

VALORACIÓN DE DERIVADOS SOBRE TIPOS DE INTERÉS

Presentado por: Juan Pablo Bonfrisco Ayala 14042

Trabajo dirigido por: Carlos Eduardo González Guillén

Madrid, junio 2018

Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales

Agradecimientos

A mi tutor Carlos por su indiscutible compromiso a lo largo del proyecto y su inmensurable ayuda.

A mi familia, mis amigos y mi novia por apoyarme siempre durante estos últimos cuatro años.

Resumen Ejecutivo

El propósito de este trabajo es analizar los métodos de valoración de derivados financieros sobre tipos de interés. Los derivados sobre tipos de interés son contratos cuyos *payoffs* (intercambios monetarios que se realizan para liquidar los contratos) dependen de alguna forma de los tipos de interés actuales o futuros.

Estos productos financieros son de gran importancia en el ámbito macroeconómico debido al volumen del mercado de renta fija. El tamaño de este mercado se puede ver reflejado en el hecho de que, en la actualidad, la deuda pública en España tiene un valor igual al 98,3% del PIB del país¹. Sin embargo, la importancia de la deuda no se limita solamente al gobierno, las empresas también emiten grandes cantidades de deuda para poder financiar sus actividades.

Debido a la importancia de la deuda en la salud financiera de entidades tanto públicas como privadas, es necesario que existan medios por los cuales esta se pueda manejar adecuadamente. Los derivados sobre tipos de interés permiten cumplir este propósito. Dado que las cantidades monetarias con las que se trabaja al operar con deuda son generalmente significativas, pequeñas variaciones en el precio de estos instrumentos pueden tener grandes repercusiones en el estado financiero de las entidades que pretenden adquirirlos. En consecuencia, es necesario poder valorar correctamente este tipo de contratos para poder asegurar que se está pagando un precio adecuado al tomar posiciones en ellos.

Para poder llevar a cabo la valoración de un producto financiero, es necesario modelizar el comportamiento de su variable subyacente, es decir, de aquella variable cuyo valor determina el *payoff* que el producto ofrece. De esta forma, para obtener el precio actual de un derivado que depende del valor de una acción, sería necesario modelizar la evolución temporal del precio de dicha acción subyacente. El modelo que se suele implementar en estos casos es el famoso modelo de Black-Scholes-Merton². Este modelo es reconocido como estándar ya que aproxima el comportamiento del precio de las acciones a lo largo del tiempo de manera razonable a lo que se observa en los mercados reales.

Una hipótesis clave en el modelo de Black-Scholes-Merton es que se considera un tipo de interés constante aplicable al periodo en el que se va a valorar un derivado. Esta hipótesis claramente no se puede emplear para valorar derivados sobre tipos de interés ya que implica que la variable subyacente (el tipo de interés) no varía con el tiempo. Por tanto, para estos derivados es necesario reflejar el carácter aleatorio de los tipos de interés en el modelo a utilizar. El problema reside en que, en la actualidad, no existe un modelo estándar para ello, sino que existe una gran variedad de modelos, cada uno de ellos con distintas propiedades a su favor.

El modelo que se considera en este trabajo es el modelo propuesto por John C. Hull y Alan D. White en 1994 que busca describir el comportamiento del *short rate* $r(t)$ (tipo de interés instantáneo) considerando un único factor (solamente se considera el tipo de interés instantáneo como variable estocástica):

$$dr = [\vartheta(t) - ar]dt + \sigma dz_t ,$$

¹ (Oficina Europea de Estadística, 2018)

² (Black & Scholes, 1973) y (Merton, 1973)

donde a y σ son parámetros constantes, ϑ es una función conocida que depende del tiempo y dz_t es un proceso de Wiener.

Se ha optado por utilizar este modelo ya que es el modelo más sencillo que permite, con una precisión aceptable, valorar derivados de tipos de interés. Pese a que existen otros modelos que representan el proceso seguido por el tipo de interés instantáneo de una manera más fiel a lo que se observa en el mercado que el de Hull & White, estos son más complejos y, sin embargo, conceptualmente no son tan distintos. El modelo de Hull & White presenta un balance adecuado entre propiedades deseables, simplicidad y precisión.

Dentro de las propiedades deseables que este modelo incluye cabe destacar que admite tipos de interés negativos, que respeta la curva de tipos de interés actual y que incorpora reversión a la media para el *short rate*. El hecho de que admita tipos de interés negativos es especialmente importante ya que actualmente en la zona euro los tipos de interés a corto y medio plazo (con madureces hasta 5 años) son negativos. Curiosamente, esta es una propiedad que históricamente se ha visto como desfavorable para el modelo de Hull & White ya que el consenso del mercado era que los tipos de interés no podían ser negativos.

Por otra parte, en este modelo el *short rate* sigue una distribución normal. Esto implica una manejabilidad matemática más fácil, permitiendo obtener ecuaciones analíticas para derivados de tipos de interés sencillos como bonos, opciones sobre bonos e incluso *swaptions* europeos³. Esto facilita enormemente el proceso de calibración de los parámetros a y σ .

Para derivados más complejos, como por ejemplo *swaptions* bermuda o *swaptions* americanos, que incorporan la posibilidad de ser ejercidos antes de la fecha de madurez del derivado, no es posible producir una ecuación analítica para sus precios. Por lo tanto, para valorar estos instrumentos bajo el modelo de Hull & White es necesario emplear métodos numéricos. En este proyecto se ha optado por analizar la valoración de los *swaption* bermuda con el fin de detallar el funcionamiento de estos métodos.

Dentro de los métodos numéricos más empleados en matemáticas financieras para la valoración de derivados sobre tipos de interés se encuentran el método de Montecarlo, el método de las diferencias finitas y los árboles trinomiales. En este trabajo se hace hincapié en el último de ellos ya que es el más apropiado para los *swaptions* bermuda. El método de Montecarlo no es adecuado ya que es necesario adaptarlo para que permita valorar derivados que incorporan ejercicio prematuro. También se podría usar el método de las diferencias finitas, aunque para ello hay que obtener una ecuación diferencial del precio del derivado que se pretende valorar y este enfoque no se suele utilizar en los *swaptions*.

La construcción de los árboles trinomiales se lleva a cabo siguiendo el procedimiento de dos etapas desarrollado por Hull & White. En este procedimiento, primero se produce un árbol trinomial para una variable ficticia y una vez obtenido, este se adapta para producir el árbol trinomial del *short rate* necesario para la valoración del derivado.

Finalmente, se implementa tanto la calibración del modelo de Hull & White como la valoración de *swaptions* bermuda en MATLAB.

³ (Jamshidian, 1989)

Índice General

Agradecimientos.....	3
Resumen Ejecutivo.....	5
Índice General	7
Capítulo 1: Introducción.....	9
1.1. Introducción y objetivos	9
1.2. Estructura del documento	11
Capítulo 2: Generalidades Sobre Los Tipos De Interés	12
2.1. Principio de ausencia de oportunidad de arbitraje.....	12
2.2. Tipos de interés.....	13
2.2.1. Tipo de interés continuo	13
2.2.2. Tipo de interés libre de riesgo	14
2.2.3. Dependencia temporal de los tipos de interés	15
2.2.4. Tasa de interés instantánea	16
2.2.5. Bonos cupón cero	17
2.2.6. Tipos de interés <i>forward</i>	17
2.3. Valoración riesgo neutro	18
2.3.1. El precio de mercado del riesgo	18
2.3.2. Valoración riesgo neutro	20
2.3.3. Cambio de mundos riesgo neutro.....	21
Capítulo 3: Derivados Financieros	22
3.1. <i>Forwards</i>	23
3.2. Futuros	23
3.3. <i>Forward Rate Agreements</i>	24
3.4. <i>Interest Rate Swaps</i>	25
3.5. Opciones	26
3.6. <i>Swaptions</i>	27
Capítulo 4: Modelos De Tipos De Interés.....	31
4.1. Modelo lognormal	31
4.2. Modelo de Vasicek	33
4.3. Modelo de Hull & White	34
4.3.1. Ecuación analítica del <i>short rate</i> bajo el modelo de Hull & White	34
4.3.2. Derivación de la función $\vartheta(t)$	35
4.3.3. Esperanza y varianza del <i>short rate</i> bajo el modelo de Hull & White.....	39

4.3.4.	Ecuación analítica del precio de un bono cupón cero	40
4.3.5.	Calibración del modelo	41
4.4.	Modelos del <i>short rate</i> con dos factores.....	41
Capítulo 5:	Métodos Numéricos	43
5.1.	Árboles trinomiales.....	44
5.1.1.	Primera etapa.....	48
5.1.2.	Segunda etapa.....	52
5.1.3.	Aplicación a las <i>swaptions</i> bermuda	56
Capítulo 6:	Implementación en MATLAB	58
6.1.	Calibración del modelo.....	58
6.2.	Valoración de <i>swaptions</i> bermuda.....	59
Capítulo 7:	Conclusiones	61
Capítulo 8:	Planificación, Presupuesto y Valoración De Impactos	62
8.1.	Planificación	62
8.1.1.	EDP del proyecto	62
8.1.2.	Diagrama de Gantt	63
8.2.	Presupuesto.....	65
8.3.	Valoración de impactos	66
Anexo 1:	Generalidades Sobre El Cálculo Diferencial Estocástico.....	67
Anexo 2:	Código De MATLAB.....	68
Índice De Figuras	72
Índice De Tablas.....		73
Bibliografía.....		74

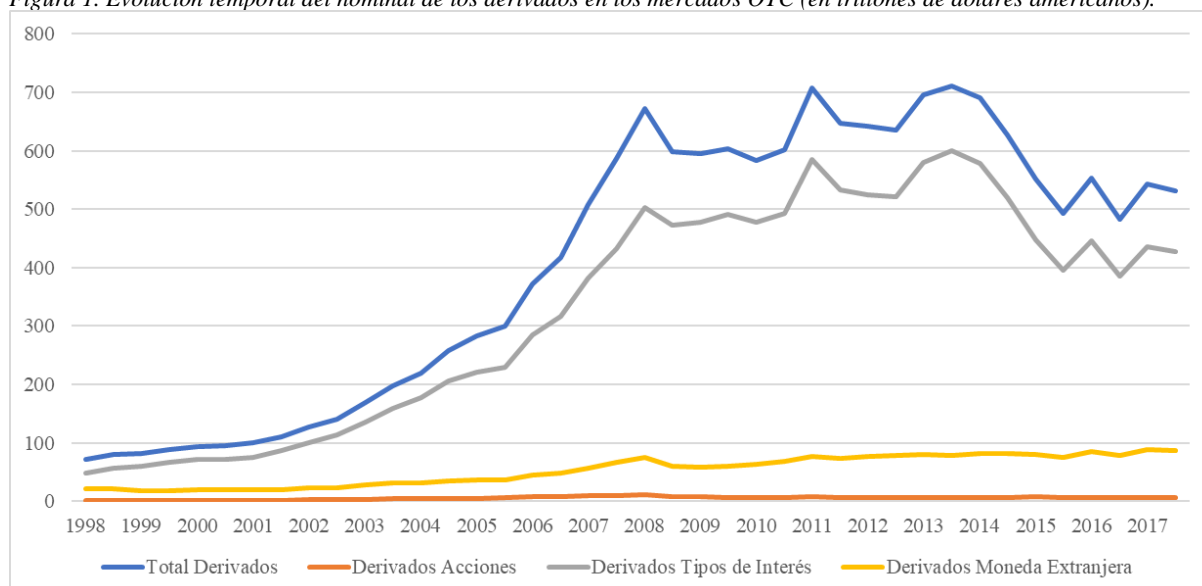
Capítulo 1: Introducción

1.1. Introducción y objetivos

Un derivado financiero es un producto cuyo valor depende del precio de otro activo. Una de las necesidades claves del sector financiero es la valoración “justa” de estos instrumentos. Pese a que inicialmente esto pueda parecer una actividad trivial, las cambiantes necesidades financieras de instituciones tanto públicas como privadas han dado a luz a derivados hechos a medida cuya correcta valoración precisa de modelos matemáticos complejos. En consecuencia, en las últimas décadas ha existido una creciente demanda de ingenieros y matemáticos para trabajar en el sector.

Una categoría fundamental de derivados son los derivados sobre tipos de interés, estos son productos cuyos *payoffs* (intercambios monetarios que se realizan para liquidar los contratos) dependen de una forma u otra de los tipos de interés presentes o futuros. Estos instrumentos son de gran importancia en el ámbito financiero ya que permiten a las empresas y los gobiernos manejar su deuda. Esto es así ya que permiten llevar a cabo actividades como ajustes de portafolios, reestructuraciones de deuda y coberturas de carteras frente al riesgo de tasas de interés⁴. La importancia de estos productos en los mercados financieros se puede apreciar del hecho de que el nominal total de las posiciones abiertas en ellos es de 426 trillones de dólares americanos. Esta cantidad representa aproximadamente el 80,2% del volumen de los derivados negociados en los mercados *Over The Counter* (OTC)^{5 6}, siendo estos mercados más de siete veces más grandes que los mercados bursátiles. Como se puede ver en la Figura 1 los derivados de tipos de interés han tenido una importancia creciente en las últimas dos décadas.

Figura 1. Evolución temporal del nominal de los derivados en los mercados OTC (en trillones de dólares americanos).



(Bank of International Settlements, 2018)

⁴ El riesgo de tasas de interés es el riesgo a que los tipos de interés suban o bajen, a lo largo del tiempo, de una manera no favorable para el inversor.

⁵ Los mercados OTC son mercados extrabursátiles, descentralizados, en los cuales los instrumentos financieros se negocian directamente entre las dos partes involucradas. Por esta misma razón, tienen más riesgo que los mercados tradicionales. A diferencia de los mercados bursátiles, en los que se intercambian productos estandarizados, en los mercados OTC se negocian derivados hechos a medida.

⁶ (Bank of International Settlements, 2018)

Por otra parte, la valoración de derivados sobre tipos de interés resulta interesante ya que en la actualidad no existe un modelo único considerado por consenso del mercado como el mejor y, por tanto, utilizado como modelo estándar para valorar este tipo de derivados. Al contrario, existe una gran variedad de modelos, con diferentes niveles de complejidad, utilizados para valorar los distintos derivados existentes en el mercado.

En este trabajo se hará hincapié en los modelos del *short rate (tipo de interés instantáneo)*, enfocando el estudio en el modelo propuesto por John C. Hull y Alan D. White en 1994, conocido como *modelo de Hull & White de un factor* o *modelo extendido de Vasicek*. Se ha optado por profundizar este modelo en particular por varios motivos:

- Permite obtener tipos de interés negativos. Históricamente esto se ha considerado una desventaja frente a otros modelos ya que se suponía que las tasas de interés debían de ser estrictamente positivas. Sin embargo, como se ha podido comprobar en los últimos años en la zona euro, esta hipótesis no es necesariamente correcta.
- Se obtiene una distribución normal para la variable estocástica que se busca modelizar (la tasa de interés instantánea), lo cual facilita la manipulación e implantación del modelo.
- Incorpora reversión a la media; cuando el tiempo tiende a infinito, el tipo de interés instantáneo tiende a un valor determinado.
- Es un modelo exógeno respecto a la curva de tipos de interés, es decir, utiliza parámetros con dependencia temporal que permiten que pueda replicar de manera exacta la curva de tipos de interés actual.
- Permite obtener soluciones analíticas para derivados sencillos como bonos, opciones sobre bonos y *swaptions* europeos. Es decir, que para la valoración de estos instrumentos no es necesario simular el comportamiento del *short rate*. Esto facilita la calibración del modelo.

Por último, aun cumpliendo con todos los puntos detallados anteriormente, este modelo mantiene una relativa simplicidad lo cual facilita su aplicación. Otros modelos más complejos incorporan ciertas características que el modelo de Hull & White de un factor no garantiza, como, por ejemplo, considerar más de una variable estocástica o incorporar volatilidades con estructuras temporales complejas. No obstante, estos modelos resultan más difíciles de analizar y configurar para llevar a cabo la valoración de derivados de tipos de interés que se pretende realizar. El modelo de Hull & White presenta un balance correcto de sencillez y precisión.

En particular, se detallará cómo se puede utilizar este modelo para la valoración de *opciones bermuda sobre permutas de tipos de interés*, conocidas por su nombre en inglés como *bermudan swaptions*. Estas son opciones cuyo activo subyacente es un *swap* y que tienen la particularidad de que pueden ser ejercidas en tiempos predefinidos anteriores a su fecha de madurez. Esta posibilidad de ejercicio prematuro hace que no sea posible la obtención de una solución analítica para estos instrumentos, sino que es necesario implementar métodos numéricos para obtener un precio imparcial. La técnica que se va a implementar son los árboles trinomiales, procedimiento ampliamente utilizado en la valoración de derivados de tipos de interés.

1.2. Estructura del documento

La estructura del trabajo es la siguiente:

En el Capítulo 1 se presenta el proyecto incluyendo su relevancia dentro del marco financiero y los objetivos que se buscan satisfacer.

El Capítulo 2 introduce nociones básicas, necesarias para la valoración de derivados de tipos de interés, como son el *short rate* y la valoración riesgo neutro. Seguidamente, en el Capítulo 3 se introducen algunos derivados financieros básicos necesarios para comprender el funcionamiento de los *swaption* de tipo bermuda que se valoran en capítulos posteriores.

En el Capítulo 4 se analizan distintos modelos para los tipos de interés, yendo de un menor a mayor grado de complejidad. Se comenta el modelo lognormal, el modelo de Vasicek y se detalla el modelo de Hull & White posteriormente utilizado en la valoración de los *swaptions* bermuda. Finalmente, se introducen los modelos del *short rate* con dos factores.

En el Capítulo 5 se comentan los métodos numéricos utilizados en la valoración de derivados financieros, detallando la construcción de árboles trinomiales para valorar *swaptions* bermuda bajo el modelo de Hull & White.

