

## El nudo extenso: sobre cómo resolver un error común en los programas de análisis matricial de estructuras de barras, escritos para el proyecto de estructuras que suelen ser de hormigón armado.

Jaime Cervera Bravo  
Dr. Arquitecto  
Catedrático de Universidad  
Departamento de Estructuras de Edificación  
Escuela Técnica Superior de Arquitectura  
Universidad Politécnica de Madrid

### LOS PROGRAMAS DE ANALISIS Y ARMADO PARA HORMIGON

José Luis De Miguel, Catedrático de la ETSAM, ha mostrado, en un reciente y certero opúsculo distribuido entre los profesores de la ETSAM, la total inadecuación de los programas de análisis al uso para la peritación de estructuras, y para el control del proyecto de estructuras.

De Miguel muestra, en dicho artículo, cómo la mayor parte de los programas existentes, ya sean comerciales, ya sean de propiedad y uso exclusivo de organizaciones o empresas privadas, aunque pueden considerarse *adecuados* como herramientas auxiliares, de utilidad en los problemas del proyecto de las estructuras de hormigón armado, no son de ningún modo correctos para verificar la adecuación —estabilidad, resistencia o rigidez— de tales estructuras, **dada su incapacidad para representar correctamente la geometría de la estructura, lo que hace que sus resultados violen casi sistemáticamente las meras condiciones de equilibrio.**

De los programas que De Miguel cita, todos menos el STRUDL presentan tales problemas, de los que paso a señalar los dos más importantes:

1. Tales programas son incapaces de describir, de manera natural, los descentramientos de soportes, en plantas sucesivas, derivados de las leyes de crecimiento reales de los soportes que casi sistemáticamente lo son a caras fijas, tanto en fachadas, como en regiones sensibles en las distribuciones de la planta —junto a habitaciones técnicas, etc.—. Esto hace que los esfuerzos obtenidos para los nudos de fachada en los que hay tal descentra-

miento, correspondan a valores que no proporcionan el equilibrio en la geometría real de la estructura, con errores muy considerables en los momentos por carga gravitatoria en soportes —el error puede ser del mismo orden de magnitud que el valor obtenido—.

2. Asimismo, los programas citados son incapaces de definir con precisión las luces efectivas de las piezas cuando en el nudo concurren barras de canto relativo muy diferente. Esto es de la mayor importancia en el análisis de la rigidez, y por lo tanto, el de la deformación de las vigas esbeltas que acometan a soportes de cierta dimensión.

En la figura 1 siguiente, se observa la geometría de ambos problemas: en el primero, el descentramiento de normales supone un momento que resultará desequilibrado tras el análisis si no se ha considerado dicho descentramiento en el programa —que es lo usual—. En el segundo, la luz con que se analiza la rigidez de las piezas puede ser irreal, puesto que la existencia del nudo supone una coacción muy importante al desplazamiento y a la deformación.

Parece evidente que la solución al primero de los errores exige considerar rigurosamente la geometría real —empleando las directrices reales de la estructura, y por lo tanto, contando con la existencia del descentramiento en el nudo—.

La solución al segundo de los errores está acordada y consensuada normativamente: la norma del hormigón que convenimos en emplear, establece como luz efectiva la que sea menor de los dos valores siguientes: la luz entre ejes, o la luz

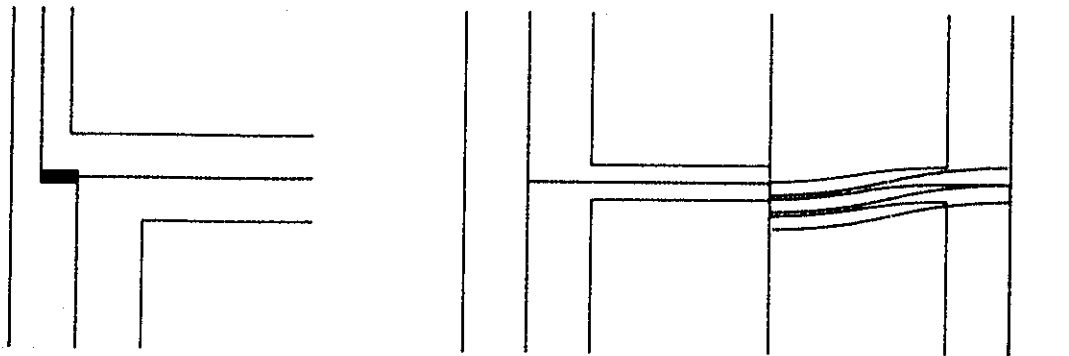


Fig. 1. Problemas incorrectamente representados en los programas de análisis matricial. En el primero, no se considera el descentramiento de las secciones en el equilibrio, por lo que los resultados no están en equilibrio en la geometría real; en el segundo, las luces efectivas pueden suponer una rigidez mucho mayor de la considerada: el dibujo muestra las deformadas con idénticas curvaturas para dos interpretaciones diferentes de la luz.

neto más un canto —lo que interpretado para cada extremo, supone que la luz de la viga penetra en el soporte la cantidad que sea menor: bien la distancia necesaria hasta su eje, bien medio canto de la viga considerada—.

Hay que hacer constar que este segundo problema es un tema clásico en la literatura sobre análisis matricial de estructuras apantalladas con huecos —los clásicos núcleos de hormigón perforados para los pasos de los accesos al hueco de ascensores en cada planta, etc. Véase, por ejemplo, (1)— y por ello resulta ahora curioso que la solución que se propone en este artículo no esté ya generalizada. Pues en efecto, y tratándose como aquí se hace de un problema de sistemas de referencia, su sencillez podría haber generalizado su empleo desde hace tiempo.

Cómo incorporar de modo concreto las dos decisiones apuntadas más arriba en los programas de análisis matricial es algo que podría considerarse relativamente clásico —como sugiere la estrategia del programa STRUDL—, pero no se

encuentra descrito en la literatura de análisis matricial al uso. Véase (2), por ejemplo, capítulos 3 y 4, o cualquier otro texto de análisis matricial reciente, como (3). Por ello, el problema ha pasado hasta ahora desapercibido en la formulación utilizada para redactar tales programas.

Pueden sugerirse muchas alternativas, aunque todas ellas deberán llevar a la misma descripción algebraica del problema. Prever la existencia de trozos de barras extremadamente rígidas en los extremos de las que no alcanzan al eje de las demás piezas es una de las estrategias que reclaman mayores devociones, como es clásico en la ya citada literatura sobre estructuras apantalladas: véase, por ejemplo, la referencia (1), y en particular el capítulo 10. A mi juicio, se trata de un recurso artificioso totalmente innecesario: lo natural es aceptar la existencia independiente de los extremos de las barras, en sus posiciones geométricas correctas —sobre la directriz— o convenientes, —como en el caso del medio canto con que las vigas penetran en las pantallas. De este modo, en general, todas las barras que concurren en un

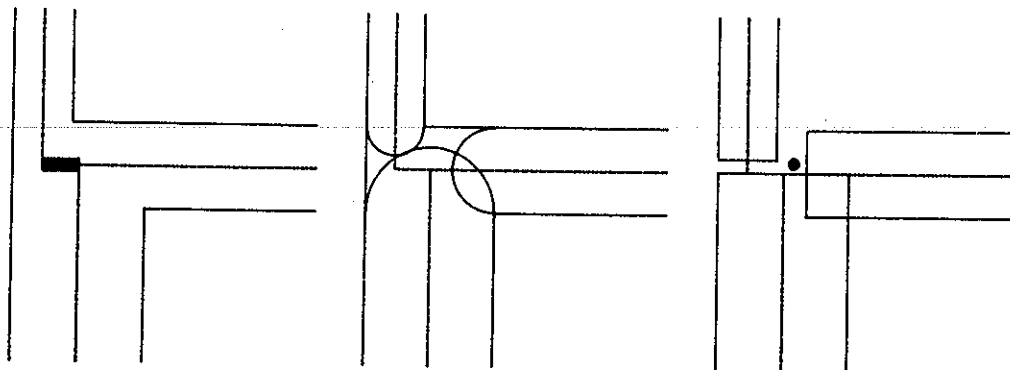


Fig. 2. Configuración convencional de los nudos. Pueden observarse las directrices, la posición del medio canto de las piezas, y posiciones convenientes para los extremos de las barras y para el nudo. Las coordenadas de los extremos de las barras y las del nudo son, en general, diferentes.

nudo tendrán sus extremos en puntos diferentes del mismo.

