

Optimización de mallas bidimensionales en elementos finitos (*)

Por RUBEN MARTINEZ

Ingeniero de Caminos. Dpto. Estructuras ETSICCP. Madrid

AVELINO SAMARTIN

Catedrático Dpto. Estructuras ETSICCP. Madrid

La solución al problema de encontrar la malla óptima en Elementos Finitos (EF), con un determinado número de grados de libertad, presenta un indudable interés en la aplicación del método.

En la actualidad, el problema se plantea en términos de un proceso que permite obtener una mejor malla de elementos finitos a partir de una inicial. La nueva malla se diseña matemáticamente (remallado) de forma que el error del método sea lo más uniforme posible en todo el dominio de cálculo. Sin embargo, esta técnica de indudable interés y aplicación, al aumentar el número de grados de libertad (gdl) de la aproximación, no permite deducir de un modo directo el problema de la malla óptima condicionada a un número fijo de gdl. Con la solución de este problema se podrán deducir algunos criterios y recomendaciones para el diseño de una malla de elementos finitos, que exigirá, en general, en un proceso de remallado, modificaciones menores.

Para problemas unidimensionales (barras y pilares simples), se pueden encontrar soluciones analíticas. Para problemas 2-D más complicados (tensión y deformación plana), se han utilizado métodos numéricos para obtener la malla óptima.

Existen varios criterios de optimización, aquí, se utiliza el del mínimo de la energía potencial total (EPT). Algunos ejemplos ilustrativos del método de optimización se presentan, indicándose algunas conclusiones.

INTRODUCCION

El Método de los Elementos Finitos (MEF) constituyen una muy eficiente técnica para resolver problemas de carácter muy general, existiendo multitud de programas basados en este método.

Debido al extraordinario desarrollo de este método, ciertos problemas que presenta, deben ser analizados minuciosamente. En general, estos problemas están relacionados con el grado de exactitud de los resultados. De hecho, durante la pasada década, se han realizado esfuerzos considerables para determinar la bondad de los resul-

tados y obtener algunas estimaciones prácticas del error producido en los resultados de un cálculo por Elementos Finitos (referencias [1], [2] y [3]). La decisión del usuario en la colocación de los nodos influye de manera directa en la magnitud del error.

Actualmente, existen ciertas investigaciones, dirigidas a conseguir métodos automáticos de refinamiento de una malla existente introduciendo nuevos grados de libertad (más nodos o polinomios de mayor grado en algunos elementos). Se considera una malla mejorada, aquella en la que la distribución de los errores es más uniforme.

En este artículo, se tratará de obtener una malla óptima conservando el mismo número de grados de libertad, siendo la posición de cada nodo la incógnita a resolver. De la solución del

(*) Se admiten comentarios sobre el presente artículo que podrán remitirse a la Redacción de esta Revista hasta el 31 de julio de 1991.

problema pueden extraerse algunas recomendaciones y reglas a la hora de diseñar una malla de elementos finitos.

La referencia [4], puede considerarse pionera en el estudio del análisis del error en EF. Parece existir alguna relación entre la posición de los nodos y la densidad de energía de deformación (referencias [6] y [7]).

PROBLEMAS 1-D. SOLUCION ANALITICA

Un primer grupo de problemas que puede ser resuelto mediante métodos analíticos, son los problemas unidimensionales de clase C^0 . La barra sometida a esfuerzos axiales, es un ejemplo muy conocido de este tipo de problemas. En el caso de una barra con sección constante, es obvio, que la solución óptima corresponde a una distribución de nudos equidistantes. Cuando la barra es de sección variable la solución no es conocida de antemano. Se estudiará el caso más simple de variación lineal de la sección.

