



Graduado en Matemáticas e Informática

Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos

TRABAJO FIN DE GRADO

Alianzas en Grafos

Autor: Gloria Labory Pesquer

Director: Gregorio Hernández Peñalver

MADRID, JUNIO 2018

Resumen

En la práctica, una alianza puede ser un vínculo o una conexión entre individuos, familias, estados, entidades, etc. Formalmente, un conjunto no vacío S de vértices de un grafo G es una alianza defensiva si cada vértice de S tiene al menos uno o más vecinos en S que fuera de él.

Durante la pasada década hubo un desarrollo notable de tres tipos de alianzas, alianzas defensivas, alianzas ofensivas y alianzas duales. Debido a la variedad de aplicaciones, las alianzas han recibido una especial atención por muchos científicos e investigadores. Hay aplicaciones de alianzas en varias áreas como la bioinformática, la computación distribuida, las comunidades web, las redes sociales, la clasificación de los datos, empresas, etc.

Distintos parámetros de alianza han sido definidos y un gran número de resultados teóricos (algorítmicos y computacionales) se han obtenido para varios tipos de grafos. En este documento se presenta un *survey* de los resultados obtenidos hasta ahora sobre las alianzas, centrándonos principalmente en las alianzas defensivas. Además, se dan algunos resultados y algoritmos sobre parámetros de alianzas defensivas para dos tipos de grafos, grafos soles y grafos orugas.

Keywords: alianza, grafos soles, grafos orugas, dominación.

Abstract

In practice, an alliance can be a bond or connection between individuals, families, states, or entities, etc. Formally, a non-empty set S of vertices of a graph G is a defensive alliance if every vertex of S has at least one more neighbour inside of S than it has outside of S .

During the last decade there has been a remarkable development on three kinds of alliances, defensive alliance, offensive alliance and powerful alliance. Due to their variety of applications, the alliances have received a special attention from many scientists and researchers. There are applications of alliances in several areas such as bioinformatics, distributed computing, web communities, social networks, data clustering, business, etc.

Several alliance numbers have been defined and a huge number of theoretical (algorithmic and computational) results are obtained for various graph classes. In this paper, we present a survey with the results obtained about alliances, mainly in the defensive alliances. Also, we give some results and algorithms about alliance numbers for two graph classes, sun graphs and caterpillar graphs.

Keywords: alliance, sun graphs, caterpillar graphs, domination.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Notación y terminología	4
1.2. Objetivos del trabajo	4
2. Alianzas Defensivas	6
2.1. Concepto de alianza defensiva	6
2.2. Otros tipos de alianzas	8
3. Resultados previos	9
3.1. Estudio de los números de alianza para varias clases de grafos	9
3.1.1. Grafos Generales	9
3.1.2. Caminos	10
3.1.3. Ciclos	11
3.1.4. Grafos Completos	12
3.1.5. Grafos Bipartidos	13
3.1.6. Árboles	14
3.1.7. Doble Estrella	14
3.1.8. Grafos Regulares	15
3.1.9. Grafo de Aristas (Line Graph)	16
3.2. Cotas Inferiores	17
3.2.1. Grafos Generales	17
3.2.2. Grafos Bipartidos	17
3.2.3. Árboles	18
3.2.4. Grafos Regulares	19
3.2.5. Grafos Planares	19
3.3. Cotas Superiores	20
3.3.1. Grafos Generales	20
3.3.2. Grafos Bipartidos	21

3.3.3. Árboles	21
3.4. Complejidad	23
4. Grafos tipo <i>Orugas</i>	30
4.1. Algoritmo para dominación total en Orugas	30
4.2. Algoritmo para alianza global en Orugas	33
5. Grafos tipo <i>Soles</i>	36
5.1. Alianza Global en Soles	37
5.2. Algoritmo en grafos Soles	38
Conclusiones	51
Bibliografía	52

Capítulo 1

Introducción

La palabra *alianza* significa vínculo o conexión entre individuos, familias o estados. En el día a día encontramos distintas variedades de alianzas, cada una con sus propiedades y sus objetivos, por ejemplo:

- Alianzas de estados en situaciones de guerra, en economía o para otros intereses comunes.
- Alianzas de diferentes partidos políticos.
- Alianzas de personas que se unen por algún tipo de relación.
- Alianzas de empresas con intereses económicos comunes.

Inspirados por las alianzas entre naciones en situaciones de guerra, las alianzas en grafos fueron definidas por primera vez por Hedetniemi et al. [24]. Asumiendo que las naciones están representadas por los vértices del grafo, y que las aristas son las posibles relaciones (de amistad o enemistad) entre las naciones, definieron una alianza como un conjunto de vértices de un grafo de modo que cada vértice tenga tantos vértices adyacentes dentro del grupo aliado, contando con él mismo, como fuera de la alianza. Con otras palabras, cada nación en una alianza tiene al menos tantos amigos en la alianza como enemigos fuera de ella. Siguiendo esta terminología militar, podemos pensar que un vértice que esté en un conjunto aliado es capaz de defenderse a sí mismo o a cualquiera de sus aliados vecinos de un posible ataque de los vértices que estén fuera de la alianza. Es por eso que a este tipo de alianza se le denomine *alianza defensiva*, que es la que trataremos en este documento.

Dentro del contexto de seguridad nacional, se definieron otros tipos de alianza como por ejemplo alianzas ofensivas[16], alianzas duales o poderosas[4], alianzas seguras[6] o alianzas en grafos dirigidos[26].

Además de la alianza de naciones en estado guerra, existen más aplicaciones para la alianza en grafos, como las expuestas a continuación.

Haynes et al. [22] estudiaron las características estructurales de una clase de biomoléculas en el campo de la bioinformática involucrando invariantes de grafos (un invariante de un grafo G es un número asociado con G que tiene el mismo valor para cualquier grafo que sea isomorfo con él) basadas en números de dominación. De hecho, estudiaron la aplicación de grafos en el análisis de la estructura del ARN secundario. Utilizaron árboles para representar el diseño del ARN secundario. Específicamente, utilizaron cinco parámetros de dominación, incluido el número de alianza defensiva global, que son muy susceptibles a cambios estructurales en árboles pequeños, identificando que los árboles de orden siete y ocho son similares a la estructura del ARN. Con este estudio, se muestra que los invariantes de grafos, utilizados en la optimización de redes informáticas y eléctricas, son útiles y sirven como una herramienta interesante para la genómica, campo dentro de la biología molecular que estudia los genomas, y la proteómica, campo que estudia las proteínas.

En computación distribuida, uno de los problemas centrales es cómo lidiar con fallas. Flocchini et al. [19], Peleg [27], Srimani y Xu [31][33] estudiaron cómo evitar dichas fallas en la computación distribuida y en redes de comunicación. En general, un sistema distribuido se representa mediante un grafo donde los vértices representan los procesadores y las aristas corresponden a diferentes comunicaciones entre ellos. Por lo tanto, al usar el *proceso de votación por mayoría local* en grafos (LMP por sus siglas en inglés, Local Majority Vote), los procesadores se dividen en dos alianzas. Además, Srimani y Xu [31][33] diseñaron algoritmos para alianzas globales defensivas y ofensivas en un determinado grafo arbitrario que solucionaban este problema de fallas en computación distribuida.

Flake et al. [18] definieron una comunidad en la web como un conjunto de páginas web que vinculan (en cualquier dirección) a más páginas web en la comunidad que a páginas fuera de la comunidad. Con esta definición, las alianzas defensivas representan exactamente el modelo matemático de tales comunidades web.

Kim y Liu [25], Szabö y Czàrà̀n [32] han estudiado alianzas defensivas en generalizaciones del juego *Piedra, papel o tijera*, donde tenemos seis especies que interactúan

de manera cíclica, es decir, E1 vence a E2 que vence a E3 que vence a E4 que vence a E5 que vence a E6 que vence a E1.

Las alianzas también se utilizan en las redes comerciales y sociales para lograr objetivos comunes por parte de los socios. En este contexto, Dickson y Weaver [12] estudiaron la interacción entre el tamaño de la empresa y el nivel de I + D nacional para determinar si sería interesante para una PYME (pequeña y mediana empresa) formar una alianza estratégica.

Además, Chen y Chen [9] investigaron las alianzas estratégicas entre organizaciones para mostrar qué tipo de recursos se deben compartir y cómo se deben dividir entre los socios.

En situaciones reales, las alianzas no se determinan por el número de aliados, sino por el poder económico de la nación, su tamaño, las condiciones geográficas o la efectividad de sus fuerzas entre otros. Estos factores se pueden modelar mediante aristas ponderadas donde el peso de cada arista representa la cantidad de apoyo entre las dos naciones representadas por los vértices unidos por ella.

Una alianza defensiva en un grafo con aristas ponderadas es un conjunto de vértices tal que para cada vértice en la alianza, la suma de los pesos de sus aristas dentro de la alianza es al menos tan grande como la suma de los pesos de sus aristas fuera de la alianza.

En general, este concepto de alianza se suele usar para buscar semejanzas entre un grupo de objetos. Por ejemplo, suponemos que los vértices en un grafo son objetos que queremos agrupar entre sí y las aristas definen la propiedad común que ambos objetos comparten. Luego, usando la definición anterior de alianza defensiva ponderada, decimos que la alianza es un conjunto de objetos tal que la semejanza de los objetos dentro de la alianza son más que la semejanza fuera de ella[21].

El problema para encontrar automáticamente grupos de objetos similares surge de estudios tales como reconocimiento de patrones, visión artificial, inteligencia artificial, ciencias sociales y del comportamiento, ciencias de la vida, ciencias de la tierra, medicina y teoría de la información[1]. Esta partición de un conjunto de objetos no es una tarea trivial, lo que se demuestra por la inmensa cantidad de literatura existente que se centra en este problema, y los métodos desarrollados hoy en día resuelven problemas específicos, pero no de carácter general.

Uno de los problemas que se estudiará en este trabajo es el de calcular el mínimo cardinal de las alianzas de un grafo; a este parámetro se le denomina número de

alianza, y este problema pertenece a la clase *NP Dura* [7, 17, 21]. Además, se estudiarán las cotas inferiores y superiores del número de alianza global para distintos tipos de grafos en función del orden y el grado máximo de estos.

1.1. Notación y terminología

Primero vamos a definir varios conceptos previos, y definiremos la notación utilizada de aquí en adelante.

Definiremos un grafo simple $G = (V, A)$ de orden n , $|V| = n$, y de tamaño m , $|A| = m$. Y diremos que el subgrafo inducido por el conjunto $X \subset V$ lo denotamos como $\langle X \rangle$.

Para un vértice cualquiera $v \in V$, denotamos como $N(v) = \{u : uv \in A\}$ al conjunto abierto de vecinos de v . El conjunto cerrado de vecinos será $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Para un subconjunto no vacío $X \subset V$, definimos el conjunto abierto de vecinos como $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v)$ y el conjunto cerrado de vecinos $N[X] = N(X) \cup X$.

La *frontera* de un conjunto $S \subseteq V$ es definido como el conjunto de vértices que estén a distancia uno de S , es decir, $\partial(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) - S$.

Por último vamos a definir el concepto de dominación en grafos, necesario para entender las alianzas defensivas.

El subconjunto $X \subset V$ es un conjunto dominante si todo vértice que no pertenece a X es adyacente a un vértice de X , es decir, si $N[X] = V$; y decimos que X es un conjunto dominante total si es dominante y no tiene vértices aislados, es decir, si $N(X) = V$. El número de dominación $\gamma(G)$ es el cardinal del menor conjunto dominante de G , y el número de dominación total $\gamma_t(G)$ es el cardinal del menor conjunto dominante total de G .

1.2. Objetivos del trabajo

Motivados por lo expuesto anteriormente, este proyecto persigue como objetivo la elaboración de un artículo de tipo survey en el que se recopilen aquellos resultados más relevantes sobre el concepto de alianza y sus variantes. Además, se estudiarán

los parámetros más importantes de dominación y alianza para clases especiales de grafos.

Este estudio se ha efectuado desde los puntos de vista algorítmico y combinatorio, obteniendo cotas ajustadas del número de alianza global para las cuales no existían resultados previos en la literatura científica.

Capítulo 2

Alianzas Defensivas

En este trabajo estudiaremos principalmente alianzas defensivas, aunque también veremos alianzas ofensivas, pero sin profundizar. Por esto, llamaremos a las *alianzas defensivas* simplemente *alianzas*.

2.1. Concepto de alianza defensiva

En esta sección se va a estudiar una serie de conceptos relacionados con las alianzas defensivas.

Se dice que un subconjunto no vacío de vértices $S \subset V$ es una *alianza defensiva* si para cada $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$. En este caso decimos que cada vértice de S *se defiende* de un posible ataque de los vértices de $V - S$. Una *alianza defensiva* es *fuerte* si para cada $v \in S$, $|N[v] \cap S| > |N(v) \cap (V - S)|$. En este caso se dice que cada vértice de S es *fuertemente defensivo*.

Dos vértices cualesquiera u, v de una alianza defensiva S son llamados *aliados* con respecto a S ; y decimos que u y v están *aliados*.

Decimos que una alianza (fuerte) S es *crítica* si no hay ningún subconjunto de S que sea una alianza (fuerte).

El *número de alianza* $a(G)$ es el cardinal mínimo de las alianzas críticas en G .

$$a(G) = \min\{|S| : S \text{ es una alianza crítica en } G\}$$

El *número de alianza fuerte* $\hat{a}(G)$ es el cardinal mínimo de las alianzas críticas en

G.

$$\hat{a}(G) = \min\{|S| : S \text{ es una alianza fuerte crítica en } G\}$$

Una alianza S se dice que es *global* si ésta afecta a cada vértice en $V - S$, es decir, que cada vértice en $V - S$ es vecino de al menos un miembro de la alianza S . Nótese que en este caso S es un conjunto dominante.

El *número global de alianza* $\gamma_a(G)$ es el cardinal mínimo de todas las alianzas globales en G .

De manera análoga, el número global de alianza fuerte $\gamma_{\hat{a}}(G)$ es el cardinal mínimo de todas de las alianzas fuertes globales en G .

El conjunto de vértices de cualquier grafo es una alianza global, así todo grafo tiene un número global de alianza. Nótese que una alianza global de cardinal mínimo no es necesariamente una alianza crítica, y una alianza crítica no es necesariamente un conjunto dominante.

Cualquier alianza S en un grafo G induce un subgrafo conexo de G [24]. Esto es porque cualquier componente de un subgrafo inducido $\langle S \rangle$ es una alianza estrictamente menor. Sin embargo, para una alianza global esto no es necesariamente cierto. Por ejemplo, los vértices extremos de un camino P_4 forman una alianza global.

