

Programa de Doctorado - SSR

Curso “Métodos analíticos y análisis de señales”

Módulo B
Métodos analíticos para el estudio
de señales y sistemas

9 de diciembre de 2015

José Ignacio Ronda Prieto
jir@gti.ssr.upm.es
www.gti.ssr.upm.es/~jir

*Grupo de Tratamiento de Imágenes
Depto. de Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones
ETSI Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid*

Índice general

1. Introducción a los espacios de dimensión infinita	7
1.1. Estructuras importantes	7
1.2. Espacios normados importantes	9
1.3. Ejemplos de dificultades que aparecen en los espacios de dimensión infinita	10
1.3.1. Convergencia de secuencias	10
1.3.2. Bases	11
1.3.3. Proyecciones ortogonales	11
1.4. Topología de espacios normados	11
1.4.1. Conceptos básicos	11
1.4.2. Continuidad	12
1.4.3. Espacios separables	12
1.4.4. Completitud	12
1.4.5. Continuidad uniforme	13
1.4.6. Conjuntos compactos	13
1.4.7. Aplicaciones lineales entre espacios normados	14
1.5. Problemas	15
2. Introducción a los espacios de Hilbert	19
2.1. Introducción	19
2.2. El espacio l_2	19
2.3. Espacios de Hilbert separables	20
2.4. Caracterización de bases de Hilbert	21

2.5.	Subespacios cerrados y proyecciones ortogonales	22
2.5.1.	Subespacios de espacios de Hilbert	22
2.5.2.	Proyecciones ortogonales	23
2.5.3.	Complementos ortogonales	23
2.6.	Algunos espacios de Hilbert importantes	24
2.6.1.	Señales periódicas	24
2.6.2.	Señales de energía finita	25
2.6.3.	Señales limitadas en banda	26
2.7.	Problemas	27
3.	Bases de ondículas	30
3.1.	Motivación	30
3.2.	Análisis multirresolución	32
3.2.1.	Definición	32
3.2.2.	Observaciones	32
3.2.3.	Ejemplo: Análisis multirresolución de Haar	33
3.3.	Espacios W_n	34
3.4.	Ondícula madre	36
3.5.	Obtención de ϕ a partir de m_ϕ	40
3.6.	Transformada ondicular discreta y bancos de filtros	42
3.7.	Construcción de funciones de escalado con soporte compacto	45
3.8.	Análisis multirresolución de Riesz	48
3.9.	Frames	50
3.10.	Problemas	51
4.	Transformada ondicular continua	54
5.	Introducción al método de elementos finitos	56
5.1.	Introducción	56
5.2.	Reformulación del problema de la EDP elíptica	57
5.3.	Espacios de funciones	59

5.3.1.	Espacios de Banach	59
5.3.2.	Espacios de Hilbert	60
5.3.3.	Derivada débil	60
5.3.4.	Espacios de Sobolev	61
5.4.	Solución débil de la ecuación	62
5.4.1.	Estudio del problema general de la formulación débil	62
5.4.2.	Particularización a la EDP elíptica	64
5.5.	Método numérico: Aproximación de Ritz-Galerkin	67
5.5.1.	Idea básica	67
5.5.2.	Aproximación a la solución exacta	68
5.5.3.	Regularidad de la solución	69
5.6.	Resumen	69
A. Introducción a los espacios de Hilbert. Demostraciones		72
A.0.1.	l_2 es completo	72
A.0.2.	Todo EPI separable tiene una base de Hilbert	73
A.0.3.	Todo espacio de Hilbert separable es isomorfo a l_2	73
A.0.4.	La adherencia de un subespacio es un subespacio	75
A.0.5.	Un subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo	75
A.0.6.	Un subconjunto de un espacio métrico separable es separable . . .	75
A.0.7.	El conjunto ortogonal de un conjunto es un subespacio cerrado . .	75
A.0.8.	En un EHS el complemento ortogonal del complemento ortogonal de un subespacio es	
A.0.9.	Caracterización de subespacios densos	76
B. Resultados fundamentales sobre la integral de Lebesgue		77
B.1.	Definiciones y resultados básicos	77
B.2.	Teoremas de paso al límite	78
C. Análisis de Fourier		80
C.1.	Transformación de Fourier	80
C.2.	Propiedades de la transformación de Fourier	81
C.3.	Transformación de Fourier de secuencias	81
C.4.	Transformación de Fourier y muestreo	81

Preámbulo

Este documento es la segunda parte de los apuntes del curso de doctorado "Métodos analíticos y análisis de señal" del Máster Universitario en Tecnologías y Sistemas de Comunicaciones de la ETSIT-UPM.

El objetivo del curso es reforzar los recursos matemáticos de los ingenieros de telecomunicación para facilitar la realización de la tesis doctoral.

En esta segunda parte se abordan algunos problemas que se formulan en espacios vectoriales de dimensión infinita. Por ello se comienza llamando la atención sobre las diferencias entre estos espacios y los de dimensión finita y proporcionando una introducción a los espacios de Hilbert separables, que son los espacios de dimensión infinita con propiedades más similares a las de los espacios de dimensión finita.

Después se aborde el análisis de señales mediante ondículas, principalmente a través del concepto de análisis multirresolución, pero con referencia también a la transformada ondicular continua.

Finalmente se proporciona una introducción al método de elementos finitos para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.

Copyright

"Métodos analíticos para el estudio de señales y sistemas"

Algunos derechos (C) 2015 reservados. José Ignacio Ronda Prieto <jir@gti.ssr.upm.es>

Versión 1.0, noviembre de 2015.

Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su preparación no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this licence, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

or send a letter to Creative commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope they are useful. While caution has been taken during its preparation, it is possible that notes still contain some errors. There is absolutely no warranty about its contents.

Resumen de la licencia:

Está permitido ...

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Hacer obras derivadas.

Bajo las siguientes condiciones:

Reconocimiento: Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador.

No comercial: No se uede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia: Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia similar a ésta.

Capítulo 1

Introducción a los espacios de dimensión infinita

1.1. Estructuras importantes

En esta sección repasamos algunas estructuras matemáticas conocidas.

Espacio métrico: (E, d) , donde $d : E \times E \rightarrow \mathbf{R}^+$ verifica

(a) $d(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(b) $d(u, v) = d(v, u)$

(c) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (desigualdad triangular)

Una *isometría* es una aplicación entre espacios métricos que preserva la distancia.

Las isometrías son siempre inyectivas.

Si entre dos espacios métricos existe una isometría biyectiva, se dice que son *isométricos*.

Conviene que la métrica se comporte bien respecto de las operaciones de espacio vectorial. Por eso se prefiere que la métrica derive de una *norma*.

Espacio normado: $(V, \|\cdot\|)$, donde V es un espacio vectorial y se verifica

1) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

3) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Definiendo $d(u, v) = \|u - v\|$ tenemos un espacio métrico.

Se verifica

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha x + \beta y.$$

Dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ son *equivalentes* si existen constantes c_1, c_2 tales que para todo vector x

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Es fácil demostrar que una norma p y la norma ∞ son equivalentes en \mathbf{C}^n :

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n \|x\|_\infty^p,$$

$$\|x\|_\infty^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \|x\|_p^p,$$

luego

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

De hecho se puede demostrar que en un espacio de dimensión finita dos normas cualesquiera son equivalentes.

Espacio con producto interno: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que

- 1) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
- 2) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$
- 3) $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Definiendo $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ tenemos un espacio normado.

Verifican la *desigualdad de Schwartz*:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

(con igualdad si y sólo si u y v son proporcionales) y la *igualdad del paralelogramo*:

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

De hecho, si un espacio normado verifica esta igualdad, es un espacio con producto interno con el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Esta fórmula se denomina *identidad de polarización*.

Una consecuencia es que las isometrías son las aplicaciones que preservan el producto escalar.

En un espacio con producto escalar se define el concepto geométrico de ortogonalidad:

$$u \perp v \equiv \langle u, v \rangle = 0,$$

$$u \perp S \equiv \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in S.$$

Si $x \perp y$, es inmediato comprobar el *teorema de Pitágoras*:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Dado un subconjunto S se define su *subespacio ortogonal* S^\perp como el subespacio vectorial formado por los vectores ortogonales a todos los elementos de S .

1.2. Espacios normados importantes

Espacios l^p ($1 \leq p < \infty$): Son los espacios de secuencias $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ con $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. En ellos se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Verifican la *desigualdad de Hölder*:

$$x \in l^p, y \in l^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

La desigualdad triangular también recibe en este caso el nombre de *desigualdad de Minkowski*.

Espacio l^2 : La norma procede en este caso del producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Espacio l^∞ : Conjunto de las secuencias acotadas. En él se define

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}$$

Espacios $L^p(\mathbf{R})$ ($1 \leq p < \infty$): Funciones complejas de variable real *medibles* tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt < \infty,$$

considerando iguales dos funciones x e y que difieran en un *conjunto de medida nula* o, lo que es lo mismo, tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^p dt = 0.$$

Por tanto son clases de equivalencia de funciones, aunque se notan habitualmente como funciones.

Una clase de equivalencia no puede contener dos funciones continuas.

Si $f \in L^p(\mathbf{R})$, la expresión $f(0)$ no tiene sentido salvo que la clase f contenga una función continua y se interprete como el valor de esta función en este punto.

En este espacio se define la norma

$$\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Verifica la *desigualdad de Hölder*:

$$x \in L^p(\mathbf{R}), y \in L^q(\mathbf{R}), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

La desigualdad triangular también recibe en este caso el nombre de *desigualdad de Minkowski*.

Espacio $L^2(\mathbf{R})$: La norma procede en este caso del producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bar{y}(t) dt.$$

La transformación de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbf{R})$ en $L^2(\mathbf{R})$.

Espacio $L^\infty(\mathbf{R})$: Funciones *esencialmente acotadas*, es decir, tales que

$$\sup \text{esen} |x| < \infty.$$

donde $\sup \text{esen} f$ es el ínfimo de los α tales que $f^{-1}((\alpha, \infty])$ tiene medida mayor que cero.

Se define

$$\|x\|_\infty = \sup \text{esen} |x|.$$

Espacio $L^p(\mathbf{T})$: Funciones complejas de variable real de periodo 2π con la norma

$$\|x\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

considerando iguales funciones que difieran en una función de norma cero.

Espacio $C[a, b]$: Funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$. Con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}.$$

1.3. Ejemplos de dificultades que aparecen en los espacios de dimensión infinita

1.3.1. Convergencia de secuencias

Como hemos indicado anteriormente, en los espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes, y de ahí se desprende que si una sucesión de vectores converge a un cierto vector en una norma, también lo hace en cualquier otra, y no tenemos que preocuparnos de indicar en qué norma se verifica la convergencia.

Sin embargo, si consideramos el espacio $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ de las señales discretas $x(n)$, $n = 0, 1, \dots$, las secuencias convergentes dependen de la norma utilizada. Por ejemplo, la secuencia

$$x_k(n) = \begin{cases} 1/k & 0 \leq n < k \\ 0 & n \geq k \end{cases}$$

converge a cero en la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ o en la norma $\|\cdot\|_2$, pero no en la norma $\|\cdot\|_1$.

1.3.2. Bases

Podría parecer que las señales de la forma $\delta_k(n) = \delta(n - k)$ forman una base del espacio de las señales discretas, pero no es así: Cuando hacemos con ellas combinaciones lineales sólo obtenemos el conjunto las secuencias que son cero a partir de cierta muestra (espacio c_{00}).

Para que sea base tenemos que redefinir el concepto de base admitiendo sumas infinitas:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta_k(n) = x(n),$$

Pero hay que definir qué entendemos por suma infinita. Si en nuestro espacio de señales tenemos definido el concepto de *límite*, la igualdad anterior se interpreta como

$$\sum_{k=0}^N x(k)\delta_k(n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} x(n).$$

1.3.3. Proyecciones ortogonales

En \mathbf{R}^n dados un vector v y un subespacio S , sabemos que existe un único vector de S que es el más cercano a v (proyección ortogonal de v sobre S).

Para ver la dificultad en dimensión infinita, es aconsejable intentar hacer lo mismo con la secuencia $v(n) = \frac{1}{n}$ y el subespacio S de las secuencias que son cero salvo en un número finito de muestras.

1.4. Topología de espacios normados

1.4.1. Conceptos básicos

- **Bola abierta** $B(x, r)$: Puntos que distan de x menos que r .
- Un conjunto es **abierto** si cada punto es centro de una bola contenida en el conjunto.

- Un punto del espacio es **punto de acumulación** de un conjunto A si es límite de una secuencia de elementos de A .
- Un conjunto C es **cerrado** si contiene los límites de sus secuencias, es decir, sus puntos de acumulación o, equivalentemente, si su complementario es abierto.
- Se define la **adherencia** (*closure*) de un conjunto A , $\text{cl } A$, como el conjunto de los puntos de acumulación de A .

Dos casos importantes de conjuntos cerrados:

- En un espacio normado, los subespacios vectoriales de dimensión finita.
- En un espacio con producto interno, el subespacio vectorial S^\perp formado por los vectores ortogonales a un conjunto cualquiera S (*espacio ortogonal a S*).

1.4.2. Continuidad

Una aplicación T entre espacios métricos es **continua** si

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow T(x_n) \rightarrow T(x).$$

En un espacio normado la norma, la suma ($x \mapsto x + x_0$) y el producto por escalar ($x \mapsto \alpha x$) son operaciones continuas.

En espacios concretos se definen criterios de convergencia adicionales, como la **convergencia puntual** (convergencia de cada componente) en l^p , **convergencia en casi todo punto** en $L^p(\cdot)$.

La convergencia en la norma $\|\cdot\|_\infty$ se denomina **convergencia uniforme**.

1.4.3. Espacios separables

Un conjunto $A \subset B$ es **denso** en B si cada bola de B contiene algún elemento de A . Equivale a que la adherencia de A sea B .

También equivale a que cada elemento de B se pueda aproximar arbitrariamente bien por elementos de A .

Las funciones continuas y las funciones constantes a trozos constituyen conjuntos densos en $L^2(\mathbf{R})$.

Los polinomios trigonométricos son densos en $L^p(\mathbf{T})$, $p > 1$.

Un conjunto es **separable** si contiene un subconjunto numerable denso.

1.4.4. Completitud

Una secuencia es de **Cauchy** si fijado un $\epsilon > 0$ arbitrario existe un m tal que dos elementos posteriores a m cualesquiera distan entre sí menos que ϵ . Toda secuencia

convergente es de Cauchy.

Si en un espacio métrico se da el recíproco, es decir, si toda secuencia de Cauchy es convergente, se dice que el espacio es **completo**.

Intuitivamente: Un espacio completo es un espacio *sin agujeros* en el sentido de que cuando parece que nos acercamos a algo (mediante una secuencia de Cauchy) ese algo (el límite de la secuencia) existe y es un punto del espacio.

Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo.

Un **espacio de Hilbert** es un espacio con producto interno completo.

Los espacios l^p , $L^p(\mathbf{R})$ y $L^p(\mathbf{T})$ son completos, luego son espacios de Banach.

Para $p = 2$ son espacios de Hilbert.

Los subconjuntos cerrados de un espacio completo son completos.

Dado un espacio métrico no completo E se define su **completación** F como un espacio métrico completo que incluye a E como subconjunto denso.

Informalmente, se obtiene añadiendo a E los límites de sus secuencias de Cauchy (es decir *rellenando sus agujeros*).

Todas las completaciones de un espacio métrico son esencialmente iguales (isométricas).

Ejemplos:

- \mathbf{R} es la completación de \mathbf{Q} .

- $L^p(\mathbf{R})$ es la completación del conjunto de las funciones continuas con norma $\|\cdot\|_p$ finita.

Los subconjuntos cerrados de espacios métricos completos son completos.

1.4.5. Continuidad uniforme

Una aplicación $T : (S, d) \rightarrow (S', d')$ es **uniformemente continua** si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $s_1, s_2 \in S$

$$d(s_1, s_2) < \delta \Rightarrow d(T(s_1), T(s_2)) < \epsilon.$$

Las funciones complejas de variable real continuas en un intervalo cerrado son uniformemente continuas.

Las aplicaciones lineales continuas entre espacios normados son uniformemente continuas.

1.4.6. Conjuntos compactos

Un subconjunto K de un espacio métrico es **compacto** si toda secuencia de elementos de K contiene una subsecuencia convergente a un elemento de K .

En el caso particular de \mathbf{R}^n los compactos coinciden con los conjuntos *cerrados y acotados*.

En un espacio métrico genérico los compactos coinciden con los conjuntos *completos y totalmente acotados*, es decir, cubiertos, para cualquier ϵ , por un conjunto finito de bolas de radio ϵ .

1.4.7. Aplicaciones lineales entre espacios normados

Recordamos que una *aplicación lineal* entre dos espacios vectoriales es la que verifica $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$. En espacios de dimensión finita todas las aplicaciones lineales son continuas. En espacios normados de dimensión finita una aplicación lineal f es continua si y sólo si es *acotada*, es decir, si toma valores acotados sobre la esfera unidad $\{x : \|x\| = 1\}$.

Las aplicaciones lineales continuas entre dos espacios normados constituyen otro espacio normado con la *norma inducida* definida como

$$\|L\| = \sup_{\{x:\|x\|=1\}} \|Lx\|.$$

1.5. Problemas

1.1. Demostrar que la equivalencia entre normas es una relación de equivalencia (es decir, que verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

1.2. En $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (espacio de las secuencias discretas) consideramos las normas

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad p \geq 1,$$
$$\|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x(n)|.$$

Además del criterio de convergencia en norma, consideramos también el criterio de *convergencia puntual*. Indicar para qué tipos de convergencia se verifica $(x_k) \rightarrow x$ en los casos siguientes:

(a) $x_k(n) = \delta(n - k)$, $x(n) = 0$ ($\delta(n)$ es la delta de Dirac discreta).

(b) $x_k(n) = \frac{1}{k} \chi_{\{1, \dots, k\}}$, $x(n) = 0$.

($\chi_A(n)$ es la función indicatriz del conjunto A , que toma el valor 1 si $n \in A$ y 0 en caso contrario.)

1.3. Recordando que el subespacio generado por un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i \in I}$ es el menor subespacio vectorial que los contiene y está formado por todas las combinaciones lineales de la forma

$$\alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_n v_{i_n}, \quad i_k \in I, n \in \mathbf{N},$$

describir cuál es el subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ generado por las secuencias

$$\delta_i(n) = \delta(n - i), \quad i \in \mathbf{N}.$$

1.4. En $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ consideramos la secuencia $x(n) = \frac{1}{n}$ y el subespacio c_{00} de las secuencias que sólo toman valores no nulos en un conjunto finito de puntos. Hallar el elemento de c_{00} más cercano a x en la norma $\|\cdot\|_2$ o demostrar que tal elemento no existe.