El problema a resolver, representado en la figura 1, se formula matemáticamente, de la siguiente forma:

La ecuación en el dominio es:

$$\frac{d}{dx} (EA \frac{du}{dx}) = p(x) \quad \text{para } x \in (0,L) \quad [1]$$

Las condiciones de contorno esenciales son:

$$\begin{aligned} u &= u_1 & \text{para } x &= 0 \\ u &= u_2 & \text{para } x &= L \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno naturales son:

$$\begin{aligned} EA \frac{du}{dx} &= -p_1 & \text{para } x &= 0 \\ EA \frac{du}{dx} &= p_2 & \text{para } x &= L \end{aligned}$$

En este caso particular, la variación de la sección viene dada por la ecuación:

$$A(x) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{L} x$$

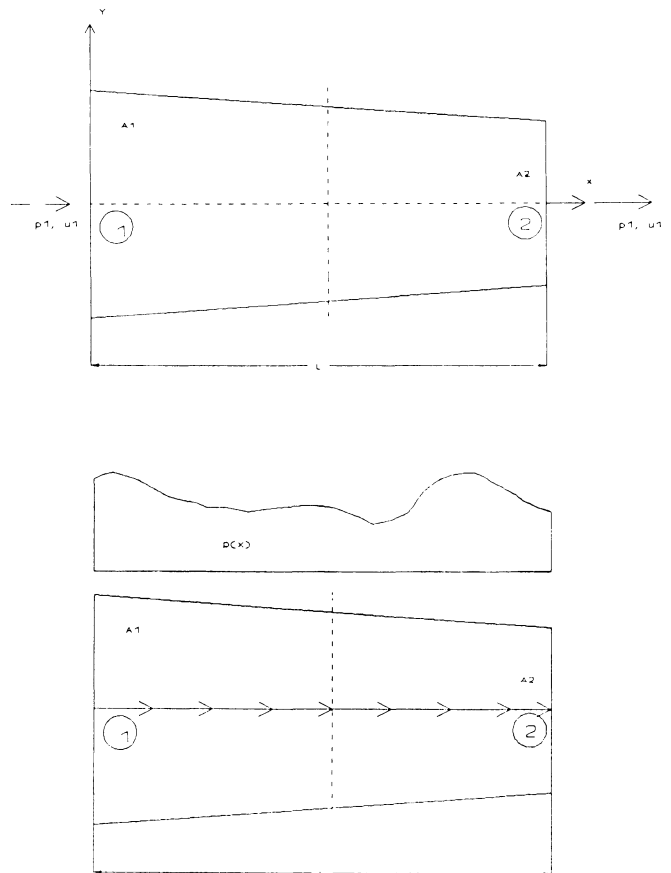


Figura 1

Los principales resultados de este problema se resumen a continuación:

Matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = E \frac{\bar{A}}{L} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad [1]$$

solución inicial correspondiente al caso de carga constante, $p(x)=q$ (constante), distribuída a lo largo de ella, $(0,L)$, y con desplazamientos nulos en los extremos ($u_1=0, u_2=0$)

$$\begin{bmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{bmatrix} = q L \begin{bmatrix} 1-\bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad [2]$$

donde las constantes h y p vienen definidas por las expresiones:

$$\bar{h} = \frac{2\mu}{\ln\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)}$$

$$\bar{p} = \frac{\mu+1}{2\mu} - \frac{1}{\ln\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)}$$

y la variación de la sección puede ser descrita por las constantes:

$$A = \frac{A_1+A_2}{2}$$

$$\mu = \frac{A_1-A_2}{A_1+A_2} \quad (-1 \leq \mu \leq 1)$$

Nótese que el caso de sección constante corresponde a los valores $\mu=0$ y las situaciones $A_1/A_2 \rightarrow \infty$ y $A_2/A_1 \rightarrow \infty$ vienen dadas por los valores $\mu = -1$ y $\mu = +1$ respectivamente.

La solución aproximada a este problema mediante el método de los Elementos Finitos usando elementos lineales 1-D con dos nodos, se ha comparado con la exacta, dichos resultados se han obtenido en la referencia [7], habiéndose realizado un resumen en el presente artículo.

(1) Malla de dos nodos (un elemento simple)

Los resultados de h y p son independientes de μ

$$\bar{h} = 1; \bar{p} = \frac{1}{2}$$

(2) Malla de tres nodos (dos elementos iguales)

Los resultados son en este caso:

$$\bar{h} = 1 - \frac{\mu^2}{4}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{8}$$

Los nodos están situados en $x=0$, $x=L/2$ y $x=L$.

(3) Malla de tres nodos (dos elementos distintos)

La posición óptima del nodo central viene dada por

$$x = \frac{L}{2} \left[1 + \frac{1}{\mu} (\sqrt{1-\mu^2}-1) \right]$$

siendo los parámetros:

$$\bar{h} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1-\mu^2})$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{1-\mu^2}}{4\mu}$$

(4) Malla de N nodos ($N-1$ elementos iguales).