Aceptado tal hecho, bastará adoptar como punto para el análisis del equilibrio y del movimiento del nudo en que las barras se conectan, un punto cualquiera de conveniencia —empleando palabras de De Miguel al referirse a la estrategia del programa STRUDL—. Es decir, el nudo se representa por un punto arbitrario, al que se refiere rigurosamente toda la geometría y mecánica de las barras que acometen al mismo. El nudo mismo se interpreta como un sólido rígido.

En las líneas que siguen se muestra, con algún detalle, cómo puede emplearse dicha estrategia.

## ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS DE BARRAS, CON EMPLEO DE LA GEOMETRÍA REAL DE LA ESTRUCTURA

### Geometría

Para definir todas y cada una de las barras, se emplean las coordenadas de ambos extremos, que se situarán sobre la directriz real de la pieza, y a una distancia hacia el interior del nudo que no exceda del eje de cualesquiera otras de las barras que a él acometen, o de medio canto de la pieza misma<sup>(1)</sup>. Las denotaremos por  $C_{ei}^e$ , donde el superíndice  $e$  denota pieza, o elemento, y los subíndices  $e, i$ , denotan, respectivamente, el extremo, 0 o 1 considerado, y la componente coordenada pertinente, en 2D, o 3D.

Para definir los nudos se emplea, en primer lugar, y como es lógico, la conectividad que exista en ellos, es decir, la lista de barras conectadas al mismo; pero ahora será esencial identificar cuál es el extremo de éstas que se conecta. Además, se definirá una coordenada de conveniencia para el nudo mismo —un análisis ulterior podría matizar si existe un punto especialmente adecuado desde el punto de vista de la estabilidad numérica de la formulación, pero en principio, disponiendo de precisión numérica suficiente, nada impediría adoptar para todos los nudos de la estructura un mismo punto como coordenada de conveniencia, por ejemplo, el origen de coordenadas elegido para la estructura. Esta idea es la más elegante desde la perspectiva formal, pero parece claro que podría presentar problemas numéricos, por lo que en lo que sigue se elegirán coordenadas arbitrarias para cada nudo de la estructura, cercanas a las

posiciones de los extremos que acometen al mismo<sup>(2)</sup>—. Denotaremos las coordenadas de cualquiera de los nudos de la estructura por  $C_i^E$ , de significado evidente.

En cada extremo  $e$  de una barra dada se produce, en general, por lo tanto, un desfase entre las coordenadas del nudo, designadas por conveniencia, y las del extremo, tal y como se han convenido; desfase del valor  $c_i = C_i^E - C_{ei}^e$ , en componentes medidas en los ejes generales de la estructura.

Por otro lado, en cada extremo de la barra estarán definidos ejes locales orientados con la directriz de ésta, y con las direcciones principales de inercia de su sección, siendo  $\alpha_{ij}$  los cosenos directores de tales direcciones, expresados en los ejes de la estructura<sup>(3)</sup>.

### Características mecánicas de las barras

La descripción geométrica y topológica anterior no impide que las características mecánicas de la barra sean exactamente las clásicas, referidas a sus extremos. Es decir, que tanto la descripción de los movimientos, como la de las deformaciones, o las de los esfuerzos —tensiones y sollicitaciones en secciones internas o en los extremos— no se alteran en lo más mínimo, dado que se refieren a los movimientos y resultantes considerados en las coordenadas de los extremos de sus directrices.

Tanto si el modelo es lineal, como si es no lineal, consideraremos, pues, conocida la matriz de rigidez  $K_{ij}$  —o la matriz tangente correspondiente a cada estado de un análisis no lineal— de cada barra, referida a los nudos y ejes propios de la barra, matriz que, en general, será de 12 x 12, al considerar como grados de libertad todos los desplazamientos y giros de ambos nudos. En lo que sigue se considerará que dichos grados de libertad están ordenados por nudos, y que para cada nudo se consideran, sucesivamente, las tres componentes del desplazamiento y las tres componentes del giro, en la forma usual —la primera componente del giro corresponde a la rotación en torno al eje que define la primera componente del desplazamiento, etc.—.

### Inserción de las barras en la estructura: resultantes y movimientos

Todo el problema mecánico asociado a los dos

(1) En estructuras en 3D, en general, los cantos en las dos direcciones transversales a la directriz serán distintos, y lo correcto no es siempre evidente, por lo que para la redacción de un programa totalmente general de tales características debería considerarse la cuestión con mayor detalle. En lo que sigue consideraremos que el canto pertinente para el problema considerado es conocido —como es el caso de las estructuras ortogonales de pisos—, o es designado por el usuario.

(2) Un buen punto de conveniencia puede venir dado por las coordenadas del extremo de la primera barra contabilizada en las conexiones del nudo. Puede también usarse el punto de replanteo de la familia de pilares que concurren en él, y algunos tal vez prefieran la media aritmética de las coordenadas de todos los extremos, etc.

(3) El primero de los subíndices denota eje global, y el segundo eje local.

problemas descritos por De Miguel, puede resolverse ahora sin dificultad, sin más que referir adecuadamente las magnitudes necesarias para el análisis, correspondientes a los extremos de las barras, a los puntos elegidos para representar los nudos comunes en que se insertan éstas en la estructura.

Desde la perspectiva del análisis matricial tales magnitudes son, bien escalares —el trabajo, *virtual* o no, asociado al producto de un vector cualquiera de fuerzas nodales por otro de desplazamientos nodales—, bien vectoriales —cualquiera de los vectores que expresan movimientos correspondientes a los diversos grados de libertad, o fuerzas (momentos) asociadas a tales grados de libertad— o bien matriciales (tensoriales) —la matriz de rigidez de cada barra, o la de la estructura—.

Las escalares no dependen del sistema de ejes elegidos, pero es fácil comprender que tanto las magnitudes vectoriales como las matriciales sí que dependen de éste. Al decir ejes, no sólo debe tratarse de las orientaciones de éstos, sino también de su origen.

El caso de la resultante de las fuerzas sobre cada extremo de una barra es muy fácil de ver: su representación, vista desde la barra, refiere fuerzas y momentos resultantes al centro de gravedad de la sección en el extremo, de coordenadas  $C_{ei}$ , y a los ejes locales de la barra en dicho extremo. Es decir, se determinan las resultantes de fuerza y momento en dicho punto, y se expresan sus componentes en ejes locales orientados según la barra. Visto desde la estructura, lo pertinente será representar las mismas resultantes de fuerza y momento, refiriéndolas al punto empleado para representar el nudo, de coordenadas  $C_i^E$ , —trasladándolas, por lo tanto a dicho punto— y expresándolas mediante componentes sobre ejes globales, orientados de modo común para toda la estructura<sup>(4)</sup>. De este modo, en todos los nudos, las resultantes de las fuerzas que actúan en el mismo se refieren a un punto y una *base* común, y los movimientos del nudo se representan mediante un movimiento rígido en dicho punto, única forma de poder plantear, con rigor y sencillez, las condiciones de equilibrio. Como ya se ha dicho, se interpreta el nudo extenso como un sólido rígido referenciado en el punto elegido.