1.5. (a) Demostrar que la norma que hemos definido a partir del producto escalar efectivamente lo es.

(b) Demostrar la desigualdad de Schwartz. Indicación: Utilizar que $\langle u + tv, u + tv \rangle > 0$ para todo $u, v \in X$, $t \in \mathbf{C}$.

(c) Demostrar el teorema de Pitágoras y la igualdad del paralelogramo.

1.6. Indicar a qué espacios $L^p(\mathbf{R})$, $p \in [1, \infty]$, pertenecen las siguientes funciones de $\mathbf{C}^{\mathbf{R}}$:

(a) $x(t) = \frac{1}{t} \chi_{[1, \infty)}$.

- (b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\chi_{(0,1]}$.
 (c) $x(t) = \max\{-1, \min\{1, 1/t\}\}$.

1.7. Indicar para qué tipos de convergencia se verifica $(x_k) \rightarrow x$ en los casos siguientes:

- (a) En $\mathbf{R}^{[0,1]}$: $x_k(t) = t^k$, $x(t) = \chi_{\{1\}}(t)$.
 (b) En $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$: $x_k(t) = \frac{1}{k}\chi_{[1,k]}(t)$, $x(t) = 0$.

1.8. Dada la sucesión de funciones $x_k(t) = k^{2/3}\chi_{[0,1/k]}(t)$

- (a) Obtener el límite en $L^1(\mathbf{R})$.
 (b) Demostrar que no tiene límite en $L^2(\mathbf{R})$.

1.9. (a) ¿Qué relación de inclusión existe entre l^1 y l^2 ?

- (b) ¿Qué relación de inclusión existe entre $L^1([a, b])$ y $L^2([a, b])$?
 (c) Demostrar que no existe relación de inclusión entre $L^1(\mathbf{R})$ y $L^2(\mathbf{R})$.

1.10. (a) Demostrar que en l^p , $p \in [1, \infty]$ la convergencia en la norma implica convergencia puntual.

- (b) Poner un ejemplo de secuencia en l^1 que converja puntualmente a cero pero que no lo haga en la norma.

1.11. Consideramos el espacio l^2 .

- (a) Demostrar que el conjunto c_{00} de las secuencias con un número finito de valores no nulos no es abierto ni cerrado.
 (b) Demostrar que los conjuntos $c_N = \{x(n) : x(n) = 0 \text{ si } n > N\}$ son cerrados pero no son abiertos.
 (c) Demostrar que si $x \in l^2$, $x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x(n)\delta_k$, donde $\delta_k(n) = \delta(n - k)$.

1.12. Demostrar que en $L^2(\mathbf{R})$ la convergencia en norma no implica convergencia puntual.

1.13. Demostrar que en $L^2(\mathbf{R})$ el subespacio $L^2(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ no es cerrado.

1.14. (a) Demostrar que para cualquier subconjunto S del EPI X , su conjunto ortogonal S^\perp es un subespacio vectorial cerrado.

- (b) Demostrar que
 (b.1) $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
 (b.2) $A \subset A^{\perp\perp}$.
 (b.3) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

1.15. Demostrar que si $f = g$ en $L^2(\mathbf{R})$ (es decir, si $\|f - g\|_2 = 0$) y f y g son continuas, entonces $f = g$ en sentido estricto.

1.16. (a) Demostrar que en la desigualdad de Schwartz sólo se alcanza la igualdad si los dos vectores son proporcionales.

(b) Utilizar la desigualdad de Schwartz para justificar el conocido resultado de teoría de la señal conocido como *filtro adaptado*.

1.17. (a) Demostrar que la norma de la aplicación lineal entre los espacios $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_2)$ y $(\mathbf{R}^m, \|\cdot\|_2)$ dada por la matriz A es el mayor de los valores singulares de A . Indicación: Utilizar la descomposición en valores singulares de A y el hecho de que las matrices ortogonales preservan la norma euclídea.

(b) Dar una expresión de la norma de la misma aplicación si en ambos espacios consideramos la norma $\|\cdot\|_\infty$ en lugar de la norma euclídea.

1.18. Demostrar que, dado $x_0 \in l^2$, la aplicación lineal de l^2 en l^2

$$x \mapsto \langle x_0, x \rangle$$

es continua y calcular su norma.

1.19. (*La convolución como aplicación lineal*)

Dada $h \in l^1$ (conjunto de secuencias $x(n), n = 0, 1, \dots$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| < \infty$, considerar la aplicación lineal de l^∞ (conjunto de secuencias $x(n), n = 0, 1, \dots$ acotadas) en l^∞ dada por

$$x \mapsto x * h : (x * h)(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m).$$

(a) Demostrar que esta aplicación está bien definida (es decir, la imagen de cualquier secuencia acotada es una secuencia acotada) y es continua. Calcular su norma.

Indicación: Tomando x acotada, obtener una cota de $\|x * h\|_\infty$.

(b) Demostrar que si $\sum_n |h(n)| = \infty$ la aplicación no es acotada (es decir, no está acotada sobre la esfera unidad).

Indicación: Calcular $(x * h)(n_0)$ para la entrada $x(n) = \frac{\bar{h}(n_0-n)}{h(n_0-n)} \chi_{\{0, \dots, n_0\}}(n)$.

(c) Comprobar que la misma aplicación, con $\|h\|_1 < \infty$, está bien definida y es continua como aplicación entre los espacios l^p . Obtener una cota superior de su norma.

1.20. *Desconvolución*

(a) Demostrar que si H es una aplicación lineal entre espacios normados el conjunto de soluciones de la ecuación $Hx = f$ es un conjunto afín y es un subespacio vectorial si $f = 0$ (que se denomina *núcleo* de H y se nota $\ker H$). Especificar el conjunto de soluciones en términos de una solución concreta x_0 y de $\ker H$.

(b) Dada la secuencia de duración finita $h \in c_{00} \subset \mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$, que sólo toma valores no nulos en $n = -M + 1, \dots, 0$, consideramos la aplicación H definida sobre $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ que asocia a la secuencia x la secuencia $y = Hx$, definida por

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m), \quad n = 0, 1, \dots$$

Hallar $\ker H$ para $h = \delta(n) + \alpha\delta(n+1)$.

Indicación: Suponer para $x \in \ker H$ un valor arbitrario de $x(0)$ y despejar sucesivamente en función de éste valor $x(1), x(2), \dots, x(-1), x(-2), \dots$. ¿Cuál es la dimensión de $\ker H$?

(c) Hallar $\ker H$ y su dimensión si $h = \delta(n) + \alpha\delta(n-1) + \beta\delta(n-2)$. ¿Cuál es la dimensión de $\ker H$ si $h(n)$ es distinta de cero exactamente en $n = 0, \dots, M-1$?

(d) ¿Tiene siempre solución la ecuación $Hx = f$ para $h = \delta(n) + \alpha\delta(n-1)$?

Indicación: Utilizando la transformada Z , hallar una condición que debe cumplir f necesariamente para que exista solución (tiene forma de suma infinita). ¿Cuántas condiciones de este tipo tendremos, de forma genérica, si $h(n)$ es distinta de cero exactamente en $n = 0, 1, \dots, M-1$?

Capítulo 2

Introducción a los espacios de Hilbert

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos los espacios vectoriales con producto interno (EPI) de dimensión infinita con los que vamos a trabajar, que son los espacios de Hilbert separables. Para ampliar detalles se puede consultar [7].

Como vemos a continuación algunas propiedades de los EPIs de dimensión infinita difieren mucho de las de los de dimensión finita. Sin embargo otras se mantienen puesto que en sus demostraciones no se hizo uso de la dimensionalidad del espacio:

- (1) Desigualdad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (2) Desigualdad de Cauchy-Schwartz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.
- (3) Teorema de Pitágoras.
- (4) Identidad del paralelogramo.
- (5) Identidad de polarización.

2.2. El espacio l_2

Nuestro modelo del tipo de EPI de dimensión infinita que nos interesa es el *espacio de las secuencias de energía finita*

$$l_2 = \{x : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty\}$$

en el que las operaciones suma, producto por escalar y producto escalar se definen como cabe esperar, y es fácil comprobar que quedan así bien definidas (ejercicio). Claramente es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Podría pensarse que la familia de secuencias $(\delta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ definidas por

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

constituye una base de l_2 . Sin embargo, mediante combinaciones lineales de estas secuencias sólo podemos generar el subconjunto de l_2 correspondiente a las secuencias que a partir de cierto punto toman el valor cero (espacio c_{00}). Pero el conjunto de las $(\delta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sí disfruta de una propiedad que lo acerca mucho a ser base. Se trata de que toda $x \in l_2$ se puede escribir como

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\delta_k,$$

es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^N x(k)\delta_k \right\| = 0.$$

Obsérvese que las $(\delta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ son un sistema ortonormal y que

$$x(k) = \langle x, \delta_k \rangle.$$

Un sistema ortonormal numerable con esta propiedad se denomina *base de Hilbert numerable*.

2.3. Espacios de Hilbert separables

Para dar la definición de espacio de Hilbert necesitamos recordar un par de conceptos de topología de espacios métricos.

Una secuencia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de elementos de un espacio métrico es *convergente* si tiene *límite*, es decir, si existe un elemento a del espacio tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que todos los elementos de (x_n) posteriores a N distan de a menos que ϵ .

Una secuencia de elementos de un espacio métrico es una *secuencia de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que dos elementos posteriores a N cualesquiera distan entre sí menos que ϵ . Toda secuencia convergente es de Cauchy, pero el recíproco no es cierto en general.

Un espacio métrico es *completo* si toda secuencia de Cauchy es convergente.

Un *espacio de Hilbert* es un EPI en el que la métrica asociada al producto escalar lo hace un espacio métrico completo. Un concepto más general es el de *espacio de Banach*, que es un espacio con una norma que lo dota de una métrica completa. Un espacio de Banach es por tanto un espacio de Hilbert si su norma verifica la identidad del paralelogramo.

Ejemplos típicos son:

(a) El espacio l_2 es espacio de Hilbert (ver (A.0.1)).

(b) El espacio de las funciones continuas de \mathbf{R} en \mathbf{C} tales que $\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 < \infty$ con el producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{g}$ no es completo.

A nosotros nos interesarán exclusivamente los espacios de Hilbert que tengan *bases de Hilbert numerables*, es decir, conjuntos ortonormales numerables $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ tales que para todo vector x

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^N \langle x, f_k \rangle f_k \right\| = 0.$$

Los EPIs con bases de Hilbert numerables se pueden caracterizar mediante una propiedad topológica más básica. Los EPIs que tienen bases de Hilbert numerables son exactamente los *separables*, es decir, los que contienen un conjunto numerable *denso* (tal que cualquier bola contiene algún elemento del conjunto) (ver (A.0.2)). Por ello los espacios de Hilbert con base numerable se suelen denominar *espacios de Hilbert separables (EHS)*.

La demostración de la equivalencia entre ser separable y tener una base de Hilbert numerable se basa en que, por una parte, si un EPI contiene un conjunto numerable denso $\{f_n\}$, podemos construir una base de Hilbert numerable a partir de este conjunto mediante ortogonalización de Gram-Schmidt. Recíprocamente, si un EPI tiene una base de Hilbert numerable las combinaciones lineales finitas con coeficientes racionales de elementos de la base constituyen un conjunto numerable denso.

Todos los EHSs de dimensión infinita son isomorfos a l_2 . En efecto, si E es un espacio de Hilbert y $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ una base numerable de E , la aplicación ϕ definida por

$$x \mapsto \phi(x) = (x_k)_{k \in \mathbf{N}}, \quad x_k = \langle x, f_k \rangle$$

es un isomorfismo entre E y l_2 (ver (A.0.3)).

Una consecuencia práctica es que podemos hacer cuentas en coordenadas de forma similar a como las hacemos en dimensión finita. Concretamente,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k x_k \Rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \bar{\beta}_k.$$

2.4. Caracterización de bases de Hilbert

Un sistema ortonormal $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ hemos dicho que es base si para todo x del espacio

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^N \langle x, f_k \rangle f_k \right\| = 0.$$

Pero usando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^N \langle x, f_k \rangle f_k + \sum_{k=1}^N \langle x, f_k \rangle f_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^N \langle x, f_k \rangle f_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^N \langle x, f_k \rangle f_k \right\|^2.\end{aligned}$$

Por tanto $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ será base si y sólo si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^N \langle x, f_k \rangle f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, f_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

De aquí se desprende también que $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ es base si y sólo si el único vector ortogonal a todos los f_k es el cero. En efecto, si $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ es base y $|\langle x, f_k \rangle|$ es cero para todo k , la igualdad anterior nos indica que $\|x\| = 0$. Y si $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ no es base habrá algún x para el que $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, f_k \rangle|^2 < \|x\|^2$. Entonces $x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, f_k \rangle f_k$ es ortogonal a todos los f_k y su norma al cuadrado es $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, f_k \rangle|^2 > 0$.

2.5. Subespacios cerrados y proyecciones ortogonales

2.5.1. Subespacios de espacios de Hilbert

Un subespacio cualquiera de un espacio de Hilbert no es necesariamente un espacio de Hilbert porque no es necesariamente completo (p. ej., el conjunto c_{00} de las secuencias que son cero a partir de un cierto n son un subespacio de l_2 que no es completo).

Sin embargo un *subespacio cerrado* de un espacio de Hilbert sí es un espacio de Hilbert. Recordamos que un conjunto *cerrado* en un espacio métrico es un conjunto que contiene los límites de sus secuencias convergentes. Un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo (ver (A.0.5)).

Por otra parte no es difícil demostrar que los subconjuntos de un espacio métrico separable son también separables (ver (A.0.6)). En consecuencia, los subespacios cerrados de un EHS son también EHSs. Pueden ser de dimensión finita o de dimensión infinita. Si V es un subespacio cerrado de dimensión infinita y (b_n) es una base de Hilbert de V , los elementos de V serán los vectores de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n, \quad \text{donde} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

En un EPI hay que distinguir entre el *subespacio generado por un conjunto de vectores* y el *subespacio cerrado generado por un conjunto de vectores*, que es el menor subespacio cerrado que los contiene. En el caso de dimensión finita ambos conceptos coinciden, pero no en dimensión infinita. En particular, si (f_n) es un conjunto ortonormal numerable de un espacio de Hilbert, el subespacio generado por él es el conjunto de combinaciones lineales (finitas) de sus elementos, mientras que el subespacio cerrado generado por él es el conjunto de las combinaciones lineales infinitas con coeficientes cuya suma de módulos al cuadrado sea finita.

2.5.2. Proyecciones ortogonales

El Teorema de la Proyección Ortogonal que conocemos para EPIs de dimensión finita también es cierto para EHSs si consideramos subespacios cerrados, es decir, si S es un subespacio cerrado del EHS E , dado $x \in E$ existe un único $y = P_S(x) \in C$ que minimiza la distancia $\|x - y\|$ y que es también el único elemento de S que para el que $x - y$ es ortogonal a todos los elementos de S .

Ahora la fórmula de la proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado S con base de Hilbert (y_n) es

$$P_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle y_n.$$

Sin embargo el resultado no es cierto para subespacios que no sean cerrados (ejercicio).

2.5.3. Complementos ortogonales

Recordamos que el *conjunto ortogonal* de un subconjunto F de un EPI E es el conjunto F^\perp de los vectores que son ortogonales a todos los de F . Tienen las siguientes propiedades, de las cuales las dos primeras son inmediatas:

- (1) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$,
- (2) $F \subset F^{\perp\perp}$,
- (3) El ortogonal de cualquier conjunto es un subespacio cerrado (ver (A.0.7)).
- (4) Si F es espacio de Hilbert, $F^{\perp\perp} = \bar{F}$, donde \bar{F} es la adherencia de F , es decir, la intersección de todos los cerrados que contienen a F (ver (A.0.8)).

Si M es un cerrado de un espacio de Hilbert, como M^\perp es también cerrado, existirán las proyecciones ortogonales sobre los dos conjuntos. Estas proyecciones están relacionadas por

$$P_{M^\perp}(x) = x - P_M x. \tag{2.1}$$

En efecto, $x - (x - P_M(x)) = P_M(x)$ está en $M = M^{\perp\perp}$.

2.6. Algunos espacios de Hilbert importantes

2.6.1. Señales periódicas

El conjunto $L^2(\mathbf{T})$ es el de las señales complejas de variable real periódicas de periodo 2π integrables en un periodo y tales que

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

es finita. Consideramos iguales dos señales si la norma de su diferencia es cero. En él se considera el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)dt.$$

Un resultado fundamental de Análisis de Fourier es que una base ortonormal de $L^2(\mathbf{T})$ viene dada por el conjunto

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jnt}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (2.2)$$

Por tanto cualquier x de $L^2(\mathbf{T})$ y, en particular, cualquier función continua periódica de periodo 2π , se puede poner como

$$x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \psi_n, \quad a_n = \langle x, \psi_n \rangle$$

donde la igualdad se debe interpretar en el sentido de la norma que estamos considerando, es decir, la parte derecha converge en energía a algún elemento de $L^2(\mathbf{T})$ equivalente a x . Esta es la fórmula del *desarrollo en serie de Fourier (DSF)* de una señal periódica.

Pero esto no significa que, dado un t cualquiera,

$$\sum_{n=-N}^N \langle x, \psi_n \rangle \psi_n(t)$$

converja a $x(t)$ cuando N tiende a infinito. De hecho existen funciones continuas para las que la serie no converge en ciertos puntos. Sin embargo, cualquier función continua periódica f se puede aproximar mediante un *polinomio trigonométrico* $p(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{jnt}$ con un error

$$\|f - p\|_\infty = \sup_{t \in [0, 2\pi)} |f(t) - p(t)|$$

tan pequeño como se desee. En otras palabras, el conjunto de los polinomios trigonométricos es denso en el conjunto de las funciones continuas periódicas con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

El DSF es una isometría biyectiva entre $L^2(\mathbf{T})$ y el espacio de Hilbert

$$l^2(\mathbf{Z}) = \left\{ x : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C} : \sum_{n \in \mathbf{Z}} |x(n)|^2 < \infty \right\},$$

totalmente análogo a l_2 . Dada una secuencia $x(n)$ de $l_2(\mathbf{Z})$, la señal periódica cuyo DSF es $x(-n)$ es la *transformada de Fourier de la secuencia (TFS)*.

Aunque en este curso nos movemos básicamente en espacios de Hilbert como $L_2(\mathbf{T})$ y $l_2(\mathbf{Z})$, el análisis de Fourier se escapa de estos espacios. De hecho el DSF de señales periódicas está definido para señales de $L_1(\mathbf{T})$, es decir, el espacio análogo a $L_2(\mathbf{T})$ pero en el que se considera la norma definida por $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f|$.

