UN MODELO PARA MEDIR LA N-CONTRADICCIÓN DE CONJUNTOS BORROSOS*

Elena E. Castiñeira Carmen Torres-Blanc Susana Cubillo

Dpto. Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
28660, Boadilla del Monte, Madrid
{ecastineira, ctorres, scubillo}@fi.upm.es

Resumen

En este artículo, se revisan los conceptos de conjuntos borrosos autocontradictorios y contradictorios respecto de una negación, extendiéndolos al marco, más general, de las negaciones menos restrictivas, en lugar de considerar sólo negaciones fuertes. A continuación, se establecen los axiomas mínimos que debe de verificar una función para que pueda ser considerada una medida de N-autocontradicción, y análogamente para una medida de N-contradicción, estableciéndose algunas relaciones entre ambos tipos de medidas. Finalmente, se introducen los axiomas para modelar la continuidad de las medidas cuando los conjuntos borrosos "crecen", y análogamente, cuando "decrecen"; asimismo se proporcionan sendas familias de medidas de contradicción, de ambos tipos, que satisfacen una u otra propiedad.

Palabras Clave: Contradicción, medidas de contradicción, negaciones, medidas semicontinuas.

1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la contradicción tiene interés no sólo desde el punto de vista teórico, sino también desde el práctico, dada la importancia que puede alcanzar la obtención de consecuencias contradictorias en los procesos de inferencia. Estas preocupaciones llevaron a los autores de [11] y [12] a introducir los conceptos de conjuntos borrosos autocontradictorios y contradictorios. Más tarde, en [2, 3, 8, 9] se propusieron formas de medir el grado en que esta contradicción se produce. En [5] se plantearon los conceptos de medida de autocontradicción y medida de contradicción de forma axiomática. Aunque en dicho artículo se comenzaron a desarrollar las ideas principales que creemos que involucra este concepto, la profundización de su estudio nos ha llevado a una revisión del modelo allí propuesto, separando claramente los axiomas que modelizan el concepto de medida de contradicción (incluso variando alguno de ellos) con los que modelizan la continuidad, añadiendo nuevos axiomas y, finalmente, ampliando el marco de estudio, de forma que se extienda el modelo a medidas, no sólo de autocontradicción y contradicción, sino también a medidas donde la contradicción depende de una negación N, esto es, medidas de N-autocontradicción y N-contradicción.

Los conceptos de medida de N-autocontradicción y medida de N-contradicción, aunque fueron introducidos en [4] allí apenas se estudiaron. En el presente trabajo se tratan en mayor profundidad y en un marco más general.

Finalizamos esta introducción comentando la estructura de este artículo. En la siguiente sección, sección 2, se revisan los conceptos de conjuntos borrosos autocontradictorios y contradictorios respecto de una negación, extendiéndolos al marco, más general, de las funciones de negación menos restrictivas, en lugar de considerar sólo negaciones fuertes como se venía haciendo hasta ahora. A continuación, se establecen los axiomas mínimos que debe de verificar una función para que pueda entenderse como medida de N-autocontradicción, después se hace lo propio para una medida de N-contradicción, y finalmente, se determina alguna relación entre ambos tipos de medidas. En la sección tercera, se introducen los axiomas que pueden modelar cierto tipo de continuidad, concretamente, la continuidad cuando los conjunto borrosos "crecen", semicontinuidad desde abajo, y cuando los conjuntos "decrecen", semicontinuidad desde arriba. Este tipo de continuidad se ha dado en llamar completa, para diferenciarla de otros tipos que se pueden definir imponiendo condiciones a los conjuntos borro-

* Este trabajo está parcialmente subvencionado por el Proyecto TIN 2005-08943-C02-01 (CICYT).

sos, pero aquí no se tratarán pues es el tópico que las autoras está investigando en la actualidad. En todos los casos se proporcionan familias de medidas verificando estas propiedades.

2 CONTRADICCIÓN Y MEDIDAS DE CONTRADICCIÓN RESPECTO A UNA NEGACIÓN

Puesto que el estudio que se va a realizar utiliza negaciones, comenzamos recordando este concepto, así como algunas propiedades que puede verificar.

Definición 2.1 [6, 10, 13] Sea la función $N : [0,1] \to [0,1]$, y consideremos las siguientes propiedades que puede verificar:

(n1) $N(0) = 1$ y $N(1) = 0$.

