

# Transmisión Digital

## Tema 6. Modulaciones multiportadora

José Ignacio Ronda Prieto, GTI-SSR-ETSIT-UPM

30 de noviembre de 2015



# Contents

- 1 Introducción
- 2 Modulación OFDM
- 3 IES en OFDM
- 4 Optimización del uso del canal
- 5 Apéndices

# Preámbulo

## Copyright

*Modulaciones multiportadora*

Copyright (C) 2015 Algunos derechos reservados. José Ignacio Ronda Prieto <jir@gti.ssr.upm.es>

Versión 1.0, noviembre de 2015.

## Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su preparación no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this licence, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

or send a letter to Creative commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope they are useful. While caution has been taken during its preparation, it is possible that notes still contain some errors. There is absolutely no warranty about its contents.

## Resumen de la licencia:

Está permitido

Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo las siguientes condiciones:

Reconocimiento: Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador.

No comercial: No se uede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia: Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia similar a ésta.

## Introducción

Consideramos modulaciones de **amplitud de pulsos ortogonales (orthogonal pulse amplitude modulation (OPAM))**, que son aquellas en las que el alfabeto de señales es de la forma

$$A_0\phi_0(t) + A_1\phi_1(t) + \dots + A_{N-1}\phi_{N-1}(t)$$

donde

- Las señales  $\phi_k(t)$  son un **sistema ortonormal** que cumple la **condición de no IES** para canal ideal, es decir, tal que  $\langle \phi_k(t), \phi_l(t - nT) \rangle = 0$  salvo si  $k = l$  y  $n = 0$ .
- Las amplitudes  $A_k$  tienen partes reales e imaginarias  $\pm c_k(2r - 1)$ ,  $r = 1, \dots, m_k/2$ , es decir, como las amplitudes de QAM, pero posiblemente con parámetros distintos  $c_k$  (separación) y  $m_k$  (número de amplitudes) para cada señal de la base.
- Cuando las señales de la base son similares a sinusoides de distintas frecuencias estas modulaciones se denominan **modulaciones multiportadora**.

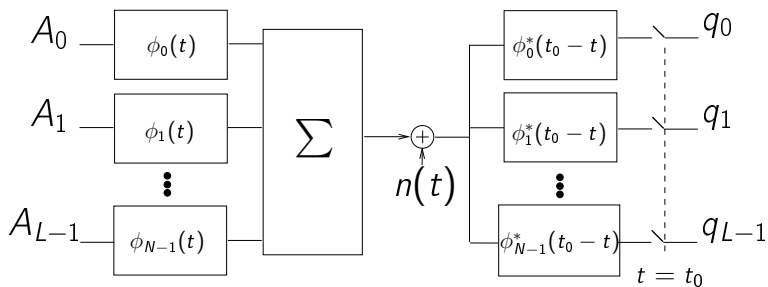
# Introducción

El ejemplo más sencillo de modulación OPAM corresponde a la base

$$\bar{\phi}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kt/T} w_{0,T}(t), \quad k = 0, \dots, N - 1$$

Se trata de un sistema ortonormal (problema 1.8).

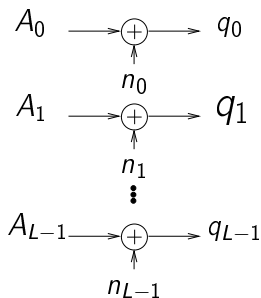
## Esquema transmisor y receptor OPAM



## Sistema equivalente en el caso de canal ideal

Las muestras de ruido son independientes, con partes real e imaginaria independientes de varianza  $N_0/2$  (tema 1).

Resultado: como  $N$  canales QAM independientes en paralelo.



# Introducción

## Sistemas OPAM

Suponiendo canal ideal y  $m_k = m$  amplitudes por cada señal de la base (a veces denominadas *portadoras*)

- Probabilidad de error: Tenemos varios canales QAM en paralelo:  $P_b$  en función de  $E_b/N_0$  igual que en QAM.
- Eficacia espectral máxima: Para el ancho de banda mínimo sin IES que hemos visto en el tema 1, con  $M = m^N$

$$\frac{R}{W} = \frac{\log_2 M/T}{N/(2T)} = 2 \log_2 m$$

igual por tanto que la de cada canal QAM en paralelo del sistema equivalente.



# Introducción

En comparación con modulaciones unidimensionales, ahora podemos transmitir la misma velocidad binaria con el mismo ancho de banda pero con símbolos más largos ( $T$  mayor), con lo que **la IES es más corta en número de símbolos**:

$$W = \frac{N}{2T} \Rightarrow R = \frac{\log_2 N}{T} = N \frac{\log_2 m}{T} = 2W \log_2 m$$
$$T = \frac{N}{2W}$$

No obstante,  $T$  no se puede hacer arbitrariamente grande porque supone un retardo en el sistema.

# Modulación OFDM

- Entre las modulaciones OPAM, la modulación **OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)** se usa muy ampliamente en entornos tan variados como la telefonía móvil, la transmisión por bucles de abonado telefónicos (ADSL) o la radiodifusión terrestre de televisión.
- Su éxito se debe a que se puede integrar, con un coste computacional moderado, con estrategias para compensar la IES, incluyendo la debida al multitrayecto típico en radio.

# Modulación OFDM

En la modulación OFDM la base ortonormal utilizada se obtiene muestreando las señales  $\bar{\phi}_k(t)$  definidas anteriormente en los instantes  $t = kT/N$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ , y realizando una interpolación como si las señales iniciales estuvieran limitadas en banda y quisiéramos recuperarlas:

$$\begin{aligned}\phi_k(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{\phi}_n\left(\frac{nT}{N}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT/N}{T/N}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kn/N} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT/N}{T/N}\right)\end{aligned}$$

Se trata de un sistema ortonormal (problema 1.8).

Obsérvese que

- Las señales  $\bar{\phi}_k(t)$  están limitadas en el tiempo pero no en frecuencia.
- Las señales  $\phi_k(t)$  están limitadas en frecuencia pero no en el tiempo.