El espacio $L_1(\mathbf{T})$ es más amplio que $L_2(\mathbf{T})$, al que engloba. Las secuencias de los coeficientes del DSF de las funciones de $L_1(\mathbf{T})$ forman un subespacio dentro del espacio $c_0(\mathbf{Z})$, que es el espacio de las bisecuencias cuyos valores tienden a cero para $n \rightarrow \infty$ y $n \rightarrow -\infty$. La TFS está por tanto definida para todas las secuencias de este subespacio de $c_0(\mathbf{Z})$, más amplio que $l_2(\mathbf{Z})$.

Dadas dos secuencias $x(n)$ e $y(n)$ de $l_2(\mathbf{Z})$ su convolución $z(n) = x(n) * y(n)$ no tiene por qué pertenecer a $l_2(\mathbf{Z})$. Sin embargo [3, p. 265], $z(n)$ tiene TFS y ésta es igual al producto de las TFS de $x(n)$ y de $y(n)$.

2.6.2. Señales de energía finita

Aunque muchos fenómenos de la física y la ingeniería se pueden describir mediante funciones continuas, el conjunto $C(\mathbf{R})$ de las funciones continuas de \mathbf{R} en \mathbf{C} con módulo al cuadrado de integral finita no es satisfactorio como espacio de trabajo porque, como es fácil comprobar, no es completo.

El espacio completo más pequeño que lo contiene es el conjunto $L^2(\mathbf{R})$. Este conjunto se obtiene partiendo del conjunto de todas las funciones integrables (es decir, con integral de Lebesgue (ver apéndice B)) con módulo al cuadrado de integral finita (funciones *de cuadrado integrable*), pero considerando iguales dos funciones si su diferencia es una función de norma nula (para que se verifique la propiedad del producto escalar $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$). Además, el espacio $L^2(\mathbf{R})$ así obtenido admite bases de Hilbert numerables. En efecto, el conjunto

$$\psi_{n,m}(t) = e^{jnt} \chi_{[2\pi m, 2\pi(m+1))}$$

es base numerable como consecuencia de que $\{e^{jnt}\}$ lo es de $L_2(\mathbf{T})$.

Más adelante veremos cómo obtener bases de Hilbert numerables de $L^2(\mathbf{R})$ a base de ondículas.

$L^2(\mathbf{R})$ es formalmente un conjunto de clases de equivalencia de funciones, y en general no tiene sentido hablar del valor de un elemento x de $L^2(\mathbf{R})$ en un t_0 dado (esta discusión sirve igualmente para $L^2(\mathbf{T})$). Sin embargo, es fácil comprobar que si una clase de equivalencia contiene una función continua, ésta es única, y entonces sí tiene sentido $x(t_0)$ como el valor en t_0 de la única representante continua de la clase representada por x .

Es fácil comprobar que el conjunto de las funciones de $L^2(\mathbf{R})$ con soporte compacto (es decir, que se anulan fuera de cierto intervalo acotado) es denso en $L^2(\mathbf{R})$. También se demuestra que el subespacio $C_2(\mathbf{R})$ de las funciones continuas con módulo al cuadrado integrable es denso en $L^2(\mathbf{R})$. Como el subconjunto $C_{2,c}(\mathbf{R})$ de $C_2(\mathbf{R})$ formado por las funciones continuas con soporte compacto es denso en $C_2(\mathbf{R})$, resulta que $C_{2,c}(\mathbf{R})$ es también denso en $L^2(\mathbf{R})$.

También nos resultará de interés el hecho de que la transformación de Fourier $f \mapsto \hat{f}$, definida como

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

cuando la integral existe, es una biyección de $L_2(\mathbf{R})$ en $L_2(\mathbf{R})$ que preserva el producto escalar.

2.6.3. Señales limitadas en banda

Las funciones de $L^2(\mathbf{R})$ cuya transformada de Fourier es nula fuera del intervalo $[-B, B]$ son continuas (vistas como clases de equivalencia: tienen una representante continua, única), luego podemos hablar de sus valores en instantes determinados.

Sus transformadas de Fourier, al estar limitadas a un intervalo, se pueden identificar con elementos de $L^2(\mathbf{T})$, y por tanto tiene como base los polinomios trigonométricos. Como la transformación de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbf{R})$, podemos aplicar la transformación inversa a los polinomios trigonométricos, con lo que obtenemos funciones sinc. El resultado es el *teorema de muestreo* (Cauchy, 1841):

$$x = \sum_n x(nT) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - nT}{T} \right).$$

En este caso se demuestra además que hay convergencia puntual [3, pág. 372].

2.7. Problemas

2.1. Demostrar que en un espacio métrico completo los conjuntos cerrados son completos. Indicación: Tomar una sucesión de Cauchy de elementos del cerrado C y justificar por qué tiene límite y por qué el límite está en C .

2.2. (a) Demostrar que el complemento ortogonal del conjunto de las señales de $L^2(\mathbf{R})$ que se anulan fuera del conjunto medible $A \subset \mathbf{R}$ son las que se anulan en A .

(b) Utilizando que la transformada de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbf{R})$, obtener el complemento ortogonal del conjunto de señales cuya transformada de Fourier se anula fuera del conjunto medible $B \subset \mathbf{R}$.

2.3. Demostrar que la intersección de dos conjuntos afines es un conjunto afín y que la intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

2.4. Extender el Teorema de las proyecciones alternadas a conjunto afines. Indicación: Comprobar que $(v + M_1) \cap (v + M_2) = v + (M_1 \cap M_2)$. Demostrar que si $V = v + M$, con $v \in V$ arbitrario, $P_V(x) = P_M(x) + v - P_M(v)$ y luego considerar los conjuntos $V_1 = v + M_1$, $V_2 = v + M_2$, $v \in V_1 \cap V_2$, comprobando que $(P_{V_2} P_{V_1})^n(x) = (P_{M_2} P_{M_1})^n(x) + v - (P_{M_2} P_{M_1})^n(v)$.

2.5. *Aplicación del Teorema de las proyecciones alternadas para conjuntos afines a la interpolación de señales limitadas en banda.* En la transmisión de la señal $x \in L^2(\mathbf{R})$ se ha perdido la información sobre los valores que toma la señal en el intervalo $[t_0, t_1]$. Se sabe que la señal es limitada en banda, de forma que su transformada de Fourier $X(\omega)$ es nula para $|\omega| > B$. En este problema se pretende justificar un algoritmo para recuperación aproximada de la información perdida hallando la señal de menor norma (es decir, más cercana a cero) de entre las candidatas a señal transmitida.

(a) Demostrar que el conjunto C_1 de las señales que fuera del intervalo $[t_0, t_1]$ toman los mismos valores que la señal recibida x_0 forman un conjunto afín cerrado.

(b) Demostrar que el conjunto C_2 de las señales de banda limitada al intervalo de frecuencias $[-B, B]$ son un subespacio vectorial cerrado.

(c) Describir la proyección ortogonal de una señal $x(t)$ sobre el subespacio afín C_1 .

(d) Describir la proyección ortogonal de una señal $x(t)$ sobre el subespacio vectorial C_2 (indicación: la transformación de Fourier es una transformación lineal que preserva la energía salvo por un factor constante, luego es equivalente minimizar una distancia en el dominio original o en el dominio transformado).

(e) Justificar la existencia de una única señal de norma mínima en $C_1 \cap C_2$.

(f) Especificar un algoritmo para la obtención de esta señal.

2.6. Utilizando que en un espacio de Hilbert separable cualquier conjunto ortonormal se puede extender a una base ortonormal numerable, demostrar que los subespacios

de dimensión finita son cerrados. (Indicación: Utilizar la propiedad que caracteriza los cerrados en términos del complemento ortogonal de su complemento ortogonal).

2.7. (a) Obtener una base ortonormal numerable del subespacio V_0 de $L^2(\mathbf{R})$ formado por las señales que toman valores constantes dentro de cada intervalo $[n, n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. La base debe ser de la forma $\{\phi_0(t-n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, luego basta definir la función ϕ_0 .

(b) Dar una fórmula de la proyección ortogonal de una señal cualquiera x sobre V_0 .

(c) Generalizar el resultado del apartado (a) para obtener bases ortonormales numerables de los espacios V_k de $L^2(\mathbf{R})$, $k \in \mathbf{Z}$, formados por las funciones constantes en cada intervalo de la forma $[n2^{-k}, (n+1)2^{-k})$, $n \in \mathbf{Z}$. ¿Qué relación de inclusión existe entre estos subespacios? Obtener la relación entre las funciones ϕ_k que definen cada base y la función ϕ_0 .

(d) Dar una fórmula de la proyección ortogonal de una señal de V_1 sobre el espacio V_0 .

(e) Demostrar que si $f \in L^2(\mathbf{R})$ está en todos los V_k entonces $f = 0$. Indicación: Utilizar que f está en un V_{-k} , $k > 0$, para demostrar que

$$\|f\|^2 \geq (\sup |f|)^2 2^k.$$

2.8. Consideramos las señales $\phi = \chi_{[0,1)}$, $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$. Demostrar que ϕ se puede poner como

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 2^{-k/2} \psi(2^{-k}t),$$

en el sentido de la convergencia en $L^2(\mathbf{R})$, calculando los coeficientes α_k . Deducir que la convergencia en $L^2(\mathbf{R})$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$$

no implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t).$$

Indicación: Descomponer $\phi(t)$ en combinación lineal de $2^{-1/2}\phi(t/2)$ y $2^{-1/2}\psi(t/2)$, luego descomponer de forma análoga $2^{-1/2}\phi(t/2)$ y así sucesivamente. Observar cómo evoluciona la energía de las componentes proporcionales a $2^{-k/2}\phi(2^{-k}t)$ que nos van quedando. Un dibujo del proceso ayudará mucho.

2.9. *Demostración del Teorema de las proyecciones iteradas.* Consideramos dos subespacios completos M_1, M_2 en un EPI X .

(a) Demostrar que la proyección ortogonal P sobre un subespacio completo M es un operador autoadjunto, es decir

$$\langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle \text{ para todo } x, y \in X.$$

(Indicación: Demostrar que $\langle x, Py \rangle = \langle Px, Py \rangle$ escribiendo $x = Px + (x - Px)$.)

(b) Demostrar que cualquier operador de proyección verifica $\|P\| \leq 1$.

(c) Dados los subespacios completos M_1, M_2 , notamos $P_1 = P_{M_1}$ y definimos la secuencia

$$\begin{aligned}x_0 &= x, \quad x_1 = P_1(x), \quad x_2 = P_2(x_1), \\x_{2n+1} &= P_1(x_{2n}), \quad x_{2n+2} = P_2(x_{2n+1}), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Deducir de (c) que la secuencia de normas $\|x_n\|$ es convergente.

(c) Demostrar utilizando (a) que

$$\begin{aligned}\langle x_{2n}, x_{2m} \rangle &= \langle x_{2n-1}, x_{2m+1} \rangle \\ \langle x_{2n+1}, x_{2m+1} \rangle &= \langle x_{2n}, x_{2m+2} \rangle\end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\langle x_{2n}, x_{2m} \rangle = \langle x_{2n-k}, x_{2m+k} \rangle$$

y, haciendo $k = n - m$, que

$$\langle x_{2n}, x_{2m} \rangle = \|x_{n+m}\|^2.$$

(d) Deducir de los resultados anteriores que (x_{2n}) es una secuencia de Cauchy y que tiene límite y .

(e) Demostrar que

$$\begin{aligned}\|x_{2n} - x_{2n-1}\|^2 &\rightarrow 0, \\ \|x_{2n-1} - y\| &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Por tanto $x_n \rightarrow y$. Explicar por qué $y \in M_1 \cap M_2$.

(f) Demostrar que $y = P_{M_1 \cap M_2}(x)$. Sabemos que ello es equivalente a que $\langle x - y, z \rangle = 0$ para todo $z \in M_1 \cap M_2$. Para demostrar esto, utilizar, demostrándolo previamente, que $\langle x_{2n}, z \rangle = \langle x_{2n+1}, z \rangle$ y que $\langle x_{2n+1}, z \rangle = \langle x_{2n+2}, z \rangle$ y deducir que $\langle x, z \rangle = \langle x_n, z \rangle$ para todo n .

2.10. Demostrar que si (x_i) es una secuencia ortonormal, para todo x se verifica $\langle x, x_i \rangle \rightarrow 0$.

Capítulo 3

Bases de ondículas

3.1. Motivación

En este capítulo estudiaremos métodos para obtener bases ortogonales de espacios de señales continuas y discretas. El interés de disponer de distintas bases con distintas propiedades surge de la multiplicidad de aplicaciones que tenemos que considerar:

1. **Compresión** Si queremos obtener una representación eficiente de una señal nos interesará que la energía de ésta se concentre en unos pocos coeficientes, de forma que en lugar de transmitir o almacenar todas las muestras de la señal nos limitemos a hacerlo con unos pocos de los coeficientes de la representación.
2. **Restauración:** Si tenemos una señal distorsionada por la adición de ruido nos interesará contar con bases en las que algunos de sus elementos correspondan básicamente a la información mientras que otros correspondan fundamentalmente al ruido. De esta forma quedándonos con las primeras mejoramos la calidad de la señal.
3. **Análisis:** En ocasiones estamos interesados en extraer cierta información concreta de la señal, como por ejemplo los instantes de discontinuidad o la localización de picos de amplitud. En estos casos nos interesarán bases con señales bien localizadas en el espacio y adaptadas a los fenómenos que se desea detectar.

Las bases de ondículas son bases (ortogonales o no) del espacio de las señales de energía finita generadas a partir de una única señal ψ mediante traslaciones y escalados, es decir, de la forma

$$\{2^{k/2}\psi(2^k t - n)\}_{k,n \in \mathbf{Z}}.$$

El interés de este tipo de bases se pone de manifiesto cuando las comparamos con la base que nos proporciona el análisis de Fourier,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi nt/T} \chi_{kT, (k+1)T}(t) \right\}_{k, n \in \mathbf{Z}},$$

que son básicamente sinusoides enventanadas con una duración fija T . La elección de este parámetro nos limita la aplicación de la base, porque un valor de T elevado proporciona mala localización de los fenómenos de alta frecuencia mientras que un valor pequeño dificulta la detección de los de baja frecuencia. En el caso de las ondículas esta alternativa no se presenta, porque la base proporciona señales de larga duración y frecuencia baja y señales de corta duración y alta frecuencia.

Otra ventaja de las ondículas es que proporcionan *representaciones jerárquicas* de la información: Dada la señal

$$x(t) = \sum_{k, n \in \mathbf{Z}} x_{k, n} \psi(2^k t - n),$$

si nos quedamos con las ondículas con índice de escalado $k \leq M$ tenemos una representación aproximada de la señal dada por

$$x_M(t) = \sum_{k \leq M, n \in \mathbf{Z}} x_{k, n} \psi(2^k t - n)$$

a la que podemos dar un tratamiento especial (por ejemplo, transmitirla con mayor protección o hacerlo en primer lugar). Además tenemos la relación

$$x_{M+1}(t) = x_M(t) + \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_{M, n} \psi(2^{M+1} t - n),$$

que nos indica que mejorar la aproximación a la señal es tan fácil como añadir las componentes del nivel siguiente.

Finalmente, las bases de ondículas proporcionan indirectamente bases de espacios de señales de tiempo discreto y que además se pueden implementar eficientemente mediante *bancos de filtros*. El esquema más popular de este tipo es el que da lugar a la *transformada ondicular discreta* (*discrete wavelet transform (DWT)*).

3.2. Análisis multirresolución

3.2.1. Definición

Un *análisis multirresolución* (AMR) de $L^2(\mathbf{R})$ es una familia de subespacios cerrados $(V_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ y una *función de escalado* ϕ tales que para todo k :

1. $V_k \subset V_{k+1}$ (monotonía)
2. $\overline{\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} V_k} = L^2(\mathbf{R})$ (densidad)
3. $\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} V_k = \{0\}$ (separación)
4. $f(t) \in V_k \Leftrightarrow f(2t) \in V_{k+1}$ (escalado)
5. $(\phi(t - n))_{n \in \mathbf{Z}}$ es base ortonormal de V_0 . (base)

La propiedad 2 equivale, por la definición de adherencia de un conjunto, a que cada elemento de $L^2(\mathbf{R})$ se puede aproximar en norma tanto como se quiera por un elemento de alguno de los V_k . Esto es equivalente a que el único vector ortogonal a todos los V_k es el vector nulo (ver A.0.9).

3.2.2. Observaciones

1. Todo el análisis multirresolución está determinado por la función $\phi(t)$, puesto que V_k es el subespacio cerrado generado por la familia ortonormal $\{2^{k/2}\phi(2^k t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$.

2. Como $V_k \subset V_{k+1}$, $L^2(\mathbf{R}) = \overline{\bigcup_{j \geq n} V_j}$ y $\{0\} = \bigcap_{j \leq n} V_j$ para cualquier n .

3. La aplicación $V_k \rightarrow V_{k+1}$ que asocia a $f(t)$ la función $\sqrt{2}f(2t)$ es una isometría biyectiva.

Por tanto $\{\sqrt{2}\phi(2t - n)\}$ es base ortonormal (b.o.) de V_1 y, en general,

$$\{2^{k/2}\phi(2^k t - n)\} \text{ es b.o. de } V_k.$$

4. Como $V_0 \subset V_1$,

$$\phi(t) = \sum_k c_k \sqrt{2}\phi(2t - k), \quad (3.1)$$

$$c_k = \left\langle \phi(t), \sqrt{2}\phi(2t - k) \right\rangle. \quad (3.2)$$

5. Los c_k verifican

$$\delta(n) = \langle \phi(t), \phi(t - n) \rangle = \sum_m c_{m+2n} \bar{c}_m = \sum_m c_m \bar{c}_{m+2n}$$

y en particular

$$\sum_m |c_m|^2 = 1.$$

3.2.3. Ejemplo: Análisis multirresolución de Haar

Corresponde a $\phi = \chi_{[0,1]}$. Los espacios V_k son por tanto los de las señales de energía finita que son constantes en cada intervalo de la forma $[2^{-k}n, 2^{-k}(n+1))$. Las propiedades 1, 4 y 5 son casi inmediatas. Para comprobar la propiedad 3 consideramos la función $f \in \cap_{n \in \mathbf{Z}} V_n$. Para ver que $f = 0$ partimos de que $f \in V_k$ para escribir

$$\|f\|^2 = \sum_{i \in \mathbf{Z}} |f_i|^2 2^{-k} \geq 2^{-k} \sup_{i \in \mathbf{Z}} |f_i|^2$$

donde f_i es el valor de f en $[2^{-k}i, 2^{-k}(i+1))$. Despejando $\sup_{i \in \mathbf{Z}} |f_i|^2$ de la ecuación anterior y haciendo tender k a $-\infty$ vemos que $\sup_{i \in \mathbf{Z}} |f_i|^2 = 0$, luego $f = 0$.