En el Capítulo 6 se explica cómo llevar a cabo dentro de un lenguaje de programación la valoración de *swaptions* bermuda utilizando árboles trinomiales bajo el modelo de Hull & White.

Finalmente, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo y en el Capítulo 8 se detalla la planificación del proyecto, se estima el presupuesto que este conlleva y se realiza una valoración de impactos.

El Anexo 1 presenta algunos principios básicos del cálculo estocástico utilizados principalmente en los Capítulos 2 y 4. El Anexo 2 incluye el programa desarrollado en MATLAB para la valoración de *swaptions* bermuda.

Capítulo 2: Generalidades Sobre Los Tipos De Interés

2.1. Principio de ausencia de oportunidad de arbitraje

Con el fin de valorar a los instrumentos financieros de una manera objetiva e inequívoca, a lo largo de este trabajo, se va a asumir la hipótesis de que los mercados respetan el ***principio de ausencia de oportunidad de arbitraje***. El arbitraje hace referencia a la posibilidad de conseguir un beneficio libre de riesgo, presente o futuro, sin tener que desembolsar una inversión neta de capital. Como consecuencia de la ausencia de oportunidad de arbitraje, dos carteras de productos financieros de las cuales se sabe que van a tener el mismo valor en un tiempo futuro deben forzosamente tener el mismo precio en la actualidad.

Un ***arbitrajista*** es un inversor que aprovecha las oportunidades de arbitraje existentes en los mercados reales, asegurando un beneficio libre de riesgo al tomar posiciones simultáneas en dos o más productos financieros.

Pese a que la labor de los arbitrajistas pueda parecer injustificada, su existencia es necesaria en los mercados ya que provocan que las oportunidades de arbitraje tengan un carácter efímero y que, por tanto, la gran mayoría de inversores estén sujetos al principio de ausencia de oportunidad de arbitraje. El efecto de los arbitrajistas en el mercado se puede comprender teniendo en cuenta los dos principios siguientes:

- 1) La compra de instrumentos financieros, también conocido como toma de ***posiciones largas***, implica un incremento en la demanda de dichos productos, causando un incremento en sus precios.
- 2) La venta de productos financieros, denominada como toma de ***posiciones cortas***, aumenta la oferta en el mercado que estos tienen y, por tanto, hace disminuir sus precios.

Supóngase que hay dos carteras de productos financieros de las que se sabe que van a tener el mismo valor en un tiempo futuro pero cuyo precio actual es diferente. En este escenario un arbitrajista tomaría posiciones largas en la cartera más barata de las dos y posiciones cortas en la más cara, tomando el mismo número de posiciones en las dos. En el tiempo futuro en el que los valores de estas carteras coinciden deshace las posiciones sin coste. De esta manera se aseguraría un beneficio neto actual ya que recibiría más dinero por los instrumentos vendidos que lo que ha pagado por los comprados sin tener que desembolsar dinero en el tiempo futuro.

Dado que las estrategias implementadas por los arbitrajistas conllevan comprar carteras que están infravaloradas y vender carteras que están sobrevaloradas, la demanda de los primeros y la oferta de los segundos aumentan. Debido a los principios anteriores, los precios de los productos en la cartera infravalorada aumentan y los de la cartera sobrevalorada disminuyen. Por tanto, las estrategias implementadas por los arbitrajistas hacen que para el resto de los actores del mercado estén sujetos a un mercado libre de arbitraje.

2.2. Tipos de interés

2.2.1. Tipo de interés continuo

Los derivados que se analizarán en este trabajo tienen una dependencia directa del valor al que cotizan las tasas de interés en el mercado. Cuando se habla de tipos de interés, es de suma importancia comprender el periodo al cual estos hacen referencia y la frecuencia de composición que utilizan. En los mercados financieros, la gran mayoría de los tipos de interés vienen citados para periodos anuales, sin embargo, la frecuencia de composición suele variar dependiendo del producto que se considere.

Un capital que tiene en el tiempo inicial, $t = 0$, un valor igual a C_0 y que se invierte mediante un producto financiero a un tipo de interés r anual compuesto m veces al año tendrá al cabo de T años un valor igual a

$$C_T = C_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT},$$

donde C_0 se conoce como el **nominal** o **principal** del préstamo y el tiempo $t = T$ es la **fecha de vencimiento** o **madurez** del contrato. Este tipo de instrumento financiero puede considerarse como un préstamo, en el cual el prestatario recibe una cuantía C_0 de dinero y, pasado un periodo de tiempo, debe devolver el nominal más intereses atribuidos al valor temporal del dinero.

En este trabajo, se emplearán exclusivamente tipos de interés anuales (razón por la cual el tiempo t se medirá en años) continuamente compuestos. Estas tasas, también conocidas como **tipos de interés continuos**, se obtienen tomando el límite cuando la frecuencia de composición m tiende a infinito en el lado derecho de la ecuación anterior, es decir,

$$C_T = \lim_{m \rightarrow \infty} C_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT} = \lim_{m \rightarrow \infty} C_0 \left(1 + \frac{1}{m/r}\right)^{\frac{m}{r} r T} = C_0 e^{rT}.$$

La frecuencia de composición de un interés se puede interpretar como una unidad de medida del mismo. Se dice que dos tipos de interés r_p y r_q son equivalentes si sus frecuencias de composición p y q , respectivamente, cumplen que

$$\left(1 + \frac{r_p}{p}\right)^{pT} = \left(1 + \frac{r_q}{q}\right)^{qT}.$$

Por lo tanto, para un tipo de interés que no esté continuamente compuestos, siempre se podrá obtener su tasa de interés continua equivalente mediante la expresión

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT} = e^{r_c T},$$

siendo r la tasa de interés compuesta m veces al año y r_c su tasa de interés continua equivalente.

2.2.2. Tipo de interés libre de riesgo

Por otro lado, se va a asumir la hipótesis de que en los mercados financieros existe un **tipo de interés libre de riesgo**. Es decir, un inversor puede prestar C_0 unidades monetarias en el tiempo $t = 0$ a la tasa de interés libre de riesgo r disponible en ese momento y saber con total seguridad que en el vencimiento $t = T$ la inversión producirá un capital igual a

$$C_T = C_0 e^{rT} .$$

La hipótesis de un interés libre de riesgo no contradice al principio de ausencia de oportunidad de arbitraje ya que permite conseguir un rendimiento sin correr riesgo alguno, pero a través de una inversión neta de capital.

Generalmente, se toma como tasa de interés libre de riesgo a la que brindan los gobiernos a través de letras del tesoro y bonos del estado o la que utilizan los grandes bancos al realizar depósitos en otras entidades, como el LIBOR o el EURIBOR.

El *London InterBank Offered Rate* (LIBOR o ICE LIBOR) es un índice de referencia que mide el tipo de interés al cual los grandes bancos están dispuestos a llevar a cabo depósitos de dinero de una moneda determinada en otras entidades por periodos de tiempo cortos. Se publica para las cinco principales divisas (el dólar americano, la libra esterlina, el euro, el franco suizo y el yen japonés) y para siete vencimientos distintos (1 día, 1 semana, 1 mes, 2 meses, 3 meses, 6 meses y 12 meses). El LIBOR se calcula diariamente por la *ICE Benchmark Administration* (IBA) consultando a entre 11 y 16 (dependiendo de la divisa) bancos con sede en Londres, haciendo el promedio de los tipos de interés que estos utilizan, excluyendo previamente los valores en los cuartiles superiores e inferiores. (ICE Benchmark Administration, 2018)

El *Euro Interbank Offered Rate* (EURIBOR) es un índice similar al LIBOR, pero exclusivamente para el euro y con ocho vencimientos en lugar de siete (1 semana, 2 semanas, 1 mes, 2 meses, 3 meses, 6 meses, 9 meses y 12 meses)⁷. Este tipo de interés también se publica diariamente, pero por el *European Money Markets Institute* (EMMI) encuestando a 20 bancos con sede en Europa y haciendo el promedio de los datos que estos aporten, eliminando anteriormente el 15% de los valores superiores e inferiores. (European Money Markets Institute, 2018)

Tanto el LIBOR como el EURIBOR son tipos de interés simples, es decir, un capital C_0 puesto a rentar a una de estas tasas r con madurez en T produce un capital igual a

$$C_T = C_0 (1 + r T) .$$

La tasa continua equivalente r_c para estos índices se puede obtener mediante la relación

$$(1 + r T) = e^{r_c T} \Rightarrow r_c = \frac{\ln(1 + r T)}{T} .$$

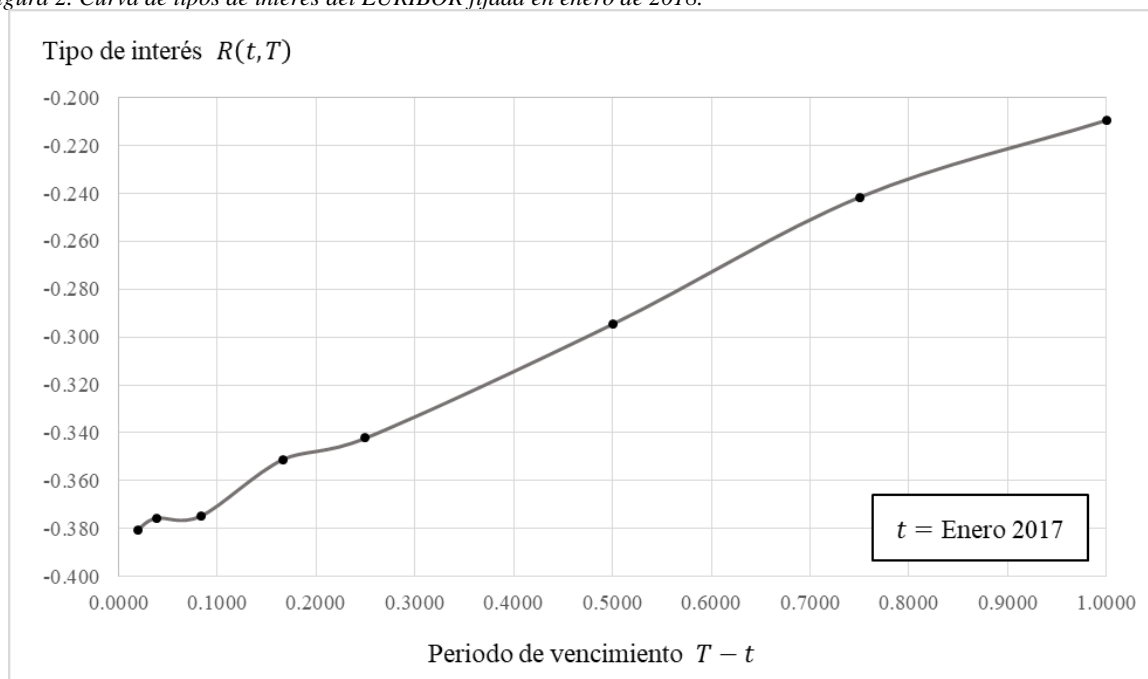
⁷ También existe un índice europeo de referencia para los tipos de interés con vencimiento a 1 día, llamado *Euro OverNight Index Average* (EONIA); publicado por el mismo organismo que emite el EURIBOR, el EMMI.

2.2.3. Dependencia temporal de los tipos de interés

Dado que el LIBOR y el EURIBOR se publican diariamente para varios vencimientos distintos dependen tanto de la fecha en la que han sido publicados como de la longitud del periodo hasta su madurez. Esto se debe a que los tipos de interés tienen una doble dependencia temporal: respecto del momento en el cual se inicia el préstamo y respecto del tiempo hasta su vencimiento. Por esta razón, se utilizará $R(t, T)$ como notación para referirse a los tipos de interés, donde t es la fecha inicial del préstamo y T es la fecha de su vencimiento. Por tanto, $T - t$ es la extensión del periodo hasta su madurez.

Para una fecha inicial t en la que se fijan los tipos de interés se conocen los valores $R(t, T)$ de estos vigentes para los distintos vencimientos T . Con esta información se puede construir la denominada **curva de tipos de interés**, también conocida como **curva de rendimientos** o **estructura temporal de tipos de interés**, que fijado el tiempo inicial t , representa la evolución de la tasa de interés $R(t, T)$ en función de su tiempo hasta vencimiento $T - t$. La Figura 2 muestra la curva de rendimientos del EURIBOR (con tipos de interés continuos), fijada en el mes de enero de 2018, para sus ocho vencimientos.

Figura 2. Curva de tipos de interés del EURIBOR fijada en enero de 2018.



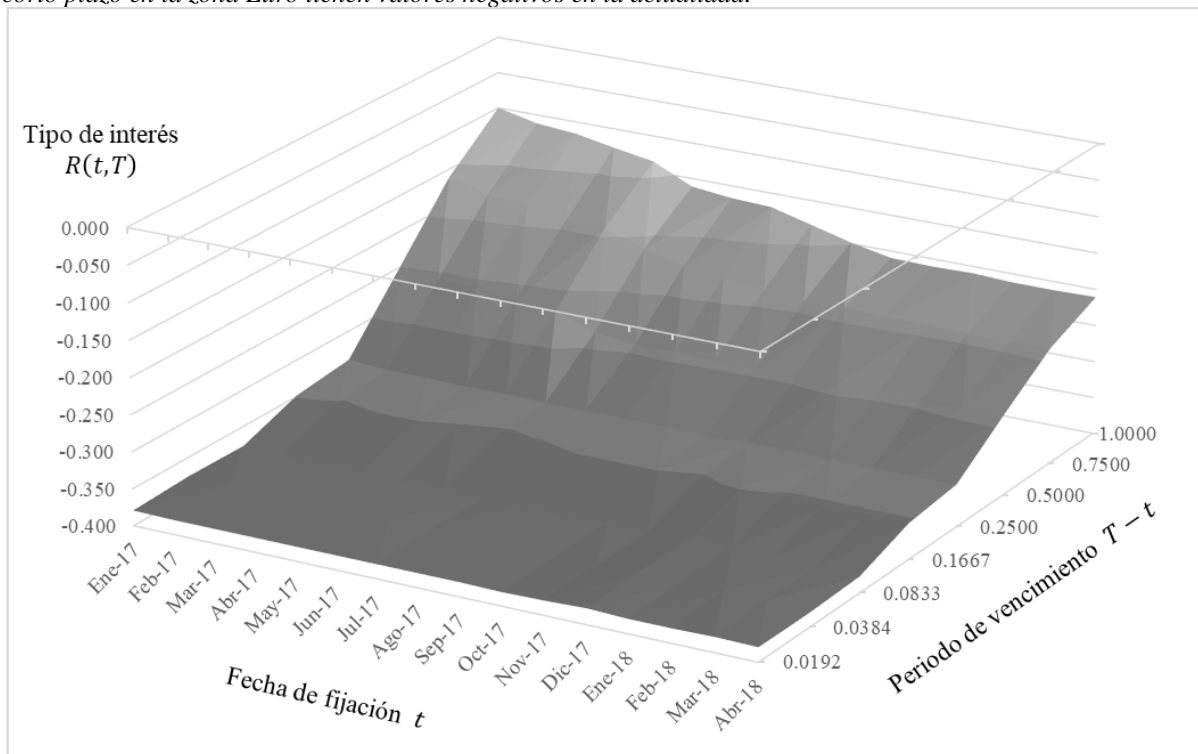
(European Money Markets Institute, 2018)

Como la tasa de interés para una determinada extensión de tiempo hasta vencimiento varía dependiendo de la fecha t en la que se ha fijado, las curvas de intereses evolucionan temporalmente. Esto se puede representar gráficamente asignando un tercer eje a la fecha de fijación. La Figura 3 muestra la evolución temporal, desde enero de 2017 hasta abril de 2018, de la curva de tipos de interés continuos del EURIBOR para sus ocho vencimientos.

En ciertas ramas de la matemática financiera, en particular, en la valoración de derivados sobre acciones y sobre tipos de cambio de divisas, es posible suponer que estas relaciones temporales de los tipos de interés son deterministas. Esta es una hipótesis que permite simplificar la valoración de estos instrumentos y que se puede considerar como válida ya que los movimientos de los precios de los activos subyacentes tienen más relevancia que los cambios que

experimentan los tipos de interés. Sin embargo, al trabajar con derivados sobre tipos de interés, esta suposición claramente no es viable ya que los activos subyacentes son tipos de interés y, por tanto, se los debe considerar como variables estocásticas que varían a lo largo del tiempo.

Figura 3. Evolución temporal de la curva de tipos de interés del EURIBOR. Puede observarse que los tipos de interés a corto plazo en la zona Euro tienen valores negativos en la actualidad.



(European Money Markets Institute, 2018)

2.2.4. Tasa de interés instantánea

Considérese una cuenta bancaria cuyo valor viene representado en todo momento t por $\Pi(t)$, y de la cual se sabe que su valor inicial es igual a una unidad monetaria, es decir, $\Pi(0) = 1$.

En el instante inicial $t = 0$ la cuenta bancaria se pone a rentar a lo largo de un periodo de duración Δt a la tasa de interés disponible en el mercado en ese momento $R(0, \Delta t)$. Una vez alcanzado el vencimiento del préstamo, en $t = \Delta t$, el dinero $\Pi(\Delta t)$ acumulado en la cuenta bancaria se reinvierte a lo largo de otro periodo de duración Δt al tipo de interés existente en el mercado en ese momento $R(\Delta t, 2\Delta t)$, y así sucesivamente. Por consiguiente, en un tiempo genérico t el dinero $\Pi(t)$ en la cuenta bancaria se hace rentar a lo largo de un periodo de longitud Δt al tipo de interés disponible en el mercado $R(t, t + \Delta t)$, obteniéndose un valor total acumulado en la cuenta bancaria de

$$\Pi(t + \Delta t) = \Pi(t) e^{R(t,t+\Delta t)\Delta t},$$

o lo que es igual, teniendo en cuenta que $\Pi(0) = 1$,

$$\Pi(t + \Delta t) = \exp\left(\sum_{i=0}^{i=t} R(i, i + \Delta t) \Delta t\right).$$

Si la longitud Δt de los intervalos de tiempo hasta madurez se hace tender a valores infinitésimamente pequeños dt , el tiempo en el que el tipo de interés es observado y el momento en el que madura coinciden. Se está considerando entonces un tipo de interés aplicado a un intervalo infinitésimamente pequeño de tiempo, que recibe el nombre de **tasa de interés instantánea**, o su nombre en inglés, **short rate**. Este tipo de interés depende únicamente de un instante t de tiempo y, por tanto, se representa por $r(t)$.