Nos referiremos al mínimo conjunto dominante de G como $\gamma(G) - set$, y a la mínima alianza global de G como $\gamma_a(G) - set$ ($\gamma_{\hat{a}}(G) - set$ si es la mínima alianza global fuerte)

En el contexto de redes informáticas, un conjunto dominante S representa un conjunto de nodos, donde cada uno tiene una capacidad de servicio, como una gran base de datos, y los nodos que requieran un servicio puede obtenerlo accediendo a otro nodo que esté a distancia 1 como mucho. Sin embargo, si todos los nodos en $V - S$ que son adyacentes a un nodo $v \in S$ requieren acceso de manera simultánea al recurso de v , entonces el nodo v podría no ser capaz de proporcionar tales servicios. Pero si S es una alianza global, entonces los vecinos de $v \in S$ deberían ser suficientes para satisfacer (en distancia 2) las simultáneas demandas de los vecinos de $v \in V - S$.

Porque una alianza fuerte global es una alianza global, y una alianza global es tanto una alianza como un conjunto dominante.

2.2. Otros tipos de alianzas

Además de las alianzas defensivas, como hemos mencionado en la introducción, existen otros tipos de alianzas:

- Alianzas ofensivas [16]: Un conjunto no vacío de vértices $S \subseteq V$ es llamado una alianza ofensiva si y solo si para cada $v \in \partial(S)$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$. Podemos decir que cada vértice en $\partial(S)$ es vulnerable a un posible ataque por los vértices de S .
- Alianzas duales [5]: Una alianza que es a la vez ofensiva y defensiva se llama alianza dual, y puede ser caracterizada brevemente como un conjunto no vacío de vértices de S tal que para cada $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$.

Capítulo 3

Resultados previos

Este capítulo es una recopilación de diversos resultados sobre algunos de los parámetros más importantes en las alianzas defensivas como son: el número de alianza, el número de alianza fuerte, el número de alianza global y el número de alianza global fuerte para distintos tipos de grafos, como pueden ser grafos generales, grafos completos, árboles, caminos, grafos planares o grafos periplanos.

Además, también se mencionarán resultados en la literatura sobre la complejidad de los problemas de obtención de alianzas defensivas globales de cardinal mínimo.

3.1. Estudio de los números de alianza para varias clases de grafos

En esta sección nos vamos a centrar en la relación entre los parámetros más significativos de las alianzas defensivas para diversos tipos de grafos.

3.1.1. Grafos Generales

Sea $G = (V, A)$ un grafo general de orden n tenemos las siguientes relaciones entre el número de alianza global (fuerte) y el número de dominación dada por Haynes et al. [23].

Lema 3.1. *Para cualquier grafo G con $\delta(G) \geq 2$, tenemos que $\gamma_t(G) \leq \gamma_a(G)$. Por otro lado, si $\Delta(G) \leq 3$, entonces, $\gamma_t(G) = \gamma_a(G)$.*

En un grafo $G = (V, A)$ un vértice $v \in V$ se dice que es aislado si tiene grado cero, es decir, no tiene ningún vecino.

Lema 3.2. *Para cualquier grafo G que no tenga vértices aislados, $\gamma_t(G) \leq \gamma_a(G)$.*

Corolario 3.0.1. *Para cualquier grafo G de grado n , $\gamma_a(G) = n$, si y sólo si $G = \overline{K}_n$.*

3.1.2. Caminos

Un camino es una sucesión de vértices tal que de cada uno de sus vértices existe una arista hacia el vértice sucesor.



Figura 3.1: Ejemplo de un camino P_8

Hedetniemi et al. [24] mostraron que en cualquier camino $P_n = (V, A)$ el número de alianza $a(P_n) = 1$ y el número de alianza global $\widehat{a}(P_n) = 2$

Para el parámetro de dominación total tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *Sea P_n un camino de orden n ,*

- $\gamma_t(P_n) = 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, si $n \equiv 0$ (mód 4).
- $\gamma_t(P_n) = 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$, si $n \equiv 1$ (mód 4).
- $\gamma_t(P_n) = 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2$, si $n \equiv 2, 3$ (mód 4).

Además, Haynes et al. [23] dieron la siguiente relación entre el número de alianza global (fuerte) y el de dominación en un camino de orden n .

Proposición 3.2. *Si $n \geq 2$, entonces $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n)$, menos cuando $n \equiv 2$ (mód 4), en este caso, $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n) - 1$.*

Demostración. Sea $T = P_n$. Como $\Delta(T) \leq 2$, todos los conjuntos de dominación total de T son también alianzas globales de T , y por tanto, $\gamma_a(T) \leq \gamma_t(T)$. Suponemos que $n \equiv 2$ (mód 4). Si v es un vértice final de T , entonces o $n = 2$, en cuyo caso $\gamma_a(T) = 1 = \gamma_t(T) - 1$, o $n \geq 6$, en cuyo caso $\gamma_a(T) \leq |\{v\}| + \gamma_t(T - N[v]) =$

$1 + \gamma_t(P_{n-2}) = \frac{n}{2} = \gamma_t(T) - 1$. Por tanto, $\gamma_a(T) \leq \gamma_t(T)$ y si $n \equiv 2 \pmod{4}$, entonces $\gamma_a(T) = \gamma_t(T) - 1$.

Por otro lado, sea A un $\gamma_a(T)$ -set. Entonces, A es un conjunto dominante de T . Si el subgrafo $\langle A \rangle$ inducido por A contiene un v3rtice aislado, entonces ese v3rtice debe ser un v3rtice final de T . Por tanto, $\langle A \rangle$ contiene como mucho dos v3rtices aislados.

- Si $\langle A \rangle$ no contiene ning3n v3rtice aislado, entonces A es un conjunto de dominaci3n total, y, de esta manera, $\gamma_a(T) \leq |A|$.
- Si $\langle A \rangle$ contiene solamente un v3rtice aislado, entonces $A - \{v\}$ es un conjunto de dominaci3n total de $T - N[v] = P_{n-2}$, y, por tanto, $\gamma_t(P_{n-2}) \leq |A| - 1$. Si decimos que $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, entonces $\gamma_t(T) = \gamma_t(P_{n-2}) + 1 \leq |A|$, mientras que si $n \equiv 2 \pmod{4}$, entonces $\gamma_t(T) = \gamma_t(P_{n-2}) + 2 \leq |A| + 1$.
- Si $\langle A \rangle$ contiene dos v3rtices aislados u y v , entonces o $T = P_4$, en cuyo caso $\gamma_t(T) = 2 = |A|$, o $|A| \geq 4$, en cuyo caso, $A - \{u, v\}$ es un conjunto de dominaci3n total de $T - N[u] - N[v] = P_{n-4}$. Luego, $\gamma_t(P_{n-4}) \leq |A| - 2$, por lo que, $\gamma_t(T) = \gamma_t(P_{n-4}) + 2 \leq |A|$. Como $|A| = \gamma_a(T)$, hemos demostrado que $\gamma_a(T) \geq \gamma_t(T)$, menos cuando $n \equiv 2 \pmod{4}$, en este caso $\gamma_a(T) \geq \gamma_t(T) - 1$.

□

Proposici3n 3.3. Si $n \geq 3$ entonces $\gamma_{\bar{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$.

3.1.3. Ciclos

Un grafo ciclo es un camino que empieza y termina por el mismo v3rtice.

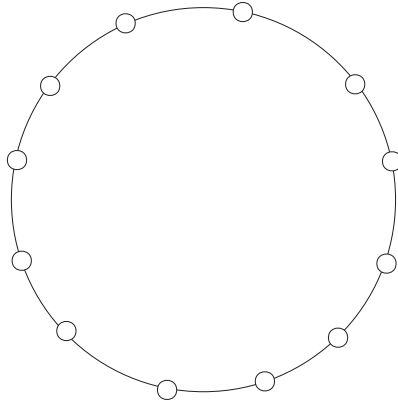


Figura 3.2: Ejemplo de un ciclo C_{12}

Hedetniemi et al. [24] mostraron la siguiente relación entre el número de alianza y el número de alianza fuerte para un grafo ciclo C_n , $a(C_n) = \widehat{a}(C_n) = 2$.

Sea C_n un ciclo de orden n , podemos afirmar la siguiente relación entre el número de alianza global (fuerte) y el de dominación[23].

Proposición 3.4. *Si $n \geq 3$ entonces $\gamma_a(C_n) = \gamma_{\widehat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n)$.*

- $\gamma_a(C_n) = \frac{n}{2}$, si $n = 4j$.
- $\gamma_a(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, si $n \neq 4j$.

3.1.4. Grafos Completos

Un grafo completo es un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por una arista. Un grafo completo de n vértices tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas y lo notamos K_n .

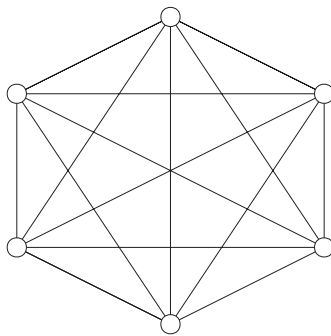


Figura 3.3: Ejemplo de un grafo completo K_6

Hedetniemi et al. [24] obtuvieron los siguientes valores exactos para el número de alianza y número de alianza fuerte en un grafo completo $K_n = (V, A)$ de orden n : $a(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\widehat{a}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$

Además, para el número de alianza global y número de alianza fuerte global Haynes et al. [23] dieron los siguientes resultados: $\gamma_a(K_n) = \gamma_{\widehat{a}}(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

3.1.5. Grafos Bipartidos

Un *grafo bipartido* es un grafo $G = (V, A)$ cuyos vértices pueden descomponerse en dos conjuntos V_1 y V_2 tales que no existe ninguna arista entre los vértices de la misma parte [11].

Si además cada uno de los vértices de V_1 está unidos a todos los de V_2 se dice que es un *grafo bipartido completo* y si $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$ lo denotamos $K_{r,s}$.

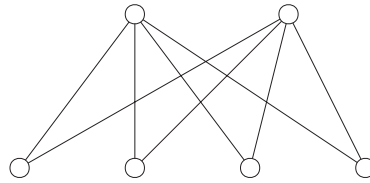


Figura 3.4: Ejemplo de un grafo bipartido completo $K_{2,4}$

Hedetniemi et al. [24] estudiaron el número de alianza y el número de alianza fuerte en grafos bipartidos completos $K_{r,s}$ mientras que Haynes et al. [23] estudiaron en estos grafos el número de alianza global y el número de alianza global fuerte, dando los resultados siguientes:

- I. $a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$
- II. $\widehat{a}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$
- III. $\gamma_a(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$
- IV. $\gamma_a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ si $r, s \geq 2$
- V. $\gamma_{\widehat{a}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$

3.1.6. Árboles

Un *árbol* $T = (V, A)$ es un grafo conexo y acíclico de orden n y tamaño m con $m = n - 1$. Llamaremos *hojas* a los vértices sin hijos.

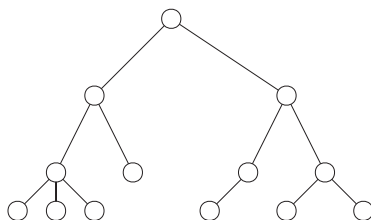


Figura 3.5: Ejemplo de un árbol

Hedetniemi et al. [24] dijeron lo siguiente sobre el número de alianza $a(T) = 1$, y sobre el número de alianza fuerte $\hat{a}(T) \leq n$.

3.1.7. Doble Estrella

Una doble estrella es un árbol que contiene exactamente dos vértices que no son hojas. Si uno de estos vértices centrales es adyacente a r hojas y el otro lo es a s hojas, entonces denotamos la doble estrella como $S_{r,s}$.

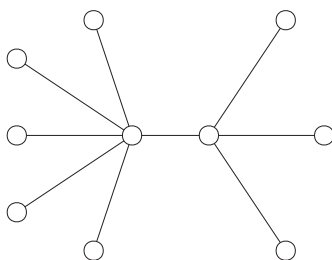


Figura 3.6: Ejemplo de una doble estrella $S_{5,3}$

Sobre el número de alianza global para las dobles estrellas podemos decir lo siguiente.

Proposición 3.5. Para $r, s \geq 1$, entonces $\gamma_a(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2$.

Proposición 3.6. Para $r, s \geq 1$, entonces $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 2$.

3.1.8. Grafos Regulares

Un grafo regular es un grafo donde cada vértice tiene el mismo grado. Un grafo regular con vértices de grado δ es llamado grafo δ -regular y lo notamos R_δ .

Un grafo 0-regular consiste en un grafo con vértices desconectados, un grafo 1-regular consiste en un grafo con aristas desconectadas, un grafo 2-regular consiste en un ciclo o unión disjunta de ciclos y un grafo 3-regular se conoce como grafo cúbico. Además, un grafo completo K_n es $(n-1)$ -regular.

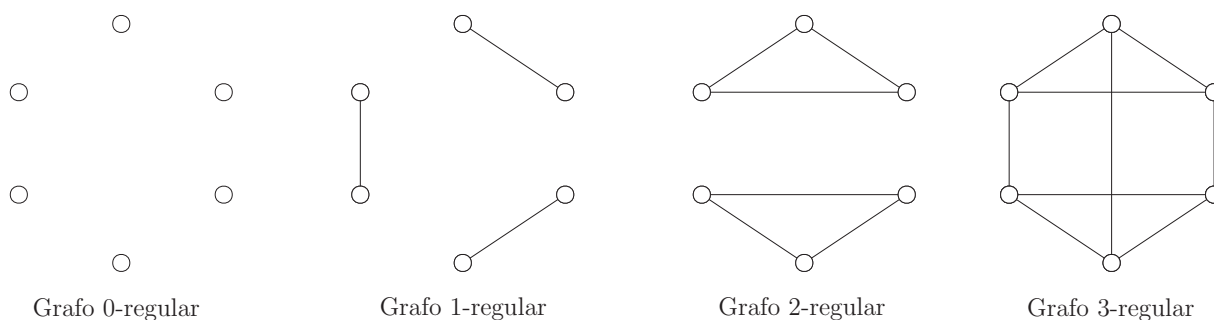


Figura 3.7

En la literatura existente sobre alianzas defensivas en grafos δ -regulares sólo hay resultados para δ pequeño. Araujo-Pardo y Barrière [2], Hedetniemi et al. [24] presentaron algunos valores exactos para el número de alianza y el número de alianza fuerte para grafos δ -regulares. Usando el concepto de cintura de un grafo $girth(G)$, que es la longitud del ciclo más corto contenido en dicho grafo, ellos obtuvieron los siguientes resultados:

- I. $a(R_1) = 1$ y $\widehat{a}(R_1) = 2$.
- II. $a(R_2) = \widehat{a}(R_2) = 2$.
- III. $a(R_3) = 2$ y $\widehat{a}(R_3) = girth(R_3)$.
- IV. $a(R_4) = \widehat{a}(R_4) = girth(R_4)$.
- V. $a(R_5) = girth(R_5)$.

3.1.9. Grafo de Aristas (Line Graph)

Un grafo de aristas $L(G)$ de un grafo no dirigido G es un grafo que representa las adyacencias entre las aristas de G .