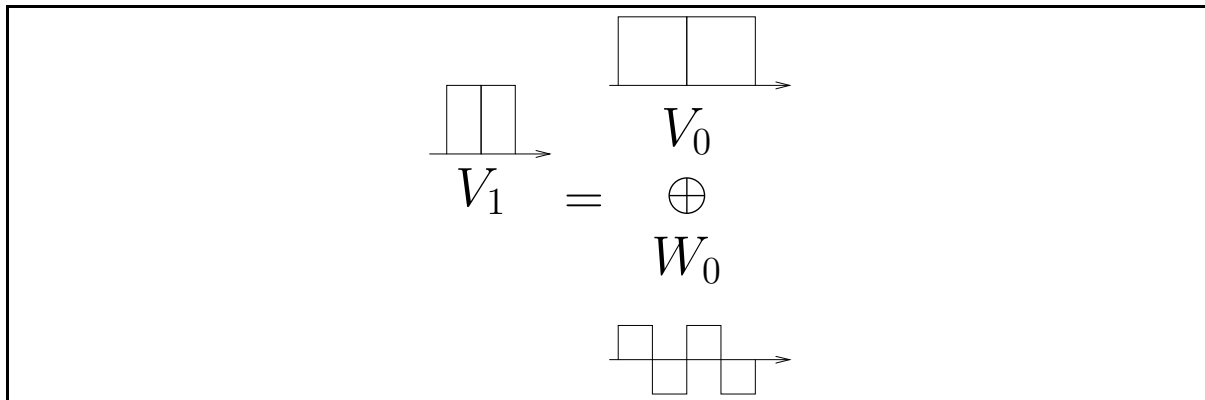
Para demostrar la propiedad 2 (densidad) vamos a comprobar primero que toda función continua f que se anule fuera de algún intervalo $[a, b]$ se puede aproximar con un error tan pequeño como queramos por una señal de alguno de los V_k . Para ello nos basamos en que toda función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$. Por tanto, fijado ϵ siempre habrá un k tal que $2^{-k} < \delta$ tal que f toma en cada intervalo $[2^{-k}i, 2^{-k}(i+1))$ valores que difieren entre sí menos que ϵ , luego podemos aproximarla por una función $g \in V_k$ que en cada intervalo tome un valor de los que toma f , y que por tanto diste de f en cualquier punto como máximo ϵ . Entonces tendremos

$$\|f - g\|^2 \leq (b - a)\epsilon^2,$$

cantidad que, en efecto, puede hacerse tan pequeña como deseemos. Uniendo este resultado al hecho de que cualquier función de $L_2(\mathbf{R})$ se puede aproximar tanto como se quiera por una función continua de energía finita, y a que cualquiera de estas funciones se puede aproximar tanto como se quiera por una función continua que se anule fuera de algún intervalo $[a, b]$, tenemos que cualquier función de $L^2(\mathbf{R})$ se puede aproximar tanto como se quiera por una función de algún V_k .

3.3. Espacios W_n

Definimos W_0 como el complemento ortogonal de V_0 en V_1 (existe por ser V_0 cerrado).



Si definimos los espacios W_k por las relaciones de escalado

$$g(t) \in W_k \Leftrightarrow g(2t) \in W_{k+1},$$

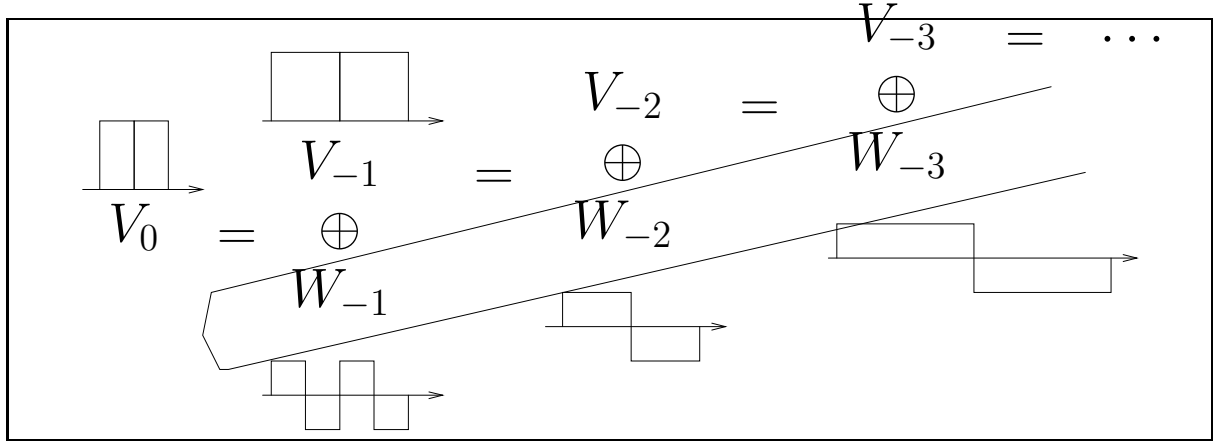
cada W_k es el complemento ortogonal de V_k en V_{k+1} . Es inmediato que los W_k son subespacios ortogonales dos a dos.

Tenemos que

$$V_0 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} W_{-n},$$

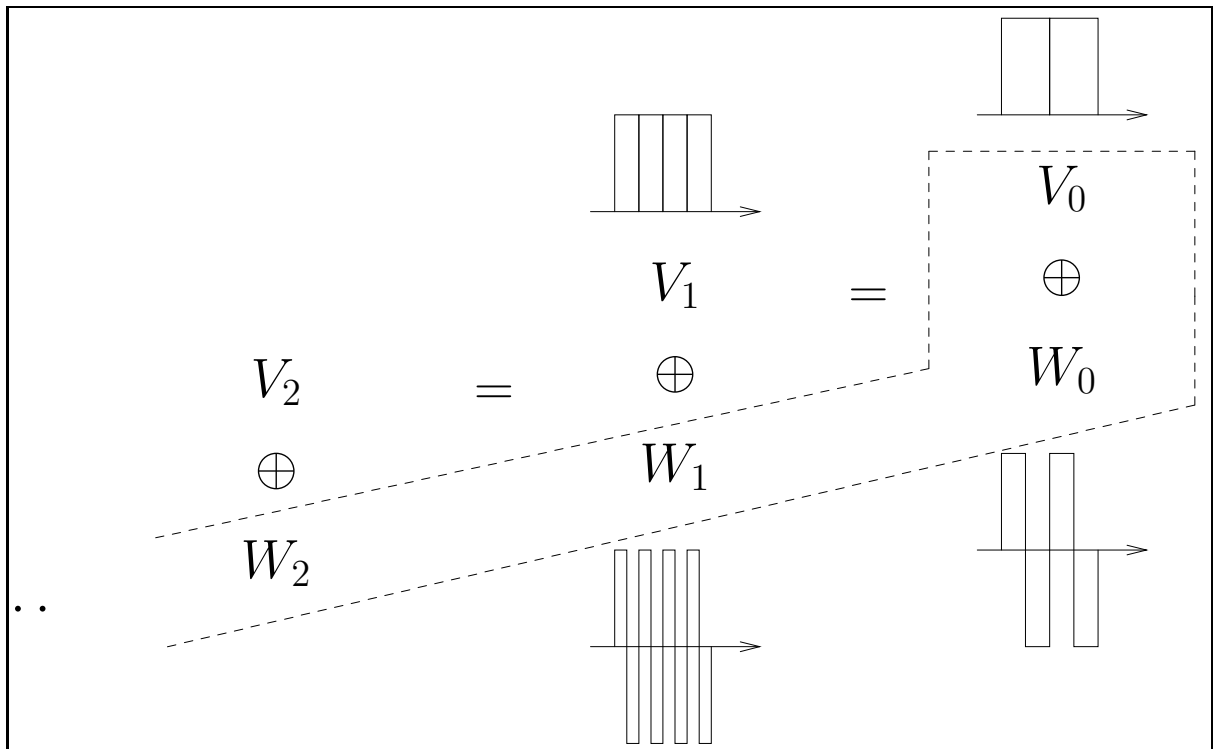
es decir, cada $x \in V_0$ se puede escribir como suma de elementos de los W_{-n} (como estos espacios se cortan en el cero, la descomposición además es única). En efecto, dado $x \in V_0$, escribimos $x = (P_{W_{-1}}(x) + P_{W_{-2}}(x) + \dots) + y$. Entonces $y \perp W_{-n}$, $n = 1, 2, \dots$,

luego $y \in V_{-n}$ y por tanto $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_{-n} = \{0\}$ (por la propiedad de separación).



Por otra parte

$$L^2(\mathbf{R}) = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n \right)$$



En efecto, dada $x \in L^2(\mathbf{R})$, escribimos $x = (P_{V_0}(x) + P_{W_0}(x) + P_{W_1}(x) + \dots) + y$. Entonces $y \perp V_0$, $y \perp W_n$, $n = 0, 1, \dots$, luego $y \perp V_n$, y por tanto $y \perp \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, luego

$y = 0$ (propiedad de densidad).

Uniendo estos dos resultados tenemos que

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} W_n.$$

3.4. Ondícula madre

Es una función ψ tal que $\{\psi(t - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ es b.o. de W_0 .

Como consecuencia del resultado anterior y de las relaciones de escalado entre los W_k ,

$$\{2^{k/2}\psi(2^k t - n)\}_{k,n \in \mathbf{Z}} \text{ es b.o. de } L^2(\mathbf{R}).$$

Aplicación del análisis de Fourier

A la señal

$$g(t) = \sum_k b_k \sqrt{2} \phi(2t - k) \in V_1$$

podemos asociarle su transformada de Fourier (TF)

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \in L^2(\mathbf{R}).$$

Esta correspondencia es una isometría salvo por un factor constante:

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle.$$

También podemos asociarle la señal

$$m_g(\omega) = \sum_k b_k \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-jk\omega} \in L^2(\mathbf{T}),$$

que se parece mucho a transformada de Fourier de secuencia (TFS) de sus coeficientes b_k ,

$$B(\omega) = \sum_k b_k e^{-jk\omega} = \sqrt{2} m_g(\omega),$$

correspondencias ambas que también son isometrías salvo por un factor constante.

Como consecuencia de la transformada de Fourier siguiente:

$$\phi(2t - k) \mapsto \frac{1}{2} e^{-j\omega k/2} \hat{\phi}(\omega/2),$$

y, de la continuidad de la transformación de Fourier, tenemos la relación

$$\hat{g}(\omega) = \sum_k b_k \sqrt{2} \frac{1}{2} e^{-j\omega k/2} \hat{\phi}(\omega/2) = m_g(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2), \quad (3.3)$$

y, particularizando para ϕ ,

$$\hat{\phi}(\omega) = m_\phi(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2). \quad (3.4)$$

De aquí se desprende, en particular, que si $\hat{\phi}(0) \neq 0$, $m_\phi(0) = 1$.

Propiedad fundamental de los coeficientes c_k

Como a $\phi(t)$ corresponden los coeficientes (c_k) , a $\phi(t - n)$ corresponden los coeficientes (c_{k-2n}) . Por tanto la ortogonalidad entre estas señales para $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ se traduce en la de las secuencias correspondientes, luego (ejercicio)

$$|C(\omega)|^2 + |C(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (3.5)$$

Obtención de ψ a partir de ϕ

Primero obtendremos las secuencias (d_k) correspondientes a señales de $W_0 \in V_1$, es decir, señales de la forma

$$\sum_k d_k \sqrt{2} \phi(2t - k) \in V_1$$

que además sean ortogonales a las $\phi(t - n)$.

Las secuencias (d_k) que buscamos son exactamente las que son ortogonales a todas la secuencia (c_k) , correspondiente a $\phi(t)$, y a las secuencias (c_{k-2n}) , que corresponden a las señales $\phi(t - n)$.

Por tanto la TFS de (d_k) , $D(\omega)$, debe verificar

$$D(\omega)\bar{C}(\omega) + D(\omega + \pi)\bar{C}(\omega + \pi) = 0.$$

Viendo esta ecuación como la ortogonalidad de dos vectores de dimensión dos (para cada ω) tenemos en casi todo punto

$$(D(\omega), D(\omega + \pi)) = \alpha(\omega) (\bar{C}(\omega + \pi), -\bar{C}(\omega))$$

es decir

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \alpha(\omega)\bar{C}(\omega + \pi) \\ D(\omega + \pi) &= -\alpha(\omega)\bar{C}(\omega). \end{aligned}$$

Veamos que $\alpha(\omega)$ verifica

$$\alpha(\omega + \pi) = -\alpha(\omega). \quad (3.6)$$

En efecto, combinando las ecuaciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} D(\omega + \pi) &= -\alpha(\omega)\bar{C}(\omega) = \alpha(\omega + \pi)\bar{C}(\omega), \\ D(\omega) &= \alpha(\omega + \pi)\bar{C}(\omega + \pi) = -\alpha(\omega)\bar{C}(\omega + \pi), \end{aligned}$$

y como $C(\omega)$ y $C(\omega + \pi)$ no pueden ser simultáneamente nulos, deducimos, de una ecuación o de la otra, la propiedad (3.6).

Por comodidad (o estética) resultará preferible trabajar con una función periódica, y de periodo 2π . Para ello, primero definimos $\tilde{\beta}(\omega) = e^{i(\omega+\pi)}\alpha(\omega)$, que verifica

$$\tilde{\beta}(\omega + \pi) = e^{i(\omega+\pi+\pi)}\alpha(\omega + \pi) = \tilde{\beta}(\omega)$$

(podíamos haber tomado igualmente $\tilde{\beta}(\omega) = e^{i\omega}\alpha(\omega)$, pero de esta fórmula la fórmula final tendrá una forma algo más práctica.)

Por tanto

$$D(\omega) = \tilde{\beta}(\omega)e^{-i(\omega+\pi)}\bar{C}(\omega + \pi)$$

y definiendo

$$\beta(\omega) = \tilde{\beta}(\omega/2),$$

tenemos la función periódica de periodo 2π en función de la cual podemos escribir el resultado.

$$D(\omega) = \beta(2\omega)e^{-i(\omega+\pi)}\bar{C}(\omega + \pi). \quad (3.7)$$

Ahora la obtención de

$$\psi(t) = \sum_k d_k \sqrt{2}\phi(2t - n) \quad (3.8)$$

depende exclusivamente de la elección de la β adecuada. Pero es fácil comprobar que una buena elección es $\beta(\omega) = 1$, es decir,

$$D(\omega) = e^{-i(\omega+\pi)}\bar{C}(\omega + \pi), \quad (3.9)$$

o, equivalentemente,

$$m_\psi(\omega) = e^{-i(\omega+\pi)}\bar{m}_\phi(\omega + \pi). \quad (3.10)$$

En efecto,

- La secuencia (d_k) definida es ortogonal a sus versiones desplazadas un número par de unidades, puesto que verifica

$$|D(\omega)|^2 + |D(\omega + \pi)|^2 = |C(\omega + \pi)|^2 + |C(\omega)|^2 = 1.$$

- Todas las funciones de W_0 se pueden expresar como combinación lineal de versiones desplazadas de la señal resultante, tomando para cada una la función β correspondiente. En efecto, dada $x(t) \in W_0$,

$$x(t) = \sum_k y_k \sqrt{2}\phi(2t - n), \quad Y(\omega) = \beta(2\omega)D(\omega).$$

Aplicando la TFS inversa,

$$\begin{aligned}\beta(\omega) &= \sum_k \beta_k e^{-j\omega k}, \\ Y(\omega) &= \left(\sum_k \beta_k e^{-j\omega 2k} \right) D(\omega) = \sum_k \beta_k (e^{-j\omega 2k} D(\omega)) \\ \Rightarrow y_n &= \sum_k \beta_k d_{n-2k}.\end{aligned}$$

Las coordenadas de $x(t)$, $(y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, son por tanto combinación lineal de las coordenadas de las $\psi(t - k)$, $(d_{n-2k})_{n \in \mathbf{Z}}$. En términos de las señales,

$$x(t) = \sum_k \beta_k \psi(t - k).$$

La ondícula tiene por tanto transformada de Fourier

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i(\omega/2+\pi)} \bar{m}_\phi(\omega/2 + \pi) \hat{\phi}(\omega/2). \quad (3.11)$$

Calculando la TFS inversa de $D(\omega)$ (3.9) en función de la de $C(\omega)$ obtenemos

$$d_k = \bar{c}_{1-k} (-1)^k, \quad (3.12)$$

luego

$$\psi(t) = \sum_k \bar{c}_{1-k} (-1)^k \sqrt{2} \phi(2t - k). \quad (3.13)$$

3.5. Obtención de ϕ a partir de m_ϕ

Veamos cómo los coeficientes c_k determinan la función de escalado. Utilizando reiteradamente la ecuación (3.4),

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= m_\phi(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \\ &= m_\phi(\omega/2) m_\phi(\omega/4) \hat{\phi}(\omega/4) \\ &= \hat{\phi}(\omega/2^n) \prod_{k=1}^n m_\phi(\omega/2^k)\end{aligned}$$

Si $\hat{\phi}$ es continua en 0 (lo que ocurre por ejemplo, si ϕ es de soporte compacto, puesto que entonces ϕ es integrable, y las transformadas de Fourier de funciones integrables son continuas [3, p. 290]), tomando límites

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}(0) \prod_{k=1}^{\infty} m_{\phi}(\omega/2^k). \quad (3.14)$$

Una primera consecuencia de esta fórmula es que $\hat{\phi}(0)$ es distinto de cero, luego $m_{\phi}(0) = 1$, y de (3.5) resulta $m_{\phi}(\pi) = 0$, con lo que, por (3.11), $\hat{\psi}(0) = 0$. Como $\hat{f}(0)$ es la integral de f , tenemos que la integral de la función de escalado es no nula, mientras que la de la ondícula es nula.

La fórmula (3.14) nos permite obtener ϕ por aproximaciones sucesivas calculadas con ordenador. Para ello, con el objetivo de no tener expresiones que dependan de ϕ observamos que con cualquier \hat{f} continua en 0 tal que $\hat{f}(0) = \hat{\phi}(0)$ también tenemos convergencia (el límite es el mismo):

$$\hat{g}_n(\omega) \equiv \hat{f}(\omega/2^n) \prod_{k=1}^n m_{\phi}(\omega/2^k) \rightarrow \hat{\phi}(\omega).$$

Ahora, para que la expresión tenga la forma de producto de una TFS (función de periodo 2π) por una TF, cambiamos $\omega/2^n$ por ω :

$$\hat{g}_n(2^n\omega) = \hat{f}(\omega) \underbrace{\prod_{k=1}^n m_{\phi}(2^{n-k}\omega)}_{H_n(\omega)}$$

Aplicando la TF inversa, tenemos

$$2^{-n}g_n(t/2^n) = \sum_m h_n(k)f(t - mT), \quad (3.15)$$

donde $h_n(k)$ es la TFS inversa de $H_n(\omega)$. En la práctica, si tenemos $m_{\phi}(\omega)$ como un polinomio trigonométrico $p(z)|_{z=e^{j\omega}}$, $m_{\phi}(2\omega)$ es el polinomio trigonométrico $p(z^2)|_{z=e^{j\omega}}$, y así sucesivamente, así que el cálculo de H_n se implementa como el producto de sucesivos polinomios que vamos obteniendo de esta manera, y los $h_n(k)$ son simplemente los coeficientes del polinomio resultante.