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$$

Bajo esta premisa, el comportamiento de la cuenta bancaria en un instante cualquiera de tiempo t se rige por la siguiente ecuación diferencial

$$d\Pi(t) = \Pi(t) r(t) dt .$$

E integrando, el valor de la cuenta bancaria en el tiempo t es igual a

$$\Pi(t) = e^{\int_0^t r(s) ds} .$$

2.2.5. Bonos cupón cero

Un bono es un contrato emitido por una entidad que busca financiación. El emisor de un bono recibe dinero por parte de un prestamista y se compromete a devolverle este nominal más intereses al cabo de una cierta cantidad de tiempo, en la fecha de madurez del bono. Adicionalmente, el bono puede tener o no cupones, estos son pagos intermedios que realiza el prestatario entre la fecha de emisión del instrumento y su fecha de vencimiento.

Un **bono cupón cero** con vencimiento en T es un contrato financiero que paga la totalidad de sus intereses más el principal en su fecha de madurez, sin realizar pagos intermedios. El valor de uno de estos bonos en el tiempo t se representa por $P(t, T)$. Evidentemente, en el instante $t = T$ este valor será igual a la suma del nominal más los intereses, que por convenio suele ser igual a una unidad monetaria, es decir, $P(T, T) = 1$.

Las tasas de interés $R(t, T)$ de estos instrumentos reciben el nombre de **tipos de interés cupón cero**, y se tiene que

$$P(t, T)e^{R(t, T)(T-t)} = P(T, T) ,$$

y, por tanto,

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t} . \tag{1}$$

2.2.6. Tipos de interés forward

Conociendo la curva de tipos de interés disponibles en t es posible calcular el tipo de interés que en ese momento es aplicable para un intervalo de tiempo futuro que comienza en T_1 y vence en T_2 ($T_2 \geq T_1 \geq t$). Esto es lo que se conoce como el **tipo de interés forward**, del inglés **forward rate**.

El tipo de interés *forward* $F(t, T_1, T_2)$ fijado en el tiempo t para el periodo entre las fechas T_1 y T_2 , se puede calcular mediante las tasas de interés $R(t, T_1)$ y $R(t, T_2)$ considerando que realizar un préstamo desde t hasta T_2 a $R(t, T_2)$ debe ser equivalente a realizarlo desde t hasta T_1 a $R(t, T_1)$ y luego reinvertirlo desde T_1 hasta T_2 a $F(t, T_1, T_2)$. Es decir,

$$e^{R(t, T_2)(T_2 - t)} = e^{R(t, T_1)(T_1 - t)} e^{F(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)},$$

de donde se obtiene

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{R(t, T_2)(T_2 - t) - R(t, T_1)(T_1 - t)}{T_2 - T_1}.$$

Si se toma el límite cuando T_1 y T_2 tienden a un mismo valor T se obtiene el **tipo de interés *forward instantáneo***

$$f(t, T) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow T} F(t, T_1, T_2) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T},$$

$$f(t, T) = - \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \quad (2)$$

Este es el tipo de interés observado en el tiempo t aplicable en la fecha T a un intervalo infinitésimamente pequeño de tiempo. Es decir, es el tipo de interés instantáneo para un tiempo futuro T que se observa en el tiempo t . Cuando T tiende a t , el tipo de interés *forward* instantáneo debe coincidir con el *short rate*:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T).$$

2.3. Valoración riesgo neutro

La valoración riesgo neutro es una herramienta que permite valorar derivados utilizando la tasa de interés libre de riesgo. Para comprender como funciona, se seguirá un procedimiento similar al utilizado en (Hull, Options, Futures And Other Derivatives, 2009). Para ello primero se introduce el concepto de precio de mercado del riesgo de una variable y el resultado de la medida de martingala equivalente.

2.3.1. El precio de mercado del riesgo

Considérese una variable $\theta(t)$ que sigue el siguiente proceso estocástico:

$$\frac{d\theta}{\theta} = m dt + s dz_t.$$

Donde m y s son constantes que representan la deriva y la volatilidad de $\frac{d\theta}{\theta}$, respectivamente; y dz es un proceso de Wiener⁸. Se puede pensar en $\theta(t)$ como la modelización de la evolución del precio de un activo financiero a lo largo del tiempo. Se interpreta la deriva como el

⁸ Véase la Definición 8.1 del Anexo 1.

crecimiento relativo esperado del precio del activo en un intervalo de tiempo determinado. La volatilidad, en cambio, representa la desviación estándar del incremento relativo del precio del activo. Se asocia este valor al riesgo del activo, cuanto más alto sea su valor más altas serán las fluctuaciones aleatorias.

Supóngase que existe un derivado cuyo precio $f(\theta, t)$ depende exclusivamente del valor de θ y del tiempo t , entonces se puede ver⁹ que sigue el siguiente proceso

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz_t,$$

siendo μ y σ funciones de θ y t , y dz el mismo proceso de Wiener presente en la ecuación diferencial estocástica seguida por θ .

Se puede demostrar (Hull, Options, Futures And Other Derivatives, 2009, págs. 616-617) que para cualquier derivado que satisface las condiciones anteriormente mencionadas se cumple que

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda,$$

donde r es la tasa de interés instantánea libre de riesgo y λ es una función a la que se conoce como el **precio de mercado del riesgo** de la variable θ . Esta función solo depende de θ y t , siendo independiente de la naturaleza del derivado f .

El precio de mercado del riesgo de un activo representa el incremento en el rendimiento de un derivado que depende de dicho activo cuando aumenta el riesgo del derivado. La deriva de cualquier instrumento se puede obtener a partir de su volatilidad, del precio de mercado del riesgo del activo subyacente y del tipo de interés instantáneo libre de riesgo.

$$\mu = r + \sigma \lambda$$

$$\frac{df}{f} = (r + \sigma \lambda) dt + \sigma dz_t$$

Bajo la hipótesis de que el precio de mercado del riesgo de θ es nulo ($\lambda = 0$), la deriva de todo producto financiero dependiente exclusivamente de θ y t es igual al tipo de interés instantáneo libre de riesgo.

$$\frac{df}{f} = r dt + \sigma dz_t$$

Cuando se hace esta hipótesis se dice que se está considerando un **mundo riesgo neutro**. En particular, cuando se cumplen estas condiciones, se habla de un **mundo riesgo neutro tradicional**. Otros mundos riesgo neutro se pueden construir bajo otras hipótesis. En general, se pueden considerar distintos mundos si se asignan distintos valores a λ .

⁹ Se puede deducir fácilmente del Lema de Itô definido en el Anexo 1.

Considérense ahora dos derivados cualesquiera $f(\theta, t)$ y $g(\theta, t)$ dependientes exclusivamente de θ y t , que siguen los procesos:

$$\frac{df}{f} = \mu_f dt + \sigma_f dz_t,$$

$$\frac{dg}{g} = \mu_g dt + \sigma_g dz_t.$$

Se puede demostrar¹⁰ que el precio de un tercer derivado $\phi(\theta, t)$ definido como el ratio entre los productos f y g ($\phi = f/g$) es una martingala¹¹ siempre que el precio de mercado del riesgo de θ sea igual a la volatilidad de g ($\lambda = \sigma_g$). Esto es lo que se conoce como el **resultado de la medida de martingala equivalente**. Por tanto, cuando $\lambda = \sigma_g$ se cumple que

$$\mathbb{E}_g \left(\frac{f_T}{g_T} \right) = \frac{f_0}{g_0},$$

siendo f_0, g_0, f_T y g_T los precios de f y g en los tiempos $t = 0$ y $t = T$, respectivamente.

Cuando al precio de mercado del riesgo de θ se le asigna el valor de la volatilidad σ_g de g se dice que se está considerando un **mundo riesgo neutro forward con respecto a g** . El operador $\mathbb{E}_g(\cdot)$ es la esperanza obtenida en un mundo de este tipo.

2.3.2. Valoración riesgo neutro

Supóngase ahora un mundo riesgo neutro *forward* con respecto a la cuenta bancaria Π definida en el apartado 2.2.4. Como se ha mencionado, este instrumento sigue un proceso determinado por la ecuación diferencial

$$d\Pi(t) = \Pi(t)r(t)dt.$$

Dado que la volatilidad del proceso es nula ($\sigma_\Pi = 0$) el precio de mercado del riesgo bajo esta hipótesis es igual a cero y, por tanto, se está suponiendo el mundo riesgo neutro tradicional que se ha definido en el apartado 2.3.1.

Teniendo en cuenta el resultado de la medida de martingala equivalente y que el valor inicial de la cuenta bancaria Π es una unidad monetaria ($\Pi_0 = 1$), se puede determinar que para el mundo riesgo neutro tradicional el valor actual (en el tiempo $t = 0$) de un derivado f se puede expresar como

$$f_0 = \mathbb{E}_\Pi \left(\frac{f_T}{g_T} \right) = \mathbb{E}_\Pi \left[e^{-\int_0^T r(t) dt} f_T \right], \quad (3)$$

siendo $\mathbb{E}_\Pi(\cdot)$ la esperanza obtenida en el mundo riesgo neutro tradicional.

¹⁰ (Hull, Options, Futures And Other Derivatives, 2009, pág. 621)

¹¹ Véase la Definición 8.2 del Anexo 1.

Esto es lo que se conoce como *valoración riesgo neutro* de un derivado. Consiste en obtener el precio actual f_0 de un derivado como la esperanza en un mundo riesgo neutro tradicional de su valor futuro f_T descontado a través de la tasa de interés instantánea libre de riesgo $r(t)$. Entre el momento actual $t = 0$ y el tiempo futuro $t = T$, esta tasa toma valores de manera arbitraria ya que se trata de una variable estocástica. Nótese que si en cambio se considerase que toma un valor r constante se cumpliría que

$$f_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_\Pi(f_T),$$

lo cual facilita notablemente la valoración riesgo neutro, razón por la cual, para ciertos derivados, se acepta esta hipótesis, como se ha comentado en el apartado 2.2.3.

2.3.3. Cambio de mundos riesgo neutro

En un mundo riesgo neutro forward con respecto a g el precio de mercado del riesgo es igual a la volatilidad σ_g de g . Por tanto, el proceso seguido por un producto f es

$$\frac{df}{f} = (r + \sigma_f \sigma_g) dt + \sigma_f dz_t.$$

En cambio, en un mundo riesgo neutro forward con respecto a h el precio de mercado del riesgo es igual a la volatilidad σ_h de h y el proceso seguido por el producto f es

$$\frac{df}{f} = (r + \sigma_f \sigma_h) dt + \sigma_f dz_t.$$

Se puede concluir entonces que cambiar de un mundo riesgo neutro forward con respecto a g a un mundo riesgo neutro forward con respecto a h es equivalente llevar a cabo un incremento en la deriva de $\frac{df}{f}$ igual a $\sigma_f (\sigma_h - \sigma_g)$.

Capítulo 3: Derivados Financieros

Un derivado es un contrato financiero entre dos entidades cuyo *payoff* (intercambio monetario que se hace para liquidar el contrato) depende del precio de otro producto financiero, conocido como activo subyacente, el cual puede ser en sí otro derivado. Los derivados, al ser contratos, tienen un periodo de tiempo de vigencia, desde una fecha inicial de firma hasta una fecha final de vencimiento. Conjuntamente, cuentan con una serie de reglas que deben seguir las dos partes involucradas en él y que permiten calcular su *payoff*.

Los derivados más sencillos se ejecutan únicamente en su fecha de vencimiento y tienen *payoffs* que dependen solamente del precio del subyacente en ese momento. No obstante, existen productos más complejos que incorporan características como la posibilidad de ejercicio antes de vencimiento o el cálculo del *payoff* a partir de los precios que ha tomado el activo subyacente entre las fechas de inicio y madurez.

Una vez creados, los derivados pueden venderse a otros inversores como cualquier otro activo. La valoración de un derivado implica obtener un precio justo de adquisición, de tal forma que no exista oportunidad de arbitraje. Claramente, el precio de adquisición de un derivado está relacionado con su *payoff*. De hecho, el precio de un derivado debe coincidir con su *payoff* en la fecha de vencimiento ya que de no ser este el caso existiría una oportunidad de arbitraje. Por ejemplo, si se tiene un derivado cuya fecha de vencimiento coincide con la actualidad y cuyo *payoff* es 1 unidad monetaria, el precio de dicho derivado tiene que ser 1 unidad monetaria. Si el precio al que se vende el derivado es menor, un arbitrajista podría comprar el instrumento e, inmediatamente, liquidar el derivado, obteniendo así un beneficio neto libre de riesgo. Lo mismo podría ocurrir si el precio de adquisición del derivado fuese mayor que el *payoff*, el arbitrajista vendería el derivado y pagaría su *payoff* inmediatamente.

El precio f_0 de adquisición en el tiempo actual de un derivado se puede obtener mediante su precio f_T en la fecha de vencimiento (que coincide con el *payoff*) y la ecuación (3) para la valoración riesgo neutro

$$f_0 = \mathbb{E}_\Pi \left[e^{-\int_0^T r(t) dt} f_T \right].$$

En la fecha actual no se puede conocer cómo se comportará el *short rate* $r(t)$ entre $t = 0$ y $t = T$, dado que es una variable estocástica. En los capítulos subsiguientes se analizará cómo, mediante modelos para el *short rate* y métodos numéricos, se puede aproximar el valor del derivado f_0 en la actualidad.

En toda la teoría de valoración de derivados es fundamental conocer el *payoff* a vencimiento de un derivado, como se deduce de la formula anterior.

A continuación, se describen algunos de los derivados más comúnmente intercambiados en los mercados financieros, como es el caso de los *forwards*, los futuros, los *forwards rate agreements*, los *swaps* y las opciones. Es necesario introducir estos instrumentos financieros primero para poder comprender cómo funcionan los *swaptions* bermuda y de esta forma obtener el *payoff* que genera a vencimiento, lo cual permitirá valorarlos en posteriores capítulos.

3.1. *Forwards*

Un **contrato a plazos**, mejor conocido por su nombre inglés como contrato **forward**, es un instrumento financiero en el cual dos inversores acuerdan llevar a cabo en la fecha T de vencimiento del contrato la compraventa de un determinado activo a un precio F_0 fijado en el momento de firma del contrato. En este acuerdo, ambas partes están obligadas a cumplir con la transacción en el tiempo futuro (esto no es así para todos los derivados, como, por ejemplo, las opciones, que se analizarán más adelante en este capítulo). Participar en este tipo de contrato no supone un desembolso inicial de dinero para ninguno de los dos inversores, es decir, ninguna de las partes debe pagar una prima para adquirir su posición en él. Por esta razón, el precio F_0 de compraventa debe fijarse de tal forma que el precio del contrato en el instante de la firma del derivado sea nulo.

Sea $S(t)$ el precio en el tiempo genérico t del activo subyacente de un *forward*. En el tiempo T , la transacción física del activo subyacente no siempre se lleva a cabo, es decir, que muchas veces los inversores acuerdan limitarse a intercambiar una cantidad monetaria equivalente a la diferencia entre el precio real del activo y el precio acordado. Esta cantidad es el *payoff* del contrato. Así, el inversor que se ha comprometido a comprar el activo (la posición larga) recibe

$$S(T) - F_0$$

ya que debe pagar un precio de F_0 por un activo que en el mercado cuesta $S(T)$. Si el precio disponible en el mercado es mayor que el precio acordado, el inversor percibirá un beneficio; mientras que si es menor, la transacción supondrá una pérdida de dinero para él.

Evidentemente, el *payoff* que percibe en el tiempo T el lado opuesto del contrato *forward* (la posición corta) es de

$$F_0 - S(T)$$

Los contratos *forward* se llevan a cabo entre inversores privados en los mercados OTC. Dado que no están estandarizados, sus condiciones, como, por ejemplo, la fecha de vencimiento, pueden estar hechas a medidas, para ajustarse a las necesidades de ambas partes.

3.2. Futuros

Un **futuro** es un derivado financiero similar a un contrato *forward* en el sentido de que ambos son acuerdos entre dos partes para comprar y vender un determinado activo a un precio especificado F_0 en la fecha T de vencimiento del contrato. La principal diferencia entre estos dos instrumentos reside en que los *forwards* se liquidan con un único pago a vencimiento mientras que los futuros se saldan diariamente usando precios del mercado.

Para comprender este concepto, considérese un futuro para comprar o vender un activo donde F_0 es el precio dictado por el mercado en la fecha t_0 para la compraventa en el vencimiento T y donde F_1, F_2, \dots, F_N son los precios acordados en las fechas t_1, t_2, \dots, t_N para esta misma transacción, con $t_N = T$.

El primer día tras la firma del contrato, el inversor en la posición larga del contrato percibe un flujo de caja igual a $F_1 - F_0$ (si $F_1 > F_0$, se le abona esa cantidad en su cuenta y si $F_1 < F_0$ se

le cobra ese importe) mientras que al inversor en la posición corta se le cobra o abona $F_0 - F_1$. Al día siguiente ocurre lo mismo, siendo los flujos $F_2 - F_1$ y $F_1 - F_2$, respectivamente; y así N veces hasta llegar a la fecha T de vencimiento del contrato.

