finite element and approximation". Wiley-Interscience. 1983.
- 4.—PRITCHARD, D. W.: "Dispersion and flushing of pollutants in estuaries". Journal of the Hydraulics Division. ASCE. Vol. 95. No. HY1. 1969.
- 5.—TABUENCA, P., y CARDONA, J.: "Modelo de circulación de corrientes basado en el método de los elementos finitos. Aplicación a la Bahía de Santander". X Congreso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionales em Engenharia. II Encontro Nacional de Mecânica Computacional. Porto. 25-27 Setembro. 1989.