3.6. Transformada ondicular discreta y bancos de filtros

Dado un análisis multirresolución, a una secuencia de energía finita $x(n)$ podemos hacer corresponder la señal

$$x_c(t) = \sum_n x(n)\sqrt{2}\phi(2t - n) \in V_1.$$

Ésta puede descomponerse en sus proyecciones sobre $W_0, W_{-1}, \dots, W_{-N}, V_{-N}$. Los coeficientes de estas proyecciones respecto de las bases estándar que tenemos para estos subespacios constituyen la *transformada ondicular discreta* (*discrete wavelet transform* (*DWT*)) de la señal $x(n)$.

La DWT transforma de una secuencia discreta es una familia de secuencias discretas que, conjuntamente, corresponden a la misma tasa total de muestras por unidad de tiempo.

La implementación de esta transformación se hace mediante la aplicación de sucesivas proyecciones: Primero se proyecta $x(n)$ sobre W_{-1} y V_{-1} , después se proyecta esta última señal sobre W_{-2} y V_{-2} , y así sucesivamente.

Por tanto, las operaciones básicas para la implementación de la transformada directa y la inversa son las operaciones de análisis y síntesis que describimos a continuación.

Consideramos un análisis multirresolución con función de escalado y ondícula que verifican

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_n c_n \sqrt{2}\phi(2t - n), \\ \psi(t) &= \sum_n d_n \sqrt{2}\phi(2t - n).\end{aligned}$$

Filtro de análisis

Vamos a proyectar $x \in V_1$ ortogonalmente sobre V_0 y W_0 .

Observamos que

$$\phi(t) = \sum_n c_n \sqrt{2}\phi(2t - n) \Rightarrow \phi(t - m) = \sum_n c_n \phi(2t - 2m - n) = \sum_n c_{n-2m} \phi(2t - n). \quad (3.16)$$

Definimos $\tilde{c}_n = \bar{c}_{-n}$, $\tilde{d}_n = \bar{d}_{-n}$.

La proyección $y = P_{V_0}(x)$ se escribe como

$$\begin{aligned}y(t) &= \sum_m y_m \phi(t - m) \\ y_m &= \langle x(t), \phi(t - m) \rangle = \langle x_n, c_{n-2m} \rangle = \langle x_n, \tilde{c}_{2m-n} \rangle = ((x_n) * (\tilde{c}_n))(2m).\end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad

$$((a_n) * (b_n))(k) = \sum_n a_n b_{k-n} = \sum_n a_n b_{-(n-k)} = \langle a_n, \tilde{b}_{n-k} \rangle.$$

Análogamente para W_0 : Si $z = P_{W_0}(x)$,

$$z(t) = \sum_n z_m \psi(t-m)$$

$$z_m = \langle x(t), \psi(t-m) \rangle = \langle x_n, d_{n-2m} \rangle = \langle x_n, \tilde{d}_{2m-n} \rangle = ((x_n) * (\tilde{d}_n))(2m).$$

(ver figura 3.6.)

Filtro de síntesis

Dada $y \in V_0$

$$y(t) = \sum_m y_m \phi(t-m) = \sum_n x_n \sqrt{2} \phi(2t-n) \quad (3.17)$$

queremos recuperar los x_m a partir de los y_n .

Sustituyendo (3.16) en (3.17),

$$y(t) = \sum_m y_m \sum_n c_{n-2m} \sqrt{2} \phi(2t-n) = \sum_n \left(\sum_m y_m c_{n-2m} \right) \sqrt{2} \phi(2t-n)$$

luego

$$x_n = \sum_m y_m c_{n-2m}.$$

Definimos $\hat{y}_n = 0$ si n es impar y $\hat{y}_n = y_{n/2}$ si n es par. Tenemos

$$x_n = \sum_m \hat{y}_{2m} c_{n-2m} = \sum_k \hat{y}_k c_{n-k} = ((\hat{y}_n) * (c_n))(n).$$

Haciendo lo mismo para una señal z de W_0 concluimos que si y_n y z_n son, respectivamente, los coeficientes de las proyecciones de x sobre V_0 y W_0 , los coeficientes x_n de x se recuperan como

$$x_n = (\hat{y}_n) * (c_n) + (\hat{z}_n) * (d_n).$$

(ver figura 3.6.)

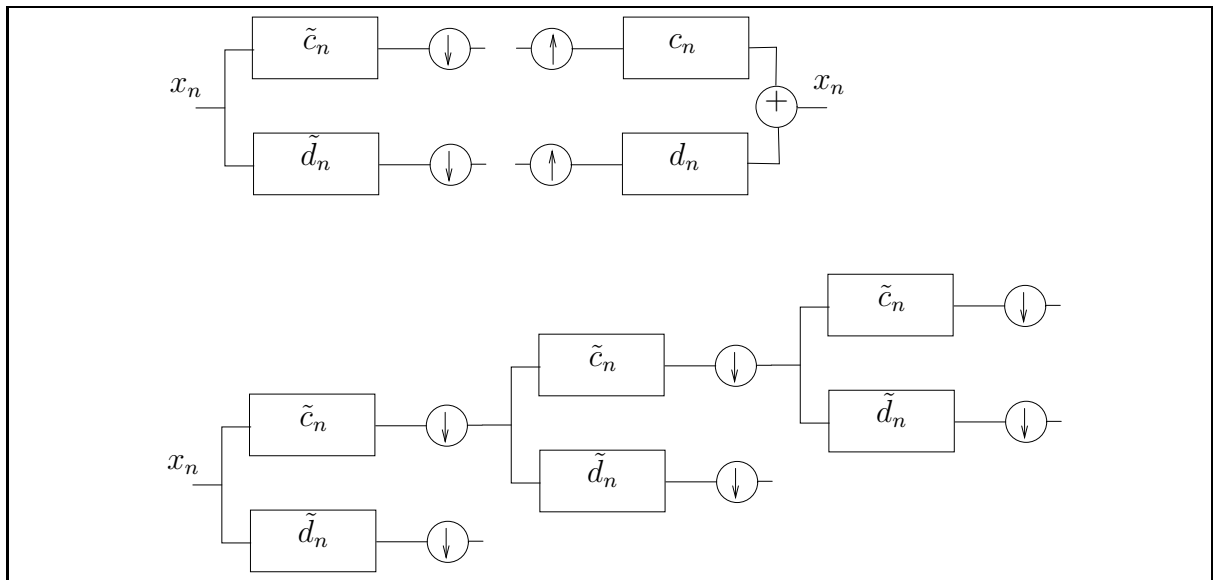


Figura 3.1: Arriba: Bancos de filtros de análisis y síntesis. Abajo: Banco de filtros de síntesis para la implementación de la transformación ondicular discreta (DWT) de tres niveles.

3.7. Construcción de funciones de escalado con soporte compacto

Es inmediato que si ϕ tiene soporte compacto, m_ϕ es un polinomio trigonométrico. El recíproco también es cierto [3, ejercicio 7.5.1, p. 445].

Por tanto encontrar una función de escalado con soporte compacto es equivalente a encontrar su polinomio trigonométrico asociado m_ϕ , del que podemos recuperar ϕ mediante (3.14).

Claramente, el polinomio candidato m debe verificar las condiciones necesarias que conocemos:

$$|m(\omega)|^2 + |m(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.18)$$

$$m(0) = 1. \quad (3.19)$$

Se puede demostrar que basta añadir la condición adicional

$$m(\omega) \neq 0 \text{ para todo } \omega \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (3.20)$$

para que m genere una función de escalado que dé lugar a un análisis multirresolución [3, p. 444].

Los polinomios encontrados por Daubechies [2, cap. 6][10, p. 256][4, cap. 6] verifican estas condiciones y además tienen N momentos nulos, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \text{ para } k = 0, \dots, N - 1.$$

Esta propiedad se considera clave en la efectividad de estas ondículas en muchas aplicaciones (compresión, eliminación de ruido, detección de singularidades). De hecho, esta propiedad asegura [2, p. 233] que si se anulan momentos de orden menor que M , los coeficientes correspondientes a niveles altos (de mucho detalle) del análisis multirresolución se hacen nulos excepto en los puntos en que la derivada de orden M de la señal presente una discontinuidad.

Para imponer la propiedad de momentos nulos mediante el polinomio m utilizamos la propiedad de la TF

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = i^k \hat{\psi}^{(k)}(0)$$

y la fórmula (3.11), que repetimos,

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i(\omega/2+\pi)} \bar{m}(\omega/2 + \pi) \hat{\phi}(\omega/2). \quad (3.21)$$

Por tanto, si exigimos que el polinomio $m(\omega)$ tenga un cero de orden N en $\omega = \pi$, ϕ verificará la condición de momentos nulos. Esto es equivalente a que m factorice como

$$m(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega).$$

Para obtener $m(\omega)$ calculamos primero su módulo, para lo cual definimos

$$M(\omega) \equiv |m(\omega)|^2 = \underbrace{\left| \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right|^{2N}}_{\cos^{2N}(\omega/2)} \underbrace{|\mathcal{L}(\omega)|^2}_{L(\omega)}$$

e imponemos (3.18). Antes observamos que como $L(\omega)$ es el módulo al cuadrado de un polinomio trigonométrico con coeficientes reales, se puede escribir como polinomio en $\cos \omega$, y usando $\sin^2(\omega/2) = (1 - \cos \omega)/2$ podemos escribir

$$L(\omega) = P(\sin^2(\omega/2))$$

para cierto polinomio P que vamos a determinar. Escribiendo $y = \sin^2(\omega/2)$, la condición (3.18) queda

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1.$$

Se puede demostrar que P debe tener como mínimo grado $N - 1$ y que existe un único polinomio P de este grado que verifica esta condición y vale

$$P(y) \equiv P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k.$$

Sin embargo, los polinomios trigonométricos $\mathcal{L}(\omega)$ que dan lugar a cada P_N no son únicos, pero siempre existen y son únicos si exigimos que tengan los ceros dentro de la circunferencia unidad.

Los polinomios $m(\omega)$ resultantes son polinomios de grado $2N - 1$. Estos polinomios verifican también la condición (3.20), luego dan lugar a análisis multirresolución. Para $N = 1$ obtenemos el polinomio del AMR de Haar y para $N = 2$ tenemos un polinomio de grado tres que da lugar a una ondícula $\psi(t)$ conocida como $D2$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t \psi(t) dt = 0.$$

Sus coeficientes c_k (3.12) asociados son

$$c_0 = \sqrt{2} \frac{1 + \sqrt{3}}{8}, \quad c_1 = \sqrt{2} \frac{3 + \sqrt{3}}{8}, \quad c_2 = \sqrt{2} \frac{3 - \sqrt{3}}{8}, \quad c_3 = \sqrt{2} \frac{1 - \sqrt{3}}{8}. \quad (3.22)$$

Los polinomios sucesivos dan lugar a funciones de escalado y ondículas que van ganando en regularidad: para el primero (Haar) estas funciones no son continuas, pero para el segundo sí lo son y para el tercero son además derivables.

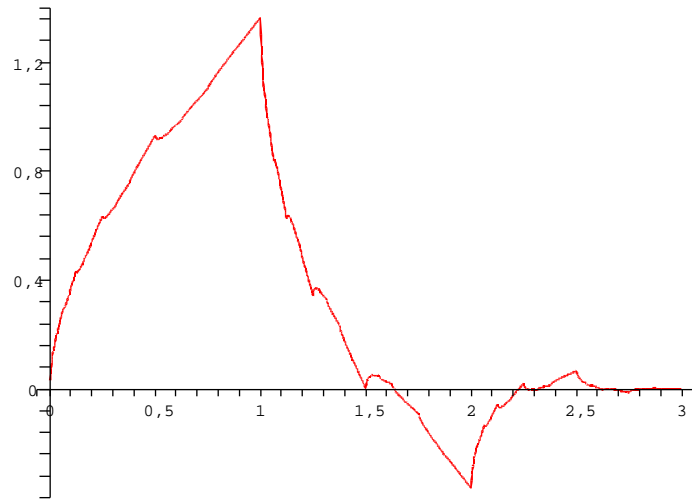


Figura 3.2: Función de escalado para la ondícula de Daubechies.

3.8. Análisis multirresolución de Riesz

Este concepto es una generalización del AMR que hemos estudiado en el que relajamos la condición de que las $\{\phi(t - n)\}$ sean base ortonormal de V_0 . Las demostraciones se pueden encontrar en [3, 7.7].

Una *base de Schauder* de un espacio de Banach es una familia numerable de vectores (x_n) con la propiedad de que para cada vector x existe una secuencia única de escalares (a_n) tal que la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

converge a x .

En la siguiente definición hacemos uso de la definición de aplicación lineal entre espacios normados *acotada*. Por tal entendemos una aplicación lineal acotada sobre la bola unidad, es decir, tal que la imagen de la bola unidad está contenida en una versión escalada de la bola unidad del espacio de llegada. Esta condición es equivalente a la de continuidad, por lo que se habla igualmente de aplicaciones lineales continuas.

Dos bases de Schauder (x_n) e (y_n) se dice que son *equivalentes* si verifican las siguientes condiciones (equivalentes entre si):

- (1) Para toda secuencia de escalares (a_n) , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.
- (2) Existe una aplicación lineal acotada T tal que $T x_n = y_n$ para todo n .

Una *base de Riesz* de un espacio de Hilbert separable es una base de Schauder equivalente a una base ortonormal. También adliten la siguiente caracterización: (x_n) es una base de Riesz si es una base de Schauder y si existen dos escalares A y B tales que si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$,

$$A \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|x\|^2 \leq B \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

Un *análisis multirresolución de Riesz* está definido por las propiedades (1)-(4) de 3.2 y por (5') $h(t - n)$ es base de Riesz de V_0 .

Para convertir un AMR de Riesz en un AMR ordinario basta encontrar una base ortonormal de V_0 de la forma $(\phi(t - n))$. La función ϕ está dada (en el dominio de Fourier) por

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{h}(\omega)}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{h}(\omega - n)|^2\right)^{1/2}}.$$

Una indicación intuitiva para obtener esta fórmula viene dada por la conocida propiedad de que una señal ϕ es ortogonal a sus versiones desplazadas un número entero si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{h}(\omega - n)|^2$ es una constante.

Un ejemplo de AMR de Riesz es el *AMR de Franklin*, dado por

$$h(t) = (1 - |t - 1|)I_{[0,2]}.$$

donde $I_A(t)$ es la función que vale 1 si $t \in A$ y cero en los demás puntos [3, 7.8].

3.9. Frames

Una familia de vectores (x_n) de un espacio de Hilbert es un *frame* si existen constantes A y B tales que

$$A \|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B \|x\|^2.$$

Un frame es *ajustado* (*tight*) si $A = B$, y es *exacto* (*exact*) si deja de ser un frame si se le suprime un elemento.

Es evidente que una base ortonormal es un frame ajustado. Por otra parte, se demuestra que los conceptos de base de Riesz y frame exacto son equivalentes.

3.10. Problemas

3.1. Se consideran los espacios V_k formados por las funciones de $L^2(\mathbf{R})$ cuya transformada de Fourier se anula fuera del intervalo $[-2^k\pi, 2^k\pi]$.

(a) Demostrar que verifica las propiedades 1-4 de un análisis multirresolución (AMR).
Indicación para la propiedad 3: Basta observar que si $x(t)$ está en todos los V_k , $X(\omega)$ es cero para todo ω distinto de cero.

(b) Hallar una función ϕ para la que se verifique la propiedad 5 de un AMR.

Indicación: Usar el teorema de muestreo.

(c) Hallar los coeficientes del desarrollo de $\phi(t)$ en términos de los $\sqrt{2}\phi(2t - n)$.

Indicación: Usar de nuevo el teorema de muestreo.

3.2. *En este ejercicio utilizaremos técnicas básicas de la teoría de señales discretas para demostrar resultados que necesitaremos.*

(a) Demostrar los productos escalares $\langle x(n), y(n - 2k) \rangle$ se corresponden con las muestras pares de la convolución $y(n) = x(n) * \bar{y}(-n)$.

(b) Obtener a partir de la transformada de Fourier $V(\omega)$ de la secuencia $v(n)$, la de la secuencia

$$z(n) = \begin{cases} v(n) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Indicación: Observar que esta operación es equivalente a la multiplicación por la secuencia $\frac{1}{2}(1 + e^{j\pi n})$.

(c) Demostrar, utilizando los resultados de los apartados anteriores, que

(c.1) $x(n)$ es ortogonal a sus versiones desplazadas de la forma $x(n - 2k)$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, si y sólo si $|X(\omega)|^2 + |X(\omega + \pi)|^2 = \text{cte}$, y que

(c.2) $x(n)$ es ortogonal a $y(n - 2k)$ para todo $k \in \mathbf{Z}$ si y sólo si $X(\omega)\bar{Y}(\omega) + X(\omega + \pi)\bar{Y}(\omega + \pi) = 0$.

Nota: Las propiedades conocidas de la transformada de Fourier de secuencias se pueden utilizar con rigor. Se pueden consultar algunos detalles en 2.6.1.

3.3. *Demostración de la completitud del AMR de Haar.*

(a) Sabiendo que toda función continua nula fuera de un intervalo cerrado (es decir, con soporte compacto) es uniformemente continua, demostrar que puede aproximarse por una señal de la forma

$$\sum_{r=-M}^N \alpha_r 2^{-k/2} \phi(2^{-k}t - r). \quad (3.23)$$

para cierto $k \in \mathbf{Z}$ (es decir, por una señal escalonada con cierto tipo de escalones).

(b) Sabiendo que cada señal de $L^2(\mathbf{R})$ se puede aproximar de forma arbitrariamente exacta por una función continua nula fuera de un intervalo cerrado, demostrar que cada señal de $L^2(\mathbf{R})$ se puede aproximar de forma arbitrariamente exacta por una señal de

la forma (3.23).

(d) Concluir que las señales

$$2^{-k/2}\psi(2^{-k}t - r), \quad k, r \in \mathbf{Z}$$

con ψ definida como en el problema 2.8 constituyen una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$.

3.4. Análisis de un banco de filtros.

Consideramos un *banco de filtros* de señales discretas, que será la herramienta para el cálculo de transformadas wavelet discretas. En la parte de *análisis* la señal se procesa en paralelo por dos filtros con respuestas en frecuencia $A(\omega)$ y $B(\omega)$ y las salidas se submuestran de forma que quedan solamente las muestras pares.