Llamaremos  $F, M$  a las fuerzas y momentos en uno de los extremos de una barra, cuyas compo-

nentes  $F_i, M_i$  deben estar referidas a un sistema de ejes definido. Denotaremos  $F^e, M^e$  cuando se empleen ejes locales,  $F^{Ee}, M^{Ee}$  cuando se empleen ejes orientados como los del nudo de la estructura, pero situados en el extremo de la barra, y  $F^E, M^E$  cuando se trate de ejes de estructura, orientados y situados según el nudo considerado.

En términos algebraicos, la rotación de las orientaciones de los ejes locales a las de los ejes de estructura exige transformar la representación de las resultantes en la forma usual.

Tenemos entonces:

$$F_i^{Ee} = \alpha_{ij} F_j^e$$

$$M_i^{Ee} = \alpha_{ij} M_j^e$$

o expresándolo de forma desarrollada

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^{Ee} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^e ;$$

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^{Ee} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^e$$

$\alpha = \alpha_{ij}$  no es más que la matriz de los cosenos directores que transforma las componentes en ejes locales, a la orientación de los ejes globales.

Las resultantes siguen, de todos modos, referidas al extremo de la barra, lo que, como se ha dicho, se representa en la notación con el superíndice  $Ee$ : la  $E$  denota componentes orientadas según los ejes globales, y la  $e$ , que están referidas al extremo (local) de la barra. Referirlas a las coordenadas de conveniencia del nudo, exige modificar la expresión de los momentos: las fuerzas resultantes son iguales,  $F_i^E = F_i^{Ee}$ , pero los momentos no lo son. Como puede verse en la figura 3 siguiente:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^E + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^{Ee}$$

que puede expresarse de forma más sencilla con<sup>(5)</sup>

$$M_i^E = \gamma_{ij} F_j^E + M_i^{Ee}$$

(4) En rigor, no es preciso emplear ejes comunes para la descripción de las componentes en todos los nudos de la estructura: se trata de grados de libertad independientes, cuya ligazón existe sólo a través del comportamiento mecánico de las barras que los unen; es necesario y suficiente que los ejes —incluso el origen— elegidos en cada nudo sean los utilizados para la descripción global de las fuerzas y movimientos de todos los extremos de barras que confluyen en ellos.

(5)  $\gamma$  es una matriz bien conocida que tiene la propiedad de ser el complemento a cero de su propia traspuesta:  $\gamma = -\gamma^T$ .

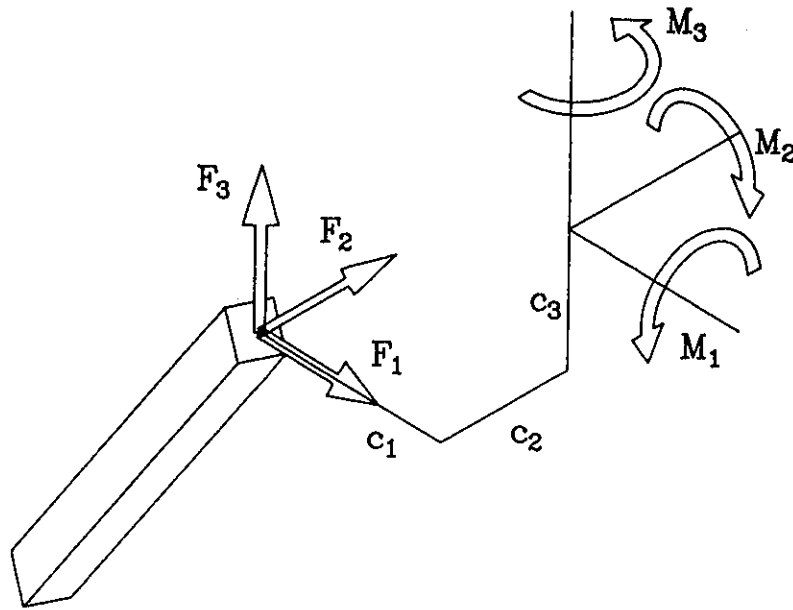


Fig. 3. Desplazamiento del punto de referencia, y equilibrio de momentos.

Expresando ahora, en la ecuación anterior, las fuerzas  $F_i^E$  en función de su representación local,  $F_i^e$  resulta:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} c_3 \alpha_{21} - c_2 \alpha_{31} - c_3 \alpha_{22} - c_2 \alpha_{32} - c_3 \alpha_{23} - c_2 \alpha_{33} \\ c_1 \alpha_{31} - c_3 \alpha_{11} - c_1 \alpha_{32} - c_3 \alpha_{12} - c_1 \alpha_{33} - c_3 \alpha_{13} \\ c_2 \alpha_{11} - c_1 \alpha_{21} - c_2 \alpha_{12} - c_1 \alpha_{22} - c_2 \alpha_{13} - c_1 \alpha_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^e + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}^{Ee}$$

o en forma más compacta y preferible —donde expresamos además  $M_i^{Ee}$  en función de  $M_i^e$ — según la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} M_i^E &= \gamma_{ij} \alpha_{jk} F_k^e + \alpha_{ij} M_j^e \\ M_i^{Ee} &= \beta_{ij} F_{ej}^e + \alpha_{ij} M_{ej}^e \end{aligned}$$

siendo  $\beta = \beta_{ij} = \gamma\alpha = \gamma_{ik} \alpha_{kj}$ , la matriz que permite el traslado de las fuerzas de uno a otro de los puntos empleados para referenciarlas.

De tal modo que el cambio de referencia de las fuerzas y momentos exige:

$$\begin{aligned} F_i^E &= \alpha_{ij} F_j^e + 0_{ij} M_j^e \\ M_i^E &= \beta_{ij} F_j^e + \alpha_{ij} M_j^e \end{aligned}$$

donde se usa  $0 = 0_{ij}$  para representar una matriz de  $3 \times 3$  llena de ceros.

Agrupando de forma completa todas las sollicitaciones de un extremo de una barra  $s = s_i$  como lista de fuerzas y momentos:

$$s_i^E = t_{ij} s_j^e \quad (1)$$

siendo  $t$  la matriz que expresa la transformación coordenada realizada, y que no es más que la matriz:

$$t = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma\alpha & \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

Puede verse en (2) que la matriz de transformación presentada difiere de la comúnmente empleada, precisamente en el término  $\gamma\alpha$ , como corresponde al abandono de la identificación entre el punto que representa el nudo, y el que representa el extremo de la barra.

Menos evidente geoméricamente puede parecer la transformación —complementaria de la anterior— de las componentes de los movimientos, pero puede darse una demostración mecánica bastante inmediata (Fig. 4):

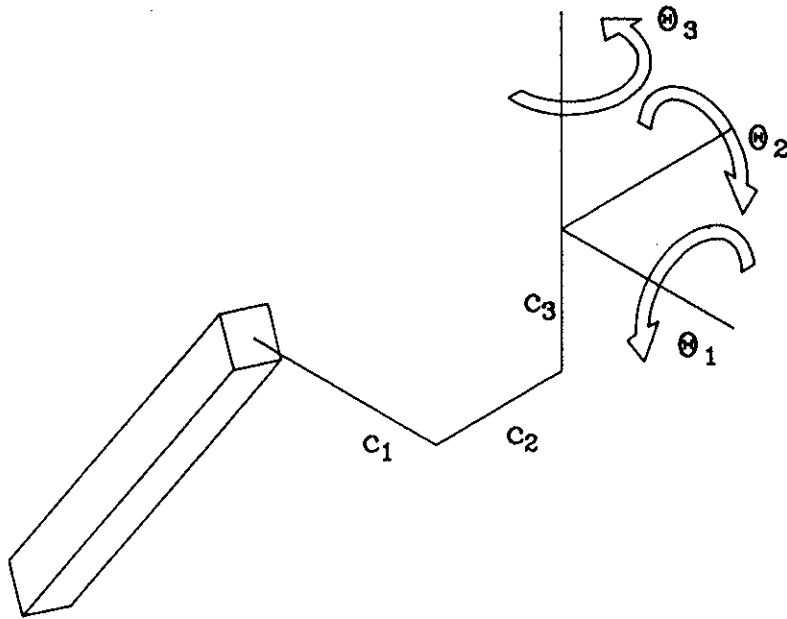


Fig. 4. Movimientos de extremo de barra, por rotación rígida en torno al punto de referencia del nudo.