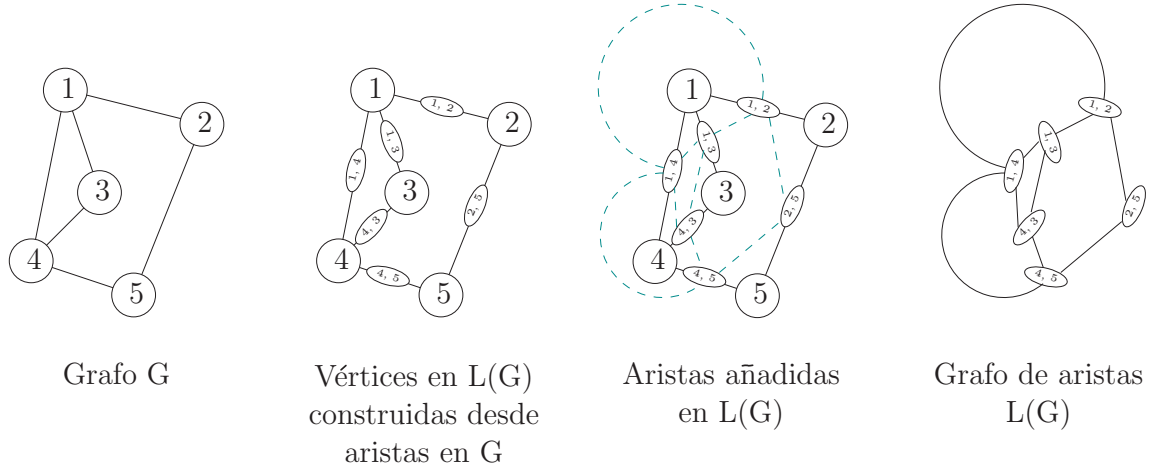


Figura 3.8: Construcción del grafo de aristas $L(G)$ de un grafo G

Definimos la *secuencia de grados* de un grafo G , a la lista de números que representa los grados de cada vértice de G .

Sea $G = (V, A)$ un grafo de tamaño m y cuya secuencia de grados es $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$, y sea $L(G)$ su grafo de aristas, podemos decir lo siguiente sobre los números de alianza de $L(G)$ estudiado por Sigarreta y Rodríguez [30], en términos del máximo grado de G (δ_1), su grado mínimo (δ_n) y su segundo grado mínimo (δ_{n-1}).

En general tenemos que:

$$\text{I. } \lceil \frac{\delta_n + \delta_{n-1} - 1}{2} \rceil \leq a(L(G)) \leq \delta_1$$

$$\text{II. } \lceil \frac{\delta_n + \delta_{n-1}}{2} \rceil \leq \hat{a}(L(G)) \leq \delta_1$$

Nótese que si $G = C_4$ entonces tenemos que $a(L(G)) = \hat{a}(L(G)) = 2$, y si $G = K_4$, entonces $\hat{a}(L(G)) = 3$.

Si G tiene un único vértice de grado máximo, entonces $a(L(G)) \leq \delta_1 - 1$. Además, si G es un grafo δ -regular con $\delta > 0$ entonces $a(L(G)) = \hat{a}(L(G)) = \delta$.

3.2. Cotas Inferiores

En esta sección se expondrán las cotas inferiores para los números de alianza global y alianza global fuerte de un grafo en base a su orden.

3.2.1. Grafos Generales

Haynes et al. [23] investigaron cotas para el número de alianza global y el número de alianza global fuerte en grafos generales, y obtuvieron los siguientes resultados.

Teorema 3.1. *Si G es un grafo de orden n , entonces $\gamma_a(G) \geq \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$ y $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \sqrt{n}$, estas cotas son ajustadas.*

Proposición 3.7. *Sea G un grafo de orden n , tenemos que $\gamma_a(G) \geq \frac{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}$.*

Por otro lado, Rodríguez-Velázquez y Sigarrreta [29] encontraron cotas para los parámetros mencionados anteriormente en términos del orden del grafo G , su grado máximo δ_1 y su radio espectral λ (que es el mayor valor propio de la matriz de adyacencia del grafo G). Los resultados que obtuvieron son los siguientes.

- I. $\gamma_a(G) \geq \lceil \frac{n}{\lambda+2} \rceil$
- II. $\gamma_a(G) \geq \lceil \frac{2n}{\delta_1+3} \rceil$
- III. $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \lceil \frac{n}{\lambda+1} \rceil$
- IV. $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \lceil \frac{n}{\lceil \frac{\delta_1}{2} \rceil + 1} \rceil$

3.2.2. Grafos Bipartidos

Haynes et al. [23] investigaron las alianzas defensivas para grafos bipartidos, $B = (V, A)$ de orden n , y obtuvieron las siguientes cotas para el número de alianza global y el número de alianza global fuerte.

Teorema 3.2. *Si G es un grafo bipartido de orden n y de grado máximo Δ , entonces $\gamma_a(B) \geq \frac{2n}{\Delta+3}$, esta cota es ajustada.*

Teorema 3.3. *Si G es un grafo bipartido de orden n y de grado máximo Δ , entonces $\gamma_{\hat{a}}(B) \geq \frac{2n}{\Delta+2}$, esta cota es ajustada.*

3.2.3. Árboles

Haynes et al. [23] estudiaron las cotas inferiores del número de alianza global y el número de alianza global fuerte para árboles, y estos fueron los resultados obtenidos.

Teorema 3.4. *Si T es un árbol de orden n , entonces $\gamma_a(T) \geq \frac{n+2}{4}$, esta cota es ajustada*

Demostración. Sea $\gamma_a(T) = k$, sea S un $\gamma_a(T)$ -set, la mínima alianza global de T , y sea $F = \langle S \rangle$ un subgrafo de T inducido por la alianza S .

Como F es un bosque, entonces:

$$\sum_{v \in S} \deg_F v = 2|E(F)| \leq 2(|V(F)| - 1) = 2(k - 1)$$

Por cada $v \in S$, $V - S$ contiene al menos $\deg_F v + 1$ vecinos de v . Por lo que tenemos:

$$n - k = |V - S| \leq \sum_{v \in S} (\deg_F v + 1) \leq 2(k - 1) + k = 3k - 2$$

Por tanto, $k \geq \frac{n+2}{4}$.

Demostrar que esta cota es ajustada se puede ver de la siguiente manera. Sea T un árbol obtenido a partir de un árbol F de orden k añadiendo $\deg_F v + 1$ nuevos vértices por cada vértice v de F y uniéndolos a v . Entonces, T tiene orden:

$$n = |V(F)| + \sum_{v \in V(F)} (\deg_F v + 1) = 2k + \sum_{v \in V(F)} \deg_F v = 2k + 2(k - 1) = 4k - 2.$$

Como $V(F)$ es una alianza global de T , $\gamma_a(T) \leq k = \frac{n+2}{4}$. Por tanto, $\gamma_a(T) = \frac{n+2}{4}$. \square

Teorema 3.5. *Si T es un árbol de orden n , entonces $\gamma_{\bar{a}}(T) \geq \frac{n+2}{3}$, esta cota es ajustada.*

Rodríguez-Velázquez y Sigarreta [28] dieron más cotas inferiores para estos parámetros imponiendo una condición, el número de componentes conexas de los subgrafos inducidos por las alianzas. Ellos mostraron que si S es una alianza global (respectivamente alianza global fuerte) en un árbol T tal que el subgrafo $\langle S \rangle$ tiene c componentes conexas, entonces $|S| \geq \lceil \frac{n+2c}{4} \rceil$ (respectivamente $|S| \geq \lceil \frac{n+2c}{3} \rceil$). Como

un caso particular de dichos resultados, si $\langle S \rangle$ es conexo, ellos obtuvieron las mismas cotas inferiores para $\gamma_a(T)$ y $\gamma_{\bar{a}}(T)$ que probaron Haynes et al. [23].

Por otro lado, Bouzefrane et al. [3], usando vértices soporte que son aquellos vértices adyacentes a un vértice hoja, demostraron el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea T un árbol de orden $n \geq 2$ con l hojas y s vértices soporte entonces $\gamma_a(T) \geq \frac{3n-l-s+4}{8}$, con igualdad si y solo si $T = P_2$ o $T \in \mathfrak{T}_1$ siendo \mathfrak{T}_1 una familia especial de árboles*

3.2.4. Grafos Regulares

Haynes et al. [23] dieron una cota para el número de alianza global en grafos 3-regulares y 4-regulares, $\gamma_a(G) \geq \frac{n}{3}$.

3.2.5. Grafos Planares

Un grafo $G = (V, A)$ es planar si admite una representación en el plano de tal forma que las aristas no se cortan, salvo en sus extremos. A dicha representación se le denomina grafo plano.

Un grafo planar admite varias representaciones planas, cada región puede ser la región exterior.

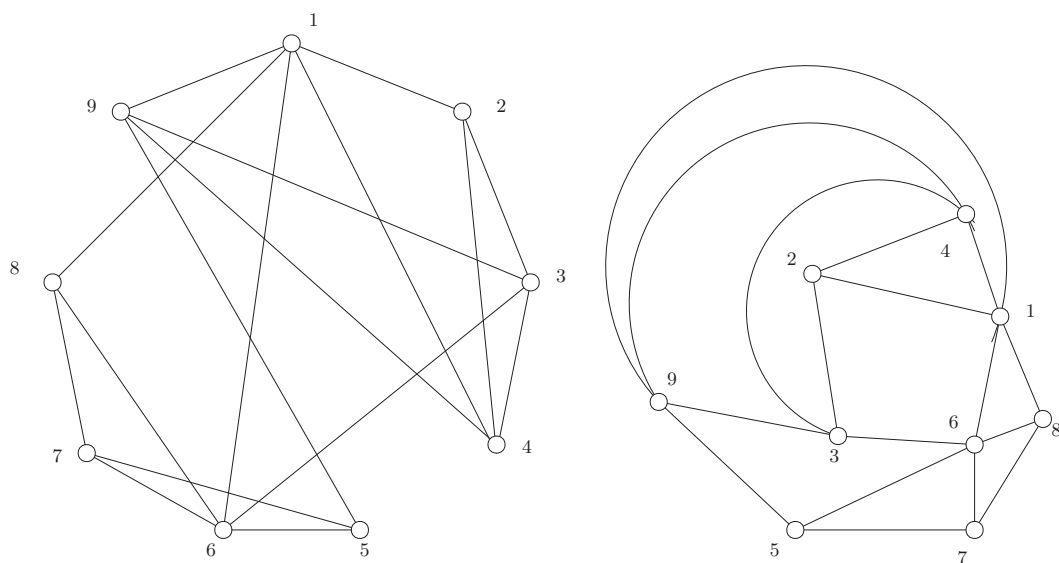


Figura 3.9: Grafo planar junto con su representación plana

Una alianza global S se dice que es un *imperio* si con respecto a una representación plana de G , cada componente conexa de $\langle S \rangle$ puede estar rodeada por una curva de Jordan cerrada, que es una “pared” que rodea una fortaleza, donde la región exterior de cada curva de Jordan contiene todos los vértices de \bar{S} . Enciso [13], Enciso y Dutton [14] usando este concepto mostraron que para un grafo planar $P = (V, A)$ donde $S \subseteq V$ es una alianza global de P , si S es un *imperio* entonces $|S| \geq \lceil \frac{n+6}{6} \rceil$; de manera similar, si S es una alianza global fuerte, $|S| \geq \lceil \frac{n+6}{5} \rceil$.

Además, Rodríguez-Velázquez y Sigarreta [28] presentaron las siguientes cotas ajustadas para el número de alianza global y el número de alianza global fuerte en grafos planares:

- I. If $n > 6$, entonces $\gamma_a(P) \geq \lceil \frac{n+12}{8} \rceil$
- II. If $n > 6$ y P es un grafo sin triángulos, entonces $\gamma_a(P) \geq \lceil \frac{n+8}{6} \rceil$
- III. If $n > 4$, entonces $\gamma_{\hat{a}}(P) \geq \lceil \frac{n+12}{7} \rceil$
- IV. If $n > 6$ y P es un grafo sin triángulos, entonces $\gamma_{\hat{a}}(P) \geq \lceil \frac{n+8}{5} \rceil$

Por otro lado, ellos probaron que si S es una alianza global en un grafo general G cuyo subgrafo $\langle S \rangle$ es un grafo planar conexo con f caras, entonces $|S| \geq \lceil \frac{n-2f+4}{3} \rceil$. Rodríguez-Velázquez y Sigarreta [28] también demostraron que para un grafo general G de orden n donde S es una alianza global tal que $|S| \geq 2$, si $\langle S \rangle$ es planar y si grado mínimo es al menos σ , entonces $|S| \geq \lceil \frac{\sigma-7+\sqrt{(\sigma-7)^2+4(12+n)}}{2} \rceil$; además, si $\langle S \rangle$ es un grafo sin triángulos, entonces $|S| \geq \lceil \frac{\sigma-5+\sqrt{(\sigma-5)^2+4(8+n)}}{2} \rceil$.

3.3. Cotas Superiores

En esta sección se expondrán los cotas superiores para los números de alianza global y alianza global fuerte de un grafo en base a su orden.

3.3.1. Grafos Generales

Para grafos generales tenemos las siguientes cotas superiores.

Proposición 3.8. *Para cualquier grafo G de grado n , que no tenga vértices aislados y con grado mínimo δ_n ,*

$$\text{I. } \gamma_a(G) \leq n - \lceil \frac{\delta_n}{2} \rceil,$$

$$\text{II. } \gamma_{\widehat{a}}(G) \leq n - \lfloor \frac{\delta_n}{2} \rfloor,$$

Esta cota es ajustada.

3.3.2. Grafos Bipartidos

Favaron [15] dio una cota al número de alianza global y al número de alianza global fuerte utilizando el número de dominación independiente i , que es el cardinal del menor conjunto dominante independiente de G . Un conjunto independiente es un conjunto de vértices en un grafo tal que ninguno de sus vértices es adyacente a otro, si además ese conjunto es dominante se dice que es un conjunto dominante independiente.

Siendo $B = (V, A)$ un grafo bipartido, él obtuvo cotas de la forma $i(B) \leq f(\gamma_a(B))$ y $i(B) \leq g(\gamma_{\widehat{a}}(B))$ para familias especiales de grafos bipartidos, donde f y g son funciones.

3.3.3. Árboles

Para establecer una cota superior ajustada del número de alianza global para árboles necesitamos definir la siguiente notación. Para un vértice v que sea la raíz de un árbol T , diremos que $C(v)$ denota el conjunto de hijos de v , y $D(v)$, el conjunto de descendientes de v ; además diremos que $D[v] = D(v) \cup \{v\}$. Haynes et al. [23] introdujeron para alcanzar esta cota una familia \mathfrak{T}_1 de árboles como la siguiente: Siendo $T = P_5$, $T = K_{1,4}$ o T el árbol obtenido de $tK_{1,4}$ (la unión disjunta de t copias de $K_{1,4}$), añadiendo $t - 1$ aristas entre hojas de esas copias de $K_{1,4}$ de tal manera que el centro de cada $K_{1,4}$ sea adyacente a exactamente tres hojas de T . \mathfrak{T}_1 será la familia de todos esos árboles T .