(n2) N es decreciente.

(n3) N es estrictamente decreciente y continua.

(n4) $a \leq N^2(a) = N(N(a))$ para todo $a \in [0,1]$.

(n5) $N^2(a) \leq a$ para todo $a \in [0,1]$.

Se dice que N es: una *función de negación* o simplemente una *negación* si verifica los axiomas (n1) y (n2); una *negación estricta* si verifica (n1) y (n3); una *negación ordinaria* si verifica (n1), (n2) y (n4); una *negación débil* si verifica (n1), (n2) y (n5); y es una *negación fuerte o involución* si verifica (n1), (n2), (n4) y (n5).

Dado que una involución es biyectiva, entonces también es una negación estricta. Por otra parte, existen negaciones que son estrictas y no son ordinarias ni débiles. Por ejemplo, la función $N : [0,1] \to [0,1]$ definida, para cada $a \in [0,1]$, por

$$N(a) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{2}\, a, & \text{si } a \leq \dfrac{1}{2}; \\[2ex] \dfrac{1-a}{2}\, a, & \text{si } a > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

es una negación estricta, no ordinaria ni débil.

Denotaremos por $N_\wedge, N_\vee : [0,1] \to [0,1]$ las negaciones que presentan los casos extremos, definidas por

$$N_\wedge(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a = 0; \\ 0, & \text{si } a \neq 0; \end{cases} \qquad N_\vee(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \neq 1; \\ 0, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Se verifica que $N_\wedge$ es una negación ordinaria y $N_\vee$ es una negación débil.

2.1 CONJUNTOS N-AUTOCONTRADICTORIOS Y CONJUNTOS N-CONTRADICTORIOS

Definición 2.2 Sea un universo $X \neq \emptyset$ y sea N una negación. Se dice que un conjunto borroso sobre X, o alternativamente su función de pertenencia $\mu \in [0,1]^X$, es *N-autocontradictorio* o *autocontradictorio respecto a N*, si para todo $x \in X$ se verifica que $\mu(x) \leq N(\mu(x))$.

Observación 2.3 Sean $X \neq \emptyset$ y $\mu \in [0,1]^X$. Se tiene:

1) Si N_1, N_2 son negaciones verificando que $N_1 \leq N_2$, entonces si μ es N_1-autocontradictorio también es N_2-autocontradictorio.

2) μ es $N_\wedge$-autocontradictorio si y sólo si $\mu = \mu_\emptyset$, donde $\mu_\emptyset$ representa la función de pertenencia del conjunto vacío ($\mu_\emptyset(x) = 0$, $\forall x \in X$).

3) μ es $N_\vee$-autocontradictorio si y sólo si $\mu(x) < 1$ $\forall x \in X$. Es decir, los únicos conjuntos borrosos que no son $N_\vee$-autocontradictorios son los *normalizados*.

4) Si N es una negación continua, μ es N-autocontradictorio si y sólo si $\operatorname*{Sup}_{x \in X} \mu(x) \leq \alpha_N$, donde α_N es el punto fijo de la negación.

Esta observación sugiere la siguiente definición un poco más restrictiva, que permitirá recuperar las definiciones de [11, 12] cuando el marco de trabajo a considerar se restringe al conjunto de negaciones fuertes.

Definición 2.4 Dado $X \neq \emptyset$, se dice que un conjunto borroso sobre X, o alternativamente su función de pertenencia $\mu \in [0,1]^X$, es *autocontradictorio* si verifica que $\operatorname*{Sup}_{x \in X} \mu(x) < 1$.

Si $\mu \in [0,1]^X$ es autocontradictorio, entonces existen infinitas negaciones respecto de las cuales es autocontradictorio. En efecto, basta considerar, para cualquier α tal que $\operatorname*{Sup}_{x \in X} \mu(x) \leq \alpha < 1$, una negación continua N_α con punto fijo α.

Definición 2.5 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación. Dados dos conjuntos borrosos cuyas funciones de pertenencia son $\mu, \sigma \in [0,1]^X$, se dice que μ *es N-contradictorio con* σ si $\mu(x) \leq N(\sigma(x))$ para todo $x \in X$. Si μ es N-contradictorio con σ y σ es N-contradictorio con μ, entonces se dice que son *N-contradictorios.*

Observación 2.6 Sean $X \neq \emptyset$ y $\mu, \sigma \in [0,1]^X$:

1) Si N es una negación ordinaria y $\mu, \sigma \in [0,1]^X$, se verifica que μ es N-contradictorio con σ si y sólo si μ y σ son N-contradictorios.