# Espacio de señal de OFDM

Tenemos dos **bases ortonormales** para el espacio de señal:

- Señales  $\phi_k(t)$ :

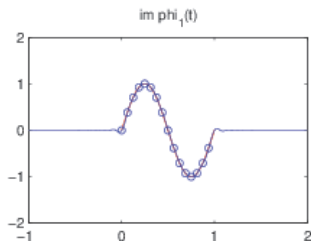
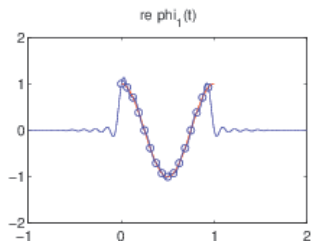
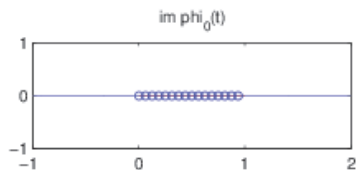
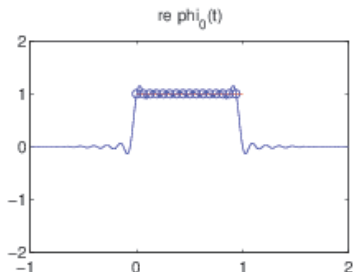
$$\phi_k(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kn/N} \text{sinc} \left( \frac{t - nT/N}{T/N} \right), \quad k = 0, \dots, N-1$$

- Pulsos *sinc* desplazados:

$$g_k(t) = g \left( t - k \frac{T}{N} \right), \quad g(t) = \sqrt{\frac{N}{T}} \text{sinc} \left( \frac{t}{T/N} \right), \quad k = 0, \dots, N-1$$

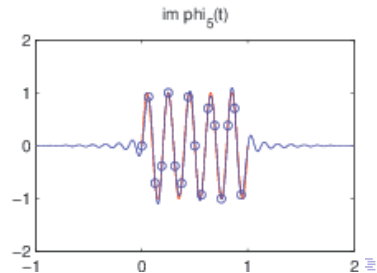
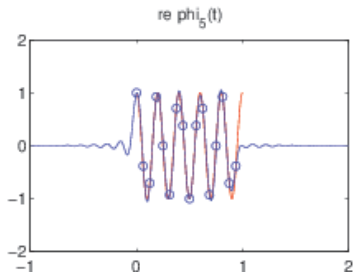
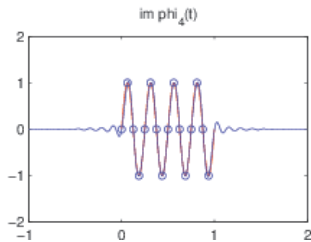
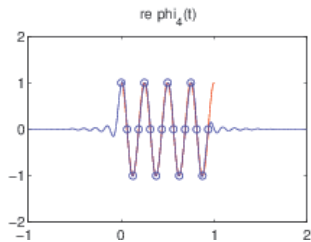
# Funciones base de OFDM

Algunas funciones de los conjuntos ortonormales  $\bar{\phi}_k(t)$  y  $\phi_k(t)$



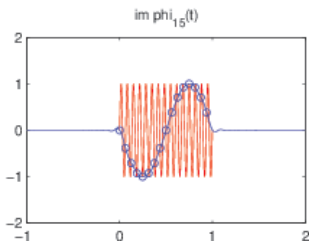
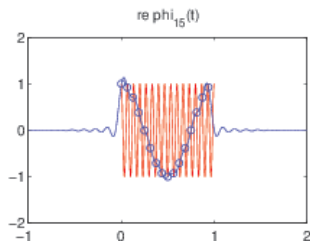
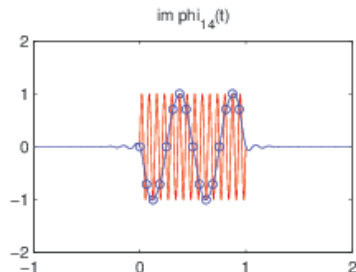
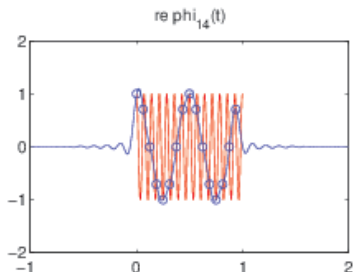
## Funciones base de OFDM

Algunas funciones de las bases  $\bar{\phi}_k(t)$  y  $\phi_k(t)$ : para valores de  $k$  altos dejan de parecerse.



# Funciones base de OFDM

Algunas funciones de las bases  $\bar{\phi}_k(t)$  y  $\phi_k(t)$



## Cambio de base: DFT

Las señales de la modulación se pueden expresar en términos de las  $\phi_k(t)$  o de las  $g_k(t)$ :

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} A_k \phi_k(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} A_k \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi kn/N} g_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} A_k e^{j2\pi kn/N} \right) g_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{A}_n g_n(t) \end{aligned}$$

El cambio entre ambas bases ortonormales está dado por tanto por la relación

$$\hat{A}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} A_k e^{j2\pi kn/N}$$



# DFT

Recordamos que la **DFT** de una señal discreta finita  $x[n]$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  es otra señal  $X[k] = \text{DFT}[x[n]]$  del mismo tipo dada por la fórmula

$$X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

con inversa

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}$$

Obsérvese que si  $X(z)$  es la transformada Z de  $x[n]$ ,

$$X[k] = \frac{1}{\sqrt{N}} X(e^{j2\pi k/N})$$

## Cambio de base: DFT

El cambio de base anterior equivale por tanto a una **DFT inversa**:

$$\hat{A}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} A_k e^{j2\pi kn/N} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{A}} = \text{DFT}^{-1} [\mathbf{A}]$$

Por tanto el cambio recíproco está dado por la **DFT directa**:

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{A}_n e^{-j2\pi kn/N} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \text{DFT} [\hat{\mathbf{A}}]$$

# DFT en forma matricial

Veamos la DFT de forma matricial:

$$\text{DFT } [\mathbf{x}] = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

donde, definiendo  $w = e^{-j2\pi/N}$  ( $W_N$  en [Oppenheim]),

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & \dots & w^{2(N-1)} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & \dots & w^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & w^{3(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$
$$= [\mathbf{w}_0 \quad \mathbf{w}_1 \quad \dots \quad \mathbf{w}_{N-1}] = (f_{ij})_{i,j=0,\dots,N-1}$$
$$\mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} [1 \quad w^k \quad \dots \quad w^{k(N-1)}]^\top, \quad f_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N}} w^{ij}$$

[En este tema, para simplificar las fórmulas, indexamos los elementos de las matrices comenzando por cero.]