Teorema 3.7. *Si T es un árbol de orden $n \geq 4$, entonces $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$, con igualdad si y solo si $T \in \mathfrak{T}_1$.*

Para establecer una cota superior ajustada del número de alianza global fuerte para árboles introdujeron una familia \mathfrak{T}_2 de árboles como la siguiente: Siendo T el árbol obtenido de $tK_{1,3}$ (la unión disjunta de $t \geq 1$ copias de $K_{1,3}$), añadiendo $t - 1$

aristas entre hojas de esas copias de $K_{1,3}$ de tal manera que el centro de cada $K_{1,3}$ sea adyacente al menos a una hoja de T . \mathfrak{T}_2 será la familia de todos esos árboles T .

Teorema 3.8. *Si T es un árbol de orden $n \geq 3$, entonces $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{4}$, con igualdad si y solo si $T \in \mathfrak{T}_2$.*

Por otro lado, Chen y Chee [10] definieron otra familia ξ de árboles tal que cada árbol T es una estrella de orden impar, o T es el árbol obtenido de $K_{1,2t_1}, K_{1,2t_2}, \dots, K_{1,2t_s}$ y tP_4 (la unión disjunta de t copias de P_4) añadiendo $s+t-1$ aristas entre las hojas de estas estrellas y caminos de tal manera que el centro de cada estrella $K_{1,2t_i}$ es adyacente al menos a $1+t_i$ hojas en T y cada hoja de cada copia de P_4 es incidente al menos a una nueva arista, donde $t \geq 0, s \geq 2$ y $t_i \geq 2$ para $i = 1, 2, \dots, s$. Nótese que cada vértice soporte de cada árbol en ξ debe ser adyacente al menos a tres hojas.

Teorema 3.9. *Sea un árbol T de orden $n \geq 3$ y con s vértices soporte, entonces $\gamma_a(T) \leq \frac{n+s}{2}$, con igualdad si $T \in \xi$.*

Usando el número independiente $\beta(T)$, que es el máximo cardinal de un conjunto independiente en T , Chellali y Haynes [8] dieron las siguientes cotas superiores ajustadas para el número de alianza global y para el número de alianza global fuerte.

Teorema 3.10. *Para cualquier árbol T , $\gamma_a(T) \leq \beta(T)$.*

Además, también obtuvieron una cota para el número de alianza global usando el número de hojas del árbol.

Proposición 3.9. *Sea T un árbol con l hojas, entonces $\gamma_a(T) \leq \frac{n+l-1}{2}$.*

Nótese que para $l \leq \frac{n}{5}$ esta cota es una mejora de la dada por Haynes et al. [23] ($\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$ para $n \geq 4$).

Para el número de alianza global fuerte dieron las siguientes cotas.

Teorema 3.11. *Para un árbol T de orden $n \geq 3$ y con s vértices soporte*

$$\text{I. } \gamma_a(T) \leq \frac{3\beta(T)-1}{2}$$

$$\text{II. } \gamma_a(T) \leq \beta(T) + s - 1$$

3.4. Complejidad

Cami et al. [7] estudiaron la complejidad computacional de tres problemas de optimización en alianzas globales, que son los que se exponen a continuación:

Alianza Global Defensiva (GDA, por sus siglas en inglés *Global Defensive Alliance*):

- *Dado:* Un grafo $G(V, A)$ y un entero positivo $K \leq |V|$
- *Pregunta:* ¿Hay una alianza global defensiva en G de tamaño K o menor?

Alianza Global Ofensiva (GOA, por sus siglas en inglés *Global Offensive Alliance*):

- *Dado:* Un grafo $G(V, A)$ y un entero positivo $K \leq |V|$
- *Pregunta:* ¿Hay una alianza global ofensiva en G de tamaño K o menor?

Alianza Global Dual (GPA, por sus siglas en inglés *Global Powerful Alliance*):

- *Dado:* Un grafo $G(V, A)$ y un entero positivo $K \leq |V|$
- *Pregunta:* ¿Hay una alianza global dual en G de tamaño K o menor?

Los problemas GDA, GOA y GPA pertenecen a la clase *NP*. Por tanto, Cami et al. [7] analizaron las transformaciones de instancias del problema de Dominación a instancias de estos tres problemas, siendo el problema de Dominación definido como:

Conjunto de Dominación (DS, por sus siglas en inglés *Dominating Set*):

- *Dado:* Un grafo $G(V, A)$ y un entero positivo $K \leq |V|$
- *Pregunta:* ¿Hay un conjunto de dominación en G de tamaño K o menor?

Teorema 3.12. [7] *GDA es un problema NP-Completo.*

Demostración. Sea $I = [G(V, E), K]$ una instancia de DS. Debemos construir una instancia $I' = [G'(V', E'), K']$ de GDA tal que G tiene un conjunto dominante de tamaño K o menor si y solo si G' tiene una alianza global defensiva de tamaño K' o menor.

Primero se describe un método para construir el grafo G' . Inicialmente tenemos $G' = G$. Entonces, por cada vértice no aislado $v_i \in V$ añadimos $d_G(v_i) - 1$ componentes $C_{i,1}, \dots, C_{i,d_G(v_i)-1}$ al grafo G' . Decimos que los componentes $C_{i,j}, 1 \leq j \leq d_G(v_i) - 1$, son “arraigados” al vértice v_i . Cada componente $C_{i,j}$ está formado por dos vértices y dos aristas de la siguiente manera:

$$C_{i,j} = (\{a_{i,j}, b_{i,j}\}, \{(v_i, a_{i,j}), (a_{i,j}, b_{i,j})\})$$

En otras palabras, el vértice $a_{i,j}$ del componente $C_{i,j}$ está conectado al vértice raíz v_i , además de a otros vértices $b_{i,j}$ de dicho componente. Siendo:

$$A_{v_i} = \{a_{i,j} | 1 \leq j \leq d(v_i) - 1\}, B_{v_i} = \{b_{i,j} | 1 \leq j \leq d(v_i) - 1\},$$

$$A_S = \bigcup_{v_i \in S} A_{v_i}, B_S = \bigcup_{v_i \in S} B_{v_i}$$

y

$$A = A_V, B = B_V$$

Podemos decir que el grafo G está definido de la siguiente manera:

$$V' = V \cup A \cup B,$$

$$E' = E \cup \left(\bigcup_{v_i \in V} \{(v_i, a_{i,j}), (a_{i,j}, b_{i,j}) | a_{i,j} \in A_{v_i}, b_{i,j} \in B_{v_i}\} \right).$$

A partir de ahora, nos referiremos a los vértices de los componentes $C_{i,j}$ como *vértices-componentes*, para distinguirlos de los vértices de G ; de manera análoga, las aristas de los componentes las denominaremos *aristas-componentes*.

Sea Q el número total de componentes $C_{i,j}$. Para completar la construcción de la instancia I' , tomamos $K' = K + Q$.

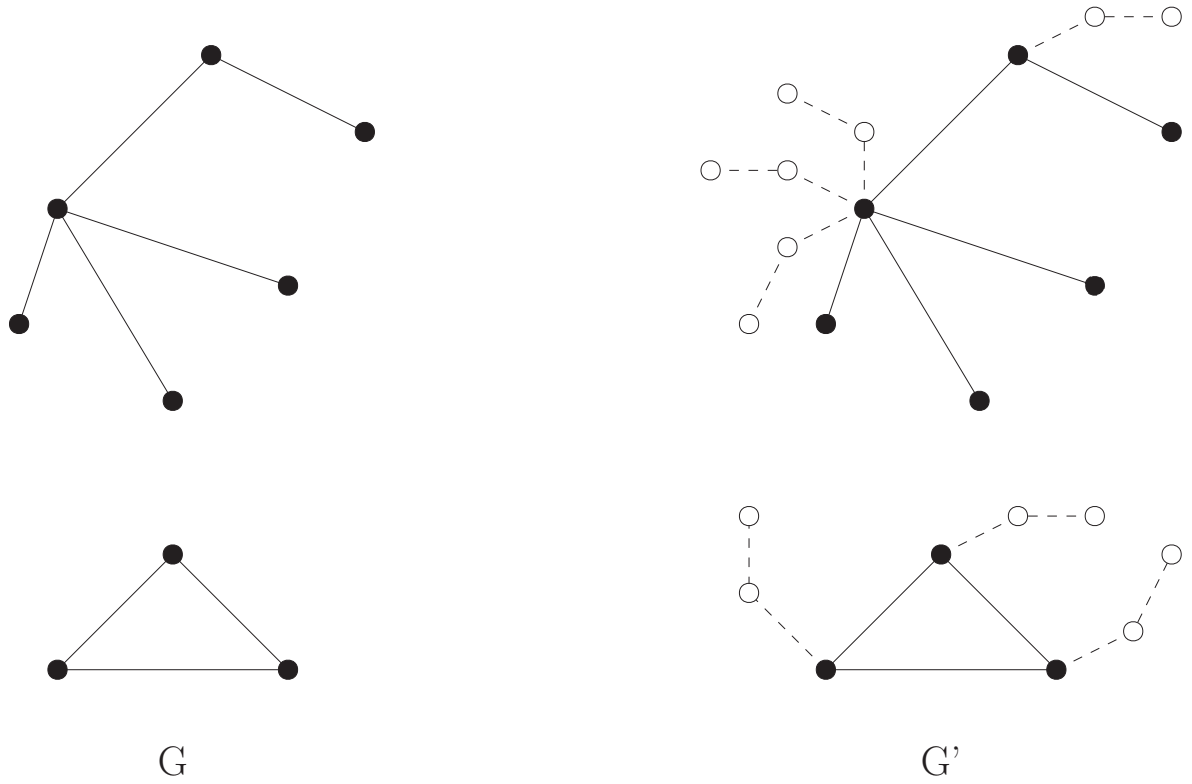


Figura 3.10: Ejemplo de un grafo obtenido mediante este procedimiento

En el ejemplo, los *vértices-componentes* están representados en blanco y las líneas discontinuas son las *aristas-componentes*

Nótese que:

$$Q = \sum_{v_i \in V} (d_G(v_i) - 1) = 2|E| - |V|$$

Por tanto, la construcción de G' se puede conseguir en tiempo lineal.

Queda por demostrar que G tiene un conjunto dominante de tamaño K o menor si y solo si G' tiene una alianza defensiva global de tamaño K' o menor.

Para ello, suponemos que $S \subseteq V$ es un conjunto dominante de G con $|S| \leq K$. Siendo,

$$S' = S \cup A_S \cup B_{V-S}.$$

Nótese que S es un subconjunto de S' . Además, por cada vértice $v_i \in S$, S' contiene todos los vértices $a_{i,1}, \dots, a_{i,d_G(v_i)-1}$, y por cada vértice $v_j \notin S$, S' contiene todos los vértices $b_{j,1}, \dots, b_{j,d_G(v_j)-1}$. Estas observaciones junto con el siguiente lema implican que I' es una instancia de GDA.

Lema 3.3. S' es una alianza global defensiva en G' con tamaño K' o menor

Demostración. S' contiene todos los vértices de S además de un vértice por cada componente $C_{i,j}$. Por tanto,

$$|S'| = |S| + Q \leq K + Q = K'.$$

Además, S' domina a V (ya que S domina a V y $S \subseteq S'$), y también domina a todos los componentes $C_{i,j}$ (ya que S' contiene exactamente un vértice por cada componente). Por consiguiente, S' es un conjunto dominante en G' .

Finalmente, S' es una alianza defensiva en G' . Para demostrar esto, primero vemos que cada vértice $v_i \in S' \cap V$, tiene exactamente $d_G(v_i) - 1$ vecinos $a_{i,1}, \dots, a_{i,d_G(v_i)-1}$ en el conjunto S' . Como v_i puede tener al menos $d_G(v_i)$ vecinos fuera de S' (esto sucede solo si todos los vecinos de v_i en V están fuera de S'), cada v_i cumple la propiedad de alianza defensiva. Además, cada vértice $a_{i,j} \in S'$ tiene exactamente un vecino dentro de S' (el vértice raíz v_i) y exactamente un vecino fuera (el vértice $b_{i,j}$), por lo que también satisface la propiedad de alianza defensiva. Finalmente, cada vértice $b_{i,j} \in S'$ tiene grado uno en G' , por lo tanto cumple la propiedad de alianza defensiva. \square

Por el contrario, ahora suponemos que S' es una alianza defensiva global en G' con K' o menos vértices. Necesitamos encontrar un conjunto $S \subseteq V$ de tamaño K o menor que forma un conjunto de dominación en G . Empezamos con la siguiente observación:

Observación 3.12.1. S' contiene al menos Q vértices-componentes.

Demostración. S' es un conjunto dominante de G' , así que contiene al menos un vértice por cada componente $C_{i,j}$ \square

Un corolario inmediato de la observación anterior es la siguiente:

$$|S' \cap V| \leq K' - Q = K.$$

Como el conjunto $S' \cap V$ es al menos de tamaño K , este conjunto puede ser considerado como un primer candidato para un conjunto dominante en G . Sin embargo, no es difícil ver que $S' \cap V$ no forma necesariamente un conjunto dominante en G . El problema es que es posible que exista un vértice $v_i \in (V' - S') \cap V$ que no tenga

ningún vecino en $S' \cap V$. La siguiente figura muestra un ejemplo en el que sucede esto:

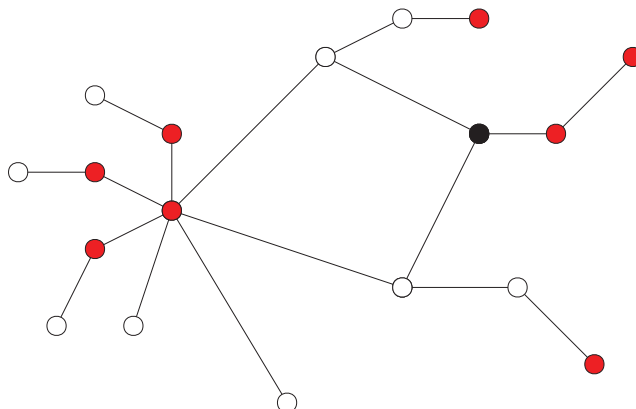


Figura 3.11: Un grafo G' , una alianza defensiva global S' en G' (vértices rojos) y un vértice que sólo tiene un vecino en S' con un vértice-componente (vértice negro)

Tal vértice v_i no estaría dominado por $S' \cap V$. En este caso, decimos que v_i es un *vértice-componente dominado*. Sea D' el conjunto de todos los vértices-componentes dominados, es decir:

$$D' = \{v_i \in (V' - S') \cap V \mid v_i \text{ no tiene ningun vecino en } V \cap S'\}.$$

Nótese que los vértices de D' son los únicos entre los vértices de V que no estarán dominados por $S' \cap V$. Por consiguiente, el conjunto $(S' \cup D') \cap V$ debe formar un conjunto dominante en G . El siguiente lema implica que $|S'| \leq K$.

Lema 3.4. S' contiene al menos $Q + |D'|$ vértices-componentes.