Los resultados son:

$$\bar{h} = \frac{N-1}{S}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{N-1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N-i}{a_i} \right)$$

donde

$$a_i = \frac{1}{1-\mu + \frac{2i-1}{N-1}\mu}$$

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} a_i$$

Casos particulares.

Para $N=2$ y $N=3$ los resultados ya se han visto en (1) y (2)

Para $N=4$ (3 elementos iguales)

$$\bar{h} = 1 - \frac{4\mu^2}{27-4\mu^2}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu}{27-4\mu^2}$$

Para $N=5$ (4 elementos iguales)

$$\bar{h} = 1 - \frac{\mu^2(5-9\mu^2)}{16-5\mu^2}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{\mu(5-9\mu^2)}{2(16-5\mu^2)}$$

Para $N=6$ (5 elementos iguales)

$$\bar{h} = 1 - \frac{8\mu^2(125-32\mu^2)}{3125-1500\mu^2+64\mu^4}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{4\mu(125-32\mu^2)}{3125-1500\mu^2+64\mu^4}$$

Se puede comprobar que si $N \rightarrow \infty$ se obtiene la solución exacta de h y de p .

(5) Malla de N nodos ($N-1$ elementos distintos).

La posición de los nodos intermedios para la malla óptima corresponde a la separación $\Delta\lambda_i$ entre dos nodos consecutivos i y $i+1$ (longitudes de los elementos) y viene dada por las siguientes expresiones:

$$\Delta\lambda_i = a^{-1}\rho(1+\rho)^{i-1} \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N-1$$

donde

$$a = \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\rho = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1$$

Los valores de los parámetros h y p son, para el caso general:

$$\bar{h} = \frac{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \frac{\mu}{N-1}$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \left[1 - \frac{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} + 1}{\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{N-1}} - 1} \right]$$

Para el caso particular $N=3$, los resultados vienen dados por (3).

Los valores exactos de h y p se obtienen, en este caso, cuando el número N de nodos tiende al infinito.

Los resultados anteriores han sido calculados usando la Energía Potencial Total de la barra, como criterio de optimización, para encontrar la posición óptima de los nodos.

PROBLEMAS 2-D. SOLUCION NUMERICA

Contrariamente a los problemas 1-D, en este caso no existen soluciones exactas, ni siquiera para los problemas C^0 , de hecho, se deben resolver por métodos numéricos.

Matemáticamente el problema se plantea de la siguiente forma: la energía potencial total viene dada por la expresión:

$$V = U - W = U + U_e$$

donde

$$U = \text{energía de deformación} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$$

$$U_e = \text{energía potencial} = \int_V f_i u_i dV + \int_A p_i u_i dA$$

σ_{ij} , ϵ_{ij} son las componentes de las tensiones y deformaciones lineales.

f_i , p_i son las fuerzas másicas y fuerzas externas.

u_i son las componentes de los desplazamientos.

La discretización en EF de la expresión anterior es:

$$V = \frac{1}{2} d^T K d - d^T p \quad [3]$$

donde K es la matriz de rigidez de la estructura, d el vector desplazamiento y p el vector de fuerzas aplicadas en los nodos. El mínimo de [3] viene dado por las ecuaciones:

$$\frac{\delta V}{\delta d} = 0, \text{ i.e. } K d = p \quad [4]$$

siendo el valor

$$V_{\min} = -\frac{1}{2} d^T p$$

Cuando la posición de los nodos no viene dada de antemano, tanto la matriz de rigidez de la estructura como el vector de cargas dependen de dichas coordenadas, pudiendose obtener el mínimo de V mediante el conjunto de ecuaciones

$$\frac{\delta V}{\delta d} = 0, \text{ i.e. } K d = p$$

$$\frac{\delta V}{\delta r} = 0; \text{ i.e. } d^T \frac{\delta K}{\delta r} d - d^T \frac{\delta p}{\delta r} = 0 \quad [5]$$

donde r es el vector de coordenadas.

Para resolver, de una forma adecuada, el conjunto de ecuaciones no lineales [5], se ha utilizado un método numérico paso a paso.