Imagínense representadas cualesquiera fuerzas de extremo  $s = s_i$ , en ejes locales,  $s_i^e$  y también en ejes generales,  $s_i^E$ , pudiendo transformarse una representación en otra mediante la aplicación de la fórmula (1). Imagínese representado un caso de movimiento arbitrario en el nudo considerado, mediante un vector  $w_i$  que recoge componentes de todos los grados de libertad considerados en la representación de  $s_i$ . Dicho vector de movimientos, dicho movimiento,  $w_i$ , también tendrá representación en ejes locales  $w_i^e$ , y en ejes generales  $w_i^E$ . Es fácil comprender que en ejes locales representa los movimientos del extremo considerado de la barra.

Para que ambas representaciones del movimiento de extremo sean correctas, deberá asegurarse que el trabajo realizado por cualquier vector de fuerzas arbitrario en ese movimiento es idéntico en ambas representaciones, es decir:

$$w_i^E s_i^E = w_i^e s_i^e$$

Empleando la expresión (1)

$$w_i^E s_i^E = w_i^E (t_{ij} s_j^e) = (w_i^E t_{ij}) s_j^e = w_j^e s_j^e$$

por lo que debe ser

$$w_i^E = w_j^e t_{ji}$$

de modo que las transformaciones de los vectores fuerza y movimiento, deben hacerse de la forma:

$$\begin{aligned} s_i^E &= t_{ij} s_j^e \\ w_i^e &= w_j^E t_{ji} \end{aligned} \quad (3)$$

Puede darse una imagen geométrica a esta última expresión.

En efecto, para detallar más, consideremos que describamos los movimientos  $w$  mediante sus componentes de desplazamiento  $u$ , y de giro  $\theta$ , y consideremos el movimiento rígido del nudo, descrito en ejes de estructura por  $u^E, \theta^E$ . En este movimiento rígido, el extremo de la barra que estamos analizando, rota, siendo su rotación idéntica a la del movimiento rígido del nudo. Si describiésemos la rotación en ejes locales, tendríamos componentes  $\theta^e$ . Por las reglas empleadas en el cambio de ejes, tendremos que  $\theta_i^E = \alpha_{ij} \theta_j^e$ , o lo que es lo mismo,  $\theta_i^e = \theta_j^E \alpha_{ji}^{(6)}$ . Para los desplazamientos del extremo de la barra tendremos, por un lado, los del movimiento rígido  $u^E$ , que en ejes de barra deben ser escritos como  $\alpha_{ji} u_j^E$ , y por otro lado, tendremos los desplazamientos añadidos por la rotación  $\theta^E$  en torno al origen considerado para

(6) Puede hacerse con facilidad:

$$\theta^E = \theta_j^e = \alpha_{ij} \theta_j^e = \alpha \theta^e$$

$$\alpha_{ik} \theta_i^E = \alpha_{ik} \alpha_{ij} \theta_j^e$$

$$\alpha_{ik} \theta_i^E = \delta_{kj} \theta_j^e = \theta_j$$

$$(\alpha^T \theta^E = \alpha^T \alpha \theta^e = \mathbf{I} \theta^e)$$

donde se ha empleado la delta de Kronecker,  $\delta_{ij}$ , para representar la identidad, es decir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

el nudo, que añaden, en ejes de estructura, las componentes:

$$\begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}^E, \text{ es decir, que}$$

$$u_i^e = \alpha_{ji} (u_j^E + \gamma_{ij} \theta_j^E)$$

con lo que el cambio en el sistema de referencia se hace con las expresiones:

$$\begin{aligned} u_i^e &= \alpha_{ji} u_j^E + \alpha_{ji} \gamma_{ij} \theta_j^E \\ \theta_i^e &= \alpha_{ji} \theta_j^E \end{aligned} \quad (4)$$

o lo que resulta en forma más compacta

$$w_i^e = t_{ji} w_j^E$$

dado que ahora tenemos:

$$t_{ji} = \begin{bmatrix} \alpha^T & \alpha^T \gamma^T \\ \mathbf{0} & \alpha^T \end{bmatrix} = \mathbf{t}^T$$

que es la matriz traspuesta de la empleada en la transformación de la fórmula (1), tal y como se obtuvo en forma más abstracta en (3)<sup>(7)</sup>.

Puede añadirse que las transformaciones descritas pueden realizarse extremo por extremo, separadamente, de modo que para la barra completa la expresión sería:

$$S_i^E = T_{ij} S_j^e = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} t_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}^e$$

$$U_i^e = U_j^E T_{ji} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} t_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & t_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^E$$

donde la expresión  $\mathbf{t}^T$  representa la traspuesta de la matriz  $\mathbf{t}$ , y donde, en general,  $\mathbf{t}_1$  y  $\mathbf{t}_2$  —que son las matrices de transformación para cada extremo de la barra— pueden ser diferentes, ya que pese a que su orientación puede ser la misma, si se han empleado sistemas de ejes paralelos en ambos

(7) El juego completo de transformaciones es, sencillamente, el siguiente, aunque en la práctica sólo se necesiten las descritas en el texto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{0} \\ \gamma\alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}^e; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \alpha^T & \mathbf{0} \\ \alpha^T \gamma^T & \alpha^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}^E,$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\gamma \\ \mathbf{0} & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{bmatrix}^e; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \alpha^T & \alpha^T \gamma^T \\ \mathbf{0} & \alpha^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{bmatrix}^E,$$

lo que puede comprobarse fácilmente, pues al ser  $\alpha\alpha^T = \mathbf{I}$ ,  $\gamma - \gamma^T = \mathbf{0}$ , las transformaciones compuestas por el producto de las dos matrices empleadas, bien en ambas transformaciones de fuerzas, bien en ambas de movimientos, son exactamente la transformación identidad, —el producto de tales matrices es la matriz unidad— como debe corresponder al hecho de pasar la referencia de ejes locales a globales, y volver nuevamente a ejes locales.

nudos, sus inserciones tendrán posiciones relativas al nudo, diferentes<sup>(8)</sup>.

### Matrices de rigidez de barras en ejes de estructura

Finalmente, las matrices de rigidez han de depender obviamente de la elección de los ejes para los nudos en que se insertan, pero cualquiera que sea la representación que se emplee, la forma cuadrática representada por la matriz debe expresar el mismo valor para cualesquiera mismos pares de movimientos en todas las representaciones. O lo que es lo mismo, el trabajo virtual debido al producto de un desplazamiento arbitrario por las fuerzas asociadas a un segundo desplazamiento, debe ser invariante en todas las representaciones.

Por lo tanto, y empleando la notación  $K^e$  para denotar la matriz de rigidez representada en los ejes locales propios de la barra, y  $K^E$  para su representación en los ejes elegidos de estructura

$$\bar{U}_i^E S_i^E = \bar{U}_i^E K_{ij}^E U_j^E = \bar{U}_k^e S_k^e = \bar{U}_k^e K_{kl}^e U_l^e$$

$$\bar{U}_k^e K_{kl}^e U_l^e = \bar{U}_i^E T_{ik}^E K_{kl}^e T_{jl}^E U_j^e$$

y como la expresión ha de ser cierta para todo  $\bar{U}_i$  arbitrario, deberá ser:

$$K_{ij}^E = T_{ik}^E K_{kl}^e T_{jl}^E$$

como es usual, e independientemente de la forma que tenga la matriz de transformación  $\mathbf{T} = T_{ij}$ .