Demostración. Sea v_i un vértice cualquiera de D' . Debe existir un vértice $a_{i,j}$ tal que $a_{i,j} \in S'$ (porque S' es un conjunto dominante y v_i no tiene ningún vecino en $S' \cap V$). Ahora, el vértice $b_{i,j}$ debe estar también en S' , ya que si no la propiedad de alianza defensiva sería violada por $a_{i,j}$. Por tanto, para cada vértice $v_i \in D'$ existe al menos un componente $C_{i,j}$ con ambos vértices en S' . Por consiguiente, en total hay $|D'|$ componentes con ambos vértices contenidos en S' . Los restantes $Q - |D'|$ componentes, deben tener cada uno al menos un vértice en S porque S' es un conjunto dominante. Por tanto, el número de vértices-componentes en S' es al menos $2|D'| + Q - |D'|$, esto es, $Q + |D'|$. \square

Ahora tenemos:

$$S = (S' \cup D') \cap V.$$

Por el lema anterior, $|S| \leq K$. Como se argumentó antes, S es además un conjunto dominante en G . En consecuencia, I es una instancia de DS. Esto completa la demostración del teorema expuesto. \square

Teorema 3.13. *GOA es un problema NP-Completo.*

Demostración. La transformación que convierte una instancia $I = [G(V, A), K]$ de DS en una instancia $I' = [G'(V', A'), K']$ de GOA es exactamente el mismo que el empleado para el problema GDA. Vamos a probar que G tiene un conjunto dominante con K o menos vértices si y solo si G' tiene una alianza global ofensiva con K' o menos vértices.

Suponemos que $S \subseteq V$ es un conjunto dominante en G con $|S| \leq K$. Sea

$$S' = S \cup A.$$

Vamos a demostrar que S' forma una alianza global ofensiva en G' y que el tamaño de S' es K' o menor. En efecto, como en la demostración del lema 3.3, se puede mostrar que S' es un conjunto dominante en G' y que $|S'| \leq K'$. Queda por demostrar que S' es una alianza ofensiva en G' . Como S' es un conjunto dominante en G' , tenemos:

$$\delta(S') = V' - S' = (V - S) \cup B.$$

Sea $v' \in \delta(S')$. Si $v' \in B$, entonces $|N_{G'}[v'] \cap S'| = |N_{G'}[v'] \cap (V' - S')| = 1$, así que la condición de alianza defensiva se satisface. Por otro lado, si $v' \in (V - S)$, debe existir un vértice $w \in S$ tal que $(v', w) \in E$ (porque S es un conjunto dominante en G). Esto garantiza que $|N_{G'}[v'] \cap S'| \geq d_G(v')$ y $|N_{G'}[v'] \cap (V' - S')| \leq d_G(v')$, es decir, la propiedad de alianza ofensiva se satisface otra vez.

Por el contrario, ahora suponemos que S' es una alianza global ofensiva en G' con K' o menos vértices. Sea

$$S = S' \cap V.$$

Como S' es un conjunto dominante de G' , tenemos, como en la demostración del lema 3.4, que $|S| \leq K$. En este caso, S es además un conjunto dominante en G . De hecho, es v un vértice de $V - S$. Mostramos que debe existir otro vértice $w \in S$ tal que $(v, w) \in E$. Para ello, asumimos que no existe tal vértice. Entonces,

$|N_{G'}[v'] \cap (V' - S')| \geq d_G(v') + 1$, mientras que $|N_{G'}[v'] \cap S'| \leq d_G(v') - 1$ (con igualdad sólo si $A_v \subseteq S'$). Por lo tanto, la propiedad de alianza ofensiva sería violada por v . □

Capítulo 4

Grafos tipo *Orugas*

Un árbol $T = (V, A)$ es una *oruga* si existe un camino P de vértices tal que para todo $v \in V$ o está en P , o es adyacente a un vértice de P . Este camino se conoce como la *espina* de la oruga [20].

Definiremos vértice *pata* a todos los vértices de grado uno.

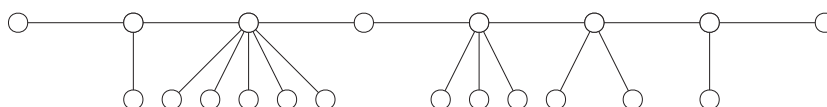


Figura 4.1: Ejemplo de un grafo oruga

4.1. Algoritmo para dominación total en Orugas

En esta sección vamos a exponer un algoritmo para hallar el conjunto dominante total de menor cardinal, que luego extenderemos para alianza global.

Algoritmo 4.1. Entrada: *Un grafo oruga.*

Salida: *Un conjunto dominante total X de cardinal mínimo.*

Paso 1: *Incluimos en X los vértices adyacentes a los vértices pata y escogemos un extremo del camino.*

Paso 2: *Si el primer vértice que pertenece a X no tiene ningún vecino en X , añadimos uno de ellos para garantizar la alianza.*

Paso 3: Analizamos el hueco que hay entre dos vértices consecutivos v_1 y v_2 de X , siendo z el número de vértices del hueco, de la siguiente forma:

- I. Si $z \equiv 0, 3 \pmod{4}$, entonces añadimos $\lfloor \frac{z}{2} \rfloor$ vértices a X de manera que el vecino por la izquierda de v_2 esté dentro del conjunto dominante, de esa forma garantizamos la alianza para v_2 .
- II. Si $z \equiv 1, 2 \pmod{4}$, entonces añadimos $2\lfloor \frac{z}{4} \rfloor$ vértices a X , en este caso no podemos garantizar la alianza para v_2 .

Paso 4: Si v_2 no tiene ningún vecino que pertenezca a X , añadimos a X el vecino derecho (o izquierdo dependiendo de hacia que lado nos movamos) de v_2 .

Paso 5: Volvemos al paso 2 con el siguiente hueco.

Paso 6: Repetimos el proceso empezando desde el extremo contrario al que lo hemos hecho, una vez tengamos ambos conjuntos dominantes elegimos el de menor cardinal.

Análisis de la Complejidad 4.1.1. Vamos a analizar la complejidad del algoritmo.

- Analizar los vértices con patas $\rightarrow O(n)$
- Analizar los huecos entre dos vértices $\rightarrow O(n)$

Coste total: $O(n)$

Ahora veremos un ejemplo para obtener un conjunto dominante X de cardinal mínimo en un grafo oruga.

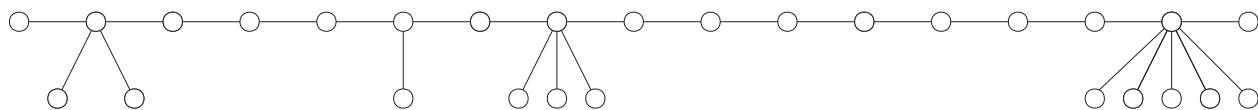


Figura 4.2: Este es el grafo que utilizaremos para el ejemplo

Incluimos en X los vértices que tengan un vecino pata.

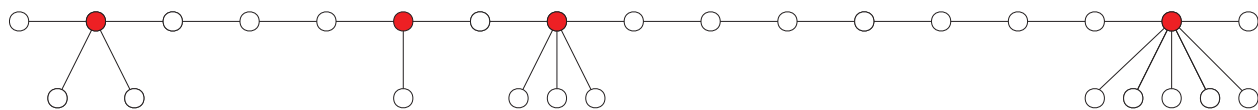


Figura 4.3: Paso 1

Elegimos ir de izquierda a derecha, como el primer vértice de X no es dominante añadimos su vecino a X , y analizamos el primer hueco.

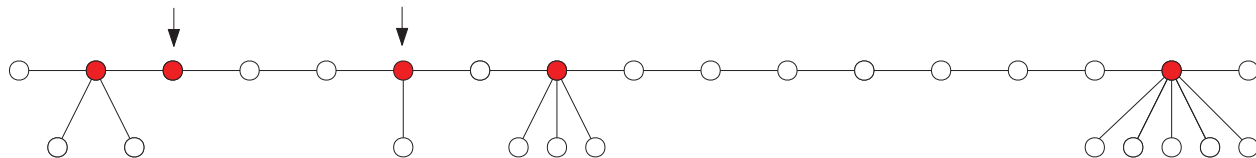


Figura 4.4: Paso 2

Como el hueco tiene $2 \equiv 2$ (mód 4) vértices, entonces no añadimos ningún vértice a X . Pero como v_2 no es dominante total, añadimos a X su vecino derecho. Pasamos al siguiente hueco.

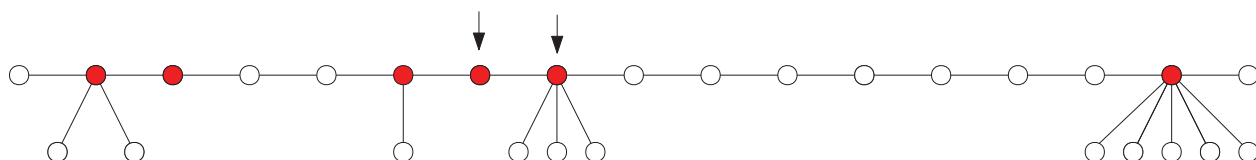


Figura 4.5: Paso 3

Como el hueco tiene $0 \equiv 0$ (mód 4) vértices, entonces no añadimos ningún vértice a X . Pasamos al siguiente hueco.

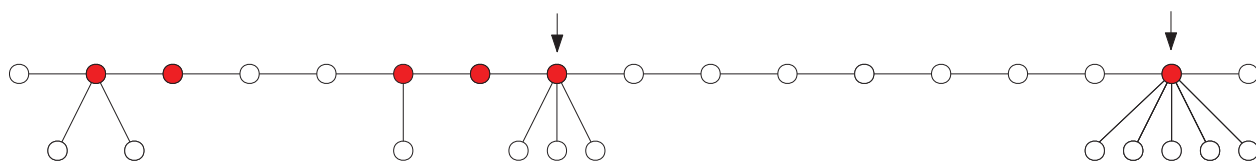


Figura 4.6: Paso 3

Como el hueco tiene $7 \equiv 3$ (mód 4) vértices, entonces añadimos 3 vértices a X de manera que el vecino por la izquierda de v_2 esté dentro del conjunto dominante, de esa forma garantizamos que v_2 sea dominante total. Como ya no quedan más huecos para analizar así quedará el conjunto dominante total de cardinal mínimo X .

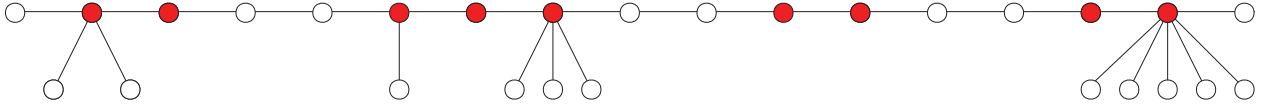


Figura 4.7: Resultado final

4.2. Algoritmo para alianza global en Orugas

El algoritmo anterior podemos aplicarlo para conseguir una alianza global S de cardinal mínimo, ya que alianza global y dominación total coinciden para la espina de la oruga, solo hay que hacer lo siguiente.

Algoritmo 4.2 (Corolario). **Entrada:** *Un grafo oruga.*

Salida: *Una alianza global S de cardinal mínimo.*

Paso 1: *Conseguir un conjunto dominante total de cardinal mínimo con el algoritmo expuesto anteriormente, ese será nuestro conjunto aliado S actual.*

Paso 2: *Para cada vértice v con patas actuaremos de la siguiente manera, dependiendo del número de patas h y si los vecinos son o no dominantes:*

- I. *Si los dos vecinos de v son dominantes, entonces habrá que añadir $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor - 1$ patas de v a S .*
- II. *Si solo un vecino de v es dominante, entonces habrá que añadir $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ patas de v a S*

Análisis de la Complejidad 4.2.1. *Vamos a analizar la complejidad del algoritmo.*

- *Analizar los vértices patas $\rightarrow O(n)$*

Coste total: $O(n)$

Ahora, vamos a continuar con el ejemplo anterior para conseguir un conjunto aliado S de cardinal mínimo. Tenemos que mirar solamente los vértices con vecinos patas. Iremos de izquierda a derecha.

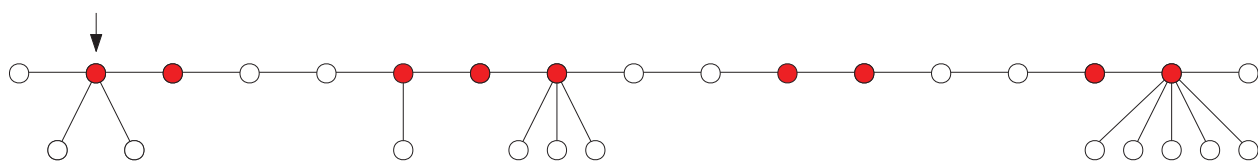


Figura 4.8: Paso 2

En este caso el vértice del camino tiene solo un vecino dominante y hay 2 patas, por lo que añadimos a S un vértice pata. Pasamos al siguiente vértice con patas.

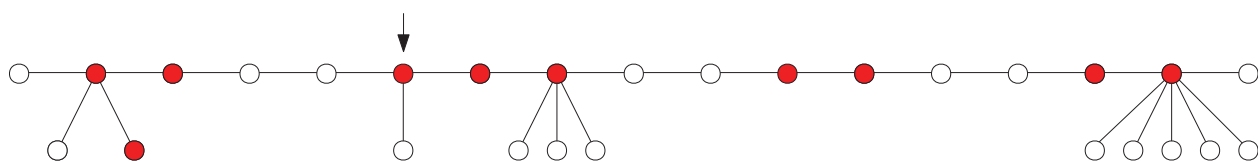


Figura 4.9: Paso 2

En este caso no habrá que añadir ningún vértice a S para garantizar la alianza global. Pasamos al siguiente vértice con patas.

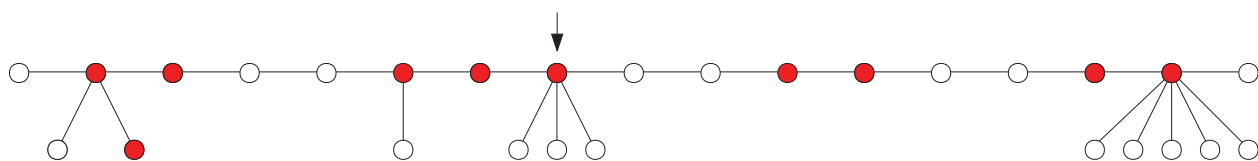


Figura 4.10: Paso 2

Como el vértice del camino tiene solo un vecino dominante y tenemos 3 patas, añadimos a S un vértice pata. Pasamos al siguiente vértice con patas.

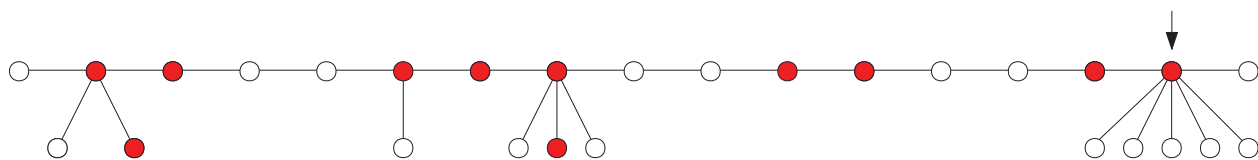


Figura 4.11: Paso 2

Ahora el vértice del camino tiene un vecino dominante y 5 patas, por lo que añadimos a S 2 vértices. Y como ya no hay más vértices con patas, así queda el conjunto aliado global de cardinal mínimo S .