2) Si N_1, N_2 son negaciones tales que $N_1 \leq N_2$, se verifica que si μ es N_1-contradictorio con σ también es N_2-contradictorio con σ.

3) μ es $N_\wedge$-contradictorio con σ si y sólo si para cada $x \in X$ se verifica que $\mu(x) = 0$ ó $\sigma(x) = 0$, es decir, $\mathrm{Min}(\mu, \sigma) = \mu_\emptyset$.

4) μ es $N_\vee$-contradictorio con σ si y sólo si para cada $x \in X$ se verifica que $\mu(x) = 0$ ó $\sigma(x) < 1$.

5) Si N es una negación fuerte y φ es el automorfismo de orden que la genera (es decir, φ es una biyección creciente del intervalo $[0,1]$ tal que $N(a) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(a))$, $\forall a \in [0,1]$, véase [10]), entonces μ y σ son N-contradictorios si y sólo si $\varphi(\mu(x)) + \varphi(\sigma(x)) \le 1$ para todo $x \in X$.

Definición 2.7 Sea N una función de negación. Si $X \neq \emptyset$, se dice que un conjunto borroso sobre X, o alternativamente su función de pertenencia $\mu \in [0,1]^X$, es N-*normal* si verifica que $N\left(\operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x)\right) \le \operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x)$.

Dado que es bastante usual denotar $I = [0,1]$, llamaremos $I_N^X = \{\mu \in [0,1]^X \mid \mu \text{ es } N\text{-normal}\}$

Observación 2.8 Sean $X \neq \emptyset$ y $\mu \in [0,1]^X$:

1) Si N_1, N_2 son negaciones verificando que $N_1 \le N_2$, entonces $I_{N_2}^X \subset I_{N_1}^X$.

2) $\mu \in I_{N_\wedge}^X$ si y sólo si $\mu \neq \mu_\emptyset$, lo que es equivalente a que $\operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x) > 0$.

3) $\mu \in I_{N_\vee}^X$ si y sólo si $\operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x) = 1$, es decir, si μ es normal.

4) Si N es una negación continua, $\mu \in I_N^X$ si y sólo si $\operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x) \ge \alpha_N$, donde α_N es el punto fijo de N.

2.2 MEDIDAS DE N-AUTOCONTRADICCIÓN: $\mathcal{A}_N(X)$

En el marco de la teoría de los conjuntos borrosos existen infinidad de conjuntos autocontradictorios, pero en la teoría de conjuntos clásica, el único conjunto autocontradictorio es el vacío; por lo que cualquier función susceptible de medir contradicción debería tomar el valor máximo sobre el conjunto vacío (axioma (ai) de la siguiente definición) y el mínimo sobre cualquier conjunto clásico no vacío. Este último requisito se cumple si además exigimos, como es razonable, que todo conjunto no N-autocontradictorio tenga esa medida mínima. Para formular esta exigencia, teniendo en cuenta que μ no es N-autocontradictorio si existe un elemento x tal que $\mu(x) > N(\mu(x))$, en [4] se consideró que si $\mu(x) \ge N(\mu(x))$ para algún x, la autocontradicción de μ debería ser 0, lo que se puede justificar de la siguiente manera: si existe algún x para el que $\mu(x) - N(\mu(x)) > 0$, por muy pequeño que sea este valor, la medida de μ debe ser 0, por lo que también es razonable considerar que sea 0 si $\mu(x) - N(\mu(x)) = 0$. Aun así, en la definición que aquí se presenta, por consideraciones similares, se modifica la exigencia de que exista un x tal que $\mu(x) \ge N(\mu(x))$ imponiendo que esta desigualdad la cumpla el $\operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x)$ (axioma (aii)). Finalmente, también será necesario establecer, de algún modo, cómo debe variar una medida de N-autocontradicción en función de los conjuntos. Para ello, observemos que si μ, σ son N-autocontradictorios y $\mu \le \sigma$, entonces $\mu \le \sigma \le N \circ \sigma \le N \circ \mu$, por lo que resulta evidente que σ está más "cerca" de ser no N-autocontradictorio que μ, por tanto, su medida debería ser menor que la de μ. Así, se tiene:

Definición 2.9 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación. Se llama *medida de N-autocontradicción* sobre los conjuntos borrosos de X, $\mathcal{F}(X)$, a cualquier aplicación $A_N : [0,1]^X \to [0,1]$ que verifica las siguientes condiciones:

(ai) $A_N(\mu_\emptyset) = 1$.