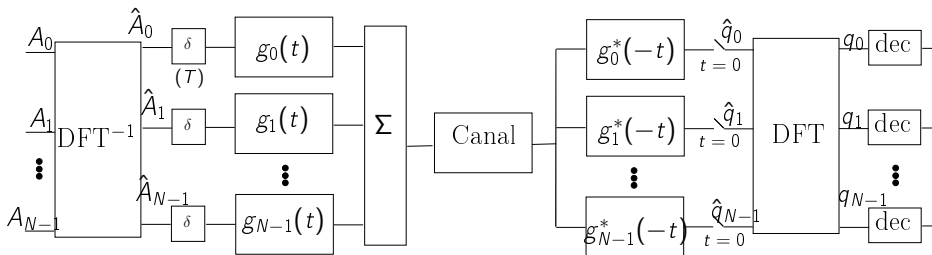
## DFT en forma matricial

- Como sus columnas son ortogonales, la matrix  $\mathbf{F}$  es **unitaria** ( $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$ ) (de hecho el  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  de la fórmula se pone para tener esta propiedad). Tiene que ser unitaria porque es la matriz del cambio de base entre dos sistemas ortonormales.
- Además es **simétrica** ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$ ), luego  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H = (\mathbf{F}^T)^* = \mathbf{F}^*$ .
- Por tanto  $\mathbf{F}^{-1}$  tiene una expresión análoga a la de  $\mathbf{F}$ , que se obtiene cambiando simplemente  $w$  por  $w^* = e^{j2\pi/N}$ .
- Por ser  $\mathbf{F}$  unitaria, los vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{F}\mathbf{x}$  tienen la misma energía:

$$\|\mathbf{F}\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{F}\mathbf{x})^H \mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{F}^H \mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

# Transmisor y receptor

Podemos implementar transmisor y receptor utilizando la base  $g_k(t)$ .  
Los módulos  $\delta$  hacen la conversión de señales discretas en trenes de deltas:  
 $x[n] \mapsto \sum_n x[n]\delta(t - nT)$

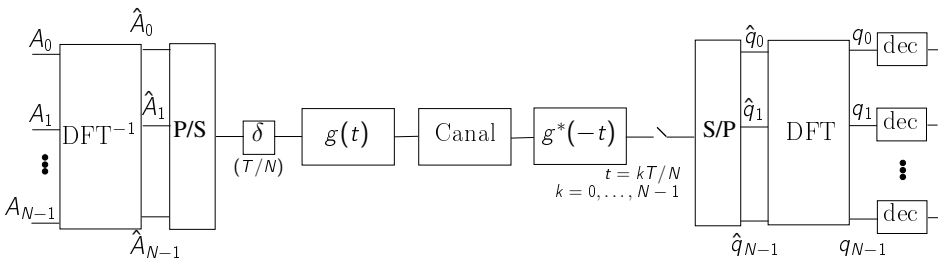


## Transmisor y receptor

Utilizando que la base  $g_k(t)$  está generada por una única señal  $g(t) = g_0(t)$  con distintos desplazamientos múltiplos de  $T/N$ , un esquema equivalente de Tx y Rx es el de la página siguiente.

- El módulo P/S (paralelo/serie) multiplexa las señales discretas  $A_k[n]$  en una única señal discreta, que se modula con un único módulo generador de deltas y un único filtro.
- Los productos escalares con los pulsos desplazados  $g_k(t) = g_0(t - kT)$  se pueden implementar con un único filtro, muestreando en distintos instantes de tiempo.
- El módulo S/P (paralelo/serie) vuelve a poner las muestras en los distintos canales.

# Transmisor y receptor



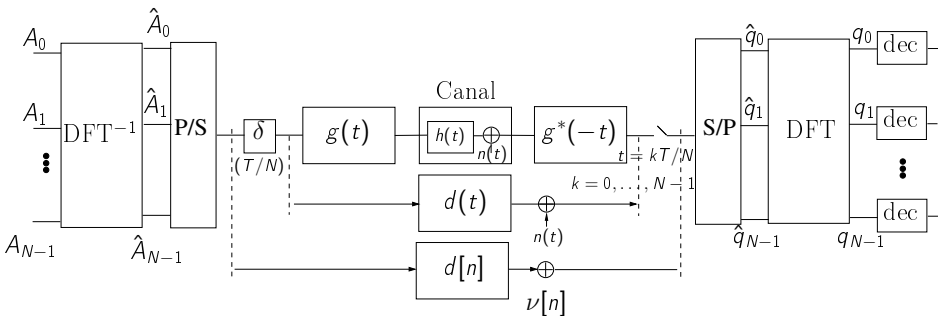
# Sistema discreto equivalente

Como sabemos, el sistema

$$\delta - g(t) - \text{canal} - g^*(-t) - \text{muestreo}$$

es equivalente al sistema discreto (filtrado más ruido)

$$d[n] = g(t) * h(t) * g^*(-t)|_{t=nT/N}, \nu[n] = n(t) * g(t)|_{t=nT/N}$$





## Sistema discreto equivalente

La idea para compensar la distorsión del canal es la siguiente:

- Vamos a modificar el sistema para que la convolución con el canal  $d[n]$  sea, en lugar de una convolución lineal, una **convolución circular** para cada conjunto de amplitudes  $\hat{A}_k$ .
- Por la propiedad de la convolución circular de la DFT

$$\text{DFT} [x[n] \circledast d[n]] = \sqrt{N} \text{DFT} [x[n]] \text{DFT} [d[n]]$$

la distorsión del canal se convierte en la multiplicación por  $D[k] = \text{DFT} [d[n]]$ , que se puede compensar fácilmente si se conoce el canal.

- Luego veremos cómo en OFDM es también fácil hacer una estimación del canal.

# Convolución circular y DFT

Para analizar la IES en OFDM y cómo combatirla tenemos que recordar las **propiedad de convolución circular de la DFT**.