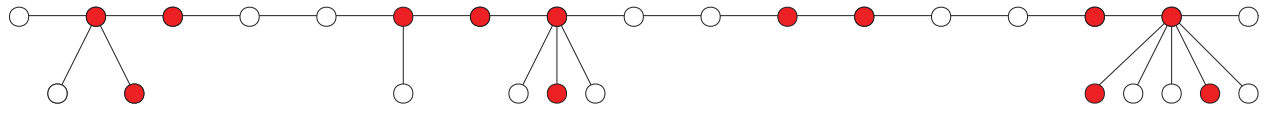


Figura 4.12: Resultado final

Capítulo 5

Grafos tipo *Soles*

Un grafo sol es un ciclo donde de cada vértice puede partir un camino de longitud k . Diremos que un grafo sol es regular si parte de todos los vértices del ciclo un camino de misma longitud, y lo denotaremos S_n^k donde n es el número de vértices del ciclo del grafo sol y k la longitud de los caminos que parten de cada uno de los vértices del ciclo.

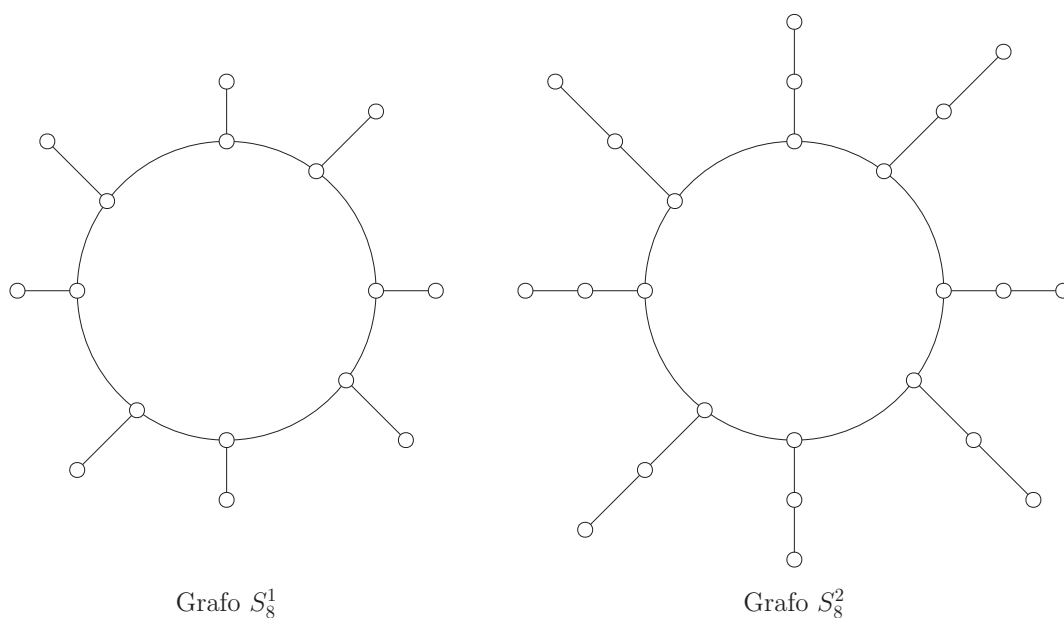


Figura 5.1: Grafos soles regulares

5.1. Alianza Global en Soles

Hemos estudiado el número de alianza global para este tipo de grafos S_n^k y se ha encontrado un valor exacto para este parámetro relacionado con los valores de n (número de vértices del ciclo) y k (longitud de los caminos que parten de cada vértice del ciclo), además, este valor coincide con el número de dominación total.

Proposición 5.1. *Sea S_n^k un grafo sol regular de orden $(k+1)n$,*

- $\gamma_a(S_n^k) = \gamma_t(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor) n + \gamma_a(C_n)$, si $k \equiv 0 \pmod{4}$.
- $\gamma_a(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1) n$, donde el ciclo ya está cubierto, si $k \equiv 1 \pmod{4}$.
- $\gamma_t(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 2) n$, donde el ciclo ya está cubierto; y $\gamma_a(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1) n + \gamma_a(C_n)$, si $k \equiv 2 \pmod{4}$.
- $\gamma_a(S_n^k) = \gamma_t(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 2) n$, donde el ciclo ya está cubierto, si $k \equiv 3 \pmod{4}$.

Demostración. Sea S_n^k un grafo sol regular de orden $(k+1)n$, donde cada camino es de longitud k y el ciclo tiene n vértices:

- Si $k \equiv 0 \pmod{4}$, según el resultado sobre el número de alianza global para caminos mencionado anteriormente, necesitamos $2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$ vértices de cada camino para garantizar la alianza global, y como tenemos n vértices en el ciclo y de cada uno parte un camino, entonces para garantizar la alianza en todos los caminos del grafo sol necesitamos $(2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor) n$ vértices. Como los vértices del ciclo no están dominados, y para la alianza global necesitamos que estén dominados, añadimos los vértices que garanticen alianza global en un ciclo, resultado citado también anteriormente. Además, en este caso, el resultado de los caminos y los ciclos para el número de alianza global coincide con el número de dominación total. Por tanto, $\gamma_a(S_n^k) = \gamma_t(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor) n + \gamma_a(C_n)$.
- Si $k \equiv 1 \pmod{4}$, para cada camino necesitamos $2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1$ vértices, tanto para alianza global como para dominación total, y, como en este caso el ciclo ya está dominado, no necesitamos añadir ningún vértice más. Por tanto $\gamma_a(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1) n$.
- Si $k \equiv 2 \pmod{4}$, el resultado es distinto para el número de alianza global que para el número de dominación total, para el primero tenemos que de cada

camino necesitamos $2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1$ vértices, y, como necesitamos dominar los vértices del ciclo, añadimos los vértices que garanticen alianza global en un ciclo; y para el segundo parámetro, $2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 2$, donde los vértices del ciclo ya están dominados. Por tanto, $\gamma_t(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 2)n$ y $\gamma_a(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 1)n + \gamma_a(C_n)$, si $k \equiv 2 \pmod{4}$.

- Si $k \equiv 3 \pmod{4}$, para cada camino necesitamos $2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 2$ vértices para garantizar la alianza, resultado que coincide con la dominación total. Además, el ciclo ya está cubierto. Por tanto $\gamma_a(S_n^k) = \gamma_t(S_n^k) = (2\lfloor \frac{k}{4} \rfloor + 2)n$.

□

5.2. Algoritmo en grafos Soles

En esta sección vamos a dar un algoritmo para calcular el número de alianza global mínimo en un grafo sol no regular, es decir, donde los caminos que parten de cada vértice del ciclo puedan tener diferentes longitudes.

Algoritmo 5.1. Entrada: Grafo sol no regular.

Salida: Una alianza global S de cardinal mínimo.

Paso 1: Podamos los caminos por completo y, dependiendo de la longitud k del camino, el ciclo resultante tendrá vértices que pertenecen a S y vértices que no. La manera de actuar en los caminos es la siguiente:

Caso 1. Si $k = 4j$, añadimos $2j$ vértices a S , donde el vértice del ciclo no se añade.

Caso 2. Si $k = 4j + 1$, añadimos $2j + 1$ vértices a S , donde el vértice del ciclo pertenece y su correspondiente vecino en el camino no es aliado.

Caso 3. Si $k = 4j + 2$, añadimos $2j + 1$ vértices a S , donde el vértice del ciclo no se añade.

Caso 4. Si $k = 4j + 3$, añadimos $2j + 2$ vértices a S , donde el vértice del ciclo pertenece y su correspondiente vecino en el camino no es aliado.

Paso 2: Hemos reducido el problema a un ciclo con vértices que pertenecen a S y vértices que no. Por tanto, ahora, la estrategia es analizar los huecos entre dos vértices consecutivos v_1, v_2 que están en S .

Paso 3: Elegimos un vértice v_1 que pertenezca a S cualquiera y elegimos un sentido de giro.

Paso 4: Si ningún vecino de v_1 en el ciclo pertenece a S , entonces añadimos a S el vecino del lado hacia donde estamos girando (ese será nuestro v_1).

Paso 5: Analizamos el hueco entre v_1 y el siguiente vértice que pertenece a S , v_2 , siendo z el número de vértices del hueco:

Caso 1. Si $z = 4j$, entonces añadimos $2j$ vértices a S de manera que el vecino de v_2 esté incluido.

Caso 2. Si $z = 4j + 1$ ó $z = 4j + 2$, entonces añadimos $2j$ vértices a S , en este caso el vecino de v_2 no pertenece a S .

Caso 3. Si $z = 4j + 3$, entonces añadimos $2j + 1$ vértices a S de manera que el vecino de v_2 esté incluido.

Paso 6: Si aun quedan huecos por analizar volvemos al paso 4.

Análisis de la Complejidad 5.1.1. Vamos a analizar la complejidad del algoritmo.

- Podar los caminos que parten de los vértices del ciclo $\rightarrow O(n)$
- Analizar los huecos entre dos vértices $\rightarrow O(n)$

Coste total: $O(n)$

Ahora veremos un ejemplo para obtener un conjunto aliado de cardinal mínimo en un grafo sol no regular.

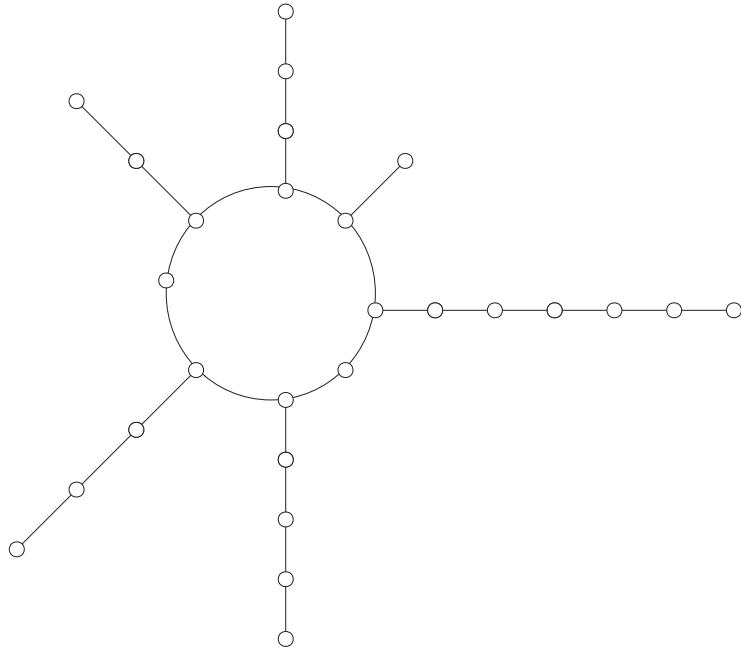


Figura 5.2: Este es el grafo que utilizaremos para el ejemplo

El primer paso es podar los caminos

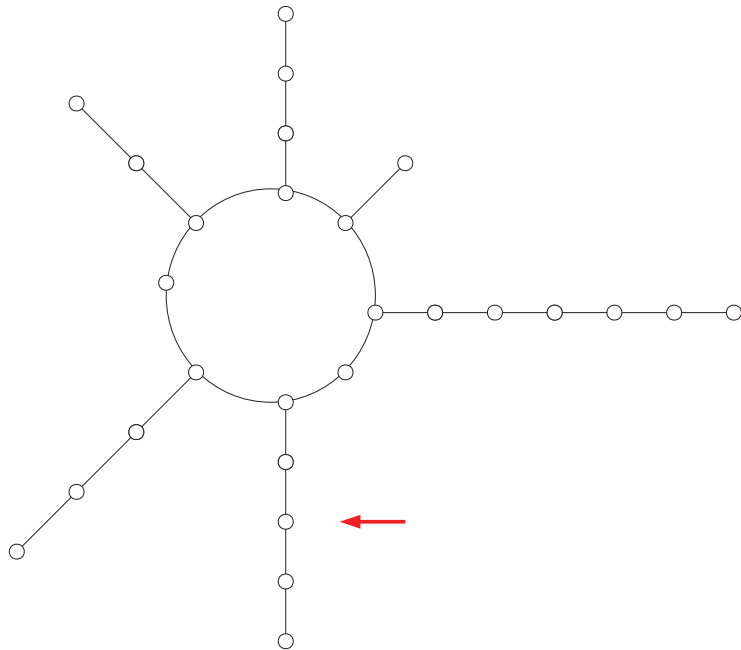


Figura 5.3: Camino de longitud 4

Añadimos 2 vértices a S , donde el vértice del ciclo no se añade.

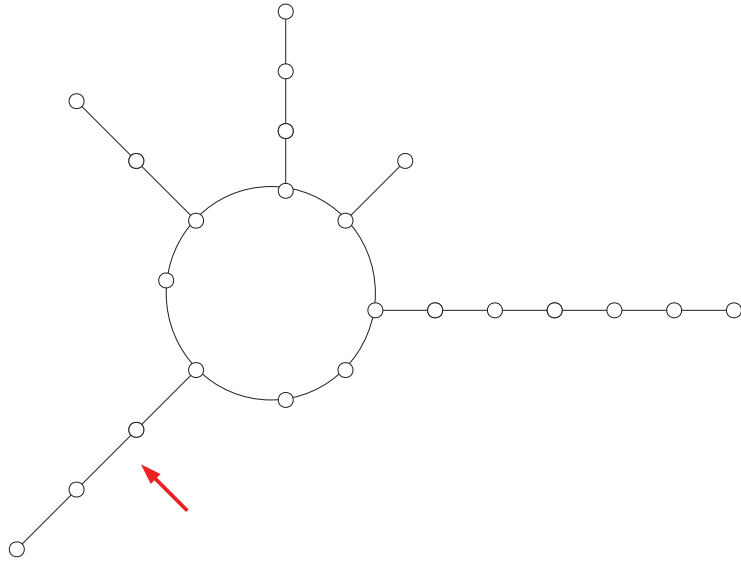


Figura 5.4: Camino de longitud 3

Añadimos 2 vértices a S , donde el vértice del ciclo pertenece y su correspondiente vecino en el camino no es aliado.

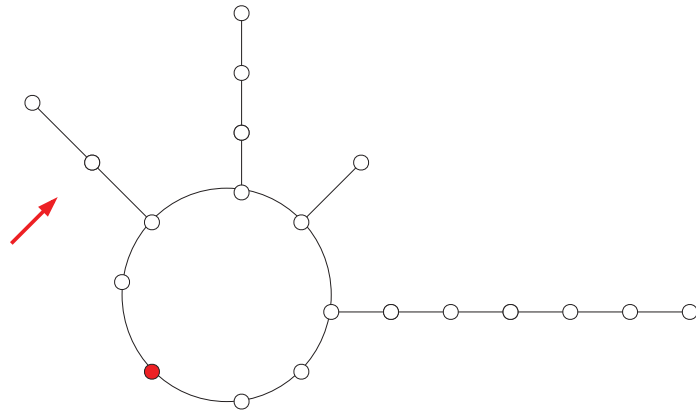


Figura 5.5: Camino de longitud 2

Añadimos 1 vértice a S , donde el vértice del ciclo no se añade.