Teniendo esto en cuenta, la suma de los flujos de caja que percibe la parte larga del contrato, desde la fecha de firma hasta la fecha de madurez, es de

$$\sum_{i=1}^{i=N} F_i - F_{i-1} = F_N - F_0$$

Tiene sentido suponer que en la fecha T de madurez el precio acordado en el futuro F_N es igual al precio del activo $S(T)$, ya que de lo contrario existiría oportunidad de arbitraje tomando una posición en el activo y la contraria en su futuro correspondiente. Por tanto:

$$F_N - F_0 = S(T) - F_0$$

Considerando esto, se podría pensar que los *forwards* y futuros son contratos idénticos en cuanto a sus payoffs a vencimiento. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el flujo de caja $F_1 - F_0$ que percibe la parte corta ocurre en t_1 , el flujo de caja $F_2 - F_1$ ocurre en t_2 y así sucesivamente. La cantidad $F_1 - F_0$ podría reinvertirse desde t_1 hasta T a la tasa de interés instantánea libre de riesgo, $F_2 - F_1$ podría reinvertirse desde t_2 hasta T y así sucesivamente con todos los flujos. En consecuencia, el *payoff* que percibe el inversor en la parte larga del contrato es de

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left[(F_i - F_{i-1}) e^{\int_{t_i}^T r(s) ds} \right]$$

que puede ser mayor o menor que $S(T) - F_0$; mientras que el rendimiento para la parte corta es de

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left[(F_{i-1} - F_i) e^{\int_{t_i}^T r(s) ds} \right]$$

Las diferencias entre los futuros y los *forwards* no se limitan a la liquidación diaria. Mientras que los *forwards* se intercambian en los mercados OTC, los futuros se negocian en los mercados bursátiles y, por tanto, están estandarizados. En consecuencia, solamente existen futuros para un conjunto de fechas de vencimiento especificadas por la bolsa en la que cotizan. Por último, mientras que en los *forwards* puede llevarse a cabo la compraventa del subyacente, los futuros se limitan únicamente al intercambio de flujos de caja.

3.3. Forward Rate Agreements

Un *Forward Rate Agreement* (FRA) es un instrumento que se negocia en los mercados OTC cuya finalidad es intercambiar los intereses devengados por dos tasas distintas en un mismo periodo de tiempo futuro. Uno de los tipos de interés es una tasa fija, cuyo valor R_K viene definido en el contrato, mientras que el otro es una tasa variable, cuyo valor $R_V(t, T)$ depende de la fecha de fijación t . La posición que paga los intereses correspondientes a la tasa fija y

recibe los de la tasa variable recibe el nombre de “pata fija”, del inglés *fixed leg*, mientras que su contrapartida, que se ve sometida a las transacciones contrarias (recibir intereses de una tasa fija y pagar intereses de una tasa flotante), suele llamarse “pata flotante”, del inglés *floating leg*.

Para calcular los *payoffs* correspondientes a cada posición se deben considerar tres instantes de tiempo distintos: t , T_0 y T_1 . La fecha t es el momento en el que se firma el FRA y, por ende, cuando se fija la tasa R_K . Entre las fechas T_0 y T_1 se acumulan los intereses de ambas tasas y, por tanto, T_0 es la fecha de fijación de la tasa R_V y T_1 es su fecha de madurez. La fecha T_1 también representa el vencimiento del FRA y es el instante de tiempo en el que se intercambian los intereses devengados por cada tasa. En consecuencia, el *payoff* que percibe la pata fija en el tiempo T_1 es de:

$$C(e^{R_V(T_0, T_1)(T_1 - T_0)} - e^{R_K(T_1 - T_0)})$$

siendo C el nominal del contrato. Este rendimiento será positivo si el tipo de interés $R_V(T_0, T_1)$ toma un valor mayor a R_K en la fecha T_0 de fijación, de lo contrario será un flujo de caja negativo. Claramente, el *payoff* que percibe la pata flotante en el tiempo T_2 es el opuesto:

$$C(e^{R_K(T_1 - T_0)} - e^{R_V(T_0, T_1)(T_1 - T_0)})$$

Para fijar el tipo de interés variable se suele considerar el LIBOR o el EURIBOR más una cantidad fija que también se estipula en el contrato.

Tomar posiciones en un FRA no supone un desembolso inicial de dinero para ninguna de las dos partes involucradas. Por tanto, la tasa R_K se fija para que el precio de adquisición del derivado sea nulo en la fecha de firma del contrato.

3.4. Interest Rate Swaps

Un *swap*, o *permuta*, es un instrumento financiero en el cual dos entidades se comprometen a intercambiar flujos de capital en fechas futuras estipuladas por el contrato. Dentro de esta familia de derivados, los más utilizados comúnmente son los **Interest Rate Swaps** (IRS), o **permutas de tipos de interés**. Los IRS son una generalización de los FRA ya que, al igual que estos, se basan en el intercambio de los intereses devengados por una tasa fija por los intereses producidos por una tasa variable. A diferencia de los FRA, los IRS suponen más de un sólo intercambio de flujo de caja. Los IRS se clasifican en *Payer Interest Rate Swaps* (PIRS) o *Receiver Interest Rate Swaps* (RIRS), según se tome la posición de pata fija o pata flotante, respectivamente, en el contrato.

Al igual que en los FRA, el valor R_K del tipo de interés constante se fija en la fecha t de firma del contrato. Sin embargo, los IRS tienen N fechas de fijación de la tasa variable R_V (T_0, T_1, \dots, T_{N-1}), siendo T_1, T_2, \dots, T_N sus fechas de vencimiento correspondientes, en las que se producen los intercambios monetarios. Teniendo esto en mente, la suma de los N flujos de caja que percibe un inversor que ha entrado en un PIRS es de:

$$\sum_{i=1}^{i=N} C(e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})} - e^{R_K(T_i - T_{i-1})})$$

Para obtener el *payoff* que le corresponde a esta posición a vencimiento del contrato se necesita considerar el efecto de reinvertir cada una de estas cantidades hasta la fecha T_N de madurez del contrato:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left[C(e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})} - e^{R_K(T_i - T_{i-1})}) e^{\int_{T_i}^{T_N} r(t) dt} \right] \quad (4)$$

El *payoff* a vencimiento correspondiente a un RIRS es de

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left[C(e^{R_K(T_i - T_{i-1})} - e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})}) e^{\int_{T_i}^{T_N} r(t) dt} \right] \quad (5)$$

Entrar en un IRS no supone un desembolso inicial de capital. De igual manera que para los FRA, la tasa R_K debe fijarse para que el valor del derivado sea nulo en la fecha de firma del contrato.

3.5. Opciones

Una **opción** es un derivado financiero entre dos partes en el cual el comprador del instrumento (posición larga o suscriptor de la opción) adquiere el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender un activo subyacente al vendedor del contrato (posición corta o emisor de la opción) a un precio K determinado (precio de ejercicio o *strike*) antes de una fecha T de vencimiento. Las opciones pueden categorizarse dependiendo de la transacción que vaya a realizar el suscriptor del contrato, si este tiene el derecho a comprar el activo subyacente, se dice que es una opción *call*, mientras que, si puede venderlo, se conoce como una opción *put*.

El suscriptor de una opción debe pagar un precio por entrar en el contrato dado que posee la facultad de decidir si se lleva a cabo o no la transacción. Su contrapartida recibe esta cuantía, pero está obligada a obedecer la decisión que tome la parte larga. Este precio es conocido como la prima de la opción.

Los dos tipos de opciones básicas o *vainilla* (del inglés, *vanilla options*) son las opciones europeas y las opciones americanas. Las primeras solamente admiten ser ejercidas en la fecha de madurez, mientras que las segundas pueden ser ejecutadas en cualquier instante de tiempo hasta, e incluido, el vencimiento. En ambos casos, el *payoff* se calcula únicamente teniendo en cuenta el precio de ejercicio K y el precio $S(t_E)$ del activo en el momento t_E de ejecución de la opción.

Sin embargo, existen opciones que siguen diferentes normas respecto al tiempo en el que se pueden ejercer y a cómo se calculan sus *payoffs* y que, por tanto, se agrupan dentro de las llamadas opciones exóticas (del inglés, *exotic options*). Las **opciones bermuda** se encuentran dentro de esta categoría. Estas son opciones que, a diferencia de las europeas, se pueden ejercer en momentos anteriores al vencimiento pero que, a diferencia de las opciones americanas, los momentos en los que se puede ejercer están fijados de antemano, por ejemplo, al último día de cada mes. Al igual que en las opciones *vanilla*, el *payoff* se calcula únicamente con el precio de ejercicio y el precio del activo en la fecha de ejecución de la opción.

El cálculo del *payoff* se puede razonar de la misma manera para los tres tipos de opciones mencionados anteriormente teniendo en cuenta los valores que puede tomar la fecha t_E de ejecución del contrato. En las opciones europeas, t_E debe forzosamente coincidir con la fecha T de madurez del contrato. En las opciones americanas, t_E puede tomar cualquier valor entre los instantes t de firma del contrato y T de vencimiento. En las opciones bermuda, t_E debe pertenecer al conjunto t_1, t_2, \dots, t_N de fechas de ejecución estipuladas en el contrato (con $t_N = T$). Teniendo esto en cuenta, en una opción *call* el *payoff* de la posición larga en la fecha t_E de ejecución del contrato es igual a

$$\max[S(t_E) - K, 0]$$

Si $S(t_E) > K$ el inversor puede comprar el activo por debajo del precio de mercado en ese momento, mientras que si $S(t_E) < K$ el inversor ejercerá su derecho a no llevar a cabo la transacción. Análogamente, la posición corta de una opción *call* percibe un *payoff* igual a

$$\min[0, K - S(t_E)]$$

ya que está obligada a obedecer la decisión del suscriptor de la opción. En principio, este instrumento puede parecer malo para el emisor ya que el rendimiento siempre es no positivo, pero se debe considerar que la prima que esta posición recibe en la fecha t de firma del contrato se calcula de tal forma que el derivado sea imparcial. Si se paga una prima c en la fecha t para entrar en la opción *call*, el rendimiento total de la parte larga en t_E es igual a

$$\max[S(t_E) - K, 0] - c e^{\int_t^{t_E} r(s) ds}$$

que puede ser positivo o negativo. La posición corta tiene un rendimiento total en t_E igual a

$$\min[0, K - S(t_E)] + c e^{\int_t^{t_E} r(s) ds}$$

Existen otras opciones en las cuales el *payoff* no depende solamente del precio del activo subyacente en la fecha de ejercicio, sino que también del resto de valores que este activo toma entre las fechas t de firma del contrato y T de ejecución. Se dice que estas opciones son dependientes del camino que sigue el activo subyacente. Por ejemplo, en las opciones asiáticas el *payoff* depende de la media del precio del activo subyacente durante un determinado periodo.

3.6. Swaptions

Un *swaption* es una opción que tienen como activo subyacente a un IRS. El comprador de un derivado de este tipo adquiere, el derecho, pero no la obligación, de entrar en un momento futuro en un IRS especificado de antemano. Estos derivados se pueden clasificar en *payer swaptions* o *receiver swaptions* dependiendo de si el IRS subyacente es un PIRS o un RIRS.

En un swaption de tipo europeo existen dos fechas claves:

- La fecha t de firma del derivado, en la cual se acuerdan las condiciones del IRS al que puede acceder el suscriptor del *swaption*. En particular, se concreta el valor del tipo de interés fijo R_K^* del *swap* al que puede optar por entrar la posición larga.

- La fecha T de madurez del swaption. En esta fecha el comprador del instrumento debe decidir si desea entrar o no en el IRS subyacente. Esta fecha suele coincidir con la primera fecha T_0 de fijación de la tasa variable R_V del IRS subyacente, en la cual se comienzan a acumular los intereses que se intercambiarán en la primera fecha de pago.

En la fecha de vencimiento, en caso de existir un IRS en el mercado con una tasa fija R_K más favorable, es decir, que cumple que $R_K^* > R_K$ si se trata de un *payer swaption* o que cumple que $R_K^* < R_K$ si se trata de un *receiver swaption*, la posición larga optará por no entrar en el IRS subyacente. Si en cambio la tasa fija R_K^* del IRS subyacente al *swaption* es más favorable que la tasa fija R_K de los IRS ofertados en el mercado, el suscriptor de la opción ejercerá su derecho a poder entrar al IRS subyacente ya que tiene condiciones más favorables. En consecuencia, el *payoff* en la fecha T de vencimiento para la posición larga de un *swaption* (ya sea de tipo *payer* o *receiver*) es

$$\max\left(f_T^{(IRS^*)} - f_T^{(IRS^M)}, 0\right),$$

donde $f_T^{(IRS^*)}$ es el precio en la fecha T del IRS subyacente al *swaption* (es decir, el *payoff* del IRS subyacente descontado a la fecha T mediante la valoración riesgo neutro) y $f_T^{(IRS^M)}$ es el precio en la fecha T del IRS equivalente disponible en el mercado. Como se ha comentado en el apartado 2.4.4. el valor de R_K de un IRS se fija de tal forma que su precio en la fecha de firma del contrato sea cero, por tanto, en la fecha T los IRS disponibles en el mercado fijan un valor para esta tasa tal que $f_T^{(IRS^M)} = 0$. Sin embargo, R_K^* se ha fijado en t y, por ende, el precio $f_T^{(IRS^*)}$ en T del IRS subyacente al *swaption* puede ser positivo o negativo. En conclusión, el *payoff* en la fecha T de vencimiento para la posición larga de un *swaption* es

$$\max\left(f_T^{(IRS^*)}, 0\right).$$

El precio $f_T^{(IRS^*)}$ en T del IRS subyacente al *swaption* puede calcularse mediante la valoración riesgo neutro. Recordando la ecuación (4), el *payoff* en la fecha T_N de vencimiento de un PIRS cuya tasa fija es R_K^* es igual a

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left[C \left(e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})} - e^{R_K^*(T_i - T_{i-1})} \right) e^{\int_{T_i}^{T_N} r(t) dt} \right].$$

Este valor se puede identificar por $f_{T_N}^{(PIRS^*)}$. Descontando este *payoff* mediante la valoración riesgo neutro hasta la fecha $T_0 = T$, donde comienzan a acumularse los intereses del PIRS y donde vence el *swaption* subyacente, se tiene que

$$f_T^{(IRS^*)} = \mathbb{E}_\Pi \left[e^{-\int_T^{T_N} r(t) dt} f_{T_N}^{(PIRS^*)} \right],$$

o lo que es lo mismo,

$$f_T^{(IRS^*)} = \mathbb{E}_\Pi \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} \left[C \left(e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})} - e^{R_K^*(T_i - T_{i-1})} \right) e^{-\int_T^{T_i} r(t) dt} \right] \right\}.$$

Por tanto, el *payoff* en la fecha T de vencimiento para la posición larga de un *payer swaption* es

$$\max \left(\mathbb{E}_{\Pi} \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} \left[C(e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})} - e^{R_K^*(T_i - T_{i-1})}) e^{-\int_T^{T_i} r(t) dt} \right] \right\}, 0 \right),$$

puede observarse que esto es equivalente a

$$\max \left(\sum_{i=1}^{i=N} \left[C(e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})} - e^{R_K^*(T_i - T_{i-1})}) \mathbb{E}_{\Pi} \left(e^{-\int_T^{T_i} r(t) dt} \right) \right], 0 \right).$$

Aplicando la ecuación (3) de la valoración riesgo neutro en el tiempo T al precio actual $P(T, T_i)$ de un bono con vencimiento en T_i y recordando que $P(T_i, T_i) = 1$ se tiene que

$$P(T, T_i) = \mathbb{E}_{\Pi} \left[e^{-\int_T^{T_i} r(t) dt} P(T_i, T_i) \right] = \mathbb{E}_{\Pi} \left[e^{-\int_T^{T_i} r(t) dt} \right]$$

En consecuencia, el *payoff* en la fecha T de vencimiento para la posición larga de un *payer swaption* es

$$\max \left(\sum_{i=1}^{i=N} C P(T, T_i) (e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})} - e^{R_K^*(T_i - T_{i-1})}), 0 \right). \quad (6)$$

Análogamente, mediante la ecuación (5) y la valoración riesgo neutro, se tiene que el *payoff* en la fecha T de vencimiento para la posición larga de un *receiver swaption* es

$$\max \left(\sum_{i=1}^{i=N} C P(T, T_i) (e^{R_K^*(T_i - T_{i-1})} - e^{R_V(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})}), 0 \right), \quad (7)$$

Los *swaptions* de tipo bermuda pueden analizarse de manera semejante a los *swaptions* europeos, pero considerando que estos productos proporcionan a la parte larga del contrato otras posibles fechas de ejercicio entre t y T , aparte de T (que es la única posibilidad en los *swaptions* europeos). En estas fechas, que vienen especificadas en el *swaption*, el suscriptor del instrumento debe decidir si desea o no entrar en el IRS predefinido. Sea $t_1^E, t_2^E, \dots, t_M^E$ el conjunto de fechas de ejercicio estipuladas en el contrato que cumplen las siguientes condiciones:

- 1) Son un subconjunto de las fechas T_0, T_1, \dots, T_{N-1} de fijación del IRS subyacente, con $T_0 \leq t_1^E < t_M^E \leq T_{N-1}$. Generalmente, se cumple la igualdad $T_0 = t_1^E$.
- 2) La última fecha de ejercicio coincide con el vencimiento del *swaption*, $t_M^E = T$.

Si el *swaption* se ejerciese en la fecha t_i^E , $i \in \{1, \dots, M\}$, el inversor en la parte larga del *swaption* estaría entrando en un IRS cuya primera fecha T_j , $j \in \{0, \dots, N-1\}$ de fijación de la

tasa variable R_V coincide con la fecha t_i^E de ejercicio. El análisis posterior, sería idéntico que para un *swaption* europeo, pero sustituyendo T por t_i^E en las formulas¹².

¹² Nótese que t_i podría ser igual a T ya que $t_N = T$. Este caso se da cuando el *swaption* bermuda se ejerce en la fecha de vencimiento, en cuyo caso su *payoff* coincide con el de un *swaption* europeo.