(aii) Si $\mu \in I_N^X$, entonces $A_N(\mu) = 0$.

(aiii) Antimonotonía: si $\mu, \sigma \in [0,1]^X$ verifican que $\mu \le \sigma$, entonces $A_N(\sigma) \le A_N(\mu)$.

Denotaremos al conjunto de medidas de N-autocontradicción sobre los conjuntos borrosos de X por $\mathcal{A}_N(X)$.

Obsérvese que si cambiamos el axioma (aii) por otro (aii') donde se imponga la condición de que la medida sea 0 para los conjuntos normales, entonces se mediría cuán autocontradictorio es un conjunto borroso, que también coincide con cuán $N_\vee$-autocontradictorio es; por ello, a tales aplicaciones las denominaremos simplemente *medidas de autocontradicción*. En realidad, esta definición fue introducida en [5] como medida de autocontradicción débil, pero aquí no se utiliza tal denominación, pues se consideran aparte los axiomas que modelizan la continuidad, como ya ha sido comentado.

Observación 2.10 Sean $X \neq \emptyset$ y N_1, N_2 negaciones, si $N_1 \le N_2$, entonces $\mathcal{A}_{N_1}(X) \subset \mathcal{A}_{N_2}(X)$.

Ejemplo 2.11 Sea $X \neq \emptyset$, entonces:

1) Para toda negación N se puede considerar la siguiente medida de N-autocontradicción trivial, definida para cada $\mu \in [0,1]^X$ por

$$A_0^N(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \text{ es } N\text{-normal;} \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obviamente, para cualquier $A_N \in \mathcal{A}_N(X)$ se verifica que $A_0^{N_\wedge} \le A_N \le A_0^{N_\vee}$. Por otra parte, $A_0^{N_\wedge}$ es medida de N-autocontradicción para toda negación N.

2) La aplicación definida para cada $\mu \in [0,1]^X$ por $A(\mu) = 1 - \operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x)$ es una medida de $N_\vee$-autocontradicción o medida de autocontradicción.

3) Para cada negación continua N, las aplicaciones definidas para cada $\mu \in [0,1]^X$ por

$$A_1^N(\mu) = \frac{1}{\alpha_N} \operatorname{Max}\left(0, \alpha_N - \operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x)\right),$$

$$A_2^N(\mu) = N\left(\operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{\alpha_N} \operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x)\right)\right),$$

donde α_N es el punto fijo de N, son medidas de N-autocontradicción.

2.3 MEDIDAS DE N-CONTRADICCIÓN: $\mathcal{C}_N(X)$

En este apartado establecemos los requisitos mínimos que una función debe satisfacer para que modele la contradicción, respecto de una negación dada N, entre dos conjuntos borrosos; es decir, para medir cuán N-contradictorios son. Como el conjunto vacío, "el menor" de todos los conjuntos, está contenido en su complementario, que es el "mayor" de todos, la N-contradicción del conjunto vacío consigo mismo debe ser la mayor de todas. Por otra parte, como queremos medir con qué grado se satisfacen a la vez las desigualdades $\mu \leq N \circ \sigma$ (i.e. μ es N-contradictorio con σ) y $\sigma \leq N \circ \mu$ (i.e. σ es N-contradictorio con μ), obviamente debemos de exigir simetría. Además, razonando de forma similar al caso del axioma (aii) para medidas de N-autocontradicción, se justifica que impongamos que, si $N(\operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x)) \leq \operatorname*{Sup}_{x\in X} \mu(x)$ ó $N(\operatorname*{Sup}_{x\in X} \sigma(x)) \leq \operatorname*{Sup}_{x\in X} \sigma(x)$, la N-contradicción entre ambos sea 0. Finalmente, del mismo modo que para las medidas de N-autocontradicción se justificaría la antimonotonía. Así, se tiene:

Definición 2.12 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación. Se llama *medida de N-contradicción* sobre $\mathcal{F}(X)$, a cualquier aplicación $C_N : [0,1]^X \times [0,1]^X \to [0,1]$ que verifica las siguientes condiciones:

(ci) $C_N(\mu_\emptyset, \mu_\emptyset) = 1$.