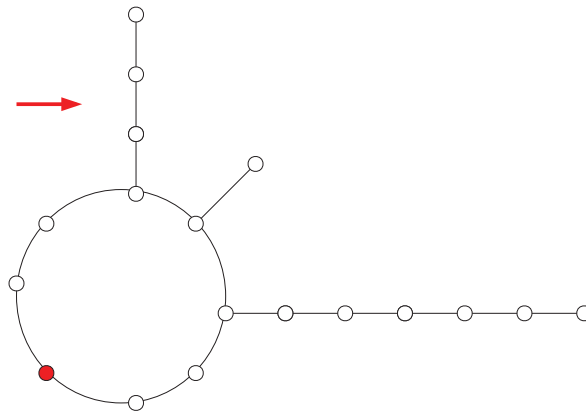


Figura 5.6: Camino de longitud 3

Añadimos 2 vértices a S , donde el vértice del ciclo pertenece y su correspondiente vecino en el camino no es aliado.

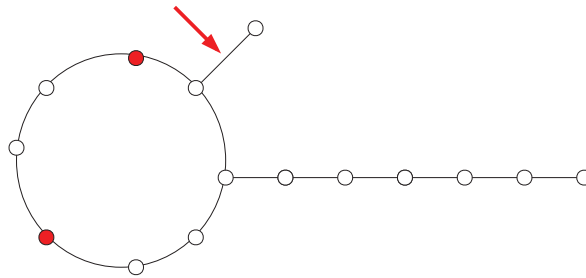


Figura 5.7: Camino de longitud 1

Añadimos 1 vértice a S , que será el del ciclo, por lo que su vecino en el camino no es aliado.

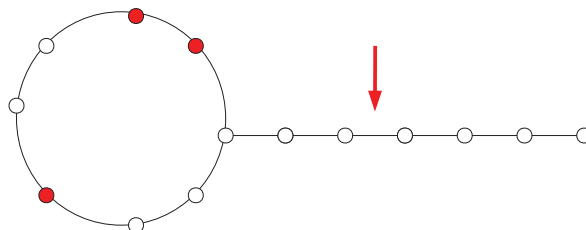


Figura 5.8: Camino de longitud 6

Añadimos 4 vértices a S , donde el vértice del ciclo pertenece y su correspondiente vecino en el camino no es aliado.

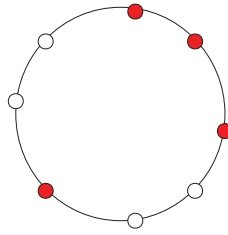


Figura 5.9: Ciclo con los caminos podados

A partir de ahora estudiamos la alianza en un ciclo donde ya hay vértices que están en el conjunto aliado y vértices que no.

Nota: Este es un ciclo de ejemplo de mayor tamaño que el anterior para poder ver mejor el funcionamiento del algoritmo.

Vamos a tomar el sentido de giro hacia la derecha, y empezaremos por el vértice perteneciente a S señalado (v_1) e iremos hacia la derecha, hasta llegar al otro vértice señalado (v_2).

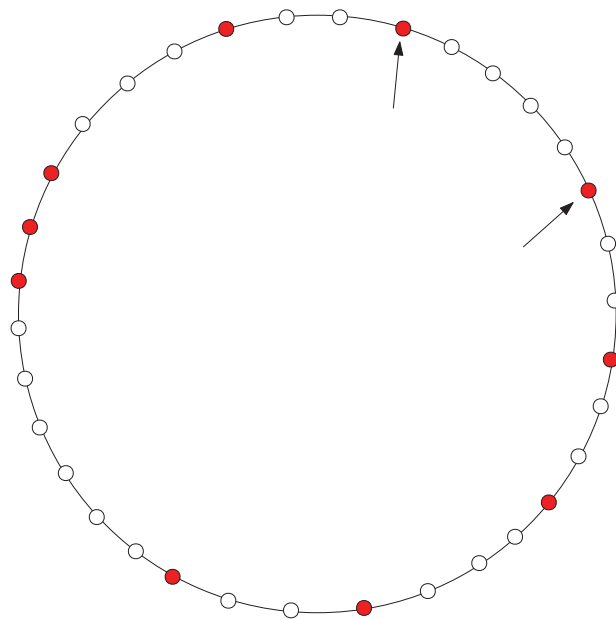


Figura 5.10: Paso 7 del algoritmo

Primero añadimos el vértice vecino derecho de v_1 para asegurar la alianza. Y tomamos como v_1 el nuevo vértice añadido.

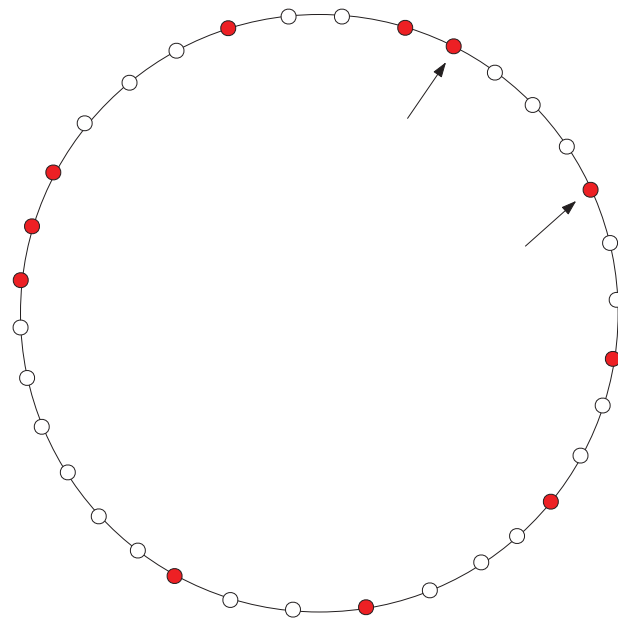


Figura 5.11: Caso 3 del algoritmo

Como el número de vértices que hay en el hueco es 3, añadimos el vecino de v_2 a S . Pasamos al siguiente hueco.

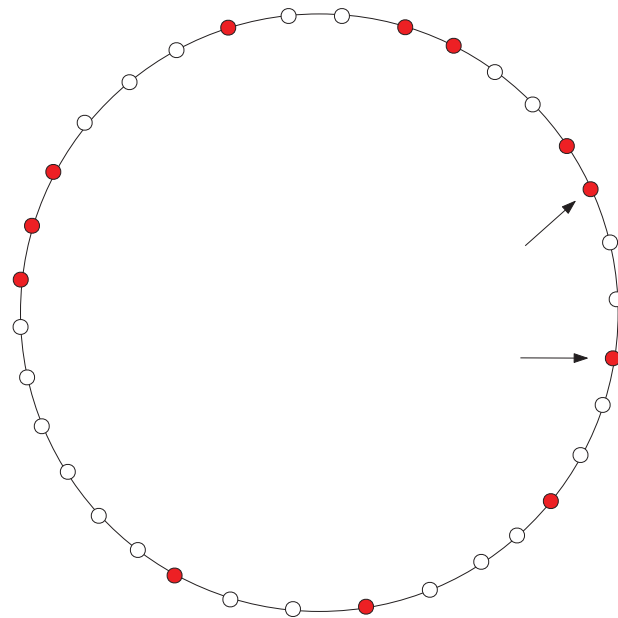


Figura 5.12: Caso 2 del algoritmo

El hueco tiene 2 vértices, por lo que no añadimos ninguno a S y pasamos al

siguiente hueco.

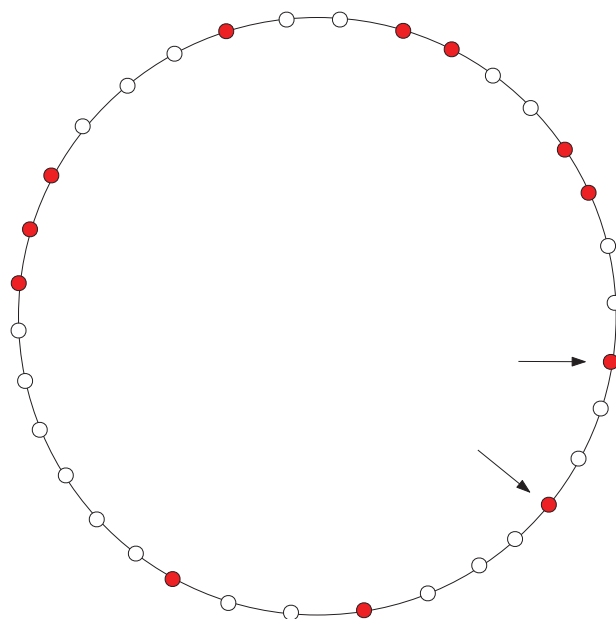


Figura 5.13: Paso 7 del algoritmo

Como ningún vecino de v_1 pertenece a S , necesitamos añadir el de la derecha antes de analizar el hueco.

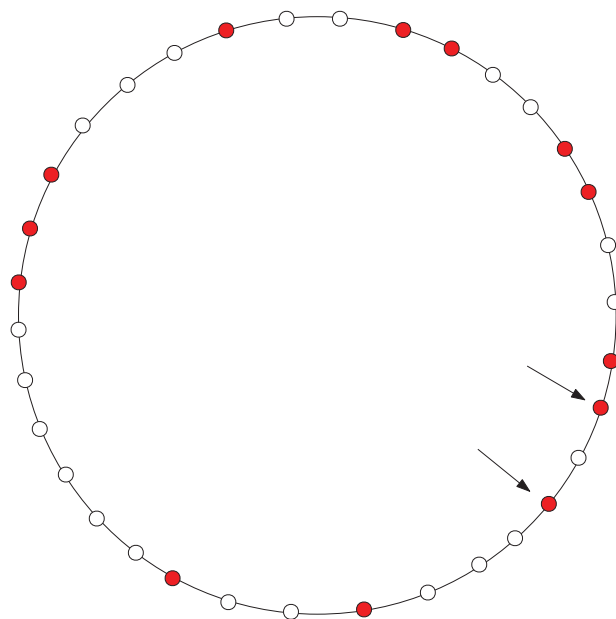


Figura 5.14: Caso 2 del algoritmo

El hueco tiene 1 vértice, por lo que no añadimos ninguno a S y pasamos al siguiente hueco.

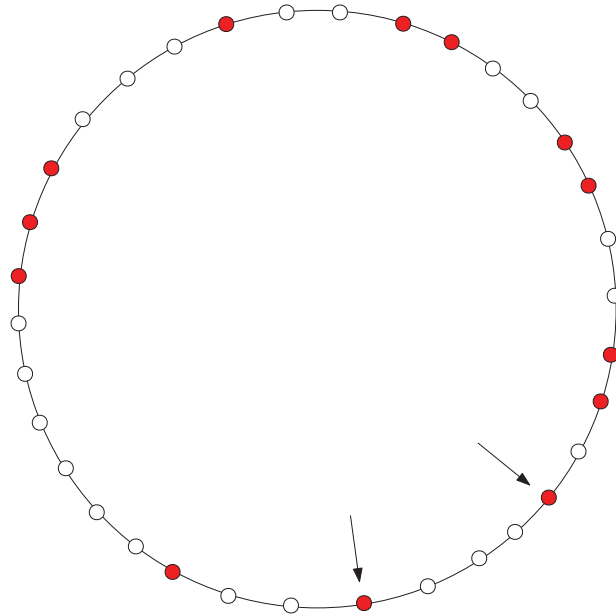


Figura 5.15: Paso 7 del algoritmo

Como ningún vecino de v_1 pertenece a S , necesitamos añadir el de la derecha antes de analizar el hueco.

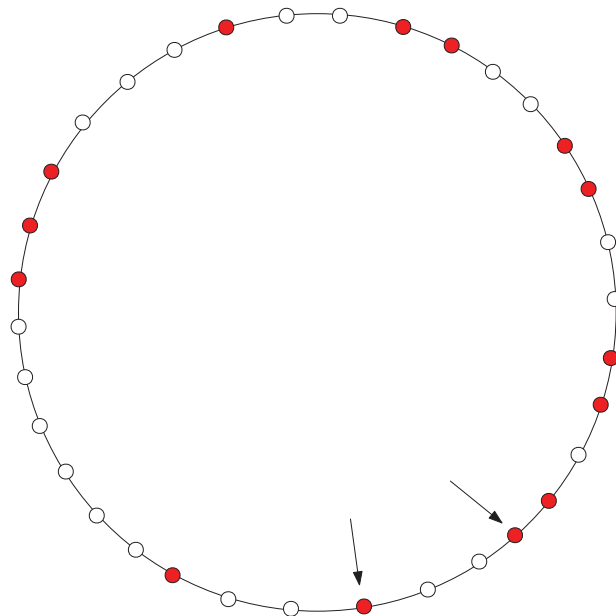


Figura 5.16: Caso 2 del algoritmo

El hueco tiene 2 vértices, por lo que no añadimos ninguno a S y pasamos al siguiente hueco.

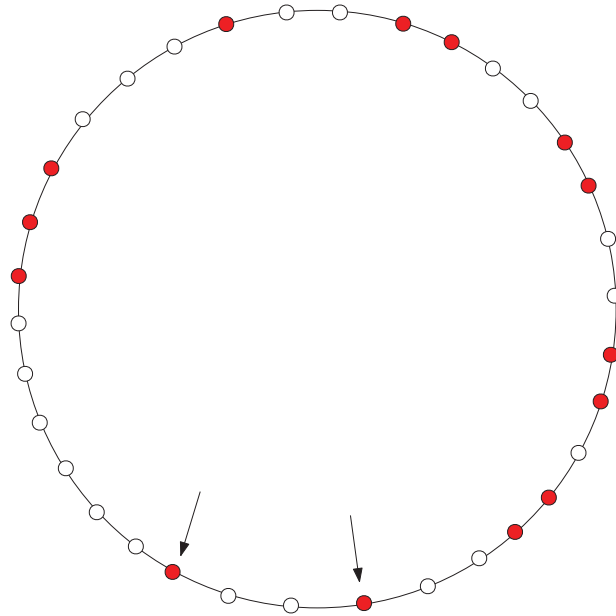


Figura 5.17: Paso 7 del algoritmo

Como ningún vecino de v_1 pertenece a S , necesitamos añadir el de la derecha antes de analizar el hueco.