Como la anterior expresión obtiene la matriz en ejes de estructura premultiplicando por una matriz y posmultiplicando por su traspuesta, y como la matriz de rigidez en ejes locales es simétrica, la matriz en ejes de estructuras también lo es, como no podría dejar de ser.

De este modo, quedan determinados todos los términos necesarios para la formulación matricial del problema geométrico real.

### Análisis

Conocidos los términos del problema, el proceso de análisis es el usual en el método, a saber:

(1) Obtención de los esfuerzos de extremo que provocan las cargas en las barras —ahora conven-

(8) Puestas así las cosas, no sería tampoco ninguna frivolidad formular por fin la matriz de barra en ejes propios a cada extremo, ejes que se orientarían siempre desde el extremo considerado hacia el opuesto, opción que rompe con el empleo de ejes paralelos definitivamente, pero que a cambio produce una tabla de términos cuyos signos son más evidentes en la matriz de rigidez, haciendo además intercambiable el orden en que deben considerarse dichos extremos en el análisis.

cionales— con la hipótesis de movimiento nulo. Tales esfuerzos, son cargas sobre los nudos, y están referidas a los citados extremos. A estas cargas deben añadirse las ejercidas sobre los nudos mismos, y entre éstas no deben olvidarse las procedentes de las fracciones de longitud de las directrices de las vigas que no se contabilicen en sus dimensiones convencionales: ahora, los nudos son potencialmente extensos, y las cargas sobre éstos pueden y deben situarse en sus posiciones precisas, de modo que deben evaluarse las resultantes de éstas en el punto elegido como referencia. Esto resuelve, además, un tercer problema, de los cuatro planteados por De Miguel en su opúsculo: el de los errores a que puede llevar el no considerar la posición real de las cargas del cerramiento de fachada. Todas las cargas, referidas a coordenadas globales, formarán el vector de cargas.

(2) Ensamblaje de la matriz de rigidez, en la forma usual.

(3) Obtención de los desplazamientos correspondientes al equilibrio, —o resolución del sistema de ecuaciones—.

(4) Obtención de los esfuerzos de extremo en las barras, empleando los movimientos obtenidos y sus respectivas matrices de rigidez, etc...

Ahora, los resultados estarán en equilibrio en la geometría real de la estructura, y habiéndose además empleado criterios más realistas para determinar las rigideces de las piezas, cabrá también esperar mayor adecuación en los movimientos y esfuerzos obtenidos.

## CONCLUSIONES

Como afirma José Luis De Miguel, no representar la geometría real de una estructura de hormigón armado, puede conducir a errores inaceptables, que pueden, aún así, suponer el proyecto de estructuras seguras —pues en una parte muy importante de los casos se trata de errores del lado de la seguridad— pero que de ninguna manera permiten hacer afirmaciones ciertas sobre la (in)seguridad o la deformabilidad de estructuras reales.

Por otro lado, tales errores suponen el empleo de coeficientes de seguridad desconocidos y diferentes según la geometría de la estructura.

La consideración de la geometría real, no presenta ninguna complicación empleando el procedimiento propuesto en este artículo, pues sólo se exige, por un lado, el mantenimiento de alguna información adicional sobre los nudos, información que está ya presente en algunos programas para su empleo en los resultados gráficos; y por otro, la modificación, sencilla, de las matrices de transformación usadas para referir las barras a la estructura completa. Dada la sencillez con que

queda resuelto el problema, y con él la fuente de errores señalada, debería exigirse, en el futuro, que dicha geometría sea la empleada —al menos— tanto en los análisis realizados en las tareas de control de Proyectos, como en las de control de estructuras existentes, siendo altamente deseable su empleo generalizado en el proyecto de las estructuras futuras.

## BIBLIOGRAFIA QUE SE CITA

(1) Strafford Smith, B. & Coull, A.; Tall building structures: analysis and design. John Wiley & Sons, 1991.

(2) Dawe, D.J.; Matrix and finite element displacement analysis of structures. Clarendon Press, Oxford 1984.

(3) Armenàkas A.E.; Modern structural analysis. Mc Graw Hill 1991.

## ANEJO: Ejemplo resuelto

Para describir en detalle las implicaciones del procedimiento propuesto, se adjunta un ejemplo resuelto que corresponde al análisis para carga vertical de un pórtico de dos plantas y un vano —simplificado, por simetría, para reducir las dimensiones de las matrices empleadas— en el que aparecen los dos problemas citados: de un lado, los descentramientos entre soportes, y del otro, las luces efectivas de vigas, diferentes de las distancias entre ejes. Para mostrar las diferencias que resultan del análisis, se compararán los resultados obtenidos por el procedimiento propuesto, con los obtenidos por el procedimiento clásico, para el que se han adoptado, como dimensiones generales de la estructura, las correspondientes a su replanteo —6 m de luces de vigas y 3 m de altura de soportes—. Son estas dimensiones las adoptadas por alguno de los programas; en otros, se emplearían como luces valores 40 cm menores, si se acotasen los ejes de los soportes en la planta inferior. En gran parte de los casos, no sería evidente la interpretación de los valores empleados.

En el procedimiento propuesto, los nudos se representan por los puntos elegidos para el replanteo de la estructura: caras exteriores de soportes, y cota de acabado del forjado. Los extremos de las barras se eligen según la regla apuntada en el texto, tal como se detallan en la figura 5 siguiente, que permite comprobar que la geometría puede describirse con total exactitud. Las dimensiones elegidas tratan de ilustrar todas las implicaciones del método.

Por sencillez de la exposición, se adoptarán como rigideces de las barras las correspondientes a la sección bruta del hormigón sin fisurar, y sin considerar el armado. Es evidente que esto ha de conducir a resultados defectuosos en la medida en