En el paso i , la posición actual de los nodos se supone conocida, la solución elástica d_i se obtiene del conjunto de ecuaciones

$$K_i d_i = p, \text{ i.e. } d_i = K_i^{-1} p$$

donde

$$K_i = K(r_i)$$

La energía potencial total V_i se calcula mediante la expresión

$$V_i = -\frac{1}{2} d_i^T p = V(r_i)$$

la nueva posición de los nodos r_{i+1} se obtiene de

$$r_{i+1} = r_i + \lambda \left(\frac{\Delta V}{\Delta r} \right)_i \quad [6]$$

donde $\Delta V/\Delta r$ es una aproximación a la primera derivada parcial de la energía potencial total en la configuración r_i , con respecto a las diferentes coordenadas de los nodos.

Los valores de $(\Delta V/\Delta r)_i$ en la configuración r_i se obtienen numéricamente para cada componente j de r_{ij} del vector r_i mediante

$$\text{componente } j \text{ de } \left(\frac{\Delta V}{\Delta r} \right)_i = \frac{V(r_i + \Delta r_{ij}) - V(r_i)}{\Delta r_{ij}} \quad [7]$$

donde r_{ij} es el incremento de la componente j del vector r_i .

El valor del parámetro λ positivo, se consigue mediante consideraciones sobre el nivel de precisión requerido en el análisis. Este método de optimización no lineal es conocido como "el método del gradiente descendente".

APLICACION

Basado en la metodología expuesta anterior-

mente, se ha escrito un programa en FORTRAN, introduciéndose algunas simplificaciones para acortar el tiempo de computación.

En primer lugar al evaluar [7] la primera derivada parcial de la energía potencial total V respecto a las componentes del vector r_i , el valor de $V(r_i + \Delta r_{ij})$ se obtiene de la expresión

$$V(r_i + \Delta r_{ij}) = \frac{1}{2} d_{ij}^T p$$

donde d_{ij} se calcula como una solución aproximada a la ecuación

$$K_{ij} d_{ij} = p \quad [8]$$

y

$$K_{ij} = K(r_i + \Delta r_{ij})$$

el vector desplazamiento d_{ij} se calcula mediante el método de Gauss-Seidel aplicado a la ecuación [8], partiendo de un estado inicial conocido, se calculan los desplazamientos d_i correspondientes al estado $r_i + r_{ij}$.

Una segunda simplificación consistió en usar el programa de optimización junto con un programa de mallado automático, preprocesador de EF, que con un pequeño número de parámetros (m_1, m_2, \dots, m_n), permite obtener toda la malla. De esta forma el número de r_i desconocidos se reduce drásticamente al número de parámetros generadores de la malla.

RESULTADOS

Para comprobar la eficiencia y posibilidades del programa, se ha analizado un ejemplo muy simple correspondiente a una placa rectangular de dimensiones:

Longitud:	10 m
Altura:	5 m
Espesor:	0.1 m

Las propiedades del material son:

Módulo de Young:	29.43 EO9 NW/m ²
Coefficiente de Poisson:	0.2
Densidad relativa:	2.5

Las acciones corresponden al peso propio y

una carga uniformemente repartida en la cara superior de 49050 Nw/m.

Se ha realizado una malla de 84 nodos, con un estado inicial tal como se representa en la figura 2. La energía potencial total correspondiente a este estado es $V = -40.22$ j. Utilizando como incógnitas los parámetros generadores de la malla, la óptima es la mostrada en la figura 3, cuya energía potencial total es de $V = -48.22$ j.

Utilizando como incógnitas todas las coordenadas de los nodos, se ha realizado un procedimiento de optimización, para poder evaluar la bondad del método anterior. La malla óptima calculada en este segundo paso corresponde a la mostrada en la figura 4, cuya energía potencial total es $V = -54.93$ j.

En dicha figura se observa que la malla adopta una configuración similar a las líneas isostáticas (tensiones principales).