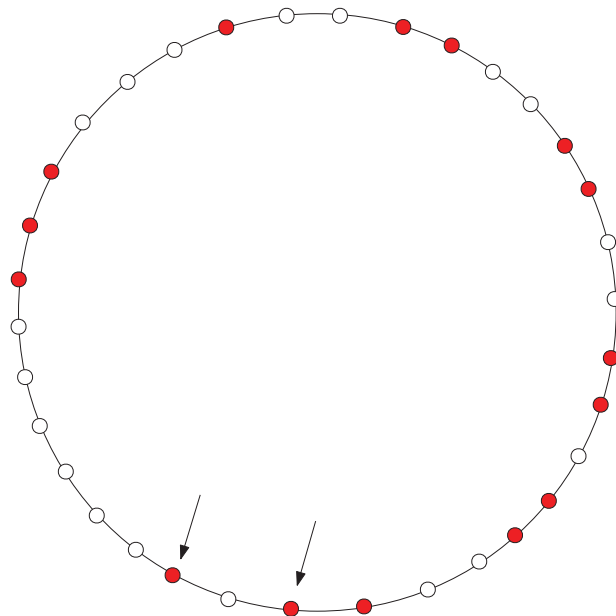


Figura 5.18: Caso 2 del algoritmo

El hueco tiene 1 vértice, por lo que no añadimos ninguno a S y pasamos al siguiente hueco.

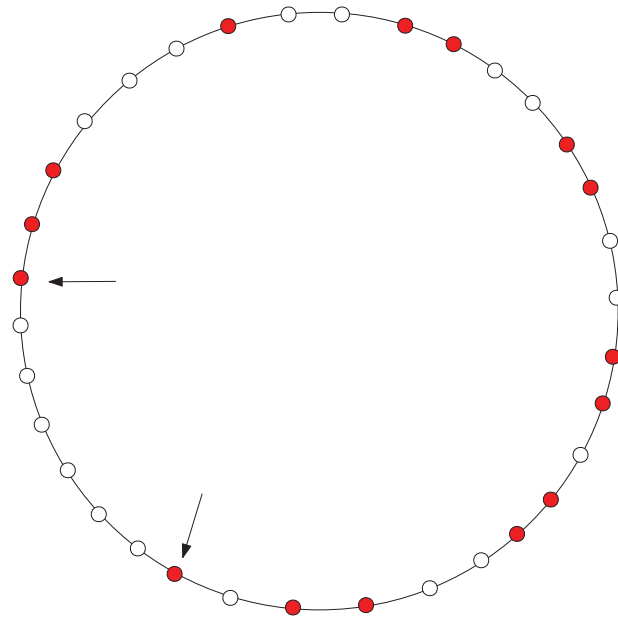


Figura 5.19: Paso 7 del algoritmo

Como ningún vecino de v_1 pertenece a S , necesitamos añadir el de la derecha antes de analizar el hueco.

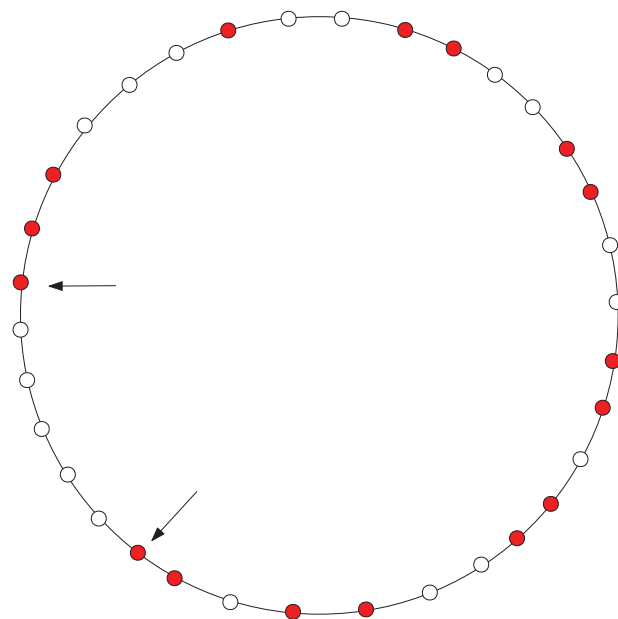


Figura 5.20: Caso 2 del algoritmo

Ahora tenemos 5 vértices en el hueco, por lo que añadimos 2 vértices a S de manera que cumplan la alianza global (dos del medio del hueco). Y pasamos al siguiente hueco.

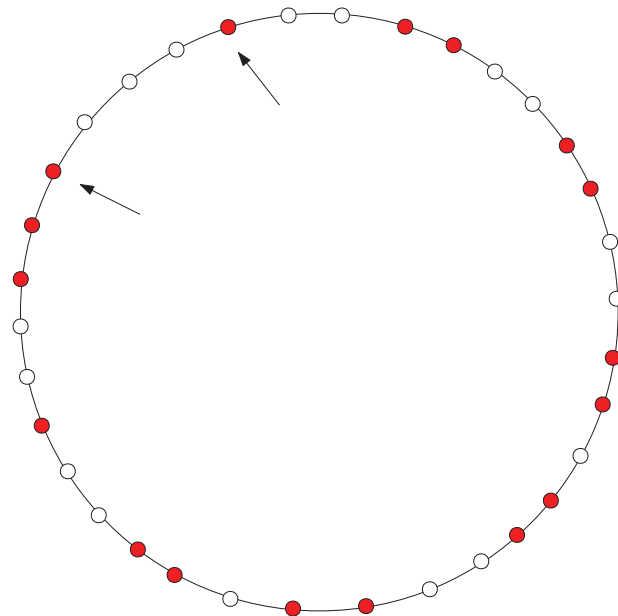


Figura 5.21: Caso 3 del algoritmo

El hueco es de 3 vértices, por lo que añadimos solamente el vértice vecino de v_2 . Y pasamos al siguiente hueco.

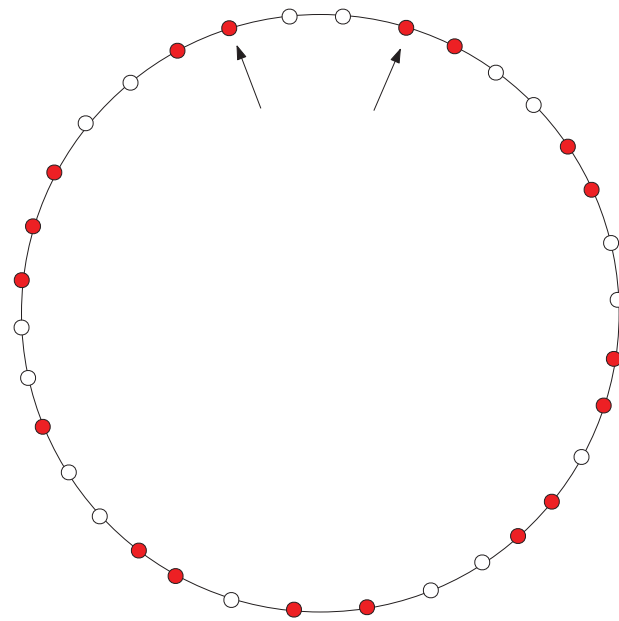


Figura 5.22: Caso 2 del algoritmo

El hueco tiene 2 vértices, por lo que no añadimos ninguno a S y pasamos al siguiente hueco.

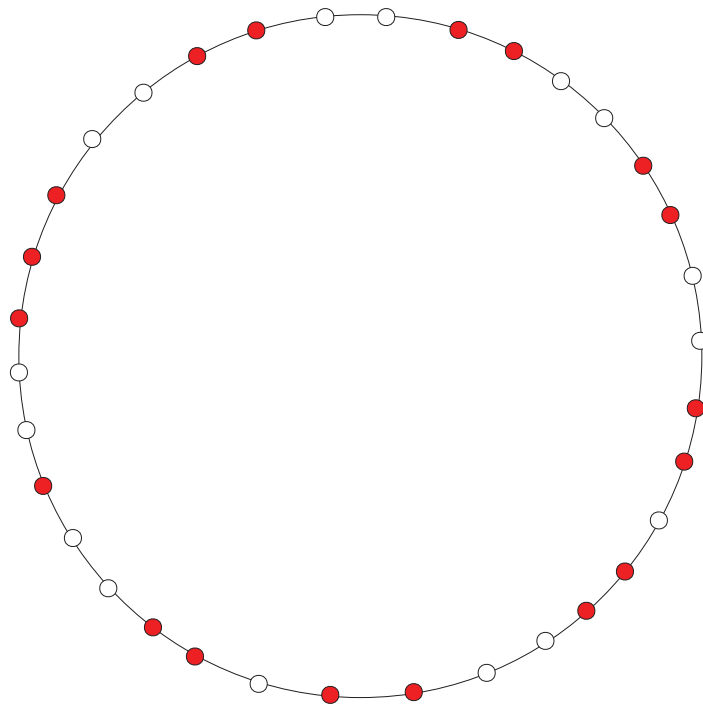


Figura 5.23: Resultado final

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha analizado el concepto de alianza, centrado de manera particular en las alianzas defensivas, y se han estudiado los parámetros de alianza. Se ha hecho una recopilación de los resultados más relevantes para los números de alianza defensiva y números de alianza defensiva global.

Además, se han dado resultados sobre el número de alianza global para grafos soles, y algoritmos para encontrar alianzas defensivas globales de menor cardinal en grafos soles y grafos orugas. Cabe destacar que, como hay una estrecha relación entre el número de alianza global y el número de dominación total, también se han dado resultados para este parámetro en estos dos tipos de grafos y algoritmos para encontrar el conjunto dominante total de menor cardinal, que en el caso de los grafos orugas se trataba de un paso previo para encontrar el conjunto aliado de menor cardinal.

A lo largo de este trabajo, y especialmente en los primeros capítulos donde se nombran algunas de las aplicaciones de las alianzas, se ha demostrado la gran importancia que tiene este estudio.

Personalmente, he aprendido mucho durante la realización de este trabajo y he mejorado mis conocimientos sobre la Teoría de Grafos, además de la oportunidad que se me ha dado para adentrarme en el mundo de la investigación matemática. En este punto me gustaría agradecer especialmente el apoyo que me ha otorgado mi tutor.

Por último, la realización de este trabajo también me ha supuesto una gran aportación personal, además de la académica.


Bibliografía

- [1] M. R. Anderberg. Cluster analysis for applications. Inf. téc., Office of the Assistant for Study Support Kirtland AFB N MEX, 1973.
- [2] G. Araujo-Pardo y L. Barrière. Defensive alliances in regular graphs and circulant graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2008.
- [3] M. Bouzefrane, M. Chellali, y T. W. Haynes. Global defensive alliances in trees. *Utilitas Mathematica*, 82:241–252, 2010.
- [4] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, y S. T. Hedetniemi. Powerful alliances in graphs. *Discrete Mathematics*, 309(8):2140–2147, 2009.
- [5] R. C. Brigham, R. D. Dutton, y S. T. Hedetniemi. A sharp lower bound on the powerful alliance number. *Congressus Numerantium*, 167:57, 2004.
- [6] R. C. Brigham, R. D. Dutton, y S. T. Hedetniemi. Secure alliances. *Discrete Mathematics*, 155(13):1708–1714, 2007.
- [7] A. Cami, H. Balakrishnam, N. Deo, y R. D. Dutton. On the complexity of finding optimal global alliances. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 58:23, 2006.
- [8] M. Chellali y T. W. Haynes. Global alliances and independence in trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 27(1):19–27, 2007.
- [9] H. Chen y T. J. Chen. Governance structures in strategic alliances: Transaction cost versus resource-based perspective. *Journal of World Business*, 38(1):1–14, 2003.
- [10] X. Chen y S. W. Chee. A new upper bound on the global defensive alliance number in trees. *Electronic journal of combinatorics*, 18(1):202, 2011.

- [11] C. Clapham. *Diccionario de Matemáticas*. Editorial Complutense, 1998.
- [12] P. Dickson y K. Weaver. Rd alliance formation: the relationship between national rd intensity and sme size. En *Proceedings of ICSB 50th World Conferense D C*. 2005.
- [13] R. I. Enciso. *Alliances in Graphs: Parameterized Algorithms and on Partitioning Series-Parallel Graphs*. Tesis Doctoral, University of Central Florida, 2009.
- [14] R. I. Enciso y R. D. Dutton. Lower bounds for global alliances of planar graphs. *Congressus Numerantium*, 187:187, 2007.
- [15] O. Favaron. Global alliances and independent domination in some classes of graphs. *the electronic journal of combinatorics*, 15(1):123, 2008.
- [16] O. Favaron, G. Fricke, W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, P. Kristiansen, R. C. Laskar, y D. Skaggs. Offensive alliances in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 24(2):263–275, 2002.
- [17] H. Fernau y D. Raible. Alliances in graphs: a complexity-theoretic study. En *SOFSEM (2)*, págs. 61–70. 2007.
- [18] G. W. Flake, S. Lawrence, y C. L. Giles. Efficient identification of web communities. En *Proceedings of the 6th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, págs. 150–160. ACM, 2000.
- [19] P. Flocchini, E. Lodi, F. Luccio, L. Pagli, y N. Santoro. Dynamic monopolies in tori. *Discrete Applied Mathematics*, 137(2):197–212, 2004.
- [20] R. P. Grimaldi. *Matemáticas discreta y combinatoria: introducción y aplicaciones*. Pearson Educación, 1998.
- [21] K. Hassan-Shafique. *Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering*. Tesis Doctoral, University of Central Florida, 2004.
- [22] T. Haynes, D. Knisley, E. Seier, y Y. Zou. A quantitative analysis of secondary rna structure using domination based parameters on trees. *BMC bioinformatics*, 7(1):108, 2006.

- [23] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, y M. A. Henning. Global defensive alliances. En *Proc. 17th Int. Symp. Comput. Inform. Sci., I, ISCIS*, tomo 17, págs. 303–307. 2002.
- [24] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, y P. Kristiansen. Alliances in graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 48:157–178, 2004.
- [25] B. J. Kim y J. Liu. Instability of defensive alliances in the predator-prey model on complex networks. *Physical Review E*, 72(4):041906, 2005.
- [26] L. Langley. Alliances in directed graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 61:149, 2007.
- [27] D. Peleg. Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: a review. *Theoretical Computer Science*, 282(2):231–257, 2002.
- [28] J. A. Rodríguez-Velázquez y J. M. Sigarreta. Global alliances in planar graphs. *AKCE Int. J. Graphs Comb*, 4(1):83–98, 2007.
- [29] J. A. Rodríguez-Velázquez y J. M. Sigarreta. Spectral study of alliances in graphs. *Discuss. Math. Graph Theory*, 2007.
- [30] J. M. Sigarreta y J. A. Rodríguez. On defensive alliances and line graphs. *Applied Mathematics Letters*, 19(12):1345–1350, 2006.
- [31] P. K. Srimani y Z. Xu. Distributed protocols for defensive and offensive alliances in network graphs using self-stabilization. En *Computing: Theory and Applications, 2007. ICCTA '07. International Conference on*, págs. 27–31. IEEE, 2007.
- [32] G. Szabö y T. Czàrà̀n. Defensive alliances in spatial models of cyclical population interactions. *Physical Review E*, 64(4):042902, 2001.
- [33] Z. Xu y P. K. Srimani. Self-stabilizing distributed algorithms for graph alliances. En *Parallel and Distributed Processing Symposium, 2006. IPDPS 2006. 20th International*, págs. 6–pp. IEEE, 2006.

Este documento esta firmado por

	Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
	Fecha/Hora	Thu Jun 14 23:43:37 CEST 2018
	Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@fi.upm.es, CN=CA Facultad de Informatica, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
	Numero de Serie	630
	Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)