(cii) Dados $\mu, \sigma \in [0,1]^X$, si $\mu \in I_N^X$ ó $\sigma \in I_N^X$, entonces $C_N(\mu, \sigma) = 0$.

(ciii) Simetría: $C_N(\mu, \sigma) = C_N(\sigma, \mu)$, $\forall \mu, \sigma \in [0,1]^X$.

(civ) Antimonotonía: si $\mu, \sigma \in [0,1]^X$ tales que $\mu \leq \sigma$, entonces $C_N(\sigma, \nu) \leq C_N(\mu, \nu)$, $\forall \nu \in [0,1]^X$.

Denotaremos al conjunto de medidas de N-contradicción sobre los conjuntos borrosos de X por $\mathcal{C}_N(X)$.

Al igual que sucedía con la autocontradicción, si C es una medida de $N_\vee$-contradicción, diremos que es una *medida de contradicción.*

Observación 2.13 Si N_1, N_2 son negaciones tales que $N_1 \leq N_2$ entonces $\mathcal{C}_{N_1}(X) \subset \mathcal{C}_{N_2}(X)$.

Ejemplo 2.14 Sea $X \neq \emptyset$, se tiene:

1) Para toda negación N se puede considerar la siguiente medida de N-contradicción trivial, definida para cada $(\mu, \sigma) \in [0,1]^X \times [0,1]^X$ por

$$C_0^N(\mu, \sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in I_N^X \text{ ó } \sigma \in I_N^X; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obviamente, para cualquier $C_N \in \mathcal{C}_N(X)$ se verifica que $C_0^{N_\wedge} \leq C_N \leq C_0^{N_\vee}$. Además $C_0^{N_\wedge}$ es medida de N-contradicción para toda negación N.

2) La aplicación definida para cada $(\mu, \sigma) \in [0,1]^X \times [0,1]^X$ por

$$C(\mu, \sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \text{ ó } \sigma \text{ normal;} \\ 1 - \frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{x\in X}(\mu(x) + \sigma(x)), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es una medida de contradicción.

3) Para cada negación continua N, sea α_N su punto fijo, entonces las aplicaciones definidas para cada $(\mu, \sigma) \in [0,1]^X \times [0,1]^X$ por

$$C_1^N(\mu, \sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in I_N^X \text{ ó } \sigma \in I_N^X; \\ \operatorname{Max}\left(0, \frac{\alpha_N - \frac{1}{2} \operatorname*{Sup}_{x\in X}(\mu(x)+\sigma(x))}{\alpha_N}\right), & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$C_2^N(\mu, \sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in I_N^X \text{ ó } \sigma \in I_N^X; \\ N\left(\operatorname{Min}\left(1, \frac{\operatorname*{Sup}_{x\in X}(\mu(x)+\sigma(x))}{2\alpha_N}\right)\right), & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

son medidas de N-contradicción.

2.4 ALGUNAS RELACIONES ENTRE $\mathcal{A}_N(X)$ Y $\mathcal{C}_N(X)$

Finalizamos esta sección estableciendo dos resultados que relacionan las medidas de N-autocontradicción y de N-contradicción. Antes recordemos que una t-norma es una operación binaria en $[0,1]$ asociativa, conmutativa, monótona respecto al orden usual en los números reales y con 1 como elemento neutro (por ejemplo, véase [1] o [7]).

Proposición 2.15 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación. Si $C_N \in \mathcal{C}_N(X)$, entonces la aplicación $A_N : [0,1]^X \to [0,1]$, definida para cada $\mu \in [0,1]^X$ por $A_N(\mu) = C_N(\mu, \mu)$, es una medida de N-autocontradicción.

Proposición 2.16 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_N(X)$, entonces para toda t-norma T , la aplicación $C_N : [0,1]^X \times [0,1]^X \to [0,1]$, definida para cada $(\mu, \sigma) \in [0,1]^X \times [0,1]^X$ por

$$C_N(\mu, \sigma) = T(A_1(\mu), A_2(\sigma)),$$

es una medida de N-contradicción.