La convolución circular se puede interpretar como una operación

- Entre dos vectores de  $N$  componentes que nos da otro vector del mismo tipo.
- Entre dos señales discretas de duración finita  $x[n]$ ,  $y[n]$  definidas en  $n = 0, \dots, N - 1$  que nos da otra señal del mismo tipo
- Entre dos señales discretas periódicas de periodo  $N$  que nos da otra señal del mismo tipo.

## Convolución circular y DFT

La vamos a definir como una operación entre dos señales discretas  $x[n]$ ,  $y[n]$  definidas en  $n = 0, \dots, N - 1$  que nos da otra señal del mismo tipo.

Para ello definimos la **versión periódica** de una señal de este tipo  $z[n]$  como la señal periódica

$$\tilde{z}[n] \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} z[n - kN]$$

o, equivalentemente,

$$\tilde{z}[n] = z[((n - k))_N]$$

donde  $((m))_N$  es el valor de la forma  $m - rN$ ,  $r$  entero, que cae en el intervalo  $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ . P. ej.,

$$((-1))_4 = 3, ((0))_4 = 0, ((3))_4 = 3, ((4))_4 = 0, ((5))_4 = 2$$

## Convolución circular y DFT

La convolución circular de  $x[n]$  con  $y[n]$  se puede definir como la **convolución ordinaria** de **una de las secuencias** con la **versión periódica de la otra**, seguida de **eventanamiento** a  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned}x[n] \circledast y[n] &= x[n] * \tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \tilde{y}[n - k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[((n - k))_N] \\ &= \tilde{x}[n] * y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} y[k] \tilde{x}[n - k] = \sum_{k=0}^{N-1} y[k] x[((n - k))_N]\end{aligned}$$

A veces se utiliza la notación  $x[n] \circledast_N y[n]$  para poner énfasis en que las convoluciones circulares para valores de  $N$  distintos son operaciones distintas.

# Convolución circular y DFT

Si multiplicamos

$$\sqrt{N}X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad \sqrt{N}Y[k] = \sum_{k=0}^{N-1} y[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

obtenemos otra expresión de la misma forma

$$N X[k]Y[k] = \sum_{k=0}^{N-1} z[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

donde

$$z[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[((n - m))_N] = x[n] \circledast y[n]$$

# Convolución circular y DFT

Por tanto,

$$N X[k]Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} z[n]e^{-j2\pi kn/N} = \sqrt{N}Z[k]$$

es decir,

$$Z[k] = \sqrt{N}X[k]Y[k]$$

# Convolución circular en forma matricial

La convolución circular

$$y[n] = d[n] \otimes x[n], \quad n = 0, \dots, N - 1$$

se puede expresar matricialmente como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} d[0] & d[N-1] & \cdots & d[1] \\ d[1] & d[0] & \cdots & d[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d[N-1] & d[N-2] & \cdots & d[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

(Regla nemotécnica: la muestra  $y[k]$  es producto de términos  $d[n]$  y  $x[m]$  tales que  $((m+n))_N = k$ .)

Las matrices con la estructura de la matriz  $\mathbf{D}$  se denominan **matrices circulantes**.

## Convolución circular y DFT

La propiedad de **convolución circular** de la DFT se expresa matricialmente de la siguiente forma.

$$X[k] = \text{DFT}[x[n]] \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

$$Y[k] = \text{DFT}[y[n]] \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{F}\mathbf{y}$$

$$y[n] = d[n] \circledast x[n] \Leftrightarrow \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} d[0] & d[N-1] & \cdots & d[1] \\ d[1] & d[0] & \cdots & d[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d[N-1] & d[N-2] & \cdots & d[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \mathbf{x}$$

$$Y[k] = \sqrt{N}D[k]X[k] \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \sqrt{N} \underbrace{\begin{bmatrix} D[0] & & & \\ & D[1] & & \\ & & \ddots & \\ & & & D[N-1] \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}} \mathbf{X}$$



# Convolución circular y DFT

Por tanto

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{X} = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}\mathbf{x}$$

Como esto es cierto para todo vector  $\mathbf{x}$ , tenemos que

$$\mathbf{F}\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{F}^{-1} = \hat{\mathbf{D}}$$

es decir, **la DFT diagonaliza matrices circulares.**

## Prefijo cíclico

Para que la convolución con el canal  $d[n]$ , nulo fuera de  $n = 0, \dots, K$ , sea un fenómeno **puramente intrasímbolo** y equivalente a una **convolución circular**, hacemos que

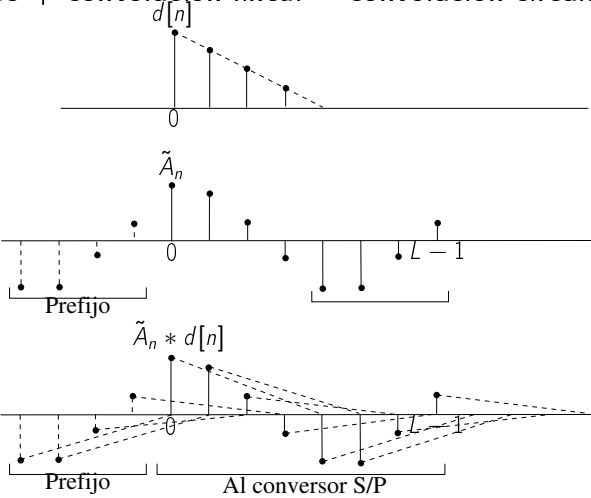
- El conversor P/S incluya para cada símbolo un **prefijo cíclico (PF)** de longitud menor o igual que la de  $d[n]$ .
- El conversor S/P se salte las muestras correspondientes a este prefijo.

**Para las demás muestras es como si las distorsionara una convolución circular.**

# Prefijo cíclico

## Comprobación gráfica

Prefijo cíclico + convolución lineal = convolución circular



# Prefijo cíclico

## Comprobación analítica

Veamos más formalmente que **prefijo cíclico + convolución lineal = convolución circular**.