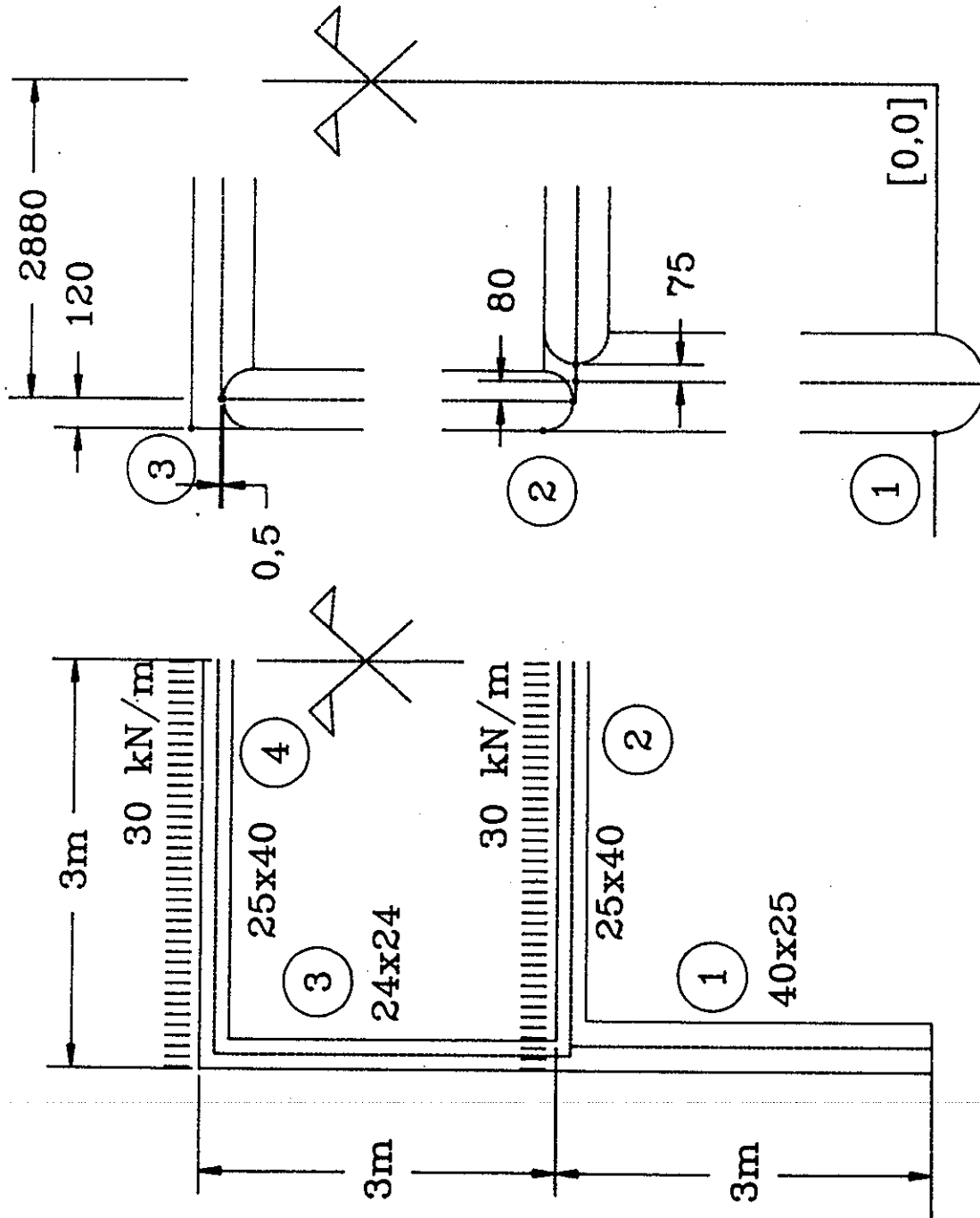


Fig. 5. Problema resuelto: geometría y cargas adoptadas. Se numeran nudos y barras, cuyos extremos 1 y 2 serán los de menores y mayores coordenadas, respectivamente, sitios en los puntos que se identifican gráficamente.

que las vigas, fisuradas, tendrán rigideces diferentes –menores– regidas por las áreas de armado existente, y los soportes rigideces mayores, en la medida en que a su menor o nula fisuración ha de añadirse la rigidez aportada por la armadura. Pero no se trata aquí de tales problemas y su consideración añadiría una dificultad en el seguimiento del ejemplo. Ahora bien, como se ha dicho en el texto, nada impide el empleo de expresiones más realistas para las matrices de rigidez de las barras que la que ahora se usará, que es la conocida matriz

$$E \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{\beta} & \frac{6I}{\beta} & 0 & -\frac{12I}{\beta} & \frac{6I}{\beta} \\ 0 & \frac{6I}{\beta} & \frac{4I}{\beta} & 0 & -\frac{6I}{\beta} & \frac{2I}{\beta} \\ -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{\beta} & -\frac{6I}{\beta} & 0 & \frac{12I}{\beta} & -\frac{6I}{\beta} \\ 0 & \frac{6I}{\beta} & \frac{2I}{\beta} & 0 & -\frac{6I}{\beta} & \frac{4I}{\beta} \end{bmatrix}$$

El análisis que sigue se ha realizado a mano, con auxilio de calculadora y de una hoja de cálculo.

lo, de tal modo que los resultados acusan, en ocasiones, problemas de precisión numérica, que, de todos modos, no afectan ni a la inteligibilidad del ejemplo, ni a las dos primeras cifras de los resultados finales.

Se obtienen, a continuación, las matrices de rigidez de cada barra, para las longitudes consideradas en las piezas, según los convenios descritos en el texto, y para sus dimensiones, que responden a la siguiente tabla:

Barra	Longitud	Canto	Ancho
1	3,05	40	25
2	5,45	25	40
3	2,99	24	24
4	5,76	25	40

El siguiente cuadro de matrices de rigidez, se expresa en ejes propios de cada barra. Se incluyen pilares y vigas en unidades SI, y siendo  $E$  el módulo de elasticidad considerado, que se extrae como factor común de las matrices:

$$K_{ij}^1 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 32786 & 0 & 0 & -32786 & 0 & 0 \\ 0 & 563,92 & 859,98 & 0 & -563,92 & 859,98 \\ 0 & 859,98 & 1748,6 & 0 & -859,98 & 874,31 \\ -32786 & 0 & 0 & 32786 & 0 & 0 \\ 0 & -563,92 & -859,98 & 0 & 563,92 & -859,98 \\ 0 & 859,98 & 874,31 & 0 & -859,98 & 1748,6 \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^2 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 18348 & 0 & 0 & -18348 & 0 & 0 \\ 0 & 38,609 & 105,20 & 0 & -38,609 & 105,20 \\ 0 & 105,20 & 382,26 & 0 & -105,20 & 191,13 \\ -18348 & 0 & 0 & 18348 & 0 & 0 \\ 0 & -38,609 & -105,20 & 0 & 38,609 & -105,20 \\ 0 & 105,20 & 191,13 & 0 & -105,20 & 382,26 \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^3 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 19264 & 0 & 0 & -19264 & 0 & 0 \\ 0 & 124,11 & 185,55 & 0 & -124,11 & 185,55 \\ 0 & 185,55 & 369,87 & 0 & -185,55 & 184,93 \\ -19264 & 0 & 0 & 19264 & 0 & 0 \\ 0 & -124,11 & -185,55 & 0 & 124,11 & -185,55 \\ 0 & 185,55 & 184,93 & 0 & -185,55 & 369,87 \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^4 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 17361 & 0 & 0 & -17361 & 0 & 0 \\ 0 & 32,704 & 94,190 & 0 & -32,704 & 94,190 \\ 0 & 94,190 & 361,68 & 0 & -94,190 & 180,84 \\ -17361 & 0 & 0 & 17361 & 0 & 0 \\ 0 & -32,704 & -94,190 & 0 & 32,704 & -94,190 \\ 0 & 94,190 & 180,84 & 0 & -94,190 & 361,68 \end{bmatrix}$$

Puede verse que tales valores son levemente diferentes de los que se obtendrían empleando las longitudes entre ejes, o entre cotas de replanteo, a saber, 3 y 6 m, que serían los siguientes:

resulta, en cada extremo:

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^1 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 33333 & 0 & 0 & -33333 & 0 & 0 \\ 0 & 592,59 & 888,88 & 0 & -592,59 & 888,88 \\ 0 & 888,88 & 1777,7 & 0 & -888,88 & 888,88 \\ -33333 & 0 & 0 & 33333 & 0 & 0 \\ 0 & -592,59 & -888,88 & 0 & 592,59 & -888,88 \\ 0 & 888,88 & 888,88 & 0 & -888,88 & 1777,7 \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^2 = K_{ij}^A = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 16666 & 0 & 0 & -16666 & 0 & 0 \\ 0 & 28,935 & 86,805 & 0 & -28,935 & 86,805 \\ 0 & 86,805 & 347,22 & 0 & -86,805 & 173,61 \\ -16666 & 0 & 0 & 16666 & 0 & 0 \\ 0 & -28,935 & -86,805 & 0 & 28,935 & -86,805 \\ 0 & 86,805 & 173,61 & 0 & -86,805 & 347,22 \end{bmatrix}$$

$$K_{ij}^3 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 19200 & 0 & 0 & -19200 & 0 & 0 \\ 0 & 122,88 & 184,32 & 0 & -122,88 & 184,32 \\ 0 & 184,32 & 368,64 & 0 & -184,32 & 184,32 \\ -19200 & 0 & 0 & 19200 & 0 & 0 \\ 0 & -122,88 & -184,32 & 0 & 122,88 & -184,32 \\ 0 & 184,32 & 184,32 & 0 & -184,32 & 368,64 \end{bmatrix}$$