3 MEDIDAS COMPLETAMENTE SEMICONTINUAS

Los axiomas de medidas de contradicción, respecto de una negación, no garantizan que las funciones que los verifiquen tomen sus valores de forma gradual, como se puede apreciar en cada medida A_0^N ó C_0^N. Por tanto, si se quiere exigir algún tipo de continuidad a las medidas de contradicción, habrá que introducir nuevos axiomas para modelizarla.

Para definir los conceptos de continuidad se considera el retículo acotado y completo $([0,1]^X, \vee, \wedge)$, donde las operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ se definen, para cada $\mu, \sigma \in [0,1]^X$, como los elementos $\mu \vee \sigma, \mu \wedge \sigma \in [0,1]^X$ dados para cada $x \in X$ por $(\mu \vee \sigma)(x) = \text{Sup}(\mu(x), \sigma(x))$ y $(\mu \wedge \sigma)(x) = \text{Inf}(\mu(x), \sigma(x))$, respectivamente.

3.1 MEDIDAS DE N-AUTOCONTRADICCIÓN COMPLETAMENTE SEMICONTINUAS

Definición 3.1 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación. Si $A \in \mathcal{A}_N(X)$, entonces:

1) A es *completamente* $\vee$*-semicontinua*, o *completamente semicontinua desde abajo*, si para todo $\{\mu_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset [0,1]^X$, donde $\mathcal{I}$ es un conjunto arbitrario de índices, se verifica que

$$\operatorname*{Inf}_{i \in \mathcal{I}} A(\mu_i) = A\left(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} \mu_i\right), \tag{aiv}$$

2) A es *completamente* $\wedge$*-semicontinua*, o *completamente semicontinua desde arriba*, si para todo $\{\mu_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset [0,1]^X \setminus I_N^X$

$$\operatorname*{Sup}_{i \in \mathcal{I}} A(\mu_i) = A\left(\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} \mu_i\right), \tag{av}$$

Denotaremos al conjunto de las medidas de N-autocontradicción completamente $\vee$-semicontinuas por $\mathcal{A}_N^{\vee csc}(X)$, y al de las completamente $\wedge$-semicontinuas por $\mathcal{A}_N^{\wedge csc}(X)$.

Observación 3.2 Nótese que la ecuación (aiv) deben verificarla todas las familias de conjuntos borrosos, mientras que (av) deben verificarlos los conjuntos borrosos que no son N-normales. La razón de esta asimetría está en que no puede existir ninguna medida de N-autocontradicción, con $N \neq N_\vee$, verificando (av) para cualquier familia de conjuntos siempre que el universo tenga más de un elemento. En efecto, sean $x_0 \in X$ y $A \in \mathcal{A}_N(X)$; consideremos

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x = x_0; \\ 0, & \text{si } x \neq x_0; \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = x_0; \\ \alpha, & \text{si } x \neq x_0, \end{cases}$$

siendo $\alpha \in (0,1)$ tal que $N(\alpha) < \alpha$. Entonces μ y σ son ambos N-normales, por lo que $A(\mu) = A(\sigma) = 0$. Sin embargo, $A(\mu \wedge \sigma) = 1$ dado que $\mu \wedge \sigma = \mu_\emptyset$, así $\text{Sup}\{A(\mu), A(\sigma)\} < A(\mu \wedge \sigma)$.

Proposición 3.3 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación continua con punto fijo α_N. Consideremos para cada $p \in (0, \alpha_N]$ las siguientes funciones definidas, para cada $\mu \in [0,1]^X$, por:

$$A_1^p(\mu) = \frac{1}{p} \text{Max}\left(0, p - \operatorname*{Sup}_{x \in X} \mu(x)\right),$$

$$A_2^p(\mu) = N\left(\text{Min}\left(1, \frac{1}{p} \operatorname*{Sup}_{x \in X} \mu(x)\right)\right).$$

Se verifica que $\{A_1^p, A_2^p\}_{p \in (0, \alpha_N]} \subset \mathcal{A}_N^{\vee csc}(X)$ y $A_1^p, A_2^p \notin \mathcal{A}_N^{\wedge csc}(X)$, $\forall p \in (0, \alpha_N]$.