Capítulo 4: Modelos De Tipos De Interés

En este capítulo se presentarán distintos modelos que describen el proceso seguido por el tipo de interés instantáneo, también llamados modelos del *short rate*. La razón por la cual se busca representar el comportamiento que sigue esta variable es que, conociendo los valores que toma entre el tiempo actual y un tiempo T futuro se puede determinar el valor que tomarán las tasas de interés en tiempos futuros, para todo tipo de vencimientos. Por tanto, al modelizar el tipo de interés instantáneo, se tendrá un modelo para cualquier tipo de interés futuro. Aplicando la valoración riesgo neutro, esto permitirá obtener el valor actual de un derivado financiero del cual se conoce su *payoff* en el tiempo T . En particular, para derivados en los que se tengan distintas fechas de ejercicio, como es el caso de los swaptions bermuda, se necesitarán modelos para el tipo de interés en distintos tiempos compatibles entre sí, que es justo lo que se obtiene al considerar un modelo del *short rate*.

Escribiendo la ecuación (3) para un tiempo genérico t se obtiene el valor $P(t, T)$ en el tiempo t de un bono cupón cero con vencimiento en T , cuyo *payoff* en el tiempo T se sabe que es de una unidad monetaria ($f_T = P(T, T) = 1$):

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\Pi} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \right]. \quad (8)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1) se obtiene el tipo de interés cupón cero, $R(t, T)$, aplicable en t para un préstamo con vencimiento en T :

$$R(t, T) = -\frac{\ln \mathbb{E}_{\Pi} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \right]}{T - t}.$$

Evidentemente, para un valor de t fijo, variando el valor de T se obtiene la curva de tipos de interés en el tiempo t . Variando el valor de t se obtiene la evolución temporal que experimenta esta curva.

Como se ha discutido anteriormente, las curvas de tipos para distintos tiempos que se obtienen de esta forma son compatibles entre sí. Por lo que este modelo permitirá valorar derivados cuyo *payoff* depende de los tipos de interés en varios instantes de tiempo.

4.1. Modelo lognormal

Una primera aproximación para describir el comportamiento del *short rate* sería suponer que sigue el proceso propuesto por Rendleman y Bartter en 1980¹³:

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz_t,$$

donde μ y σ son dos constantes y dz_t es un proceso de Wiener que sigue una distribución normal con media 0 y varianza dt . En consecuencia, dr/r es un proceso normal con media μdt y varianza $\sigma^2 dt$.

¹³ (Rendleman & Bartter, 1980)

Aplicando el lema de Itô¹⁴, se obtiene que la función $\ln r$ sigue el siguiente proceso

$$d(\ln r) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz_t.$$

Por tanto, $d(\ln r)$ sigue una distribución normal con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt$ y varianza $\sigma^2 dt$

$$d(\ln r) \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma \sqrt{dt} \right].$$

Integrando entre los tiempos genéricos s y t ($s \leq t$) se tiene que

$$\ln \left(\frac{r(t)}{r(s)} \right) \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s), \sigma \sqrt{t - s} \right].$$

Se puede concluir que bajo el proceso descrito anteriormente $r(t)$ sigue una distribución lognormal

$$r(t) \sim \ln N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s) + \ln r(s), \sigma \sqrt{t - s} \right],$$

$$\mathbb{E}[r(t)|r(s)] = r(s) e^{\mu(t-s)},$$

$$\mathbb{V}[r(t)|r(s)] = r^2(s) e^{2\mu(t-s)} (e^{\sigma^2(t-s)} - 1).$$

Nótese que el valor de $r(t)$ está condicionado a su valor en el tiempo s . Típicamente, se tomará s como el tiempo actual, es decir, $s = 0$, ya que $r(0)$ es conocido (es el tipo de interés instantáneo disponible en el mercado en la actualidad).

Este modelo es el análogo al famoso modelo de Black-Scholes-Merton para la valoración de derivados sobre acciones, se acepta la hipótesis que los precios de los activos subyacentes, las acciones, siguen un proceso lognormal de este tipo. Este es el procedimiento reconocido por el mercado y considerado como estándar para la valoración de derivados de este tipo, como es el caso de las opciones europeas sobre acciones. No obstante, este modelo presenta ciertos inconvenientes a la hora de replicar el comportamiento que se observa en los mercados para el tipo de interés instantáneo.

En primer lugar, la distribución lognormal del *short rate* implica que este nunca puede tomar valores negativos. Históricamente, este ha sido un gran punto a favor de este modelo ya que se creía que los tipos de interés eran estrictamente positivos. No obstante, en los últimos años se ha observado que esto no es necesariamente cierto. Como se puede ver en la curva de tipos de interés del EURIBOR para enero de 2018, detallada en la Figura 2, los tipos de interés sí pueden tomar valores negativos. Puesto que para conseguir valores de $R(t, T)$ negativos es necesario que el *short rate* también pueda ser negativo, este modelo está obsoleto en la actualidad.

¹⁴ Véase el Lema 8.1 del Anexo 1.

Por otra parte, este modelo presenta una deriva μ para $dr(t)/r(t)$ que es constante en el tiempo. Esto representa un inconveniente ya que cuando el tiempo tiende a infinito, el *short rate* tiende a infinito o a cero, dependiendo de si μ es positivo o negativo, respectivamente. La implicación anterior se puede deducir rápidamente a partir de la expresión para la esperanza de $r(t)$. Sin embargo, los tipos de interés claramente no se comportan de esta manera.

Por último, este modelo solamente permite valorar de manera analítica a los bonos cupón cero. Para el resto de derivados sobre tipos de interés, como, por ejemplo, opciones sobre bonos, no es posible obtener soluciones analíticas.

4.2. Modelo de Vasicek

El modelo propuesto por Oldrich Vasicek en 1977¹⁵ soluciona algunos de los inconvenientes presentes en el modelo lognormal. En primer lugar, Vasicek propone una distribución normal para el tipo de interés instantáneo, en lugar de una lognormal, lo cual supone dos ventajas: hace posible la existencia de tipos de interés negativos y facilita la manejabilidad del modelo. Por otro lado, este modelo incorpora reversión a la media, es decir, que el *short rate* tiende a un determinado valor cuando el tiempo tiende a infinito.

Según este modelo, la tasa de interés instantánea sigue el proceso

$$dr = a[\theta - r]dt + \sigma dz_t ,$$

donde a , θ y σ son constantes. Se puede observar que siempre que la variable estocástica r se encuentre por encima del parámetro θ , la deriva del proceso será negativa, mientras que cuando esté por debajo, la deriva tendrá un valor positivo; por ende, el tipo de interés instantáneo revierte a θ . El parámetro a mide la “fuerza” con la que r revierte a θ .

Integrando la ecuación diferencial estocástica¹⁶, se puede obtener una ecuación analítica para el tipo de interés instantáneo bajo el modelo de Vasicek condicionada a la información disponible en el mercado en el tiempo s

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \theta(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz_u .$$

Se puede concluir que $r(t)$ sigue una distribución normal:

$$r(t) \sim N \left[r(s)e^{-a(t-s)} + \theta(1 - e^{-a(t-s)}), \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a}} \right].$$

El modelo de Vasicek permite obtener ecuaciones analíticas tanto para los bonos cupón cero como para opciones europeas sobre bonos cupón cero.

¹⁵ (Vasicek, 1977, págs. 177-188)

¹⁶ El procedimiento seguido para poder obtener $r(t)$ es análogo al que se presenta en el apartado 3.3.1. para obtener $r(t)$ bajo el modelo de Hull & White.

Pese a las mejoras que el modelo de Vasicek plantea respecto del modelo lognormal, presenta un gran problema en la obtención de la curva de tipos de interés actual. Dado que el modelo cuenta únicamente con tres parámetros, sólo sería posible replicar de manera aproximada el comportamiento de la curva observada en el mercado. De hecho, existen ciertas formas que esta curva puede tomar que nunca podrían ser obtenidas simplemente por tres parámetros. Para hacer coincidir la curva de tipos de interés que computa este modelo perfectamente con la que está presente en el mercado sería necesario tener un número infinito de parámetros.

4.3. Modelo de Hull & White

El modelo de Hull & White supone una generalización respecto del modelo de Vasicek, razón por la cual también suele llamarse modelo extendido de Vasicek. Este modelo está diseñado de tal manera que el proceso seguido por el *short rate* sea consistente con la curva de tipos de interés actual que se observa en el mercado. Para lograr este propósito se incorpora en la deriva del proceso una función determinista dependiente del tiempo.

El modelo originalmente propuesto por John C. Hull y Alan White en 1990¹⁷ es el siguiente

$$dr = [\vartheta(t) - a(t)r]dt + \sigma(t) dz_t ,$$

donde a , σ y ϑ son funciones deterministas dependientes del tiempo. Este modelo permite replicar de manera exacta la curva de tipos de interés actual y la estructura temporal actual de las volatilidades de las tasas de interés. No obstante, dado que esta segunda característica no aporta grandes mejoras al modelo¹⁸, se va a considerar la siguiente alternativa, propuesta por los mismos autores en 1994¹⁹:

$$dr = [\vartheta(t) - ar]dt + \sigma dz_t ,$$

donde a y σ son constantes y ϑ es una función que depende del tiempo. Puede observarse que el modelo de Vasicek es un caso particular de este modelo tomando a ϑ como un valor constante igual a θ/a .

4.3.1. Ecuación analítica del *short rate* bajo el modelo de Hull & White

Con el objetivo de obtener la ecuación analítica del *short rate*, es necesario integrar la ecuación diferencia estocástica (EDS) que define el proceso que esta variable sigue. El inconveniente que surge al intentar integrar directamente la EDS es que aparecen términos con $r(t)$ a ambos lados de la igualdad y no se trata de una ecuación diferencial homogénea. Por tanto, el primer paso a seguir debe ser pasar los términos que contienen a $r(t)$ al mismo lado de la igualdad.

$$dr(t) + ar(t) dt = \vartheta(t) dt + \sigma dz_t$$

¹⁷ (Hull & White, Pricing Interest-Rate-Derivative Securities, 1990)

¹⁸ Hull y White destacan en artículos posteriores (Hull & White, A Note on the Models of Hull and White for Pricing Options on the Term Structure: Response, 1995) que este modelo no es capaz de reproducir de manera realista las curvas de volatilidades en tiempos futuros, solamente permite replicar la estructura temporal actual de las volatilidades.

¹⁹ (Hull & White, Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models, 1994a)

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por e^{at} , el lado izquierdo produciría un único diferencial y el lado derecho seguiría sin depender de $r(t)$.

$$e^{at}[dr(t) + a r(t)dt] = e^{at}[\vartheta(t) dt + \sigma dz_t],$$

$$d(e^{at} r(t)) = e^{at}[\vartheta(t) dt + \sigma dz_t].$$

Si ahora se integra a ambos lados de la ecuación entre los tiempos s y t :

$$\int_s^t d(e^{au} r(u)) = \int_s^t e^{au} \vartheta(u) du + \int_s^t e^{au} \sigma dz_u,$$

$$e^{at} r(t) - e^{as} r(s) = \int_s^t e^{au} \vartheta(u) du + \int_s^t e^{au} \sigma dz_u,$$

$$r(t) = e^{-at} \left\{ e^{as} r(s) + \int_s^t e^{au} \vartheta(u) du + \int_s^t e^{au} \sigma dz_u \right\},$$

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)} \vartheta(u) du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz_u. \quad (9)$$

Se obtiene una ecuación analítica para $r(t)$ condicionada a los datos del mercado en el tiempo $s < t$. Los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación son deterministas y el tercer término es estocástico.

4.3.2. Derivación de la función $\vartheta(t)$

Considérese una función determinista $\alpha(t)$ dependiente del tiempo tal que la ecuación analítica del *short rate* se puede reescribir como

$$r(t) = x(t) + \alpha(t), \quad (10)$$

donde $x(t)$ es una variable estocástica que sigue el proceso

$$dx(t) = -a x(t) dt + \sigma dz_t; x(0) = 0. \quad (11)$$

Siguiendo un procedimiento similar que para $r(t)$ en el apartado 3.3.1. anterior, se puede integrar esta expresión resultando en

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz_u. \quad (12)$$

Como se cumple que

$$x(s) = r(s) - \alpha(s),$$

entonces (10) se puede reescribir como

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s) e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz_u . \quad (13)$$

Por ende, se cumple que

$$\alpha(t) - \alpha(s) e^{-a(t-s)} = \int_s^t e^{-a(t-u)} \vartheta(u) du .$$

Por otra parte, utilizando la ecuación (3) de valoración riesgo neutro para valorar un bono cupón cero $P(0, T)$ y teniendo en cuenta que $P(T, T) = 1$, se tiene que

$$P(0, T) = \mathbb{E}_\Pi \left[e^{-\int_0^T r(t) dt} \right] ,$$

y, teniendo en cuenta la ecuación (10), esto se puede escribir como

$$P(0, T) = \mathbb{E}_\Pi \left[e^{-\int_0^T (x(t) + \alpha(t)) dt} \right] .$$

Como $\alpha(t)$ es determinista se pueden separar las integrales y sacar su término correspondiente afuera del operador esperanza, obteniéndose

$$P(0, T) = \mathbb{E}_\Pi \left[e^{-\int_0^T x(t) dt} \right] e^{-\int_0^T \alpha(t) dt} . \quad (14)$$

Dado que $x(0) = 0$, se tiene que

$$x(t) = \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dz_u .$$

Y, por tanto, la integral de $x(t)$ entre $t = 0$ y $t = T$ es igual a

$$\int_0^T x(t) dt = \sigma \int_0^T \int_0^t e^{-a(t-u)} dz_u dt .$$

Cambiando el orden de integración, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^T x(t) dt &= \sigma \int_0^T \int_u^T e^{-a(t-u)} dt dz_u , \\ \int_0^T x(t) dt &= \frac{\sigma}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)}) dz_u . \end{aligned}$$

Dado que dz_t es una variable aleatoria que sigue una distribución normal y se cumple que dz_{t_1} es independiente de $dz_{t_2} \forall t_2 \neq t_1$, se tiene que la integral es un sumatorio de infinitas distribuciones normales independientes e idénticamente distribuidas. En consecuencia, por el Teorema Central del Límite, se puede afirmar que esta integral sigue una distribución normal.

En consecuencia, $e^{-\int_0^T x(t) dt}$ sigue una distribución lognormal, cuya esperanza se puede calcular como

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T x(t) dt} \right] = \exp \left\{ \mathbb{E} \left[-\int_0^T x(t) dt \right] + \frac{\mathbb{V} \left[-\int_0^T x(t) dt \right]}{2} \right\}.$$

La esperanza de $\int_0^T x(t) dt$ es igual a 0 ya que dz_t sigue una distribución normal con media 0

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T x(t) dt \right] = \mathbb{E} \left[\frac{\sigma}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)}) dz_u \right] = 0.$$

La varianza de $\int_0^T x(t) dt$ se puede descomponer en dos esperanzas

$$\mathbb{V} \left[\int_0^T x(t) dt \right] = \mathbb{E} \left\{ \left[\int_0^T x(t) dt \right]^2 \right\} - \left\{ \mathbb{E} \left[\int_0^T x(t) dt \right] \right\}^2,$$

donde el segundo término es nulo ya que la esperanza de $\int_0^T x(t) dt$ es igual a 0. El primer término se puede calcular usando el teorema de isometría de Itô²⁰

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left[\int_0^T x(t) dt \right]^2 \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \left[\frac{\sigma}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)}) dz_u \right]^2 \right\}, \\ \mathbb{E} \left\{ \left[\frac{\sigma}{a} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)}) dz_u \right]^2 \right\} &= \mathbb{E} \left[\frac{\sigma^2}{a^2} \int_0^T (1 - e^{-a(T-u)})^2 du \right]. \end{aligned}$$

Dado que el término dentro de esta esperanza es determinista, se puede determinar que la varianza de $\int_0^T x(t) dt$ es igual a

$$\mathbb{V} \left[\int_0^T x(t) dt \right] = \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - 2 \frac{1 - e^{-aT}}{a} + \frac{1 - e^{-2aT}}{2a} \right).$$

Por tanto, se tiene que

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T x(t) dt} \right] = \exp \left\{ \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - 2 \frac{1 - e^{-aT}}{a} + \frac{1 - e^{-2aT}}{2a} \right) \right\}.$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (14) se obtienen el precio $P(0, T)$ en la actualidad de un bono que vence en T

$$P(0, T) = \exp \left[\frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T + \frac{1 - e^{-2aT}}{2a} - 2 \frac{1 - e^{-aT}}{a} \right) - \int_0^T \alpha(t) dt \right].$$

²⁰ Véase el Teorema 8.1 del Anexo 1.

Tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad y derivando respecto de T se puede obtener la función determinista $\alpha(T)$

$$\frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T + \frac{1 - e^{-2aT}}{2a} - 2 \frac{1 - e^{-aT}}{a} \right) - \int_0^T \alpha(t) dt \right]$$

$$\alpha(T) = - \frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 + e^{-2aT} - 2 e^{-aT})$$

Recordando la ecuación (2) del apartado 2.3.6.:

$$\frac{\partial \ln P(0, T)}{\partial T} = -f(0, T),$$

donde $f(0, T)$ es un tipo de interés *forward* instantáneo observado en la actualidad para un periodo infinitésimamente pequeño en T . En consecuencia,

$$\alpha(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 + e^{-2at} - 2 e^{-at}). \quad (15)$$

Derivando esta expresión respecto de t

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2a} (-2 e^{-2at} + 2 e^{-at}),$$

siendo $\frac{\partial f(0, t)}{\partial t}$ la derivada parcial del tipo de interés *forward* instantáneo con respecto al vencimiento.