Suponemos que  $d[n]$  es cero fuera de  $n = 0, \dots, K$  y que el prefijo cíclico tiene es de  $L = K$  muestras. Recordamos en primer lugar que la convolución ordinaria de una señal genérica  $x[n]$  con  $d[n]$  también se puede expresar matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d[K] & \dots & d[1] & d[0] & & & \\ & d[K] & \dots & d[1] & d[0] & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & d[1] & d[0] \\ & & & & & & & & d[K] & \dots & d[1] & d[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[-K] \\ x[-K+1] \\ \vdots \\ x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

(Regla nemotécnica: la muestra  $y[k]$  es producto de términos  $d[n]$  y  $x[m]$  tales que  $m + n = k$ .)

## Prefijo cíclico: ejemplo

Tomamos  $N = 4$ ,  $L = 2$ ,  $K = 2$  (marcamos los elementos correspondientes al prefijo cíclico con subrayado)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \hat{q}_2[k] \\ \hat{q}_3[k] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{d[2]} & \underline{d[1]} & d[0] & & & & & \\ & \underline{d[2]} & d[1] & d[0] & & & & \\ & & d[2] & d[1] & d[0] & & & \\ & & & d[2] & d[1] & d[0] & & \\ & & & & d[2] & d[1] & d[0] & \\ & & & & & d[2] & d[1] & d[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \\ \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{d[2]} & \underline{d[1]} \\ & \underline{d[2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d[0] & & & & & & & \\ d[1] & d[0] & & & & & & \\ d[2] & d[1] & d[0] & & & & & \\ & d[2] & d[1] & d[0] & & & & \\ & & d[2] & d[1] & d[0] & & & \\ & & & d[2] & d[1] & d[0] & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Prefijo cíclico: ejemplo

Añadimos ceros a la izquierda de la primera matriz para que quede cuadrada y podamos sumarla a la segunda,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \hat{q}_2[k] \\ \hat{q}_3[k] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \underline{d[2]} & \underline{d[1]} \\ 0 & 0 & & \underline{d[2]} \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{d[0]} & & & \\ \underline{d[1]} & \underline{d[0]} & & \\ \underline{d[2]} & \underline{d[1]} & \underline{d[0]} & \\ & \underline{d[2]} & \underline{d[1]} & \underline{d[0]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{d[0]} & & \underline{d[2]} & \underline{d[1]} \\ \underline{d[1]} & \underline{d[0]} & & \underline{d[2]} \\ \underline{d[2]} & \underline{d[1]} & \underline{d[0]} & \\ & \underline{d[2]} & \underline{d[1]} & \underline{d[0]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y obtenemos una **matriz circulante**, como esperamos.

## Prefijo cíclico

Caso general: Prefijo cíclico de longitud  $L$  y  $K = L$

Prefijo cíclico + convolución lineal :

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \vdots \\ \hat{q}_{N-1}[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{d[L]} & \underline{d[L-1]} & \dots & \underline{d[1]} & d[0] & & & & & & \\ & \underline{d[L]} & \dots & \underline{d[2]} & d[1] & d[0] & & & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & & \underline{d[L]} & d[L] & & & & d[0] & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & & & d[L] & \dots & d[1] & d[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_{N-L}[k] \\ \vdots \\ \hat{A}_{N-1}[k] \\ \hat{A}_0[k] \\ \vdots \\ \hat{A}_{N-1}[k] \end{pmatrix}$$

## Prefijo cíclico

Separamos la parte correspondiente al prefijo cíclico:

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \vdots \\ \hat{q}_{N-1}[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d[L] & d[L-1] & \cdots & d[1] \\ & d[L] & \cdots & d[2] \\ & & \ddots & \\ & & & d[L] \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_{N-L}[k] \\ \vdots \\ \hat{A}_{N-1}[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d[0] & & & & \\ d[1] & d[0] & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ d[L] & & & d[0] & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & d[L] & \cdots & d[1] & d[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \vdots \\ \hat{A}_{N-1}[k] \end{pmatrix}$$



## Prefijo cíclico

Añadimos ceros a la izquierda de la primera matriz para hacerla cuadrada:

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \vdots \\ \hat{q}_{N-1}[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underline{d[L]} & \underline{d[L-1]} & \cdots & \underline{d[1]} \\ 0 & \cdots & 0 & & \underline{d[L]} & \cdots & \underline{d[2]} \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \underline{d[L]} \\ & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \vdots \\ \hat{A}_{N-1}[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{d[0]} & & & & & & \\ \underline{d[1]} & \underline{d[0]} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \underline{d[L]} & & & & \underline{d[0]} & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & \underline{d[L]} & \cdots & \underline{d[1]} & \underline{d[0]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \vdots \\ \hat{A}_{N-1}[k] \end{pmatrix}$$

## Prefijo cíclico

Sumamos las matrices y obtenemos la matriz circulante esperada:

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \vdots \\ \hat{q}_{N-1}[k] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d[0] & & & \underline{d}[L] & \underline{d}[L-1] & \dots & \underline{d}[1] \\ d[1] & d[0] & & & \underline{d}[L] & \dots & \underline{d}[2] \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & & & \underline{d}[L] \\ d[L] & & & & d[0] & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & \underline{d}[L] & \dots & \underline{d}[1] & d[0] \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \vdots \\ \hat{A}_{N-1}[k] \end{pmatrix}$$

Observamos que, en el caso general, la matriz circulante obtenida tiene ceros. Para que quedara rellena debería ser  $L = K = N - 1$ .

## Prefijo cíclico

Al hacer el cambio de base

$$\mathbf{A} = \text{DFT} [\hat{\mathbf{A}}] = \mathbf{F}\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{q} = \text{DFT} [\hat{\mathbf{q}}] = \mathbf{F}\hat{\mathbf{q}}$$

nos queda

$$\mathbf{q}[k] = \mathbf{F}\mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}[k] = \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}[k]$$

donde

$$\mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{F}^{-1} = \sqrt{N} \begin{bmatrix} D[0] & & & \\ & D[1] & & \\ & & \ddots & \\ & & & D[N-1] \end{bmatrix}$$

## DFT y ruido

En cuanto al ruido, se puede demostrar que la transformación DFT no afecta a su caracterización estadística.