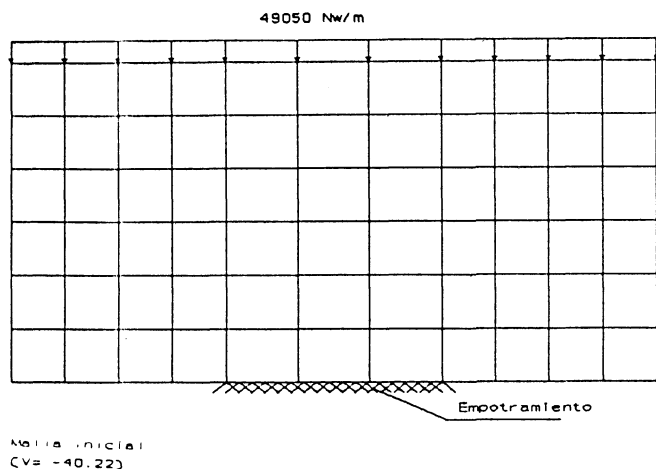


Figura 2

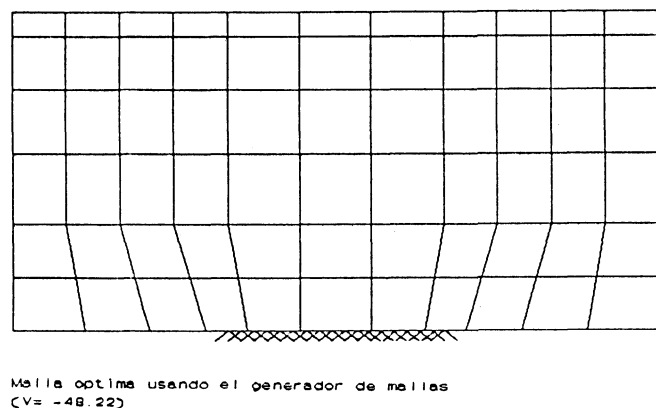


Figura 3

Se han estudiado otros muchos casos, para analizar las propiedades de la malla óptima. Algunos de estos casos se muestran en la figura 5, y los resultados obtenidos se han resumido en la tabla que figura a continuación. Por otra parte se ha calculado la energía potencial total para el caso exacto como la correspondiente a la solución de un modelo de más de 500 nodos.

Energía Potencial Total (fig. 5)

Caso	Malla Uniforme	Malla Optima	Dif. (%)	Dif. con la exacta (%)
1	-210.71 j	-230.14 j	9.21	15.56
2	-225.33 j	-255.14 j	13.23	16.54
3	-20.79 j	-27.66 j	33.04	18.05
4	-94.07 j	-110.05 j	16.98	17.09
5	-40.22 j	-54.93 j	36.57	15.79
6	-52.05 j	-58.97 j	13.29	17.35
7	-99.86 j	-115.88 j	16.04	13.50
8	-100.78 j	-120.78 j	19.84	17.99

Por último, en la figura 6, se muestra un ejemplo más complicado pudiendose observar el estado inicial y la malla óptima, así como sus energías correspondientes.

RECOMENDACIONES

Después de haber analizado un número elevado de casos se pueden tentativamente indicar algunas sugerencias y recomendaciones en relación con el diseño de la malla para el cálculo por Elementos Finitos.