Dado que el proceso que sigue el *short rate* bajo el modelo de Hull & White es

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a r(t)]dt + \sigma dz(t)$$

y se ha partido de la hipótesis que

$$r(t) = x(t) + \alpha(t),$$

donde se tiene que

$$dr(t) = dx(t) + d\alpha(t)$$

entonces se cumple que

$$dx(t) + d\alpha(t) = [\vartheta(t) - a r(t)]dt + \sigma dz(t).$$

Teniendo en cuenta que se ha definido a la variable $x(t)$ de tal forma que siga el proceso (11):

$$dx(t) = -a x(t) dt + \sigma dz(t)$$

se puede concluir que

$$-a x(t) dt + \sigma dz(t) + d\alpha(t) = [\vartheta(t) - a (x(t) + \alpha(t))]dt + \sigma dz(t)$$

$$\vartheta(t) = a \alpha(t) + \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

Como se ha obtenido previamente la función determinista $\alpha(t)$ y su derivada $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ respecto del tiempo, se puede determinar la función $\vartheta(t)$ como

$$\vartheta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + a f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) .$$

A partir de este resultado, se puede concluir que la deriva del proceso que sigue el *short rate* bajo el modelo de Hull & White es

$$\frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + a[f(0, t) - r(t)] + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Se puede observar entonces que, bajo este modelo, la deriva del tipo de interés instantáneo está estrechamente relacionada con la curva de tipos de interés *forward* instantáneos observada en la actualidad. Esta curva relaciona los tipos de interés *forward* instantáneos $f(0, t)$ que se observan en la actualidad con el instante t en el que se aplican. Los puntos en esta curva se pueden interpretar como los valores observables en la actualidad para el *short rate* en instantes de tiempo t futuros. Evidentemente, el *short rate* $r(t)$ disponible en t no tiene porqué coincidir con $f(0, t)$, pero sí es el valor que en la actualidad es aplicable para ese instante.

El primer término de la deriva indica que en el instante t , la tasa de interés instantánea crece en media una cantidad igual a la pendiente de la curva de tipos de interés *forward* instantáneos actual en t . El segundo término de la deriva muestra que el *short rate* revierte a esta curva proporcionalmente a la constante a . Es decir, cuando el tipo de interés instantáneo $r(t)$ se encuentra por debajo de la curva, la deriva del proceso será mayor que la pendiente de la curva de tipos de interés *forward* instantáneos actual en t ; mientras que cuando $r(t)$ está por debajo, la deriva será menor. El tercer y último término es atribuible a la volatilidad, el comportamiento del *short rate* será más parecido al de la curva de tipos de interés *forward* instantáneos actual cuando t es un valor cercano al presente.

4.3.3. Esperanza y varianza del *short rate* bajo el modelo de Hull & White

A partir de la ecuación analítica (13) para el *short rate*, se puede determinar que esta variable sigue una distribución normal. Como se ha explicado anteriormente, el término estocástico tiene una esperanza nula, por tanto, la esperanza del *short rate* es

$$\mathbb{E}[r(t)|r(s)] = r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s) e^{-a(t-s)} . \quad (16)$$

La varianza del proceso se puede obtener considerando que la varianza de los términos deterministas es cero y que, por tanto,

$$\mathbb{V}[r(t)] = \mathbb{V} \left[\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz_u \right],$$

$$\mathbb{V}[r(t)] = \mathbb{E} \left\{ \left[\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz_u \right]^2 \right\} - \left\{ \mathbb{E} \left[\sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz_u \right] \right\}^2 .$$

Aplicando el teorema de isometría de Itô para el primer término y teniendo en cuenta que el segundo término de esta expresión es nulo se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[r(t)] &= \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_s^t e^{-2a(t-u)} du \right] , \\ \mathbb{V}[r(t)|r(s)] &= \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}] . \end{aligned} \tag{17}$$

4.3.4. Ecuación analítica del precio de un bono cupón cero

Bajo el modelo de Hull & White es posible obtener una ecuación analítica del precio $P(t, T)$ en la fecha t de un bono cupón cero con vencimiento en T . Como se ha comentado al inicio de este capítulo, mediante la valoración riesgo neutro se puede obtener la ecuación (8) para dicho bono:

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\Pi} \left[e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} \right] .$$

Empleando un razonamiento análogo al que se ha seguido en el apartado 4.3.2., se tiene que

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} \right] = \exp \left\{ \mathbb{E} \left[-\int_t^T r(\tau) d\tau \right] + \frac{\mathbb{V} \left[-\int_t^T r(\tau) d\tau \right]}{2} \right\} .$$

Utilizando la ecuación analítica (9) del *short rate* bajo el modelo de Hull & White obtenida anteriormente, se tiene que,

$$\int_t^T r(\tau) d\tau = \int_t^T r(s) e^{-a(\tau-s)} d\tau + \int_t^T \int_s^{\tau} e^{-a(\tau-u)} \vartheta(u) du d\tau + \sigma \int_t^T \int_s^{\tau} e^{-a(\tau-u)} dz_u d\tau .$$

Esto se puede simplificar hasta obtener una ecuación

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)} ,$$

donde

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(B(t, T)f(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at})B(t, T)^2 \right) , \\ B(t, T) &= \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}] , \end{aligned}$$

siendo $f(0, T)$ el tipo de interés *forward* instantáneo observado en la actualidad para un periodo infinitésimamente pequeño en T .

4.3.5. Calibración del modelo

Para poder utilizar el modelo es necesario cuantificar los parámetros a y σ en lo que se conoce como la calibración del modelo. Este procedimiento utiliza datos históricos sobre instrumentos negociados en el mercado con el fin de que la valoración del derivado que se busca evaluar refleje correctamente la realidad del mercado.

La calibración del modelo consiste en tomar n datos históricos sobre un determinado derivado y compararlos con los respectivos precios que produciría el modelo para distintos valores de a y σ . Se busca obtener los valores de estos parámetros que minimicen el error cometido al valorar el derivado, es decir,

$$\min \left(\sum_{i=1}^n |H_i - M_i| \right), \quad (18)$$

siendo H_i el valor del i -ésimo dato histórico del derivado utilizado en la calibración y M_i el valor correspondiente a dicho derivado que devuelve el modelo.

Puede ocurrir que, para un determinado derivado, no haya suficiente información histórica para calibrar el modelo, ya sea porque tiene poca liquidez, porque no hay datos disponibles para el público general (algo que suele ocurrir para los derivados intercambiados en los mercados OTC) o porque es un nuevo tipo de instrumento que no se ha utilizado anteriormente. En dicho caso, la calibración del modelo se debe llevar a cabo utilizando otros derivados que mantengan similitudes con el instrumento que se busca valorar. Esto se puede hacer ya que lo que se está modelizando es el tipo de interés instantáneo, que debe comportarse de la misma manera para cualquiera de estos productos financieros.

En la valoración de *swaptions* bermuda se podrían utilizar otros *swaptions* bermuda históricos para calibrar el modelo. Sin embargo, no existen muchos datos de estos. Normalmente, se suelen utilizar datos históricos de *swaptions* europeos, *swaps*, *caps* o *floors*. Las características principales de estos derivados son muy similares. Todos estos derivados se negocian OTC. Sin embargo, los *swaptions* europeos son mucho más frecuentes y hay datos de los precios de negociación para calibrar el modelo. Los *swaps*, *caps* o *floors* son contratos estandarizados y sus precios de negociación son dominio público. El hecho de que, bajo el modelo de Hull y White haya una fórmula analítica para los *swaptions* europeos facilita enormemente el proceso de calibración, ya que el valor de M_i se obtiene sin más que evaluar la fórmula para los parámetros a y σ .

4.4. Modelos del *short rate* con dos factores

En los modelos que se han presentado hasta el momento existe una única fuente de aleatoriedad para el proceso que sigue el *short rate*. Como resultado directo de esto, bajo estos modelos todos los tipos de interés en la curva de rendimientos en un tiempo determinado están perfectamente correlacionados. Esta es una clara desventaja de estos modelos ya que no representa de manera fiel el comportamiento de los tipos de interés observado en los mercados. Una solución para este inconveniente es implementar modelos con más de un factor, es decir, con más de una fuente de aleatoriedad. Los casos más sencillos de analizar son los modelos con

dos factores. Por ejemplo, el modelo de Hull & White se puede extender a un modelo de dos factores de la siguiente forma²¹:

$$dr = [\vartheta(t) + u - ar]dt + \sigma_1 dz_{1,t} ,$$

donde u es una variable estocástica que sigue el proceso

$$du = -b u dt + \sigma_2 dz_{2,t} ; u(0) = 0 .$$

dz_1 y dz_2 son dos procesos de Wiener con una correlación igual a ρ . $\vartheta(t)$ sigue siendo una función determinista que tiene como objetivo que el modelo sea consistente con la curva inicial de tipos de interés. a , b , σ_1 y σ_2 son parámetros constantes. Se puede observar que el nivel al que revierte el *short rate* en todo momento es estocástico ya que u es una variable aleatoria. El valor esperado al que revierte el *short rate* es $\vartheta(t)$ ya que la variable u revierte a cero.

Los modelos de dos factores plantean una importante mejora respecto a los modelos analizados en los apartados anteriores. El hecho de que se deje de considerar una correlación perfecta es una propiedad necesaria para la valoración de derivados en los cuales los *payoffs* en t dependen de varios tipos de interés $R(t, T)$ distintos con una misma fecha t pero con distintas fechas T de vencimiento. Esto se debe a que, en los mercados reales, se puede observar que los tipos de interés pertenecientes a una misma curva no están perfectamente correlacionados.

²¹ (Hull & White, Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models, 1994b)

Capítulo 5: Métodos Numéricos

La valoración de *swaptions* bermuda bajo el modelo de Hull & White requiere emplear métodos numéricos dado que no existe una formula analítica para ello. En este capítulo se detalla cómo se pueden implementar árboles trinomiales para llevar a cabo este tipo de estimación.

Aquel lector familiarizado con la simulación por ordenador de modelos matemático podría pensar que sería apropiado implementar el método de Montecarlo para la valoración que se pretende llevar a cabo. No obstante, esto no es conveniente debido a la posibilidad de ejecución prematura permitida en el tipo de derivado que se procura analizar. La valoración de derivados sobre tipos de interés mediante el método de Montecarlo se lleva a cabo siguiendo los siguientes pasos:

- 1) Simular M veces el comportamiento del *short rate* desde la fecha inicial $t = 0$ del instrumento que se pretende valorar hasta su fecha de vencimiento $t = T$. Es necesario que el tiempo t se discretice en un conjunto de instantes $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ donde $t_0 = 0$, $t_N = T$ y $\Delta t = t_j - t_{j-1}, \forall j = 1, \dots, N$ siendo $\Delta t = \frac{T}{N}$. Esta discretización temporal es necesaria ya que de lo contrario para cada una de las M simulaciones sería necesario obtener infinitos valores del *short rate* dado que el tiempo es una variable continua.
- 2) Calcular los *payoffs* en el vencimiento $f_T^{(i)}$ correspondientes a cada una de las M trayectorias, donde $i \in \{1, \dots, M\}$ identifica a cada una de las trayectorias.
- 3) Para cada una de las trayectorias, descontar al tiempo inicial el *payoff* $f_T^{(i)}$ obtenido en 2) mediante el tipo de interés instantáneo, obteniendo así el precio actual del derivado $f_0^{(i)}$ para cada una de las simulaciones:

$$f_0^{(i)} = \exp\left(-\sum_{j=0}^{j=N-1} r^{(i)}(t_j)\right) f_T^{(i)}.$$

- 4) Estimar el valor esperado \hat{f}_0 del precio actual del instrumento financiero como la media aritmética de los M valores obtenidos en el paso 3):

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=M} f_0^{(i)}.$$

Puede observarse que los pasos 3) y 4) son equivalentes a aproximar la valoración riesgo neutro

$$f_0 = \mathbb{E}_\Pi \left[e^{-\int_0^T r(t) dt} f_T \right],$$

a partir de la media muestral

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=M} \left[\exp\left(-\sum_{j=0}^{j=N-1} r^{(i)}(t_j)\right) f_T^{(i)} \right],$$

tomando al sumatorio como una aproximación de la integral dentro del operador esperanza. Claramente, cuanto mayores sean M y N mejor se aproxima este valor al real.

Este método numérico funciona mediante la propagación hacia adelante en el tiempo de las variables subyacentes, se puede decir que trabaja “desde atrás hacia adelante” en el tiempo. Por tanto, no permite en un momento anterior a vencimiento determinar si el ejercicio prematuro del derivado es óptimo o no ya que se desconoce cómo se comportan estas variables entre este instante y el vencimiento. Por ende, el método de Montecarlo no sirve para valorar derivados que se pueden ejercer antes de vencimiento²². En cambio, este método es adecuado para valorar derivados que únicamente se pueden ejercer a vencimiento y cuyos *payoffs* son dependientes del camino seguido, como, por ejemplo, las opciones asiáticas. Esto es así ya que para cada una de las simulaciones del tipo de interés instantáneo se cuenta con todos los valores que este ha tomado desde el tiempo inicial hasta vencimiento y, por tanto, es posible calcular los *payoffs* que son funciones de estos valores.

Los arboles trinomiales y el método de las diferencias finitas, en cambio, son más adecuados para valorar productos financieros con ejecución prematura ya que trabajan “desde adelante hacia atrás” en el tiempo. Esta misma propiedad hace que no sean los métodos más apropiados para valorar derivados cuyos *payoffs* dependen de la evolución temporal del activo subyacente.

Pese a que estos dos métodos son apropiados para valorar derivados que incorporan ejecución prematura, solamente se detallará la implementación de árboles trinomiales. El método de las diferencias finitas requiere de una ecuación diferencial del proceso seguido por el derivado a valorar. Dado que producir una ecuación diferencial para el precio de los *swaption* bermuda bajo el modelo de Hull & White requiere un análisis más extenso, se ha descartado este método y se ha optado por detallar únicamente los árboles trinomiales.

5.1. Árboles trinomiales

Para el estudio de árboles trinomiales se puede comenzar analizando los árboles binomiales, que son un modelo más simple pero que permiten asentar ciertos conocimientos y nomenclatura necesaria en el estudio de este método numérico.

Un árbol binomial es un modelo a través del cual se pretende valorar un derivado. Para ello, se representa la evolución temporal del precio del activo subyacente, considerando solamente un número finito de instantes de tiempo t_0, t_1, \dots, t_N entre la fecha t_0 de la firma del derivado y su fecha t_N de vencimiento. La idea fundamental en un árbol binomial es que si en el instante t_i el precio del activo es igual a S_i , al pasar al instante t_{i+1} siguiente este solamente puede tomar dos posibles valores S_{i+1} , teniendo cada uno de estos dos escenarios una probabilidad determinada de ocurrir.

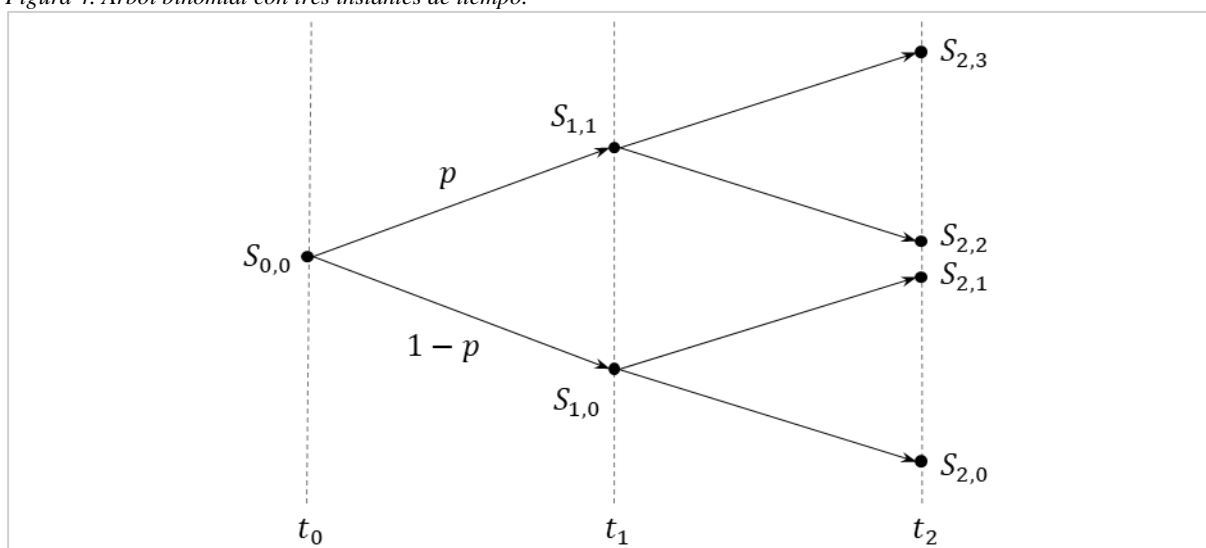
La Figura 4 es una representación gráfica de un árbol binomial con tres instantes de tiempo. El árbol presenta nodos (los puntos de la Figura 4) que son posibles estados por los que puede pasar el precio del activo en el horizonte temporal contemplado por el árbol. Los nodos se identifican por (i, j) donde el índice i refleja el instante t_i en el que se encuentra el nodo y el índice j se utiliza para identificar los distintos nodos de dicho instante de tiempo. El precio del activo en el nodo (i, j) del árbol se representa por $S_{i,j}$. Los nodos se unen entre sí mediante

²² El método de Montecarlo puede adaptarse para valorar derivados con ejecución prematura. Sin embargo, este un trabajo más laborioso que los métodos alternativos que se pueden utilizar para este tipo de instrumentos.

ramas (las flechas que unen a los puntos de la Figura 4), que indican relaciones de correspondencia. Es decir, que estando en un nodo (i, j) determinado solamente se puede pasar a un nodo $(i + 1, k)$ si existe una rama que los conecte. Si esta rama existe, tiene una probabilidad asociada que indica la probabilidad de que estando en el nodo (i, j) se pase al nodo $(i + 1, k)$ al pasar al instante de tiempo siguiente.