Proposición 3.4 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación continua con punto fijo α_N. Consideremos para cada $p \in (0, \alpha_N]$ las siguientes funciones definidas, para cada $\mu \in [0,1]^X$, por:

$$\tilde{A}_1^p(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in I_N^X \\ \frac{1}{p} \text{Max}\left(0, p - \operatorname*{Inf}_{x \in X} \mu(x)\right), & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2^p(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in I_N^X \\ \frac{1}{p} N\left(\text{Min}\left(1, \frac{1}{p} \operatorname*{Inf}_{x \in X} \mu(x)\right)\right), & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Se verifica que $\{\tilde{A}_1^p, \tilde{A}_2^p\}_{p \in (0, \alpha_N]} \subset \mathcal{A}_N^{\wedge csc}(X)$ y $\tilde{A}_1^p, \tilde{A}_2^p \notin \mathcal{A}_N^{\vee csc}(X)$, $\forall p \in (0, \alpha_N]$.

3.2 MEDIDAS DE N-CONTRADICCIÓN COMPLETAMENTE SEMICONTINUAS

Definición 3.5 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación. Si $C \in \mathcal{C}_N(X)$, entonces:

1) C es *completamente* $\vee$*-semicontinua*, o *completamente semicontinua desde abajo*, si para todo $\mu \in [0,1]^X$ y para toda familia $\{\mu_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset [0,1]^X$,

$$\operatorname*{Inf}_{i \in \mathcal{I}} C(\mu_i, \mu) = C\left(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} \mu_i, \mu\right), \tag{civ}$$

2) C es *completamente* $\wedge$*-semicontinua*, o *completamente semicontinua desde arriba*, si para todo $\mu \in [0,1]^X$ y para toda familia $\{\mu_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset [0,1]^X \setminus I_N^X$,

$$\operatorname*{Sup}_{i\in\mathcal{I}} C(\mu_i,\mu) = C\left(\bigwedge_{i\in\mathcal{I}} \mu_i, \mu\right), \qquad \text{(cv)}$$

Denotaremos al conjunto de las medidas de N-contradicción que son completamente $\vee$-semicontinuas por $\mathcal{C}_N^{\vee csc}(X)$, y al de las que son completamente $\wedge$-semicontinuas por $\mathcal{C}_N^{\wedge csc}(X)$.

La exclusión de los conjuntos N-normales en la parte 2) de esta definición se justifican de manera similar al caso de las medidas de N-autocontradicción.

Proposición 3.6 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación continua con punto fijo α_N. Consideremos para cada $p \in (0, \alpha_N]$ las siguientes funciones definidas, para cada $(\mu,\sigma) \in [0,1]^X \times [0,1]^X$, por:

$$C_1^p(\mu,\sigma) = \operatorname{Max}\left(0, \operatorname{Min}\left(\frac{p - \operatorname*{Sup}_{x\in X}\mu(x)}{p}, \frac{p - \operatorname*{Sup}_{x\in X}\sigma(x)}{p}\right)\right)$$

$$C_2^p(\mu,\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in I_N^X \text{ ó } \sigma \in I_N^X; \\ N\left(\operatorname{Min}\left(1, \frac{\operatorname*{Sup}_{x\in X}(\mu(x)+\sigma(x))}{2p}\right)\right), & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Se verifica que $\{C_1^p, C_2^p\}_{p\in(0,\alpha_N]} \subset \mathcal{C}_N^{\vee csc}(X)$ y $C_1^p, C_2^p \notin \mathcal{C}_N^{\wedge csc}(X)$, $\forall p \in (0, \alpha_N]$.

Proposición 3.7 Sean $X \neq \emptyset$ y N una negación continua con punto fijo α_N. Consideremos para cada $p \in (0, \alpha_N]$ las siguientes funciones definidas, para cada $(\mu,\sigma) \in [0,1]^X \times [0,1]^X$, por:

$$\tilde{C}_1^p(\mu,\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in I_N^X \text{ ó } \sigma \in I_N^X; \\ \operatorname{Max}\left(0, \operatorname{Max}\left(\frac{p - \operatorname*{Inf}_{x\in X}\mu(x)}{p}, \frac{p - \operatorname*{Inf}_{x\in X}\sigma(x)}{p}\right)\right) & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\tilde{C}_2^p(\mu,\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in I_N^X \text{ ó } \sigma \in I_N^X; \\ N\left(\operatorname{Min}\left(1, \frac{\operatorname*{Inf}_{x\in X}(\mu(x)+\sigma(x))}{2p}\right)\right), & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Se verifica que $\{\tilde{C}_1^p, \tilde{C}_2^p\}_{p\in(0,\alpha_N]} \subset \mathcal{C}_N^{\wedge csc}(X)$ y $\tilde{C}_1^p, \tilde{C}_2^p \notin \mathcal{C}_N^{\vee csc}(X)$, $\forall p \in (0, \alpha_N]$.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha establecido y estudiado un modelo axiomático para medir la contradicción de conjuntos borrosos respecto a un negación dada. Aunque ya había sido hecho una propuesta en [5] para medir la contradicción, no se trataba ésta respecto a una negación fija. Por lo tanto, el modelo aquí propuesto es más amplio y además recupera al anterior, con la ventaja de que proporciona el marco adecuado para el estudio de la contradicción para cada teoría borrosa dada. Por otra parte, se ha mejorado sustancialmente la parte del modelo dedicada a la continuidad, ya que hasta ahora sólo se había considerado y estudiado la continuidad desde una sola vertiente, atendiendo al "crecimiento" de los conjuntos borrosos, mientras que aquí se ha introducido y tratado también el caso en que los conjuntos "decrecen".

Desde un punto de vista estrictamente teórico, entre otros, señalemos los siguientes temas de interés como futuras líneas de investigación: el establecimiento y estudio de diferentes tipos de continuidad; la exploración de métodos que permitan la agregación de las medidas de contradicción, así como las propiedades que son estables para dichos mecanismos; la relación con otras medidas borrosas, en particular, con las medidas de incompatibilidad; la búsqueda de métodos generales para la construcción de medidas, siendo relevante investigar el uso de uninormas en el caso de que los conjuntos borrosos estén definidos sobre universos finitos. Por otra parte, desde el punto de vista de la aplicación, estas medidas ofrecen un gran potencial como herramienta, siendo de interés investigar su uso para la evaluación de los resultados en los procesos de inferencia borrosos, o en algoritmos de clasificación adaptativa, a fin de optimizar los resultados.

Referencias

[1] C. Alsina, M. Frank, B. Schweizer. *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*, World Scientific (Singapore, Thailand), 2006.

[2] E. Castiñeira, S. Cubillo, S. Bellido. Degrees of Contradiction in Fuzzy Sets Theory, *Proceedings of IX Conference of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, Annecy (France), Pág. 171-176, 2002.

[3] E. Castiñeira, S. Cubillo, S. Bellido. Contradicción entre dos conjuntos, *Actas del XI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF)*, León, Pág. 379-383, 2002.

[4] E. Castiñeira, S. Cubillo, Pedro L. Fernández. Medidas de incompatibilidad entre conjuntos borrosos, *Actas del XIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF)*, Ciudad Real, Pág. 65-70, 2006.

[5] S. Cubillo, E. Castiñeira. Measuring contradiction in fuzzy logic. *International Journal of General Systems*, **34** (1), Pág. 39-59, 2005.

[6] F. Esteva, X. Domingo. Sobre funciones de negación en [0,1]. *Stochastica*, **IV** (2), Pág. 141-165, 1980.

[7] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, Netherlands), 2000.

[8] C. Torres, E. Castiñeira, S. Cubillo, V. Zarzosa. A Geometrical Interpretation to define contradiction degrees between two fuzzy sets Ref. *Int. J. Information Theories and Applications*, **12**(2), Pág. 127-134, 2005.

[9] C. Torres, S. Cubillo, E. Castiñeira. Contradiction versus self-contradiction in Fuzzy Logic. *Int. J. Information Theories and Applications*, **14**(4), Pág. 331-338, 2007.

[10] E. Trillas. Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos. *Stochastica*, **III** (1), Pág. 47-60, 1979. Reimpreso (version en inglés) en *Advances of Fuzzy Logic* (eds. S. Barro et altri-Universidad de Santiago de Compostela), Pág. 31-43, 1998.

[11] E. Trillas, C. Alsina, J. Jacas. On Contradiction in Fuzzy Logic. *Soft Computing*, **3** (4), Pág. 197-199, 1999.

[12] E. Trillas, S. Cubillo. On non-contradicictory Input/Ouput couples in Zadeh's CRI. *Proceedings of the 18th International Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, Pág. 28-32, New York, 1999.

[13] S. Weber. A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms. *Fuzzy Sets and Systems*, **11**, Pág. 115-134, 1983