Es decir, por ser la matriz  $\mathbf{F}$  unitaria, si el vector aleatorio

$$\mathbf{N} = [\nu[0], \nu[1], \dots, \nu[N-1]]^T$$

es de componentes independientes con partes real e imaginaria independientes, todas de la misma varianza  $\sigma^2 = N_0/2$ , entonces como el vector

$$\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{F}\mathbf{N}$$

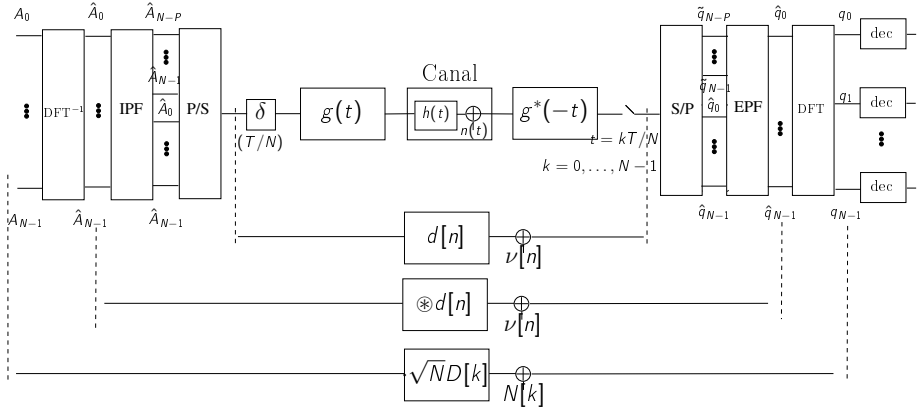
tiene también estas propiedades.

## Prefijo cíclico: sistema equivalente

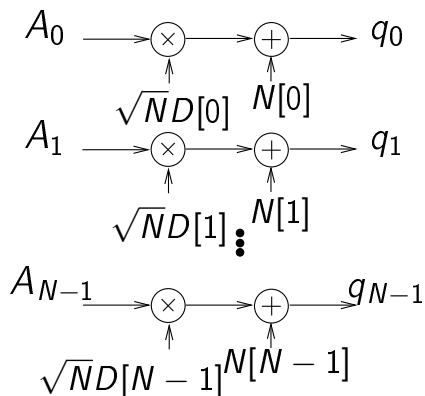
Por tanto, si el número de muestras del prefijo cíclico es al menos la respuesta del canal menos uno, tenemos todos los sistemas equivalentes de la página siguiente, en la que

- IPF: Inserción de prefijo cíclico: añade las muestras del prefijo
- EPF: Extracción de prefijo cíclico: descarta las muestras del prefijo

# Prefijo cíclico: sistema equivalente



## Prefijo cíclico: sistema equivalente



## Análisis del sistema con prefijo insuficiente

- El prefijo cíclico no puede hacerse arbitrariamente largo porque supone un gasto de recursos.
- Por eso el tamaño del bloque se toma suficientemente grande como para que el prefijo cíclico consuma una proporción pequeña del mismo.
- Para evaluar la IES cuando no existe prefijo cíclico o cuando la respuesta al impulso es más larga que el prefijo consideramos el canal discreto equivalente siguiente.



# Análisis del sistema con prefijo insuficiente

En el caso más general tendremos los fenómenos de

- **Interferencia entre símbolos (IES)** (*inter-symbol interference (ISI)*), cuando la muestra  $q_i[n]$  tiene componentes de  $A_i[n-1]$ ,  $A_i[n-2]$ , ...
- **Interferencia entre portadoras (IEP)** (*intercarrier interference (ICI)*), cuando la muestra  $q_i[n]$  tiene componentes de algún  $q_j[m]$ ,  $j \neq i$ .

# Ejemplo 1

Consideramos un sistema con  $N = 4$  portadoras, **sin prefijo cíclico** ( $L = 0$ ) y con canal  $d[n] = \delta[n] + \alpha\delta[n - 1]$  ( $K = 1$ ).

Tenemos

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \hat{q}_2[k] \\ \hat{q}_3[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{d[1]} & d[0] & & & & & \\ & d[1] & d[0] & & & & \\ & & d[1] & d[0] & & & \\ & & & d[1] & d[0] & & \\ & & & & d[1] & d[0] & \\ & & & & & d[1] & d[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_3[k - 1] \\ \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix}$$

## Ejemplo 1

Procediendo como en los casos sin IES que hemos visto anteriormente,

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \hat{q}_2[k] \\ \hat{q}_3[k] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d[0] & & & \\ d[1] & d[0] & & \\ & d[1] & d[0] & \\ & & d[1] & d[0] \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} & & & d[1] \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k-1] \\ \hat{A}_1[k-1] \\ \hat{A}_2[k-1] \\ \hat{A}_3[k-1] \end{pmatrix}$$

Antes de aplicar la transformación completamos  $\mathbf{A}$  para que sea circulante:

$$\hat{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d[0] & & & d[1] \\ d[1] & d[0] & & \\ & d[1] & d[0] & \\ & & d[1] & d[0] \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{C}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} & & & -d[1] \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{D}}}$$

## Ejemplo 1

Ahora hacemos el cambio

$$\mathbf{A} = \text{DFT} [\hat{\mathbf{A}}] = \mathbf{F}\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{q} = \text{DFT} [\hat{\mathbf{q}}] = \mathbf{F}\hat{\mathbf{q}}$$

con lo que nos queda

$$\mathbf{q}[k] = \mathbf{F}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}[k] + \mathbf{F}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}[k] + \mathbf{F}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{A}[k - 1]$$

## Ejemplo 1

Necesitamos calcular productos  $\mathbf{F}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{F}^H$  donde  $\mathbf{E}_{ij}$  es la matriz con todos los elementos nulos excepto el  $(i,j)$ .