Para construir las matrices de transformación se emplean las matrices de orientación de los ejes locales —o de cosenos directores—  $\alpha_{ij}$ , que son, respectivamente para las vigas, y para los soportes:

$$\alpha_{ij}^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_{ij}^p = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

los descentramientos entre los extremos de las barras y los nudos,  $c_i = C_i^E - C_i^e$ , que son, ordenados por barras  $e$ , y por extremos  $x$  de éstas, los siguientes:  $c_{xi}^e$ .

$$c_{1-2,i}^1 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,2 \\ -0,2 & 0,125 \end{bmatrix}, \quad c_{1-2,i}^2 = \begin{bmatrix} -0,275 & 0,125 \\ 0,275 & 0,125 \end{bmatrix},$$

$$c_{1-2,i}^3 = \begin{bmatrix} -0,12 & 0,12 \\ -0,12 & 0,13 \end{bmatrix}, \quad c_{1-2,i}^4 = \begin{bmatrix} -0,12 & 0,125 \\ 0,12 & 0,125 \end{bmatrix},$$

Resultan así las matrices de transformación  $T_{ij}^e$  siguientes, para cada elemento  $e$  de la estructura:

$$T_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & -0,125 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,125 & 0,275 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,125 & -0,275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ij}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,12 & -0,12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,12 & -0,13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ij}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,125 & 0,12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,125 & -0,12 & 1 \end{bmatrix}$$

Al tratarse de un problema bidimensional, la matriz de transformación para cada extremo  $t = t_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  se reduce significativamente, de  $6 \times 6$  a  $3 \times 3$ :

$$\beta = \gamma\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y de la primera matriz resulta significativa solamente la tercera fila del producto; como además sólo es pertinente el tercero de los momentos,

Consideremos ahora las simetrías: para ambas vigas, puede emplearse la siguiente condensación de grados de libertad:

sin más que acumular —con sus signos— las correspondientes columnas y eliminar las tres últimas filas.

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ -N_1 \\ T_1 \\ -M_1 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{l^3} & \frac{6I}{l^2} & 0 & -\frac{12I}{l^3} & \frac{6I}{l^2} \\ 0 & \frac{6I}{l^2} & \frac{4I}{l} & 0 & \frac{6I}{l^2} & \frac{2I}{l} \\ -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{l^3} & -\frac{6I}{l^2} & 0 & \frac{12I}{l^3} & -\frac{6I}{l^2} \\ 0 & \frac{6I}{l^2} & \frac{2I}{l} & 0 & -\frac{6I}{l^2} & \frac{4I}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ -u_1 \\ v_1 \\ -\theta_1 \end{bmatrix}$$

que puede escribirse de la forma:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{2A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2I}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Las matrices resultantes en ejes locales son:

$$K_{ij}^2 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 36697 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 191,13 \end{bmatrix},$$

$$K_{ij}^4 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 34722 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180,84 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos, pues, ahora las matrices en ejes de estructura, empleando las transformaciones  $K_{ij}^E = T_{ik} K_{kl}^L T_{jl}$ :

$$K_{ij}^1 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 563,92 & 0 & -747,19 & -563,92 & 0 & -930,4 \\ 0 & 32786 & 6557,3 & 0 & -32786 & -6557,3 \\ -747,19 & 6557,3 & 2738,6 & 747,19 & -6557,3 & -515,7 \\ -563,92 & 0 & 747,19 & 563,92 & 0 & 930,47 \\ 0 & -32786 & -6557 & 0 & 32786 & 6557,3 \\ -930,47 & -6557,3 & -515,7 & 930,47 & 6557,3 & 3283,9 \end{bmatrix},$$

$$K_{ij}^3 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 122,88 & 0 & -169,57 & -122,88 & 0 & -200,29 \\ 0 & 19200 & 2304 & 0 & -19200 & -2304 \\ -169,57 & 2304 & 602,65 & 169,57 & -2304 & -92,23 \\ -122,88 & 0 & 169,57 & 122,88 & 0 & 200,29 \\ 0 & -19200 & -2304 & 0 & 19200 & 2304 \\ -200,29 & -2304 & -92,23 & 200,29 & 2304 & 695,11 \end{bmatrix},$$

$$K_{ij}^2 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 36697 & 0 & 4587,1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4587,1 & 0 & 764,52 \end{bmatrix}, \quad K_{ij}^4 = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 34722 & 0 & 4340,2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4340,2 & 0 & 723,37 \end{bmatrix}.$$

La matriz de estructura, considerando sólo los dos nudos libres, es ahora:

$$K_{ij} = E \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 37384 & 0 & 5348,05 & -122,88 & 0 & -200,29 \\ 0 & 51986 & 8861,3 & 0 & -19200 & -2304 \\ 5348,05 & 8861,3 & 4651,0 & 169,57 & -2304 & -92,23 \\ -122,88 & 0 & 169,57 & 34845 & 0 & 4540,5 \\ 0 & -19200 & -2304 & 0 & 19200 & 2304 \\ -200,29 & -2304 & -92,23 & 4540,5 & 2304 & 1418,4 \end{bmatrix},$$

y la matriz de flexibilidad, inversa de la anterior es:

$$f_{ij} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 36,181 & 12,969 & -64,84 & -3,625 & 1,4412 & 31,221 \\ 12,969 & 48,4181 & -89,59 & -3,523 & 33,978 & 30,738 \\ -64,84 & -89,59 & 447,95 & 17,618 & -17,39 & -153,6 \\ -3,625 & -3,523 & 17,618 & 60,287 & 27,771 & -243,1 \\ 1,4412 & 33,978 & -17,39 & 27,771 & 109,46 & -212,4 \\ 31,221 & 30,738 & -153,6 & -243,1 & -212,4 & 1872,7 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora las acciones: deben tenerse en cuenta las cargas sobre cada barra —mediante el recurso a los esfuerzos de extremo de *empotramiento perfecto*, es decir, los correspondientes a movimientos totalmente impedidos—, pero también las que se ejercen sobre los nudos, que ahora son extensos, y en los que cargan tramos de forjado que en los modelos clásicos lo harían sobre las vigas —si éstas se miden según las dimensiones totales de la planta—, o se ignorarían —si las vigas se miden a ejes de soportes, en cuyo caso las dimensiones de la planta serían mayores que las consideradas en el modelo—. Nuevamente, el automatismo asociado a nuestro modelo no sólo permite, sino que exige el empleo de la geometría exacta.

En nuestro caso tenemos, sobre extremos de vigas, los esfuerzos, que son cargas sobre la estructura y que referenciados a tales extremos, en ejes de vigas son:

$$\begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -81,75 \\ -74,25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -86,4 \\ -82,94 \end{bmatrix},$$

mientras que las cargas ejercidas propiamente sobre los nudos, referenciadas a los puntos elegidos son:

$$\begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -8,25 \\ -1,134 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3,6 \\ -0,216 \end{bmatrix},$$

por lo que las cargas resultantes son, en ejes de nudo:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -81,75 \\ -96,73 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -8,25 \\ -1,134 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -90 \\ -97,87 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -86,4 \\ -93,31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3,6 \\ -0,216 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -90 \\ -93,52 \end{bmatrix},$$

El producto de la matriz de flexibilidad por el vector de cargas será el desplazamiento, que resulta referido a ejes de nudo, y que referido a los extremos de cada una de las barras permite, premultiplicándolo por la matriz de rigidez de la barra, obtener los esfuerzos de extremo de éstas. En la figura 6 siguiente se muestran los resultados obtenidos, así como los que resultan en un análisis realizado mediante el procedimiento clásico, y empleando las mismas herramientas que en el análisis precedente, por lo que las consideraciones apuntadas más arriba sobre la precisión del resultado son también de aplicación.