En el instante de tiempo t_0 inicial (la actualidad) existe un único nodo, el nodo $(0,0)$ que tiene asociado el precio $S_{0,0}$. Esto es así ya que el precio S_0 del activo subyacente solamente puede ser igual al valor actual al cual se intercambia el activo en el mercado. Al pasar al instante de tiempo t_1 siguiente, existe una bifurcación en el árbol, se puede saltar al nodo $(1,1)$ o al nodo $(1,0)$, con probabilidades p y $1 - p$, respectivamente. Si se ha llegado al nodo $(1,1)$, al pasar al tiempo t_2 , se puede saltar a los nodos $(2,3)$ o $(2,2)$ pero no al nodo $(2,1)$ o al nodo $(2,0)$ ya que no hay ramas que conecten a $(1,1)$ con $(2,1)$ o $(2,0)$. Por simplicidad, se va a considerar que las probabilidades de salto p (hacia arriba) y $1 - p$ (hacia abajo) son iguales en cada bifurcación. Esto no es necesariamente cierto en todos los árboles, como se demostrará en los árboles trinomiales estudiados posteriormente.

Figura 4. Árbol binomial con tres instantes de tiempo.



Por tanto, para poder construir el árbol binomial del activo subyacente es necesario definir el conjunto de instantes de tiempo t_0, t_1, \dots, t_N que se va a considerar, los nodos (i, j) pertenecientes al árbol junto con sus precios $S_{i,j}$ asociados y las probabilidades de salto en cada una de las bifurcaciones del árbol.

Una vez construido el árbol binomial del activo subyacente, se puede valorar el derivado correspondiente en los distintos nodos del árbol. El precio del derivado en un nodo (i, j) se identificará por $f_{i,j}$. Como el objetivo de la valoración es obtener el precio actual del derivado, se busca obtener el valor $f_{0,0}$. El procedimiento que se debe seguir se detalla a continuación.

Para los nodos (N, j) pertenecientes al último instante de tiempo (que coincide con la fecha de vencimiento) el precio $f_{N,j}$ del derivado se puede obtener fácilmente ya que coincide con el *payoff* que el instrumento ofrece en ese momento. El *payoff* en el vencimiento es una función $F(S_N)$ del precio del activo subyacente en ese momento y, por tanto, es distinto para los distintos nodos (N, j) con precios $S_{N,j}$ asociados. En otras palabras,

$$f_{N,j} = F(S_{N,j}).$$

Una vez calculados los precios del derivado en los nodos finales del árbol se puede pasar a obtener los precios $f_{N-1,j}$ en los nodos del instante de tiempo inmediatamente anterior. Para un nodo $(N-1, j)$ determinado se conocen los dos nodos (N, k) y $(N, k+1)$ a los que se puede saltar y las probabilidades de salto asociadas. Mediante el tipo de interés instantáneo libre de riesgo²³ se pueden descontar los precios $f_{N,k}$ y $f_{N,k+1}$ del derivado desde el tiempo t_N hasta t_{N-1} . De esta forma, se puede calcular el precio del derivado en el nodo $(N-1, j)$ como el valor esperado del derivado en el tiempo t_N descontado al tiempo t_{N-1} . En otras palabras,

$$f_{N-1,j} = \mathbb{E}[e^{-r(t_N-t_{N-1})}f_N|S_{N-1,j}] = e^{-r(t_N-t_{N-1})}[pf_{N,k} + (1-p)f_{N,k+1}],$$

donde p es la probabilidad de saltar del nodo $(N-1, j)$ al nodo (N, k) y $1-p$ es la probabilidad de saltar del nodo $(N-1, j)$ al nodo $(N, k+1)$.

En general, es posible calcular el precio del derivado en un nodo (i, j) si se conocen los precios de dicho instrumento en los nodos $(i+1, k)$ y $(i+1, k+1)$ a los cuales se puede saltar con probabilidades p y $1-p$, respectivamente:

$$f_{i,j} = \mathbb{E}[e^{-r(t_{i+1}-t_i)}f_{i+1}|S_{i,j}], \quad (19)$$

$$f_{i,j} = e^{-r(t_{i+1}-t_i)}[pf_{i+1,k} + (1-p)f_{i+1,k+1}].$$

Así, utilizando este procedimiento, se obtiene el precio del derivado primero en los nodos correspondientes a t_N , luego en los nodos correspondientes a t_{N-1} y así sucesivamente para todos los instantes de tiempo hasta llegar al nodo inicial $(0,0)$ en el que se obtiene el precio actual del derivado.

Para poder realizar este procedimiento es necesario conocer la evolución temporal del *short rate* entre la fecha de firma del derivado y su vencimiento ya que se utiliza a lo largo del árbol para descontar hacia atrás en el tiempo el precio del derivado. Para valorar ciertos derivados, como, por ejemplo, aquellos cuyos *payoffs* dependen del precio de acciones, se puede asumir la hipótesis de que esta tasa es determinista y constante. Sin embargo, este supuesto no es adecuado cuando se quiere valorar derivados de tipos de interés.

Los árboles binomiales también permiten valorar derivados que se pueden ejercer de forma prematura. La etapa de construcción del árbol, en la que se obtienen los precios del activo subyacente en cada nodo y las probabilidades de salto en cada bifurcación, es la misma que antes. Sin embargo, a la hora de valorar el derivado en cada nodo hay que tener en cuenta la posibilidad de ejercicio prematuro. Esto consiste en que, para el nodo (i, j) genérico se debe comparar el *payoff* $F(S_{i,j})$ producido por el ejercicio prematuro del contrato en dicho nodo con el valor obtenido a través de la ecuación (19). El mayor de estos dos valores será el precio del activo en dicho nodo. Es decir, si en el nodo (i, j) el primero de estos dos valores es el más alto, significa que, en media, es más conveniente ejercer el derivado cuando se alcanza este nodo ya que el *payoff* en ese nodo es mayor que el valor esperado del derivado en nodos futuros

²³ Considérese por ahora que el tipo de interés instantáneo libre de riesgo no es una variable estocástica, sino que tiene un valor determinista constante r .

descontados hasta ese momento. Si se tiene el caso contrario, es más conveniente mantener el derivado ya que, en media, su precio en nodos futuros es mayor que el *payoff* obtenido en el nodo actual reinvertido hasta el siguiente tiempo. En conclusión, el precio del derivado en el nodo (i, j) viene dado por

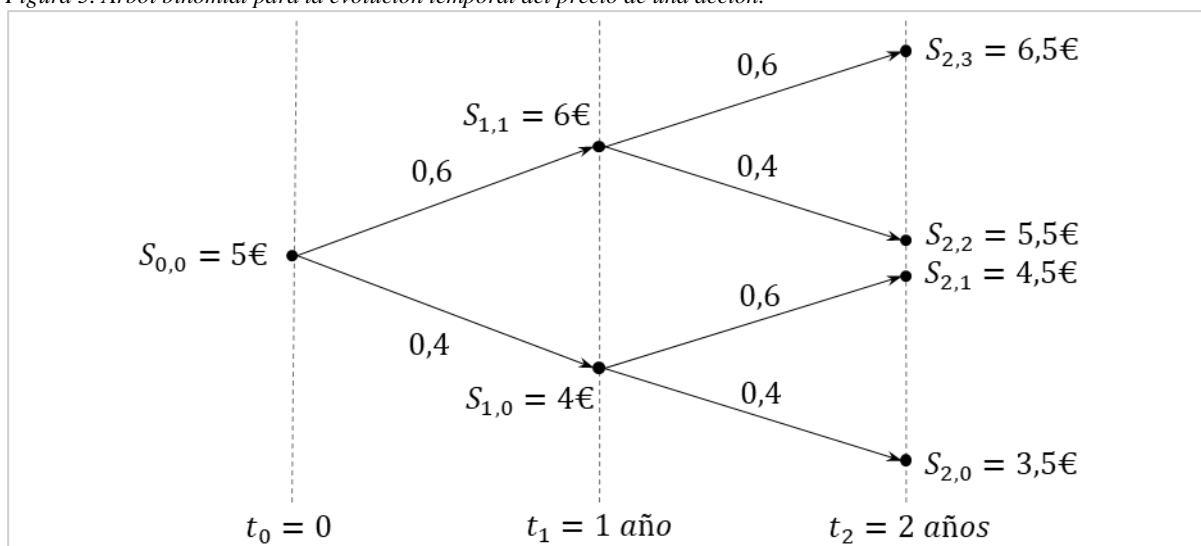
$$f_{i,j} = \max\{F(S_{i,j}), \mathbb{E}[e^{-r(t_{i+1}-t_i)} f_{i+1}|S_{i,j}]\}, \quad (20)$$

$$f_{i,j} = \max\{F(S_{i,j}), e^{-r(t_{i+1}-t_i)} [p f_{i+1,k} + (1-p) f_{i+1,k+1}]\}.$$

Para plasmar el procedimiento detallado hasta el momento, considérese una opción call americana para adquirir una acción. La fecha T de madurez del contrato es igual a 2 años después de la fecha actual ($t = 0$) y el precio K de ejercicio es de 4€. Se sabe que el precio actual de la acción es 5€ y el tipo de interés libre de riesgo se puede considerar constante e igual a un 5% anual continuamente compuesto.

El primer paso a realizar sería construir el árbol binomial de la Figura 5 para la acción subyacente. Se va a omitir la construcción de dicho árbol ya que se comentará más adelante cómo se debe llevar a cabo.

Figura 5. Árbol binomial para la evolución temporal del precio de una acción.



A continuación, se lleva a cabo la valoración de la opción call americana a lo largo del árbol. En primer lugar, se obtiene el *payoff* en el vencimiento, que está relacionado con el precio S de la acción mediante la función

$$F(S) = \max(S - K, 0).$$

De esta forma se obtienen los precios $f_{2,j}$ del derivado en los nodos $(2, j)$:

$$f_{2,3} = 2,5\text{€}; \quad f_{2,2} = 1,5\text{€}; \quad f_{2,1} = 0,5\text{€}; \quad f_{2,0} = 0\text{€}.$$

Con estos resultados, se pasa a la valoración en los nodos $(1, j)$. Para ello se utiliza la ecuación (20):

$$f_{1,1} = \max\{F(S_{1,1}), e^{-0.05}[0,6f_{2,3} + 0,4f_{2,2}]\} = 2\text{€},$$

$$f_{1,0} = \max\{F(S_{1,0}), e^{-0.05}[0,6f_{2,1} + 0,4f_{2,0}]\} = 0,285\text{€}.$$

Nótese que en el nodo (1,1) es conveniente ejercer la opción ya que produce un *payoff* y, por tanto, un precio del derivado de 2€. Si no se ejerciese, el precio actual calculado como el valor esperado de los precios $f_{2,3}$ y $f_{2,2}$ descontados hasta t_1 sería de 1,998€. Es decir, que, en media, se espera un mejor resultado ejerciendo la opción en ese nodo. En cambio, en el nodo (1,0) el derivado produce un *payoff* nulo si se ejerce en dicho, es mejor mantenerlo ya que estando en (1,0) hay un 60% de probabilidad de saltar al nodo (2,1) donde el derivado tiene un *payoff* no nulo.

Finalmente se obtiene el precio $f_{0,0}$ del derivado en la actualidad, también mediante la ecuación (20):

$$f_{0,0} = \max\{F(S_{0,0}), e^{-0.05}[0,6f_{1,1} + 0,4f_{1,0}]\} = 1,250\text{€}.$$

Como se ha obtenido un precio actual del derivado de 1,250€, la prima que la posición larga debe pagar a la posición corta para entrar en la opción es de 1,250€.

En el análisis de derivados de tipos de interés el activo subyacente es el *short rate* y los tipos de árboles comúnmente utilizados son los trinomiales en lugar de binomiales. Es decir, que estando el *short rate* en un nodo determinado del árbol se puede saltar a tres posibles nodos siguientes al ocurrir un salto en el tiempo.

En los siguientes apartados se construirá un árbol trinomial para el *short rate* considerando que este sigue un proceso como el del modelo propuesto por Hull & White. Para ello, se empleará el procedimiento de construcción desarrollado por Hull & White²⁴ que consta de dos etapas. Primero, se construye un árbol trinomial para la variable $x(t)$ definida en el apartado 4.3.2. y, luego, este árbol se adapta a otro árbol trinomial correspondiente al *short rate* utilizando la función $\alpha(t)$ dependiente del tiempo, también definida en el apartado 4.3.2. Una vez obtenido, este árbol se emplea para la valoración de *swaptions* bermuda.

5.1.1. Primera etapa

La primera etapa de la construcción del árbol trinomial para el *short rate* consiste en generar un árbol trinomial para la variable $x(t)$ definida por la ecuación (11):

$$dx = -a x dt + \sigma dz_t; x(0) = 0,$$

cuya formula analítica viene dada por la ecuación (12):

$$x(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dz_u.$$

²⁴ (Hull & White, Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models, 1994a) y (Hull & White, Using Hull-White Interest Rate Trees, 1996)

Siguiendo un procedimiento similar al que se ha seguido al final del apartado 4.3.2. para obtener la esperanza y varianza del *short rate* (ecuaciones (16) y (17)), se puede determinar que

$$\mathbb{E}[x(t)|x(s)] = x(s)e^{-a(t-s)}, \quad (21)$$

$$\mathbb{V}[x(t)|x(s)] = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(t-s)}]. \quad (22)$$

El árbol que se construya para esta variable ha de respetar estos valores.

El tiempo se discretiza en un conjunto $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ de fechas donde t_0 representa la fecha de la firma del derivado que se quiere valorar ($t_0 = 0$) y t_N representa su fecha de vencimiento ($t_N = T$). Se hace cumplir que $\Delta t = t_i - t_{i-1}, \forall i = 1, \dots, N$ donde $\Delta t = \frac{T}{N}$. En otras palabras, se impone que $t_i = i\Delta t, \forall i = 0, \dots, N$.

Los nodos del árbol se van a identificar al igual que antes por (i, j) donde $i \in \{0, \dots, N\}$ es el índice que hace referencia al instante de tiempo t_i en el que se encuentra el nodo y j es el índice que identifica a los distintos nodos en el tiempo t_i . El valor de x en el nodo (i, j) se expresa mediante $x_{i,j}$.

Se hace cumplir que $x_{i,j} = j \Delta x_i$, siendo Δx_i el incremento en el valor de dos nodos contiguos cualesquiera pertenecientes al instante de tiempo t_i . Es necesario determinar para cada instante de tiempo t_i el valor del incremento Δx_i correspondiente.

Cuando la variable x se encuentra en un nodo (i, j) al pasar al instante de tiempo t_{i+1} siguiente se puede acceder a tres nodos distintos $(i+1, k+1)$, $(i+1, k)$ o $(i+1, k-1)$, donde se cumple que $x_{i+1,k+1} > x_{i+1,k} > x_{i+1,k-1}$. Se identificarán las probabilidades de salto al nodo superior, al nodo intermedio y al nodo inferior por p_S , p_M y p_I , respectivamente. La Figura 6 es una representación esquemática de esto. Es necesario determinar para cada nodo (i, j) el valor k para poder identificar a qué nodos se puede saltar desde (i, j) .

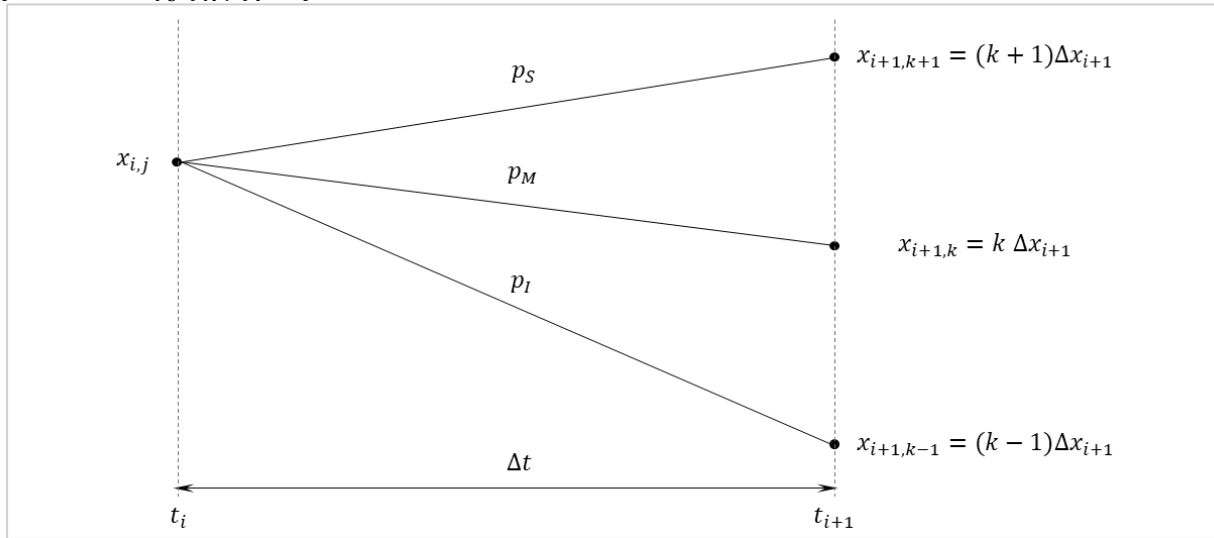
Considérese que la variable x se encuentra en el nodo (i, j) y que, por tanto, tiene un valor igual a $x_{i,j}$. El valor esperado y la varianza al saltar al instante de tiempo t_{i+1} siguiente se puede expresar mediante las ecuaciones (21) y (22) como:

$$\mathbb{E}[x(t_{i+1})|x(t_i) = x_{i,j}] = x_{i,j} e^{-a\Delta t} = \mathbb{E}_{i,j},$$

$$\mathbb{V}[x(t_{i+1})|x(t_i) = x_{i,j}] = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a\Delta t}] = \mathbb{V}.$$

Se puede observar que la varianza es un valor constante que no depende de i ni de j . En conclusión, la varianza en el valor de la variable x al realizar un salto en el tiempo será la misma independientemente del nodo del que se parta. Esto es así ya que se han considerado intervalos Δt constantes entre instantes de tiempo del árbol. Si se hubiesen considerado intervalos Δt_i variables entre las distintas fechas del árbol la varianza sería distinta en cada salto de tiempo. El valor esperado, en cambio, depende del nodo (i, j) del que se parte.

Figura 6. Evolución de la variable x desde el nodo (i, j) hacia los nodos $(i + 1, k + 1)$, $(i + 1, k)$ o $(i + 1, k - 1)$ con probabilidades p_S , p_M y p_I , respectivamente.