En la parte de *síntesis* las señales resultantes se interpolan con ceros (es decir, se inserta un cero entre cada par de muestras, de forma que las muestras impares de la señal resultante son ceros y las muestras pares proceden de las señales) y se procesan con filtros con respuesta al impulso $C(\omega)$ y $D(\omega)$, sumándose el resultado.

Obtener las condiciones que deben cumplir los filtros $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$, $D(\omega)$ para que

(a) La señal de salida esté libre de aliasing.

(b) La señal de salida sea además, proporcional a la de entrada. Indicación: Utilizar el apartado (b) del ejercicio 3.2.

(c) Verificar si se cumplen las condiciones para el caso

$$A(\omega) = \bar{C}(\omega), \quad B(\omega) = \bar{D}(\omega), \quad D(\omega) = e^{-i(\omega+\pi)}\bar{C}(\omega + \pi),$$

donde $C(\omega)$ verifica $|C(\omega)|^2 + |C(\omega + \pi)|^2 = 1$.

3.5. (a) Demostrar la fórmula (3.3).

(b) Demostrar que todas las funciones de W_0 se pueden poner como suma de funciones $\psi(t - n)$. Indicación: Obtener primero $\hat{g}(\omega) = \beta(\omega)\hat{\psi}(\omega)$. Después desarrollar en serie de Fourier $\beta(\omega)$, sustituir y calcular la transformada inversa término a término.

3.6. Demostración de la fórmula de la ondícula en el dominio del tiempo.

Demostrar que si $C(\omega)$ es la TFS de c_k , entonces $D(\omega) = e^{-j(\omega+\pi)}\bar{C}(\omega + \pi)$ es la TFS de $d_k = \bar{c}_{1-k}(-1)^k$.

3.7. (a) Aplicar la fórmula general en el dominio del tiempo (3.13) para obtener la ondícula de Haar a partir de la función de escalado.

(b) Demostrar que la ondícula madre correspondiente al AMR del problema 3.1 (conocida como *ondícula de Shannon*) es

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-j\omega/2} (\chi_{[-2\pi, -\pi]}(\omega) + \chi_{[\pi, 2\pi]}(\omega)),$$

$$\psi(t) = \frac{\sin \pi(t - 1/2) - \sin 2\pi(t - 1/2)}{\pi(t - 1/2)}.$$

Indicación: Trabajar primero en el dominio de la frecuencia, usando la fórmula (3.11).

3.8. Escribir un programa para dibujar aproximaciones sucesivas a $\phi(t)$ a partir de los coeficientes c_k utilizando la fórmula (3.15). Aplicarla a la ondícula de Haar y a la de Daubechies (3.22).

3.9. Implementar la DWT para imágenes correspondiente a las ondículas de Haar y de Daubechies de cuatro coeficientes (3.22). Para ello se operará de forma separada en cada dimensión, de forma que en cada etapa se obtengan cuatro señales de menor resolución, y a una de ellas se aplique la misma operación, y así sucesivamente hasta cuatro veces. Resolver los problemas derivados del trabajo con señales de duración finita.

Capítulo 4

Transformada ondicular continua

Sea $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ que verifica la *condición de admisibilidad* siguiente:

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

que, en particular, implica que $\hat{\psi}(0) = 0$, es decir, que ψ es de media nula.

Dada $f \in L^2(\mathbf{R})$, definimos su transformada

$$W_f(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt.$$
$$u \in \mathbf{R}, s \in [0, \infty)$$

Observamos que está bien definida por ser el producto escalar de dos funciones de $L^2(\mathbf{R})$. Para $s = 0$, comprobar con cambio de variable.

Se puede ver como una convolución (usando que $\psi \in L^1(\mathbf{R})$). Definiendo $\psi_s(t) = s^{-1/2}\psi(t/s)$, $\tilde{\psi}(t) = \psi(-t)$,

$$W_f(u, s) = (f * \psi_s)(u).$$

De aquí se desprende que $Wf(\cdot, s)$ está en $L^2(\mathbf{R})$, y en $L^1(\mathbf{R})$ si lo está f .

Aplicando la TF en la variable u nos queda la siguiente expresión, que será útil:

$$\hat{W}_f(\omega, s) = \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_s(\omega),$$

donde $\hat{\psi}_s(\omega) = s^{1/2} \hat{\psi}(s\omega)$.

La transformación es, salvo por un factor constante, una isometría (no sobreyectiva) entre $L^2(\mathbf{R})$ y el espacio de las funciones complejas definidas en $\mathbf{R} \times [0, \infty]$ con la norma euclídea

$$\|W\|^2 = \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \int_{-\infty}^\infty |W(u, s)|^2 du.$$

Concretamente,

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \int_{-\infty}^\infty |W_f(u, s)|^2 du = c_\psi \|f\|^2.$$

Demostración

Se calcula la integral en u de $W_f(u, s)$ en el dominio de la frecuencia con el Teorema de Plancherel, escribiendo previamente $W_f(u, s)$ como convolución. \square

La transformación se invierte mediante la fórmula

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \int_{-\infty}^\infty W_f(u, s) \psi_s(t - u) du.$$

La integral está bien definida si $f \in L^1(\mathbf{R})$ (entonces $W_f \in L^1(\mathbf{R})$ y se usa la condición de admisibilidad para ver que la función es absolutamente integrable).

Demostración

Idea de la demostración para $f \in L^1(\mathbf{R})$:

Escribimos W_f como convolución, y lo mismo hacemos con la integral en u de la transformación inversa.

Escribimos esta triple convolución como la integral correspondiente a la transformación inversa de Fourier de su transformada.

Comprobamos integrabilidad absoluta e invertimos el orden de integración para integrar primero en s . \square

Capítulo 5

Introducción al método de elementos finitos

5.1. Introducción

El método de elementos finitos es la herramienta numérica fundamental para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) en los casos más importantes en ingeniería.

Respecto del método de diferencias finitas presenta la ventaja de una mayor flexibilidad en la discretización del dominio en el que se busca la solución.

En este capítulo, para evitar posibles confusiones representaremos mediante $|\cdot|$ las normas de los elementos de \mathbf{R}^n o \mathbf{C}^n y de la forma habitual $\|\cdot\|$ la norma de las funciones. Si Ω es un abierto de \mathbf{R}^n , $C(\Omega)$ es el conjunto de las funciones continuas de Ω en \mathbf{C} y $C^k(\Omega)$ es el conjunto de las funciones de Ω en \mathbf{C} con derivadas parciales de hasta orden k continuas.

$\bar{\Omega}$ representa la adherencia de Ω . Normalmente $\bar{\Omega}$ es la unión del abierto Ω y su frontera, que notamos $\partial\Omega$.

El *soporte* de una función continua es el conjunto de puntos en el que toma valores no nulos. Notamos mediante $C_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de las funciones de $C^\infty(\Omega)$ con soporte acotado.

Notaremos mediante $\partial_i f$ la derivada parcial de la función f respecto de la variable i -ésima. Para distinguir entre las distintas normas que utilizaremos, en ocasiones pondremos como subíndice el nombre del espacio asociado a la norma.

Para las integrales utilizaremos la notación compacta siguiente:

$$\int_{\Omega} f \equiv \int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Seguiremos básicamente la referencia [1, caps. 4 y 7]. Una referencia estándar sobre EDPs es [6], aunque no trata el método de elementos finitos para ecuaciones elípticas.

5.2. Reformulación del problema de la EDP elíptica

Consideramos la resolución de una *ecuación en derivadas parciales elíptica con condición de contorno homogénea*, que definimos a continuación. Dado Ω , abierto acotado de \mathbf{R}^n , buscamos $u \in C^2(\Omega)$ que verifique la ecuación diferencial

$$-\sum_{i=1}^n \partial_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j u + h_i \right) + bu + f = 0 \text{ en } \Omega, \quad (5.1)$$

$$\text{con la condición de contorno } u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.2)$$

con $a_{ij}, h_i \in C^1(\Omega)$, $f, b \in C(\Omega)$, $b > 0$, $\partial\Omega$ es la frontera de Ω y las funciones a_{ij} son tales que existe $c_0 > 0$ para el cual

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_i v_j \geq c_0 |v|^2 \text{ para todo } x \in \Omega, v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n. \quad (5.3)$$

(¿qué quiere decir esto en términos de los autovalores de las matrices $A(x) = (a_{ij}(x))$ en el caso en sean simétricas?)

La ecuación se llama elíptica porque la ecuación $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_i v_j = c$ en las variables v_1, \dots, v_n es la de una elipse.

Si la condición de contorno fuera otra (condición de contorno *no homogénea*), basta conocer una función de $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que verifique la condición de contorno para transformar el problema en otro equivalente del mismo tipo con condición de contorno homogénea (ejercicio).

Vamos a redefinir el problema de forma que la solución u se pueda buscar en un conjunto más amplio que $C^2(\Omega)$, en el que resulte más fácil la búsqueda (más adelante veremos que no existe riesgo de encontrar una solución distinta).

En primer lugar observamos que $u \in C^2(\Omega)$ verificará (5.1) si y sólo si para toda $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left[-\sum_{i=1}^n \partial_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j u + h_i \right) + bu + f \right] \zeta = 0. \quad (5.4)$$

Esto es debido a que si w es continua

$$w = 0 \iff \text{Para toda } \zeta \in C_0^\infty(\Omega), \int_{\Omega} w \zeta = 0.$$

La implicación hacia la derecha es trivial. Para ver la implicación hacia la izquierda basta observar que si w fuera mayor que cero en un punto $x \in \Omega$, como por ser w continua $w^{-1}((0, \infty))$ es abierto, habría un entorno $U \subset \Omega$ alrededor de x en el cual w sería también positiva, y por tanto tomando una función $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ positiva con soporte contenido en U tendríamos $\int_\Omega w \zeta > 0$.

Mediante integración por partes la integral (5.4) se transforma en

$$\int_\Omega \left(\sum_i \partial_i \zeta \left(\sum_j a_{ij} \partial_j u + h_i \right) + \zeta (bu + f) \right) = 0. \quad (5.5)$$

En efecto, si al menos una de las funciones w o z se anula en $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \partial_i w z = - \int_\Omega w \partial_i z.$$

Para comprobarlo basta escribir la integral como integral reiterada en las distintas variables, integrando en primer lugar respecto de la variable i , y aplicar en esta integral la propiedad

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx = - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Obsérvese que esta propiedad nos permite, bajo la condición de que una de las dos funciones se anule en la frontera, pasar la derivación parcial de una función a otra del producto siempre que multipliquemos también el resultado por (-1) .

Ahora vamos a expresar el problema modificado en términos de aplicaciones lineales y bilineales. Consideramos la forma bilineal

$$a(\zeta, u) = \sum_{i,j} \int_\Omega \partial_i \zeta a_{ij} \partial_j u + \int_\Omega \zeta b u, \quad u \in C^2(\Omega), \quad \zeta \in C_0^\infty(\Omega) \quad (5.6)$$

y la forma lineal

$$\alpha(\zeta) = - \int_\Omega \left(\sum_i \partial_i \zeta h_i + \zeta f \right), \quad \zeta \in C_0^\infty. \quad (5.7)$$

Podemos escribir la ecuación (5.5) como

$$a(\zeta, u) = \alpha(\zeta) \quad \text{para todo } \zeta \in C_0^\infty(\Omega). \quad (5.8)$$

Para motivar los desarrollos que vienen a continuación veamos cómo procederíamos ante una ecuación como (5.8) si ζ y v pertenecieran a C^n .

La observación básica es que una forma lineal α sobre \mathbf{C}^n se puede escribir, si $\zeta = (z_1, \dots, z_n)^\top$, como

$$\alpha(\zeta) = \alpha \left(\sum_{i=1}^n z_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n z_i \alpha(e_i) = \langle \zeta, v_\alpha \rangle.$$

donde

$$v_\alpha = (\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n))^*.$$

Por tanto existe una correspondencia biyectiva entre formas lineales y vectores. De forma análoga, si $u = (u_1, \dots, u_n)$, podemos escribir la forma bilineal a como

$$\alpha(\zeta, u) = \sum_{i,j} \bar{u}_i z_j a(e_j, e_i) = \langle \zeta, A_a u \rangle,$$

donde $A_a = (x_{ij})$, $x_{ij} = \bar{a}(e_i, e_j)$. De la unicidad de v_α tenemos

$$v_\alpha = A_a u,$$

que nos proporciona la solución

$$u = A_a^{-1} v_\alpha.$$

En espacios de dimensión infinita no podemos en general representar formas lineales y bilineales como lo acabamos de hacer en espacios de dimensión finita. Sin embargo, hay algunos espacios de dimensión finita que se comportan de forma parecida en muchos aspectos a los espacios de dimensión finita. Son los *espacios de Hilbert*, que introducimos a continuación para luego extender a espacios de este tipo nuestro espacio de soluciones y nuestro espacio de funciones test, y de esta forma aplicar la técnica que acabamos de ver.

5.3. Espacios de funciones

5.3.1. Espacios de Banach

Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado en el que la métrica dada por la norma es completa, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente. En dimensión infinita todos los espacios normados son espacios de Banach.

Un espacio normado no completo se puede *completar*, es decir, insertar como subconjunto en un espacio normado completo lo más pequeño posible denominado *completación* del espacio inicial. La completación de un espacio es esencialmente única.

El espacio de las funciones continuas del abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ en \mathbf{R} tales que $\int_{\Omega} |f|^p < \infty$, para cierto $p \geq 1$, con la norma $\|f\| = (\int_{\Omega} |f|^p)^{1/p}$, no es completo. Su completación es el espacio $L^p(\Omega)$, que es el que obtenemos si sustituimos el requisito de continuidad por el de integrabilidad (según Lebesgue) y consideramos iguales dos funciones si la norma de su diferencia es cero. Por tanto los elementos de $L^p(\Omega)$ no son exactamente funciones, sino clases de equivalencia de funciones dadas por la relación

$$f \equiv g \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f - g| = 0.$$

Esta equivalencia también se expresa diciendo que f y g difieren en un conjunto de medida nula o que son iguales en casi todo punto. El término *medida* hace referencia a la *medida de Lebesgue*, que es una generalización del concepto de área o volumen que permite asignar “tamaños” a subconjuntos de \mathbf{R}^n (aunque no a todos) y que está en la base de la integral de Lebesgue. Ésta nos bastará verla como una generalización de la integral de Riemann que permite integrar funciones más raras y que presenta mejores propiedades de paso al límite.

Se define el espacio $L^\infty(\Omega)$ como el de las funciones con *supremo esencial* finito. El supremo esencial de la función f es el ínfimo de los valores a tales que el conjunto en el que $f(x) > a$ tiene medida no nula.

5.3.2. Espacios de Hilbert

Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial con producto escalar que con la métrica dada por el producto es espacio de Banach.

El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, pues la norma deriva del producto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g}$.

Los espacios de Hilbert son los espacios vectoriales de dimensión finita que presentan propiedades más análogas a los de dimensión finita. En nuestro caso haremos uso de dos ejemplos de estas propiedades (ver 5.4.1).

La teoría de espacios de Hilbert está en la base de la física moderna. Dentro de la teoría de la señal, resulta fundamental para desarrollar conceptos como las *ondículas* (*wavelets*).

5.3.3. Derivada débil

Necesitamos primero extender el concepto de derivada de una función. Decimos que $\partial_k f$ es la derivada parcial de $f \in L^2(\Omega)$ en sentido distribucional (o derivada débil) si

$$\int_{\Omega} \partial_k f \psi = - \int_{\Omega} f \partial_k \psi \quad \text{para toda } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Si f tiene derivada parcial respecto de la variable k en el sentido habitual, ya sabemos que verifica esta relación.

La derivada débil es única [6, p. 243]. Las funciones definidas en un intervalo $[a, b]$ de \mathbf{R}^n que tienen derivada débil no resultan sorprendentes: son exactamente las que son iguales en casi todo punto a una función *absolutamente continua*, es decir, que se puede escribir como

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

para cierta función g .

Sin embargo, en dimensiones superiores existen funciones con derivada débil que ni siquiera son continuas o, más sorprendentemente aún, ni siquiera están acotadas [6, p. 246].

5.3.4. Espacios de Sobolev

Definimos el *espacio de Sobolev* $H^{1,2}(\Omega)$ como el de las funciones de $L^2(\Omega)$ con derivadas primeras en sentido distribucional que también están en $L^2(\Omega)$. En este espacio definimos la norma

$$\|f\|_{H^{1,2}(\Omega)}^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_k \|\partial_k f\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty.$$

A veces se define sin cuadrados, con lo que se tiene una norma equivalente pero que no deriva de un producto escalar. Para posterior referencia expresamos esta equivalencia de norma dando nombres a las constantes asociadas:

$$c_1 \left(\|f\|_2 + \sum_k \|\partial_k f\|_2 \right) \leq \|f\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq c_2 \left(\|f\|_2 + \sum_k \|\partial_k f\|_2 \right). \quad (5.9)$$

Como en la definición de $L^2(\Omega)$, consideramos iguales dos funciones iguales si la norma de su diferencia es nula. De forma análoga se define el espacio $H^{m,2}(\Omega)$ para $m \geq 1$ como el de las funciones con derivadas parciales de hasta orden m en sentido generalizado en los que la norma definida a continuación es finita:

$$\|f\|_{H^{m,2}(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_2^2 < \infty,$$

donde $\alpha = (k_1, \dots, k_n)$ es el vector de los órdenes de derivación respecto de cada variable y $|\alpha| = k_1 + \dots + k_n$.

Definimos también el espacio $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ de las funciones de $H^{1,2}(\Omega)$ que se anulan en $\partial\Omega$. (Estrictamente, son aquellas tales que existe una sucesión (f_k) , $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$, que converge a f en la norma de $H^{1,2}(\Omega)$). Por tanto es la adherencia de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^{1,2}(\Omega)$, que, al ser un subespacio cerrado, es también un espacio de Hilbert).

5.4. Solución débil de la ecuación

Consideramos ahora el problema de hallar

$$u \in \mathring{H}^{1,2}(\Omega) \text{ tal que } a(\zeta, u) = \alpha(\zeta) \text{ para todo } \zeta \in \mathring{H}^{1,2}(\Omega). \quad (5.10)$$

Respecto de nuestro problema inicial dado por (5.8) estamos haciendo dos modificaciones: extendemos el conjunto de condiciones que debe cumplir la función y ampliamos el espacio en el que la buscamos. En 5.4.2 veremos que a pesar de estas modificaciones, el problema sigue teniendo solución única y ésta coincide con la del problema inicial.