Como puede observarse en los resultados, que corresponden a esfuerzos en los extremos de barra, en el método propuesto se respeta perfectamente el equilibrio en los nudos, y de hecho, si se acepta que el comportamiento del nudo es rígido fuera de las zonas en que las barras *penetran* en él, se respeta igualmente de modo riguroso la compatibilidad. Frente a ello, los resultados del procedimiento tradicional no sólo emplean rigideces poco realistas, que no permitirían respetar rigurosamente las condiciones de compatibilidad, sino que, lo que es peor, violan las condiciones de equilibrio. Esto último puede ser muy grave si los soportes tienen una carga apreciable.

Para mostrar tales efectos puede considerarse un segundo caso de carga, suponiendo que los nudos de planta alta están cargados con 400 kN centrados en el eje del soporte superior. La carga que actúa propiamente en el nudo aumenta en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -400 \\ -48 \end{bmatrix},$$

refiriendo la citada carga al punto que representa el nudo. Para la nueva condición de carga, los resultados obtenidos son los de la figura 7 siguiente.

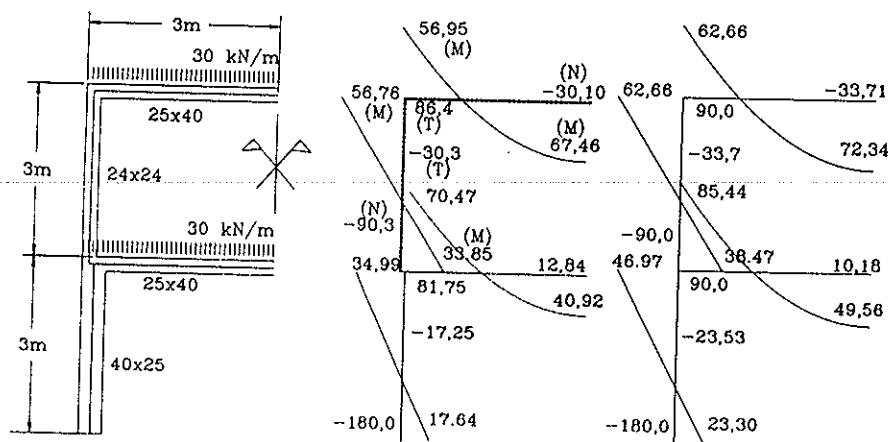


Fig. 6. Esfuerzos del pórtico del ejemplo. A la izquierda, según el método del nudo extenso, a la derecha, según la formulación tradicional. En las barras regreasadas se identifican los esfuerzos a que corresponde cada uno de los números.

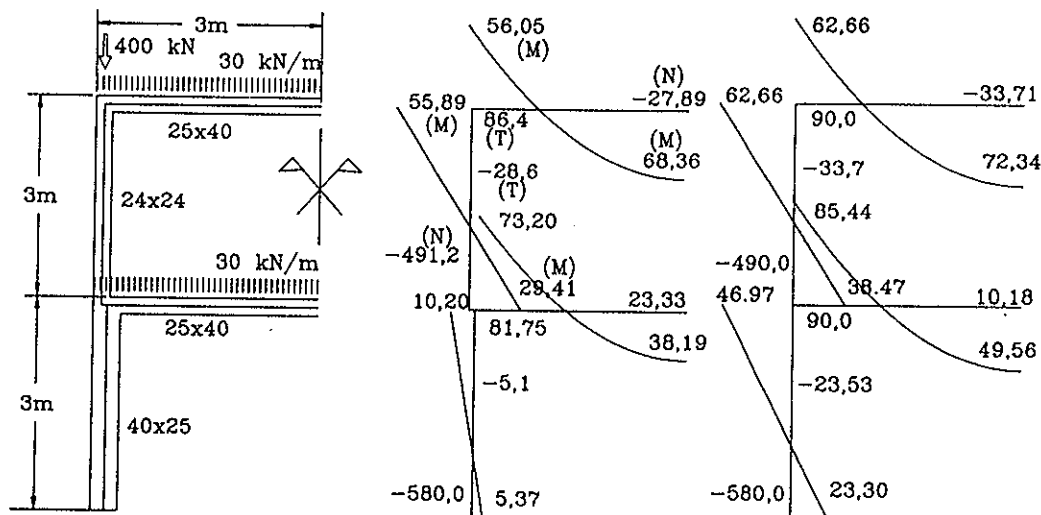


Fig. 7. Esfuerzos del pórtico, con soportes con compresiones importantes. A la izquierda, según el método del nudo extenso, a la derecha, según la formulación tradicional.

Como se observa, los esfuerzos en el soporte inferior son radicalmente diferentes a los que predice el método tradicional, que, aunque aporta valores seguros para el proyecto del mismo, si éste fuese el objetivo del análisis, es sin embargo totalmente incorrecto para la peritación del pórtico, si es éste, en cambio, el objetivo de dicho análisis.

Si se considera el efecto reductor en el diagrama de momentos en soportes que resulta de la compresión excéntrica en el soporte inferior, deberá ahora prestarse especial atención al problema de la evaluación de cargas, tal y como plantea De Miguel en el cuarto y último error que cita en su opúsculo: las convenciones que se adoptan para los valores de las cargas no han de tener los mismos efectos para los elementos últimos de la estructura —las viguetas del forjado—, que para los intermedios —las vigas— o elementos que, como los soportes, acumulan las cargas de multitud de elementos de menor orden; si para aquéllas las sobrecargas convencionales han de considerar todo tipo de efectos locales, como los derivados del impacto, etc., tales efectos no deben acumularse, en su totalidad, en los elementos del siguiente orden, dada la menor probabilidad de su simultaneidad. Esto hace que considerar, y utilizar, las reducciones de sobrecarga —las prescritas por la normativa que se refiere a las cargas serían inexcusables— sea absolutamente necesario si la existencia de compresiones reduce los valores de los momentos en algunos de los soportes. Por ello, los programas que adopten el método que aquí se propone, deberían ser extremadamente rigurosos con esta cuestión.

## RESUMEN

Considerando los graves errores que puede suponer el empleo de los programas de análisis

matricial de estructuras de barras en la comprobación del equilibrio en estructuras en las que las directrices de las piezas no concurren realmente en un único punto en los nudos —lo que es siempre el caso en hormigón armado y bastante usual en acero laminado— se propone en el artículo abandonar la idea de que los extremos de las barras que concurren en un nudo deban hacerlo en un punto común. Adoptados extremos convenientes para las barras, geoméricamente adecuados a la geometría de ésta, el análisis del equilibrio y del movimiento del nudo puede referirse a otro único punto que le representa de manera rigurosa, eliminándose así toda posibilidad a tal tipo de errores. Como demuestra el artículo, basta emplear una nueva forma para la matriz de transformación de ejes para resolver la cuestión de forma natural y definitiva.

## SUMMARY

Seeing the deep errors that result on the use of the matritial analysis programs in structures where the bars center lines do not converge in one unique point on the nodes, —that's always the case in reinforced concrete structures, but is also usual in steel structures—, the author proposes to leave the idea that the bars that connect on a node have their ends on a common point. Using conventional ends geometrically correct for each of that's bars, all that has to be done is to refer to another unique point, that represents the node, in a rigorous manner, all the analysis of it's equilibrium and movement, clearing in that way all the possibilities for that kind of errors. This article shows that the use of a new form of the transformation matrix of the axis is all that is needed to solve that problem in a natural and definitive manner.