Esto es inmediato escribiendo esta matriz como  $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^H$ :

$$\mathbf{E}_{ij} = \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \dots & & & 1 & & \dots \\ & & & & & \\ & & & \vdots & & \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & & & 1 & & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_j^H}$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{w}_0 \quad \mathbf{w}_1 \quad \dots \quad \mathbf{w}_{N-1}], \quad \mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} [1 \quad w^k \quad \dots \quad w^{k(N-1)}]^T, \quad w = e^{-j2\pi/N}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}\mathbf{E}_{ij}\mathbf{F}^H = \mathbf{F}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^H\mathbf{F}^H = \mathbf{F}\mathbf{e}_i(\mathbf{F}\mathbf{e}_j)^H = \mathbf{w}_i\mathbf{w}_j^H = (m_{kl})$$

$$m_{kl} = (\mathbf{w}_i)_k(\mathbf{w}_j)_l = \frac{1}{N} w^{ik} w^{jl} = \frac{1}{N} w^{ik+jl}$$

(hemos utilizado el hecho de que al multiplicar una matriz por un vector columna  $\mathbf{e}_i$ , con un uno en la posición  $i$  y el resto ceros, el resultado es la columna  $i$  de la matriz)

## Ejemplo 1

- La matriz  $\mathbf{FCF}^{-1}$  sabemos que es diagonal con entradas  $\sqrt{N}D[k] = d[0] + d[1]w^k$ ,  $w = e^{-j2\pi/N}$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ .
- Para las demás matrices aplicamos el resultado anterior:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &\equiv \mathbf{F}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{F}^H = d[1]\mathbf{F}\mathbf{E}_{1,N}\mathbf{F}^H = d[1](m_{ki}) \\ m_{ki} &= \frac{1}{N}w^{0k+Ni} = \frac{1}{N}w^{Ni} = \frac{1}{N}w^{-i} \\ \hat{\mathbf{D}} = -\hat{\mathbf{B}} &\Rightarrow \mathbf{D} \equiv \mathbf{F}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{F}^{-1}\end{aligned}$$

## Ejemplo 1

El resultado global es

$$\mathbf{q}[k] = \begin{pmatrix} d[0] + d[1] & & & & \\ & d[0] + d[1]w & & & \\ & & d[0] + d[1]w^2 & & \\ & & & d[0] + d[1]w^3 & \\ & & & & \end{pmatrix} \mathbf{A}[k] + \mathbf{DA}[k] - \mathbf{DA}[k - 1]$$

## Ejemplo 1

En el resultado distinguimos:

- Un primer sumando de **señal** sin interferencias, en que cada amplitud del símbolo actual aparece distorsionada únicamente por una constante multiplicativa  $\sqrt{ND}[k]$ .
- Un segundo sumando de cruce de amplitudes entre canales, todos del símbolo actual (**interferencia entre portadoras (IEP)**)
- Un tercer sumando de interferencia procedente del símbolo anterior (**IES + IEP**)

Obsérvese que, en este resultado, las matrices correspondientes a interferencias tienen entradas de amplitud  $\frac{1}{N}d[1]$ , con lo que estas interferencias aparecen dispersas entre todos los canales y atenuadas por un factor  $1/N$  respecto de la señal.



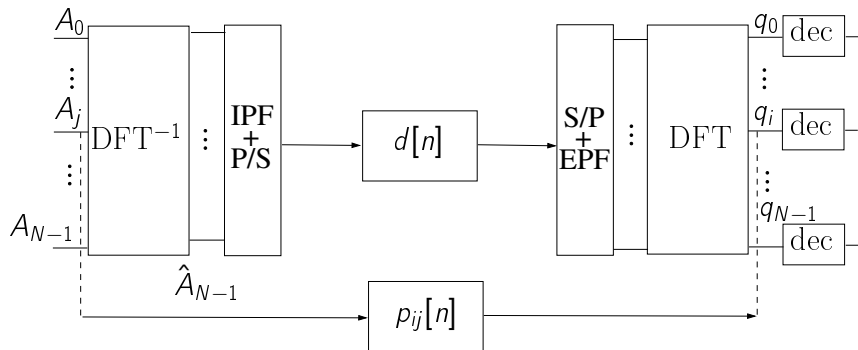
## Análisis de un sistema con prefijo insuficiente

Para caracterizar los sistemas con IES se pueden definir las respuestas al impulso  $p_{ki}[n]$ , que relacionan las entradas y las salidas de la forma

$$q_k[n] = \sum_{i=0}^{N-1} A_i[n] * p_{ki}[n] + n[n]$$

- Los  $p_{ik}[n]$  no nulos,  $k \neq i$ ,
  - ▶ representan IEP
  - ▶ también representan IES si no son proporcionales a  $\delta[n]$
- Los  $p_{ii}[n]$  que no sean proporcionales a  $\delta[n]$  representan IES.

## Análisis de un sistema con prefijo insuficiente



## Ejemplo 1 (cont.)

Cada  $p_{ki}[n]$  corresponde a las entradas  $(k + 1, i + 1)$  de las matrices que hemos calculado.

En nuestro ejemplo,

$$p_{ki}[0] = \sqrt{N}D[i]\delta_{ki} + \frac{1}{N}w^{-i}d[1]$$

$$p_{ki}[1] = -\frac{1}{N}w^{-i}d[1]$$

## Ejemplo 2

Consideremos como ejemplo un sistema con tamaño de bloque  $N = 4$ , prefijo cíclico de dos muestras ( $L = 2$ ) y canal de longitud cinco ( $K = 4$ ).

## Ejemplo 2

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \hat{q}_2[k] \\ \hat{q}_3[k] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d[4] & d[3] & \underline{d[2]} & \underline{d[1]} & d[0] & & & & \\ & d[4] & \underline{d[3]} & \underline{d[2]} & d[1] & d[0] & & & \\ & & \underline{d[4]} & \underline{d[3]} & d[2] & d[1] & d[0] & & \\ & & & \underline{d[4]} & d[3] & d[2] & d[1] & d[0] & \\ & & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_2[k-1] \\ \hat{A}_3[k-1] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \\ \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} & d[4] & d[3] \\ & & \underline{d[4]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k-1] \\ \hat{A}_1[k-1] \\ \hat{A}_2[k-1] \\ \hat{A}_3[k-1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{d[2]} & \underline{d[1]} \\ \underline{d[3]} & \underline{d[2]} \\ \underline{d[4]} & \underline{d[3]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} d[0] & & & \\ d[1] & d[0] & & \\ d[2] & d[1] & d[0] & \\ d[3] & d[2] & d[1] & d[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## Ejemplo 2