5.4.1. Estudio del problema general de la formulación débil

Veremos un teorema nos proporciona condiciones suficientes para que un problema de la forma (5.10) tenga solución única. Necesitamos dos resultados generales sobre espacios de Hilbert, uno sobre cómo representar aplicaciones lineales y otro sobre cómo representar formas bilineales. En ambos casos se trata de generalizaciones a espacios de dimensión infinita de resultados que son elementales en el caso de dimensión finita.

Teorema de representación de Riesz

Una aplicación lineal α entre espacios normados X e Y es *acotada* si

$$\sup_{x \in X} \frac{|\alpha(x)|}{|x|} < \infty.$$

El conjunto de las aplicaciones lineales acotadas entre dos espacios normados es otro espacio normado con la norma

$$\|\alpha\| = \sup_{x \in X} \frac{|\alpha(x)|}{|x|}.$$

Notaremos como X' el conjunto de las formas lineales acotadas de X en \mathbf{K} .

El Teorema de representación de Riesz indica que si X es un espacio de Hilbert, existe una isometría biyectiva $J : X \rightarrow X'$ tal que

$$J(x)(y) = \langle y, x \rangle \quad (5.11)$$

para todo $y \in X$. Además J es *lineal conjugada*, es decir, $J(px + qy) = \bar{p}J(x) + \bar{q}J(y)$.

Demostración

Ver [1, p. 147].

□

Teorema de Lax-Milgram

Sea a una forma sesquilineal (es decir, aditiva y tal que $a(px, y) = pa(x, y)$, $a(x, qy) = \bar{q}a(x, y)$) definida sobre un espacio de Hilbert X para la cual existen ciertas constantes C_0, c_0 tales que para todo x, y :

(a) $|a(y, x)| \leq C_0 \|x\| \|y\|$ (continuidad),

(b) $\operatorname{Re} a(x, x) \geq c_0 \|x\|^2$ (coercitividad).

Entonces existe una biyección lineal continua A con inversa continua tal que

$$\begin{aligned} a(y, x) &= \langle y, Ax \rangle \quad \text{para todo } x, y \in X, \\ \|A\| &\leq C_0, \quad \|A^{-1}\| \leq c_0. \end{aligned}$$

Demostración

[1, p. 149][6, p. 297].

□

El siguiente resultado se basa en los dos anteriores para estudiar problemas de la forma (5.10).

Teorema

Dadas una forma sesquilineal a definida sobre un espacio de Hilbert X que verifica las condiciones del teorema de Lax-Milgram y una forma lineal continua α sobre X , existe un único $x \in X$ que verifica

$$a(y, x) = \alpha(y) \quad \text{para todo } y \in X \tag{5.12}$$

y es

$$x = A^{-1}J^{-1}(\alpha)$$

donde A es la aplicación definida por

$$a(y, x) = \langle y, Ax \rangle \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

y J está definida en (5.11). Además,

$$\|x\| \leq \frac{1}{c_0} \|\alpha\|,$$

y si a es hermítica definida positiva, x es el único mínimo del funcional

$$G(y) = \frac{1}{2}a(y, y) - \operatorname{Re} \alpha(y). \tag{5.13}$$

Demostración

Aplicando el teorema de Lax-Milgram a la parte izquierda y el teorema de representación de Riesz a la derecha de la ecuación que queremos resolver nos queda

$$\langle y, Ax \rangle = \langle y, J^{-1}\alpha \rangle \quad \text{para todo } x, y \in X$$

luego aplicando de nuevo el teorema de representación de Riesz

$$Ax = J^{-1}\alpha \Rightarrow x = A^{-1}J^{-1}\alpha \Rightarrow \|x\| \leq \frac{1}{c_0} \|\alpha\|$$

puesto que $\|J^{-1}\| = 1$ y $\|A\| \leq \frac{1}{c_0}$. Además, dado $y \neq x$,

$$\begin{aligned} G(y) - G(x) &= \frac{1}{2} (a(y, y) - a(x, x)) - \operatorname{Re} \alpha(y - x) \\ &= \frac{1}{2} (a(y, y) - a(x, x)) - \operatorname{Re} a(y - x, x) \\ &= \frac{1}{2} (a(y, y) - a(x, x)) - \frac{1}{2} (a(y, x) + a(x, y)) + a(x, x) \\ &= \frac{1}{2} (a(y, y) - a(y, x) + a(x, y) + a(x, x)) \\ &= \frac{1}{2} a(y - x, y - x) \geq \frac{c_0}{2} \|y - x\|^2 > 0. \end{aligned}$$

□

5.4.2. Particularización a la EDP elíptica

Veamos que la forma bilineal de (5.10) cumple las condiciones del teorema de Lax-Milgram. Consideramos el caso real y $b \geq 0$.

Veamos primero la coercitividad. Por la condición (5.3) que hemos impuesto a las funciones a_{ij} ,

$$a(u, u) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \partial_i u a_{ij} \partial_j u + \int_{\Omega} u b u \geq c_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = c_0 \sum_i \|\partial_i u\|_{L^2}^2$$

donde $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ es el gradiente de u .

Utilizando la *desigualdad de Poincaré* [1, p. 155]

$$\int_{\Omega} |u|^2 \leq C_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad \text{para toda } u \in \mathring{H}^{1,2}(\Omega)$$

donde la constante C_0 depende sólo de Ω , tenemos

$$\|u\|_{H^{1,2}}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \sum_i \|\partial_i u\|_{L^2}^2 \leq (C_0 + 1) \sum_i \|\partial_i u\|_{L^2}^2 \leq \frac{C_0 + 1}{c_0} a(u, u).$$

Para comprobar la continuidad, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i,j} \int_{\Omega} \partial_i u a_{ij} \partial_j v + \int_{\Omega} u b v \\ \Rightarrow |a(u, v)| &\leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \|\partial_i u\|_{L^2} \|\partial_j v\|_{L^2} + \|b\|_{\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq \max\{(\|a_{ij}\|_{L^\infty})_{i,j}, \|b\|_{L^\infty}\} \left(\sum_{i,j} \|\partial_i u\|_{L^2} \|\partial_j v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \right) \\ &\leq \max\{(\|a_{ij}\|_{L^\infty})_{i,j}, \|b\|_{L^\infty}\} \frac{1}{c_1^2} \|u\|_{H^{1,2}} \|v\|_{H^{1,2}} \end{aligned}$$

donde c_1 es la constante definida en (5.9).

Como la continuidad de α se demuestra fácilmente, el problema (5.10) tiene solución única como consecuencia del teorema anterior. Para comprobar que esta solución coincide con la del problema inicial, dado por (5.8) observamos que la continuidad de a y α aseguran que si

$$a(v, u) = \alpha(v) \quad \text{para todo } v \in C_0^\infty(\Omega)$$

entonces

$$a(v, u) = \alpha(v) \quad \text{para todo } v \in \mathring{H}^{1,2}(\Omega).$$

En efecto, si v es un elemento de $\mathring{H}^{1,2}(\Omega)$, será el límite de una sucesión (v_n) de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$, y para ellos

$$a(v_n, u) = \alpha(v_n),$$

y la continuidad de las funciones nos permite pasar al límite, de forma que

$$a(v, u) = \alpha(v).$$

Así que la solución “clásica” satisface las condiciones aparentemente más exigentes que hemos impuesto a la solución débil. Y además está contenida en el nuevo espacio de búsqueda $\mathring{H}^{1,2}(\Omega)$. Como la solución débil es única, tiene que coincidir con la clásica.

Ejemplo

Consideramos la ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = f_0. \tag{5.14}$$

Si u_0 satisface $u_0|_{\partial\Omega} = f_0$, u es solución de (5.14) si y sólo si $\tilde{u} = u - u_0$ verifica

$$-\Delta\tilde{u} - \Delta u_0 = 0 \text{ en } \Omega \quad \tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0.$$

que es un caso particular de (5.1),

$$a_{ij} = \delta_{ij}, h_1 = 0, b = 0, f = -\Delta u_0.$$

Los operadores asociados son por tanto

$$a(v, u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle$$

$$\alpha(v) = - \int_{\Omega} f v = \int_{\Omega} \Delta u_0 v,$$

y la solución \tilde{u} minimizará

$$2G(y) = a(y, y) - 2\alpha(y) = \int_{\Omega} |\nabla y|^2 - 2 \int_{\Omega} \Delta u_0 y.$$

que, aplicando a la última integral integración por partes, queda

$$2G(y) = \int_{\Omega} |\nabla y|^2 + 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla y \rangle.$$

Minimizar esta expresión equivale a minimizar

$$2G(y) + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 = \int_{\Omega} |\nabla(y + u_0)|^2.$$

Por tanto

$$\tilde{u} = \arg \min_{y \in \mathring{H}^{1,2}} \int_{\Omega} |\nabla(y + u_0)|^2,$$

que equivale a que

$$u = \tilde{u} + u_0 = \arg \min_{z \in u_0 + \mathring{H}^{1,2}} \int_{\Omega} |\nabla z|^2.$$

Por tanto, la solución de la ecuación de Laplace es la que minimiza la integral de la norma al cuadrado del gradiente, respetando las condiciones de contorno.

5.5. Método numérico: Aproximación de Ritz-Galerkin

5.5.1. Idea básica

Este método busca encontrar una solución aproximada de la solución débil en un espacio de dimensión finita X_N . Para ello restringimos a X_N tanto la incógnita como las funciones test, es decir, buscamos u_N que verifica

$$a(v, u_N) = \alpha(v) \quad \text{para todo } v \in X_N. \quad (5.15)$$

Los espacios X_N deben elegirse de forma que aproximen arbitrariamente la solución para N suficientemente grande. La solución aproximada existe y es única porque la matriz del sistema lineal es definida positiva, de acuerdo con la condición que hemos impuesto a las funciones a_{ij} .

Obsérvese que si a es simétrica definida positiva, la aproximación se puede interpretar como la minimización del funcional (5.13) sobre el espacio X_N .

Para resolver el problema tomamos una base $\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ de X_N , con lo que podemos escribir los vectores u y v de (5.15) como

$$u_N = \sum_i u_i \phi_i, \quad v = \sum_j v_j \phi_j,$$

y sustituyendo en (5.15) queda

$$\begin{aligned} a\left(\sum_i u_i \phi_i, \sum_j v_j \phi_j\right) &= \alpha\left(\sum_k v_k \phi_k\right), \\ \Leftrightarrow \sum_i \sum_j u_i v_j a(\phi_i, \phi_j) &= \sum_k v_k \alpha(\phi_k). \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede expresar en términos de vectores y matrices como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} &= \mathbf{a}^\top \mathbf{v}, \quad \text{donde} \\ \mathbf{u} &= (u_i), \quad \mathbf{v} = (v_i), \quad \mathbf{a} = (\alpha(\phi_i)), \quad \mathbf{A} = (a(\phi_i, \phi_j)). \end{aligned}$$

Como esta igualdad debe verificarse para todo \mathbf{v} , es equivalente a

$$\mathbf{u}^\top \mathbf{A} = \mathbf{a}^\top,$$

luego las aproximaciones se obtienen resolviendo un sistema lineal de ecuaciones.

La figura 5.5.1 ilustra las funciones base ϕ_i de los espacios X_N más comúnmente utilizados en dimensiones uno y dos.

5.5.2. Aproximación a la solución exacta

Si los espacios X_N aproximan arbitrariamente la solución, podemos, mediante la técnica de Ritz-Galerkin, encontrar aproximaciones arbitrariamente próximas a la solución en la norma de $H^{1,2}(\Omega)$, como indica el siguiente teorema [1, p. 293].

Lema de Céa

Si u es la solución del problema (5.12) y u_N la solución del problema (5.15), se verifica

$$\|u - u_N\|_{H^{1,2}} \leq \frac{C}{c} \inf_{w \in X_N} \|u - w\|_{H^{1,2}} = \frac{C}{c} d(u, X_N),$$

donde $d(u, X_N)$ es la distancia entre u y el subespacio X_N .

Por tanto, si los subespacios X_N son capaces de aproximar arbitrariamente bien la solución, es decir,

$$d(u, X_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

entonces las aproximaciones que obtenemos mediante el método de Ritz-Galerkin convergen a la solución.

Para demostrar el Lema de Céa partimos de las ecuaciones que definen la solución y la solución aproximada:

$$\begin{aligned} a(v, u) &= \alpha(v) \quad \text{para todo } v \in X \\ a(v, u_N) &= \alpha(v) \quad \text{para todo } v \in X_N \end{aligned}$$

Escribiendo v como $w - u_N$ y restando las ecuaciones anteriores tenemos

$$a(w - u_N, u - u_N) = 0 \quad \text{para todo } w \in X_N.$$

Utilizando la coercitividad de a (condición (b) del T. de Lax-Milgram), después la igualdad que acabamos de obtener, y finalmente la continuidad de a , tenemos

$$\begin{aligned} c_0 \|u - u_N\|^2 &\leq |a(u - u_N, u - u_N)| = \underbrace{|a(w - u_N, u - u_N) + a(u - w, u - u_N)|}_0 \\ &\leq C_0 \|u - w\| \|u - u_N\|, \end{aligned}$$

luego dividiendo entre $\|u - u_N\|$ y tomando ínfimos

$$\|u - u_N\| \leq \inf_{w \in X_N} \frac{C_0}{c_0} \|u - w\| = \frac{C_0}{c_0} d(u, X_N).$$

Existen teoremas (ver, por ejemplo, [9, págs. 139 y 144]) que garantizan que los espacios X_N utilizados habitualmente son capaces de aproximar arbitrariamente la solución. Estos teoremas hacen uso a su vez de conocimiento adicional que se dispone sobre la solución, como el teorema que incluimos a continuación.

5.5.3. Regularidad de la solución

Teorema [6, p. 316]

Si las funciones a_{ij} , h_i , b y f de (5.4) son de clase $C^\infty(\Omega)$, entonces la solución del problema (5.10) es también de clase $C^\infty(\Omega)$.

5.6. Resumen

La tabla 5.6 resume lo más importante de este capítulo.

<p>Buscamos $u \in C^2(\Omega)$ tal que</p> $-\sum_{i=1}^n \partial_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \partial_j u + h_i \right) + bu + f = 0,$ $u _{\partial\Omega} = 0.$
<p>Multiplicando por ζ e integrando por partes obtenemos la condición equivalente</p> $a(u, \zeta) = \alpha(\zeta) \text{ para todo } \zeta \in C_0^\infty,$ <p>donde</p> $a(u, v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \partial_i u a_{ij} \partial_j v + \int_{\Omega} ubv,$ $\alpha(v) = - \int_{\Omega} \left(\sum_i \partial_i v h_i + vf \right).$
<p>Hacemos la condición más estricta, pero sólo aparentemente.</p> $a(u, v) = \alpha(v) \text{ para todo } v \in \mathring{H}^{1,2}(\Omega).$
<p>Ampliamos el espacio de búsqueda. El problema resultante tiene solución única (T. de Lax-Milgram).</p> <p>Buscamos $u \in \mathring{H}^{1,2}(\Omega)$ tal que $a(u, v) = \alpha(v)$ para todo $v \in \mathring{H}^{1,2}(\Omega)$.</p>
<p>Resolvemos el problema restringiéndolo a un subespacio de dimensión finita X_N. Si $d(X_N, u) \rightarrow 0$, entonces $d(u_N, u) \rightarrow 0$ (lema de Céa).</p> <p>Buscamos $u_N \in X_N$ tal que $a(u_N, v) = \alpha(v)$ para todo $v \in X_N$.</p>
<p>Esto equivale a un sistema lineal.</p> <p>Buscamos $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^n$ tal que $\mathbf{u}^\top \mathbf{A} = \mathbf{a}^\top,$ $\mathbf{u} = (u_i), \mathbf{v} = (v_i), \mathbf{a} = (\alpha(\phi_i)), \mathbf{A} = (a(\phi_i, \phi_j)),$ $u_N = \sum_i u_i \phi_i, v = \sum_j v_j \phi_j.$</p>

Cuadro 5.1: Resumen del tema.

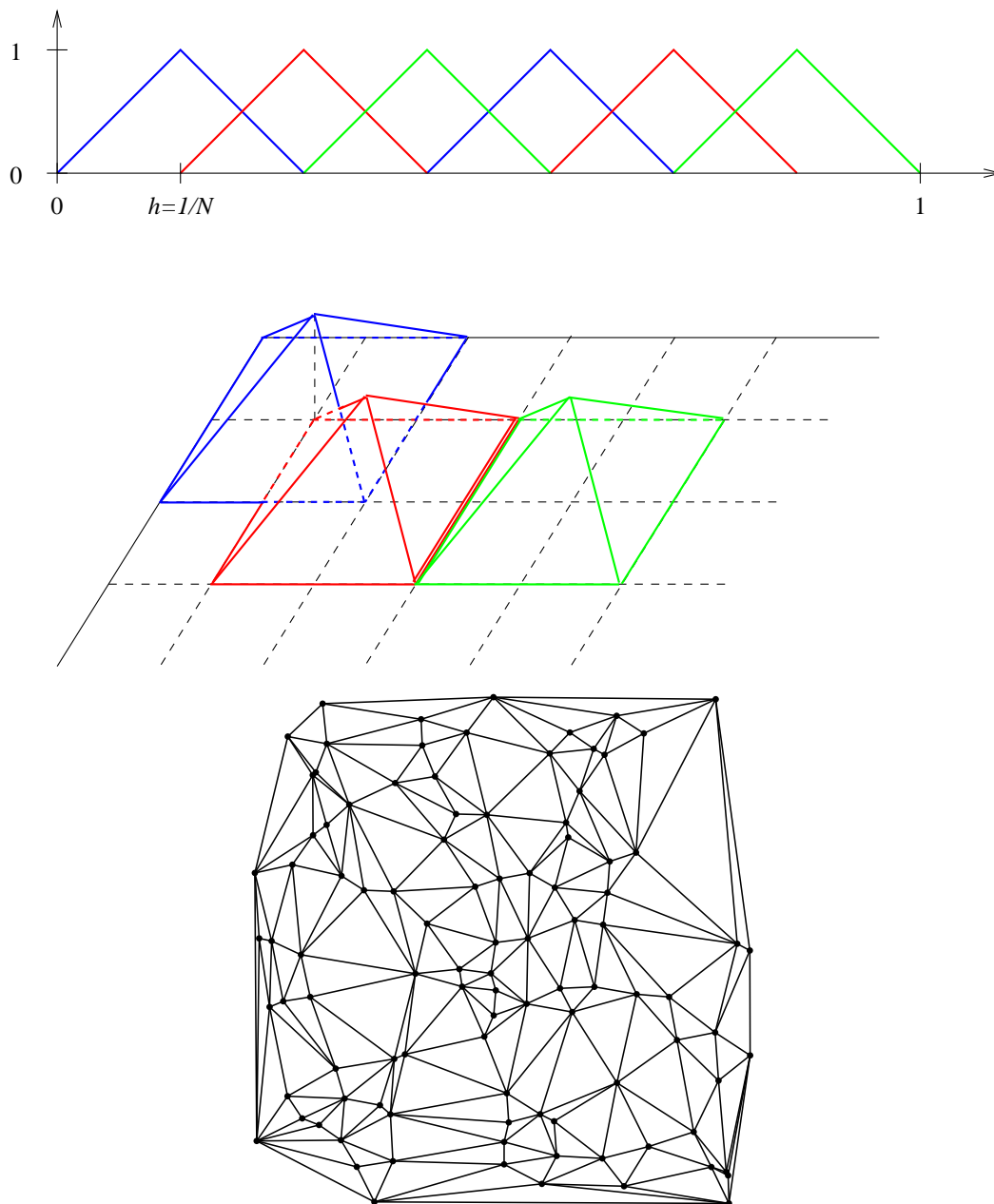


Figura 5.1: Arriba: Funciones base para la aproximación de un problema con condiciones de contorno homogéneas en $\Omega = (0, 1)$. Centro: Algunas de las funciones base para un problema análogo en dimensión dos. Abajo: Triangulación de una región bidimensional. Una triangulación como esta define un conjunto de funciones base. Cada nodo corresponde a la función lineal a trozos con soporte en la región definida por los triángulos incidentes que vale uno en el nodo y cero en cada uno de los nodos adyacentes.