En primer lugar, la malla debería ser más

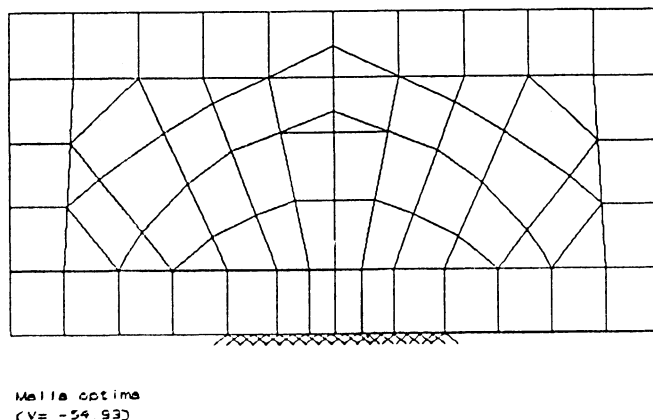


Figura 4

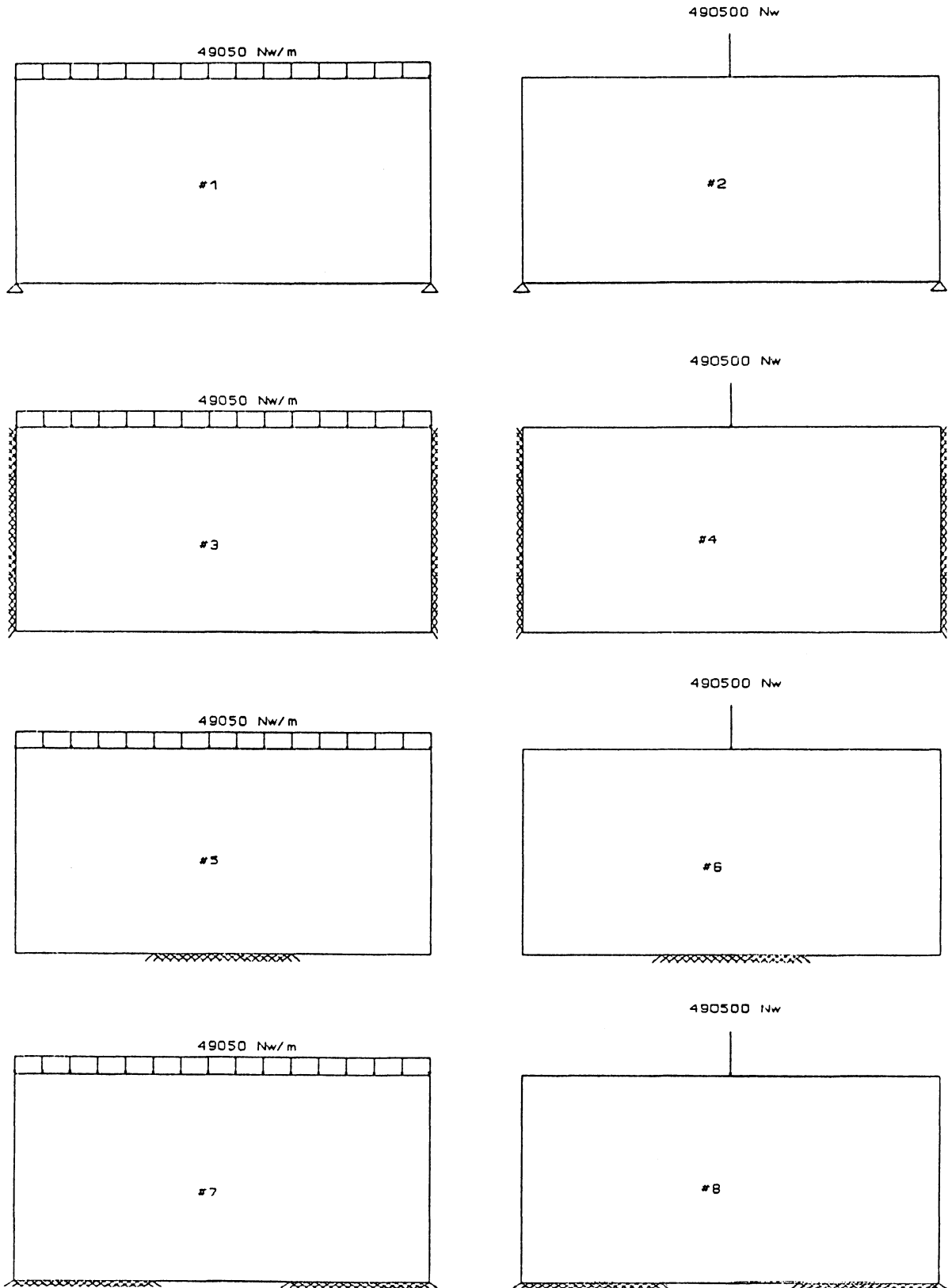


Figura 5

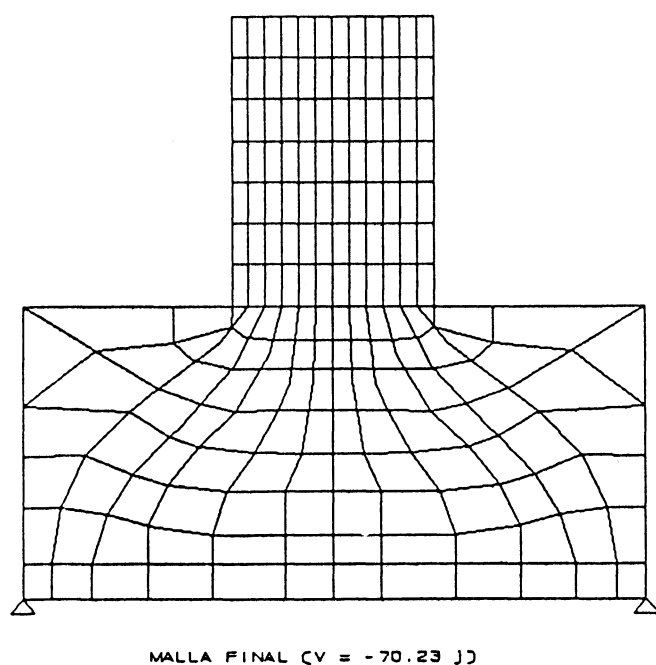
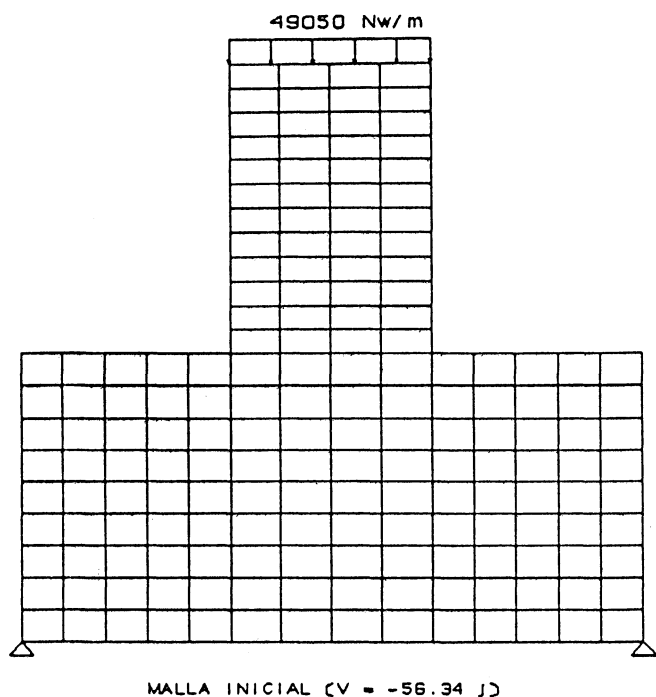


Figura 6

densa en las zonas donde se produzcan discontinuidades (geométricas, cargas concentradas, fuerte gradiente de tensiones, etc).

Por otra parte, puede ser interesante adaptarse, en la configuración de la malla, a las líneas isostáticas, de tal forma que los nodos se sitúen próximos a las líneas isostáticas o envolventes de las tensiones principales. Este punto está siendo ahora investigado para comprobar su validez general.

También se está estudiando el uso de otros funcionales alternativos al de la energía potencial total y comprobar los resultados obtenidos.

BIBLIOGRAFIA

[1] BABUSKA, I. "The p and h-p versions of the Finite Element Method. The state of the art". Ins. for Phys. Sc. and Tech. Note BN-1156. University of Maryland. (1986)

[2] BABUSKA, I., ZIENKIEWICZ O.C., GAGO J. and OLIVEIRA E. "Accuracy Estimates and Adaptatives Refinement in Finite Element Computation". John Wiley. Chichester. (1986)