Escribimos  $M_1 + M_2$  como la suma de una matriz circulante más una matriz con pocos coeficientes:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d[0] & & & \\ d[1] & d[0] & & \\ d[2] & d[1] & d[0] & \\ d[3] & d[2] & d[1] & d[0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{d[2]} & \underline{d[1]} \\ \underline{d[3]} & \underline{d[2]} \\ \underline{d[4]} & \underline{d[3]} \\ \underline{d[4]} & \underline{d[3]} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d[0] & & \underline{d[2]} & \underline{d[1]} \\ d[1] & d[0] & \underline{d[3]} & \underline{d[2]} \\ d[2] & d[1] & \underline{d[0]} & \underline{d[3]} \\ d[3] & d[2] & \underline{d[1]} & \underline{d[0]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & \\ & \underline{d[4]} & & \\ & & & \underline{d[4]} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d[0] & \bar{d}[3] & \underline{d[2]} & \underline{d[1]} \\ d[1] & d[0] & \underline{d[3]} & \underline{d[2]} \\ d[2] & d[1] & \underline{d[0]} & \underline{d[3]} \\ d[3] & d[2] & \underline{d[1]} & \underline{d[0]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & \\ & -\bar{d}[3] & & \\ & & & \underline{d[4]} \\ & & & \underline{d[4]} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Ejemplo 2

Con lo que nos queda

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_0[k] \\ \hat{q}_1[k] \\ \hat{q}_2[k] \\ \hat{q}_3[k] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d[0] & d[3] & d[2] & d[1] \\ d[1] & d[0] & d[3] & d[2] \\ d[2] & d[1] & d[0] & d[3] \\ d[3] & d[2] & d[1] & d[0] \end{pmatrix}}_c \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d[3] & & & \\ & d[4] & & \\ & & d[4] & \\ & & & d[4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k] \\ \hat{A}_1[k] \\ \hat{A}_2[k] \\ \hat{A}_3[k] \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} & d[4] & & \\ & & d[3] & \\ & & & d[4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_0[k-1] \\ \hat{A}_1[k-1] \\ \hat{A}_2[k-1] \\ \hat{A}_3[k-1] \end{pmatrix}$$

## Ejemplo 2

De los términos anteriores, al pasar al dominio de la DFT:

- El primero es de señal, pues la matriz  $\hat{\mathbf{C}}$  queda diagonalizada.
- El segundo dará lugar a IEP.
- El tercero dará lugar a IES+IEP.



# Estimación del canal

Se hace incluyendo tonos de prueba, es decir, amplitudes conocidas en algunas componentes.

## Igualación

Una vez estimado el canal, basta dividir cada componente  $q_k$  muestreada entre la estimación del  $D_k$  correspondiente (esquema ZF).

El problema es que se amplifica el ruido. La alternativa (esquema MMSE) es hallar para cada canal el valor  $G_k$  con el que se minimiza la distorsión total.

Se demuestra (ver apéndice) en el apéndice que este valor es

$$G_k = \frac{D_k^*}{|D_k|^2 + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_X^2}}$$

## Optimización del uso del canal

De acuerdo con el modelo de canal equivalente, tenemos  $N$  canales de la forma

$$q_k = D_k A_k + N_k$$

donde los  $N_k$  son variables aleatorias independientes con partes real e imaginaria independientes de varianza  $N_0$ . Equivalentemente, podemos considerar canales equalizados

$$q_k = A_k + D_k^{-1} N_k.$$

Si el canal es conocido por el transmisor (como en aplicaciones de cable (ADSL)), se puede repartir la potencia disponible entre estos canales paralelos maximizando la capacidad total

$$C = \sum_{k=0}^{N-1} \log \left( 1 + \frac{\sigma_{X_k}^2}{\sigma_{N_k}^2} \right)$$

donde  $\sigma_{X_k}^2 = s_k T$  es la energía media por señal en el canal  $i$  y  $\sigma_{N_k}^2 = N_0 / |D_k|^2$  es la varianza de ruido, con la restricción  $\sum_{k=0}^{N-1} s_k = s$ .

# Optimización del uso del canal

La solución óptima corresponde al criterio del **nivel de agua (water filling)**, dado por

$$s_k = (\mu - \sigma_{N_k}^2)_+$$

donde  $(x)_+ \equiv \max\{x, 0\}$ , para el valor de  $\mu$  con el que se satisface la restricción

$$\sum_{k=0}^{N-1} s_k = \mu.$$

## Apéndice: Estimación de una VA compleja

Dadas  $X$ ,  $N$  complejas independientes  $X \sim CN(0, \sigma_X^2)$ ,  $N \sim CN(0, \sigma_N^2)$ , tenemos

$$Y = \alpha X + N$$

$$\hat{X} = \beta Y$$

$$\begin{aligned} F(\beta) &= E \left[ \left| X - \hat{X} \right|^2 \right] = E \left[ \left| (\beta\alpha - 1) X - \beta N \right|^2 \right] \\ &= |\beta\alpha - 1|^2 \sigma_X^2 + |\beta|^2 \sigma_N^2 \\ &= (\sigma_X^2 |\alpha|^2 + \sigma_N^2) |\beta|^2 - 2\sigma_X^2 \Re(\alpha\beta) + \sigma_X^2 \end{aligned}$$

## Apéndice: Estimación de una VA compleja

Utilizando la identidad

$$|a\beta + b|^2 + c = |a|^2|\beta|^2 + 2\Re(ab^*\beta) + |b|^2 + c$$

obtenemos, identificando coeficientes,

$$\begin{aligned} F(\beta) &= (\sigma_X^2|\alpha|^2 + \sigma_N^2)|\beta|^2 - 2\Re(\sigma_X^2\alpha\beta) + \sigma_X^2 \\ &= |a\beta + b|^2 + c \end{aligned}$$

$$|a|^2 = \sigma_X^2|\alpha|^2 + \sigma_N^2 \Rightarrow a = \sqrt{\sigma_X^2|\alpha|^2 + \sigma_N^2}$$

$$ab^* = \sigma_X^2\alpha \Rightarrow b = -\frac{\sigma_X^2\alpha^*}{a}$$

$$|b|^2 + c = \sigma_X^2 \Rightarrow c = \sigma_X^2 - |b|^2$$

luego el valor  $\beta$  óptimo es

$$\beta = -\frac{b}{a} = \frac{\sigma_X^2\alpha^*}{a^2} = \frac{\sigma_X^2\alpha^*}{\sigma_X^2|\alpha|^2 + \sigma_N^2} = \frac{\alpha^*}{|\alpha|^2 + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_X^2}}$$