Apéndice A

Introducción a los espacios de Hilbert. Demostraciones

A.0.1. l_2 es completo

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy de elementos de l_2 . Veamos que tiene límite y que éste es otro elemento de l_2 .

Para cada k la sucesión $(x_n(k))_n$ será una sucesión de Cauchy elementos de \mathbf{C} , luego, al ser este espacio completo, tendrá un límite $x(k)$.

Veamos que la secuencia x es el límite de (x_n) en la métrica dada por el producto escalar y que está en $x \in l_2$.

Por ser (x_n) de Cauchy, dado un ϵ arbitrario, para todo m, n posteriores a cierto N tendremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_m(k) - x_n(k)|^2 < \epsilon^2.$$

Para poder hacer pasos al límite en el espacio en que sabemos hacerlo (\mathbf{C}^n), observamos que para cualquier M

$$\sum_{k=1}^M |x_m(k) - x_n(k)|^2 < \epsilon^2.$$

Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^M |x_m(k) - x(k)|^2 \leq \epsilon^2,$$

y como M es arbitrario

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_m(k) - x(k)|^2 \leq \epsilon^2, \tag{A.1}$$

y con esto ya hemos demostrado que para cualquier ϵ , a partir de cierto m los elementos de la sucesión (x_n) distan de x menos que ϵ , con lo que x es el límite de la sucesión en la métrica del producto escalar.

Para ver que x está en l_2 utilizamos (A.1) y la desigualdad triangular:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_m(k)|^2}_{< \infty} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_m(k) - x(k)|^2}_{< \epsilon^2} < \infty.$$

A.0.2. Todo EPI separable tiene una base de Hilbert

Sean E un EPI separable y (x_n) una secuencia densa en E . Veamos que la secuencia de vectores ortonormales (y_n) obtenida a partir de la anterior mediante el algoritmo de Gram-Schmidt es una base de Hilbert de E , es decir, que podemos aproximar cualquier $x \in E$ arbitrariamente bien mediante combinaciones lineales de elementos de (y_n) .

Como (x_n) es denso,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{n \leq N} \|x - x_n\| = 0.$$

Como x_1, \dots, x_N están en el subespacio generado por y_1, \dots, y_N ,

$$\|x - P_{\text{span}\{y_1, \dots, y_N\}}(x)\| \leq \inf_{n \leq N} \|x - x_n\|,$$

luego

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - P_{\text{span}\{y_1, \dots, y_N\}}(x)\| = 0.$$

A.0.3. Todo espacio de Hilbert separable es isomorfo a l_2

Sea E es un espacio de Hilbert separable y $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ una base numerable de E , la aplicación ϕ definida por

$$x \mapsto \phi(x) = (x_k)_{k \in \mathbf{N}}, \quad x_k = \langle x, f_k \rangle$$

es un isomorfismo entre E y l_2 . Para comprobarlo tenemos que verificar que

- (1) $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ está en l_2 ,
- (2) ϕ preserva el producto escalar,
- (3) ϕ es inyectiva,
- (4) ϕ es sobreyectiva.

(1) Para todo N podemos escribir x como la suma de vectores ortogonales

$$x = \sum_{n=1}^N \langle x, f_n \rangle f_n + \left(x - \sum_{n=1}^N \langle x, f_n \rangle f_n \right)$$

luego por el Teorema de Pitágoras

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, f_n \rangle|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, f_n \rangle f_n \right\|^2$$

luego para todo N

$$\sum_{n=1}^N |\langle x, f_n \rangle|^2 < \|x\|^2.$$

(2) Por la identidad de polarización basta comprobar que se preserva la norma, es decir, que:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n \rangle|^2.$$

Por el teorema de Pitágoras

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, f_n \rangle f_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle x, f_n \rangle|^2.$$

Como la expresión de la izquierda tiende a cero por la definición de base de Hilbert,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

(3) La inyectividad es consecuencia de la preservación de la norma:

$$\begin{aligned} x \neq y &\rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow \|x - y\| > 0 \Rightarrow \|\phi(x - y)\| > 0 \\ &\Rightarrow \phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y) \neq 0 \Rightarrow \phi(x) \neq \phi(y) \end{aligned}$$

(4) La sobreyectividad es consecuencia de la completitud del espacio E . Dada una secuencia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in l_2$ tenemos que ver si existe un elemento x en E tal que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} = \phi(x)$, es decir, $\langle x, f_n \rangle = x_n$. Si x existe, será

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n f_n,$$

así que lo que falta es comprobar que tal límite existe. Como E es completo, basta ver que $s = (s_N)_{N \in \mathbf{N}}$, $s_N = \sum_{n=1}^N x_n f_n$, es de Cauchy. Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

es convergente, luego es de Cauchy, y ello equivale a que (s_N) sea de Cauchy.

A.0.4. La adherencia de un subespacio es un subespacio

Sea E un EPI y $V \subset E$ un subespacio. Tenemos que ver que si $x, y \in V$, $z = \alpha x + \beta y \in V$. x e y serán, respectivamente, límites de las secuencias (x_n) e (y_n) contenidas en V . La secuencia (z_n) , $z_n = \alpha x_n + \beta y_n$ estará contenida en V y su límite será z , pues por la desigualdad triangular

$$\|z_n - z\| \leq |\alpha| \|x_n - x\| + |\beta| \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

A.0.5. Un subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo

Sea E espacio métrico y $C \subset E$ un subconjunto cerrado. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy de C , por ser E completo (x_n) tendrá un límite x , y como C es cerrado, este $x \in C$.

A.0.6. Un subconjunto de un espacio métrico separable es separable

Sean E un espacio métrico separable con métrica dada por la función de distancia d , $S \subset E$ un subconjunto de E y (x_n) una sucesión densa en E . Vamos a construir una sucesión de elementos de S densa en este conjunto. Para ello consideramos para cada x_n su distancia a S

$$d_n = \inf_{y \in S} d(x_n, y).$$

Dado un x_n , para cada $m \in \mathbf{N}$ habrá un elemento de S a distancia de x_n menor que $d_n + \frac{1}{m}$. Notamos este elemento como y_{nm} .

El conjunto de todos los y_{nm} es numerable. Veamos que es denso en S . Dados $y \in S$ y $\epsilon > 0$ existirá un x_n tal que $d(y, x_n) < \epsilon/3$. Por tanto $d_n < \epsilon/3$, luego $d(x_n, y_{nm}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{m}$. Tomando m tal que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{3}$ y aplicando la desigualdad triangular tenemos que $d(y, y_{nm}) < \epsilon$.

A.0.7. El conjunto ortogonal de un conjunto es un subespacio cerrado

Sean E un EPI y $S \subset E$ un subconjunto cualquiera. Es inmediato que S^\perp es un subespacio vectorial. Veamos que es cerrado. Si (x_n) es una secuencia contenida en S^\perp y $x_n \rightarrow x$, dado $y \in S$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle| \leq \|x - x_n\| \|y\|.$$

Como la expresión de la derecha es arbitrariamente pequeña, la de la izquierda es cero.

A.0.8. En un EHS el complemento ortogonal del complemento ortogonal de un subespacio es su adherencia

Sea E un EHS y $V \subset E$ un subespacio. Veamos que $V^{\perp\perp} = \bar{V}$. Como $V^{\perp\perp}$ es un cerrado que contiene a V , $\bar{V} \subset V^{\perp\perp}$.

Para ver que esta inclusión es en realidad una igualdad tomamos $x \in V^{\perp\perp}$ y lo escribimos utilizando la proyección ortogonal sobre \bar{V} (existe por ser \bar{V} un cerrado de un espacio de Hilbert) como

$$x = \underbrace{x_0}_{\in \bar{V}} + \underbrace{x_1}_{\in \bar{V}^\perp}.$$

Como $V \subset \bar{V}$, $\bar{V}^\perp \subset V^\perp$, x_1 está en V^\perp y en $V^{\perp\perp}$, luego es cero.

A.0.9. Caracterización de subespacios densos

En un EHS E un subespacio V es denso si y sólo si el único vector ortogonal a él es el vector nulo.

En efecto, por A.0.8, $\bar{V} = V^{\perp\perp}$, luego hay que demostrar que $V^{\perp\perp} = E \Leftrightarrow V^\perp = \{0\}$. La implicación de derecha a izquierda es trivial. Para ver la implicación de izquierda a derecha, observamos que, como V^\perp es cerrado, su adherencia $V^{\perp\perp\perp}$ es él mismo, luego $V^\perp = V^{\perp\perp\perp} = (V^{\perp\perp})^\perp = E^\perp = \{0\}$.

También se puede demostrar directamente que $\bar{V} = E \Leftrightarrow V^\perp = \{0\}$. Para ver la implicación de derecha a izquierda, tomamos $x \in E$ y lo escribimos como $x = P_{\bar{V}}x + y$. Entonces $y \in \bar{V}^\perp \subset V^\perp = \{0\}$, luego $x = P_{\bar{V}}x \in \bar{V}$. Para ver la implicación de izquierda a derecha comprobamos su contrarrecíproco, es decir, que si existe un y no nulo ortogonal a V , V no es denso. En efecto, este y no estará en la adherencia de V porque cualquier vector v de V estará de él a una distancia al cuadrado $\|y - v\|^2 = \|y\|^2 + \|v\|^2 \geq \|y\|^2$.

Apéndice B

Resultados fundamentales sobre la integral de Lebesgue

B.1. Definiciones y resultados básicos

Se define la *medida exterior* de $A \subset \mathbf{R}$ como el ínfimo de la suma de las longitudes de intervalos de cualquier conjunto numerable de intervalos abiertos que recubra A , es decir,

$$m^*(A) = \inf_{E \subset \mathbf{R}} \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i)$$

donde los I_i son intervalos abiertos y $l(I_i)$ su longitud.

Un conjunto $A \in \mathbf{R}$ es *medible* si “parte bien” a cualquier conjunto, es decir, si para todo conjunto $B \subset \mathbf{R}$

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c).$$

Entonces se define su *medida (de Lebesgue)* $m(A)$ como su medida exterior.

Los conjuntos medibles

- incluyen a todos los abiertos y los cerrados,
- integran una familia de conjuntos cerrada por complementación, unión numerable e intersección numerable (es decir, constituyen una σ -álgebra de conjuntos).

La medida de Lebesgue

- extiende la medida ordinaria de intervalos,
- es invariante por traslación,
- es numerablemente aditiva.

Una función real de variable real es *medible* si la preimagen de cualquier intervalo de la forma $[a, \infty)$ es también medible.

Son medibles, en particular,

- las funciones continuas,
- el límite puntual de funciones medibles,
- la suma, producto, máximo, mínimo y valor absoluto de funciones medibles.

Una función es *simple* si toma un número finito de valores.

La *integral de una función simple medible no negativa*

$$f : E \rightarrow \mathbf{R}, f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}, c_i \neq c_j \forall i \neq j$$

donde χ_{E_i} es la función característica del conjunto E_i , se define como

$$\int_E f = \sum_{i=1}^N c_i m(E_i).$$

La *integral de una función medible no negativa* f se define como

$$\int_E f = \sup_{s \leq f, s \text{ simple}} \int_E s$$

Si $f = f_+ - f_-$ es una función medible, $f_+ \geq 0$, $f_- \geq 0$, f es *integrable* si

$$\int_E f_+ < \infty, \int_E f_- < \infty$$

y se define su integral como

$$\int_E f = \int_E f_+ - \int_E f_-.$$

Se dice que dos funciones son *iguales en casi todo punto* si difieren en un conjunto de medida nula. Entonces sus integrales en cualquier intervalo coinciden.

B.2. Teoremas de paso al límite

Teorema de la convergencia monótona

Si $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ son medibles y $f_n(t) \rightarrow f(t)$ para todo t , entonces f es medible y

$$\int_E f_n \rightarrow \int_E f$$

Teorema de la convergencia dominada

Si (f_n) es una secuencia de funciones medibles tales que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ para todo t y existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq g$, entonces f es integrable y

$$\int_E f_n \rightarrow \int_E f.$$

Intercambio de suma e integral

Si (f_k) es una secuencia de funciones integrables y $\sum_k |f_k|$ es integrable, entonces

$$\sum_k \int f_k = \int \sum_k f_k.$$

Demostración

Si definimos $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$, lo que tenemos que demostrar es que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int S_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Las funciones S_n están dominadas por $\sum_k |f_k|$, luego es consecuencia del teorema de la convergencia dominada. \square

Apéndice C

Análisis de Fourier

C.1. Transformación de Fourier

Si $f \in L^2(\mathbf{R})$, definimos su *transformada de Fourier* como

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt.$$

Nótese que si f no está en $L_1(\mathbf{R})$ la integral no está definida. En ese caso debe interpretarse como el límite en el sentido de la norma $\|\cdot\|_2$ de la secuencia de funciones (\hat{f}_N) , definidas por

$$\hat{f}_n(\omega) = \int_{-N}^N f(t)e^{j\omega t} dt.$$

que sí están definidas porque $L_2([-N, N]) \subset L_1([-N, N])$.

Se verifica que $\|\hat{f}\|_2 = 2\pi \|f\|_2$, luego $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$. De hecho la transformación

$$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$$

es una isometría de $L^2(\mathbf{R})$ en sí mismo y como tal es invertible. La fórmula de la inversión (transformación inversa) es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-j\omega t} d\omega.$$

que debe entenderse en el mismo sentido que la fórmula de la transformación directa.

C.2. Propiedades de la transformación de Fourier

Transformación y convolución

$$f, g \in L^1(\mathbf{R}) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbf{R}), \widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Desplazamiento y escalado

$$g(t) = f(at + b) \Rightarrow \hat{g}(\omega) = \frac{1}{a} e^{j\omega b/a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{|a|}\right)$$

C.3. Transformación de Fourier de secuencias

Si $x = (x_n) \in L^2(\mathbf{Z})$ definimos la *transformada de Fourier de la secuencia* como

$$\hat{x}(\omega) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n e^{j\omega n}$$

donde la convergencia de la suma se entiende en el sentido de la norma $\|\cdot\|_2$.

De hecho la transformación está bien definida y es (salvo por un factor de escala) una isometría de $L^2(\mathbf{Z})$ en $L^2(\mathbf{T})$ porque las funciones

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega n t}$$

son una base ortonormal de $L^2(\mathbf{T})$.

Por tanto

$$\|\hat{x}\|_2^2 = 2\pi \|x\|_2^2,$$

y la fórmula de inversión es

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(\omega) e^{-j\omega n} d\omega.$$

C.4. Transformación de Fourier y muestreo

Veamos la relación entre las transformadas de Fourier de $f \in L^2(\mathbf{R})$ y la de su secuencia de muestras $f_d = (f(nT))$. Suponemos que $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ (con soporte compacto como caso particular), con lo que f es continua y tiene sentido hablar de sus muestras.

Por la fórmula de inversión de la transformación de Fourier,

$$\begin{aligned}
 2\pi f(nT) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega nT} d\omega \\
 &= \sum_k \int_{-\pi/T+2k\pi/T}^{\pi/T+2k\pi/T} \hat{f}(\omega) e^{j\omega nT} d\omega \\
 &= \sum_k \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) e^{j\omega nT} d\omega \\
 (*) &= \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_k \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) e^{j\omega nT} d\omega \\
 (\omega' = \omega T) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T} \sum_k \hat{f}\left(\frac{\omega - 2k\pi}{T}\right) e^{j\omega n} d\omega
 \end{aligned}$$

Comparando con la fórmula de inversión de la transformada de Fourier de una secuencia

$$2\pi f_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}_d(\omega) e^{-j\omega n} d\omega$$

concluimos que

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_k \hat{f}\left(\frac{\omega - 2k\pi}{T}\right).$$

El intercambio (*) entre suma e integral se justifica por el teorema de intercambio de suma e integral de Lebesgue, pues

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_k \left| \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) e^{j\omega n} \right| d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)| d\omega = \|\hat{f}\|_1 < \infty.
 \end{aligned}$$

Si \hat{f} es limitada en banda y no existe solapamiento de versiones desplazadas de este espectro en la suma anterior, \hat{f} se puede recuperar a partir de f_d mediante

$$f(\omega) = T f_d(\omega T) \chi_{[-\pi T, \pi T]},$$

y por tanto $f(t)$ como

$$\begin{aligned}
 f(t) &= T \int_{-\pi T}^{\pi T} \hat{f}_d(\omega) e^{j\omega t} d\omega = T \int_{-\pi T}^{\pi T} \left[\sum_n f(nT) e^{-j\omega nT} \right] e^{-j\omega t} d\omega \\
 (***) &= T \sum_n f(nT) F^{-1} [e^{-j\omega nT} \chi_{[-\pi T, \pi T]}] = \sum_n f(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right)
 \end{aligned}$$

donde (***) se justifica por la continuidad del producto escalar.

Bibliografía

- [1] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, 4^a ed., Springer, Alemania, 2000.
- [2] A. Boggess, F. J. Narcowich, *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Prentice-Hall, EEUU, 2001.
- [3] G. Bachman, L. Narici, E. Beckenstein, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer, EEUU, 2000.
- [4] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*,
- [5] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer.
- [6] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, EEUU, 1991.
- [7] D. H. Griffel, *Applied Functional Analysis*, Dover, EEUU, 1981.
- [8] T. K. Moon, W. C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, Prentice-Hall, EEUU, 2000.
- [9] G. Strang, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, EEUU, 1973.
- [10] M. Vetterli, J. Kovacevic, *Wavelets and subband coding*, Prentice-Hall, EEUU, 1995.