[3] ZIENKIEWICZ O.C. and ZHU J.Z. "Error Estimates and Adaptivity. The Essential Ingredients of Engineering FEM Analysis" 2nd Conference on FEM. Stratford upon Avon. May. U.K. (1989)

[4] MC NEICE B.M. and MARCAL P.V. "Optimization of Finite Element Grid Based on Maximum Potential Energy". Tecn. Reprot no. 7. University of Brown. Providence. (1971)

[5] TURCKE D.J. and MC NEICE B.M. "Guidelines for Selecting Finite Element Grids Based on an Optimization Study". Computers and Structures. Vol 4. (1974)

[6] SHEPHARD M.S., GALLAGHER R.H. and ABEL J.F. "The Synthesis of Near Optimum Finite Element Meshes with Interactive Computer Graphics". Int. J. Num. Meth, Eng. Vol 15. (1980)

[7] SAMARTIN, A. "Un estudio sobre la exactitud del método de los Elementos Finitos. Aplicación a la barra recta de sección variable bajo acciones axiales". Departamento de Análisis de las Estructuras. ETSICCP. Santander. (1980)

[8] JOE F. THOMPSON, Z.V.A. WARSI and WAYNE MASTIN. "Numerical grid generation. Foundations and aplicaciones". Mississippi State University. USA. April. (1982)