Como se ha mencionado anteriormente, se desea construir el árbol de tal forma que se respeten estos valores de la esperanza y la varianza. Por tanto, se deben de dar valores a las probabilidades de salto p_S , p_M y p_I adecuados para que esto sea así. En consecuencia, se obtiene el sistema de tres ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} p_S + p_M + p_I = 1 \\ p_S x_{i+1, k+1} + p_M x_{i+1, k} + p_I x_{i+1, k-1} = \mathbb{E}_{i, j} \\ p_S x_{i+1, k+1}^2 + p_M x_{i+1, k}^2 + p_I x_{i+1, k-1}^2 - \mathbb{E}_{i, j}^2 = \mathbb{V} \end{cases}$$

Como se ha impuesto la condición de que $x_{i, j} = j \Delta x_i$, entonces la segunda y la tercera ecuación del sistema se pueden reescribir, respectivamente, como:

$$p_S(x_{i+1, k} + \Delta x_{i+1}) + p_M x_{i+1, k} + p_I(x_{i+1, k} - \Delta x_{i+1}) = \mathbb{E}_{i, j} ,$$

$$p_S(x_{i+1, k} + \Delta x_{i+1})^2 + p_M x_{i+1, k}^2 + p_I(x_{i+1, k} - \Delta x_{i+1})^2 - \mathbb{E}_{i, j}^2 = \mathbb{V} .$$

Utilizando la primera ecuación del sistema, esto se puede simplificar a:

$$p_S - p_I = \frac{\mathbb{E}_{i, j} - x_{i+1, k}}{\Delta x_{i+1}} ,$$

$$x_{i+1, k}^2 + 2x_{i+1, k}\Delta x_{i+1}(p_S - p_I) + \Delta x_{i+1}^2(p_S + p_I) = \mathbb{V} + \mathbb{E}_{i, j}^2 .$$

Despejando, se obtienen las probabilidades p_S , p_M y p_I :

$$\begin{cases} p_S = \frac{\mathbb{V}}{2\Delta x_{i+1}^2} + \frac{(\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k})^2}{2\Delta x_{i+1}^2} + \frac{\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k}}{2\Delta x_{i+1}} \\ p_M = 1 - \frac{\mathbb{V}}{\Delta x_{i+1}^2} - \frac{(\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k})^2}{\Delta x_{i+1}^2} \\ p_I = \frac{\mathbb{V}}{2\Delta x_{i+1}^2} + \frac{(\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k})^2}{2\Delta x_{i+1}^2} - \frac{\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k}}{2\Delta x_{i+1}} \end{cases}$$

que dependen del valor de Δx_{i+1} y k .

Hull y White proponen que el incremento Δx_i sea igual a

$$\Delta x_i = \sqrt{3 \mathbb{V}[x(t_i)]}.$$

Como se ha concluido que la varianza tiene un valor constante para todos los saltos posibles en el árbol, bajo este supuesto, se cumple que los incrementos Δx_i son iguales para todos los instantes de tiempo t_i :

$$\Delta x_i = \Delta x = \sqrt{3 \mathbb{V}}.$$

En cuanto al valor de k , este se elige tal que el valor $x_{i+1,k}$ del nodo intermedio ($i + 1, k$) al saltar desde el nodo (i, j) se aproxime lo mejor posible al valor esperado en este salto. Es decir, se desea que se cumpla la siguiente igualdad

$$x_{i+1,k} = k\Delta x = \mathbb{E}[x(t_{i+1})|x(t_i) = x_{i,j}],$$

$$k_{i,j} = \frac{\mathbb{E}_{i,j}}{\Delta x}.$$

Sin embargo, mientras que k debe ser un número entero, la fracción en el lado izquierdo de la ecuación puede ser cualquier número real. Por tanto, k se calcula como el número entero más próximo a este valor:

$$k_{i,j} = \text{REDONDEAR} \left(\frac{\mathbb{E}_{i,j}}{\Delta x} \right).$$

Teniendo esto en cuenta, las probabilidades se pueden reescribir como

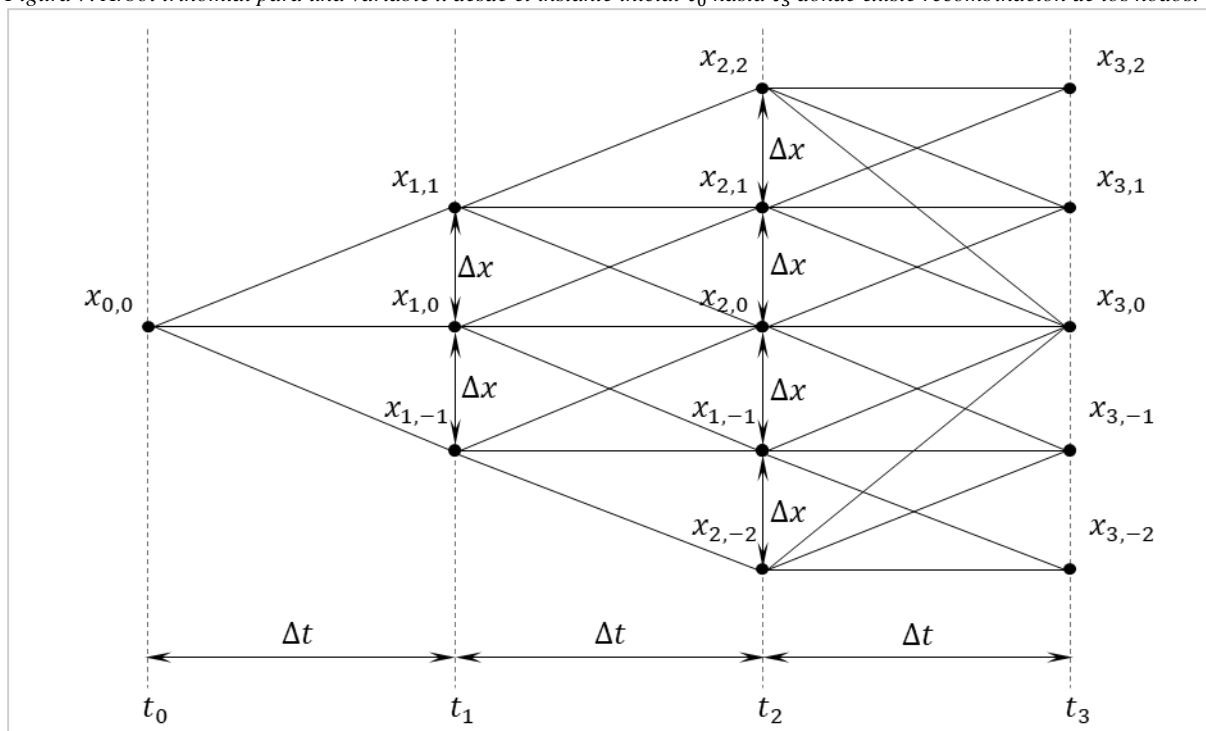
$$\begin{cases} p_S = \frac{1}{6} + \frac{(\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k})^2}{6 \mathbb{V}} + \frac{\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k}}{2\Delta x} \\ p_M = \frac{2}{3} - \frac{(\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k})^2}{3 \mathbb{V}} \\ p_I = \frac{1}{6} + \frac{(\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k})^2}{6 \mathbb{V}} - \frac{\mathbb{E}_{i,j} - x_{i+1,k}}{2\Delta x} \end{cases}$$

Estos dos supuestos resultan adecuados ya que se puede demostrar²⁵ que las probabilidades p_S , p_M y p_I obtenidas tomando estas consideraciones son estrictamente positivas y respetan el valor esperado (21) y varianza (22) del proceso que sigue x .

El árbol trinomial se ha definido de tal forma que se permite que haya recombinación de los nodos. Es decir, que dos nodos (i, j) e (i, j') pertenecientes al instante de tiempo t_i pueden compartir nodos del instante de tiempo t_{i+1} a los que saltar. Esta es una propiedad deseable en el árbol trinomial ya que, de lo contrario, el número de nodos en el árbol crecería exponencialmente con el número de instantes de tiempo considerados, lo cual demandaría mucho poder computacional.

La Figura 7 ilustra la apariencia que podría tener un árbol trinomial en sus primeros cuatro instantes de tiempo. Se puede observar que los incrementos temporales Δt y espaciales Δx son constantes a lo largo del árbol. También se puede ver como los dos nodos $(1,0)$ y $(1,1)$ del árbol pueden saltar a los nodos $(2,1)$ y $(2,0)$, esto es un ejemplo de la recombinación que ocurre en el árbol definido. Nótese que $(2,2)$ comparte todos los mismos nodos futuros que $(2,1)$ esto implicaría que $(2,2)$ y $(2,1)$ tienen el mismo valor de k .

Figura 7. Árbol trinomial para una variable x desde el instante inicial t_0 hasta t_3 donde existe recombinación de los nodos.



5.1.2. Segunda etapa

La segunda etapa del procedimiento propuesto por Hull & White consiste en adaptar el árbol construido para la variable estocástica x con el fin de obtener el árbol trinomial correspondiente al *short rate*. Esto consiste en variar el precio de todos los nodos de cada instante de tiempo por una cierta cantidad.

La ecuación (10) relaciona al *short rate* con la variable estocástica $x(t)$ mediante la función determinista $\alpha(t)$:

²⁵ (Brigo & Mercurio, 2007, pág. 927)

$$r(t) = \alpha(t) + x(t),$$

siendo la función $\alpha(t)$ igual a la ecuación (15):

$$\alpha(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 + e^{-2at} - 2 e^{-at}).$$

Una primera aproximación sería pensar que el valor $r_{i,j}$ del nodo (i, j) del árbol trinomial del *short rate* es igual al valor $x_{i,j}$ del árbol de x más una cantidad $\alpha_i = \alpha(t_i)$. No obstante, este procedimiento no genera un árbol que reproduce correctamente la curva de tipos de interés actual. Esto se debe a que en este método numérico el tiempo se ha discretizado.

Esto se puede ilustrar fácilmente considerando el primer nodo del árbol. De la curva de tipos de interés actual se puede obtener la tasa de interés $R(0, t_1)$ aplicable entre $t_0 = 0$ y t_1 . En el árbol trinomial del *short rate*, el tipo de interés $r_{0,0}$ es aplicable al periodo entre $t_0 = 0$ y t_1 . Por ende, para que el árbol trinomial respete la curva de tipos de interés actual, se debe cumplir que $r_{0,0} = R(0, t_1)$. Sin embargo, si se considera que $r_{0,0} = x_{0,0} + \alpha(0)$ (recordando que $x(0) = 0$ y, por tanto, $x_{0,0} = 0$) se tendría que

$$r_{0,0} = \alpha(0) = f(0,0) = r(0),$$

y como el tipo de interés instantáneo actual $r(0)$ no tiene por qué coincidir con $R(0, t_1)$, no tiene por qué cumplirse la igualdad $r_{0,0} = R(0, t_1)$; el árbol no respetaría la curva de tipos de interés actual.

En cambio, los valores $r_{i,j}$ de los nodos del árbol trinomial de $r(t)$ serán iguales a los valores $x_{i,j}$ de nodos del árbol de $x(t)$ más una cantidad α_i , pero donde α_i no es igual a la función $\alpha(t)$ aplicada en t_i , sino que es un valor que se calcula numéricamente para que el árbol respete la curva de intereses cupón cero actual. Para obtener estos parámetros α_i , se define un conjunto adicional de parámetro $Q_{i,j}$ como los valores en el nodo $(0,0)$ de derivados que pagan una unidad monetaria si la trayectoria seguida por el *short rate* en el árbol alcanza el nodo (i, j) y cero en caso contrario. Se trabajará desde atrás hacia adelante en el tiempo, desde t_0 hasta t_N , obteniendo para cada tiempo t_i todos los parámetros $Q_{i,j}$ y a través de ellos el parámetro α_i .

Evidentemente, $Q_{0,0}$ es igual a una unidad monetaria, ya que la trayectoria seguida por el *short rate* siempre va a pasar por el nodo $(0,0)$ y no hay que descontar dicha cantidad en el tiempo. Debido a los argumentos detallados anteriormente, el parámetro α_0 debe ser igual al valor del tipo de interés aplicable entre los instantes de tiempo t_0 y t_1 , es decir, $\alpha_0 = R(0, t_1)$.

Para obtener el parámetro α_1 primero se calculan $Q_{1,1}$, $Q_{1,0}$ y $Q_{1,-1}$. El parámetro $Q_{1,1}$ se puede calcular teniendo en cuenta que su respectivo instrumento produce una unidad monetaria si y solo si se alcanza el nodo $(1,1)$. Estando en $(0,0)$ la probabilidad de saltar al nodo $(1,1)$ es p_S . Por tanto, hay una probabilidad p_S de obtener una unidad monetaria en el tiempo t_1 futuro. Esta cantidad se necesita descontar al tiempo inicial para obtener $Q_{1,1}$. Cuando se salta de $(0,0)$ a $(1,1)$ el tipo de interés aplicable entre t_0 y t_1 es $r_{0,0}$ y, por tanto, se obtiene

$$Q_{1,1} = p_S e^{-r_{0,0}\Delta t},$$

donde $r_{0,0}$ debe ser igual a $R(0, t_1)$, como se ha comentado anteriormente. De manera análoga,

$$Q_{1,0} = p_M e^{-r_{0,0}\Delta t},$$

$$Q_{1,-1} = p_I e^{-r_{0,0}\Delta t}.$$

Como se ha comentado en el Capítulo 2, un bono cupón cero con vencimiento en T es un bono que paga una unidad monetaria en T . El precio de dicho instrumento en t se indica por $P(t, T)$. El precio $P(0, t_2)$ actual de un bono cupón cero que vence en t_2 se puede obtener descontando la unidad monetaria que paga en t_2 hasta el tiempo t_1 y luego descontar esa cantidad hasta t_0 . Para el periodo de tiempo entre t_1 y t_2 el tipo de interés aplicable puede ser $r_{1,1}$, $r_{1,0}$ o $r_{1,-1}$. En consecuencia, el precio $P(t_1, t_2)$ observado en t_1 de un bono que vence en t_2 es distinto dependiendo del nodo $(1, j)$ en el que se esté posicionado. Teniendo esto en mente y utilizando los derivados $Q_{1,1}$, $Q_{1,0}$ y $Q_{1,-1}$ valorados anteriormente para descontar desde t_1 hasta t_0 , se puede escribir el precio $P(0, t_2)$ como

$$P(0, t_2) = Q_{1,1}e^{-r_{1,1}\Delta t} + Q_{1,0}e^{-r_{1,0}\Delta t} + Q_{1,-1}e^{-r_{1,-1}\Delta t}.$$

El precio $P(0, t_2)$ está relacionado con el tipo de interés $R(0, t_2)$ mediante la ecuación (1):

$$R(0, t_2) = -\frac{\ln P(0, t_2)}{t_2}.$$

Dado que $r_{1,1}$, $r_{1,0}$ o $r_{1,-1}$ se pueden escribir como

$$r_{1,1} = x_{1,1} + \alpha_1; \quad r_{1,0} = x_{1,0} + \alpha_1; \quad r_{1,-1} = x_{1,-1} + \alpha_1,$$

se puede despejar α_1 en función de $R(0, t_2)$:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta t} \left[R(0, t_2)t_2 + \ln(Q_{1,1}e^{-x_{1,1}\Delta t} + Q_{1,0}e^{-x_{1,0}\Delta t} + Q_{1,-1}e^{-x_{1,-1}\Delta t}) \right].$$

De esta forma, se obtiene el parámetro α_1 que respeta el tipo de interés $R(0, t_2)$ de la curva de tipos de interés actual.

El paso siguiente sería calcular los parámetros $Q_{2,j}$. Tomando a la Figura 7 como ejemplo, se debe calcular $Q_{2,2}$, $Q_{2,1}$, $Q_{2,0}$, $Q_{2,1}$ y $Q_{2,-2}$. El parámetro $Q_{2,2}$ se puede calcular teniendo en cuenta que su respectivo instrumento produce una unidad monetaria si y solo si se alcanza el nodo $(2,2)$. Estando en $(0,0)$ la probabilidad de alcanzar el nodo $(2,2)$ es p_S^2 ya que existe una probabilidad p_S de saltar de $(0,0)$ a $(1,1)$ y una probabilidad p_S de saltar de $(1,1)$ a $(2,2)$. Por esta razón, el precio actual $Q_{2,2}$ se puede calcular utilizando $Q_{1,1}$ como

$$Q_{2,2} = Q_{1,1} p_S e^{-r_{1,1}\Delta t},$$

donde $Q_{1,1}$ y $r_{1,1}$ se conocen ya que se han obtenido en el paso anterior.

El cálculo del parámetro $Q_{2,1}$ es un poco distinto al de $Q_{2,2}$. Como se puede observar en la Figura 7, el nodo $(2,1)$ se puede alcanzar saltando desde $(1,1)$ o desde $(1,0)$. Es decir, existen

dos trayectorias por las que se puede alcanzar (2,1) desde el nodo inicial (0,0), estas vienen remarcadas en azul y en rojo en la Figura 8. Por tanto, descontar la unidad monetaria que genera el derivado si se alcanza (2,1) puede ocurrir de dos formas: utilizando $r_{1,1}$ para el periodo entre t_2 y t_1 , y $r_{0,0}$ para el periodo entre t_1 y t_0 ; o utilizando primero $r_{1,0}$ y luego $r_{0,0}$. La probabilidad del salto (1,1) \rightarrow (2,1) es p_M y del salto (1,0) \rightarrow (2,1) es p_S , como se muestra en la Figura 8. En consecuencia, el precio actual $Q_{2,1}$ se puede calcular utilizando $Q_{1,1}$ y $Q_{1,0}$ como

$$Q_{2,2} = Q_{1,1} p_M e^{-r_{1,1}\Delta t} + Q_{1,0} p_S e^{-r_{1,0}\Delta t},$$

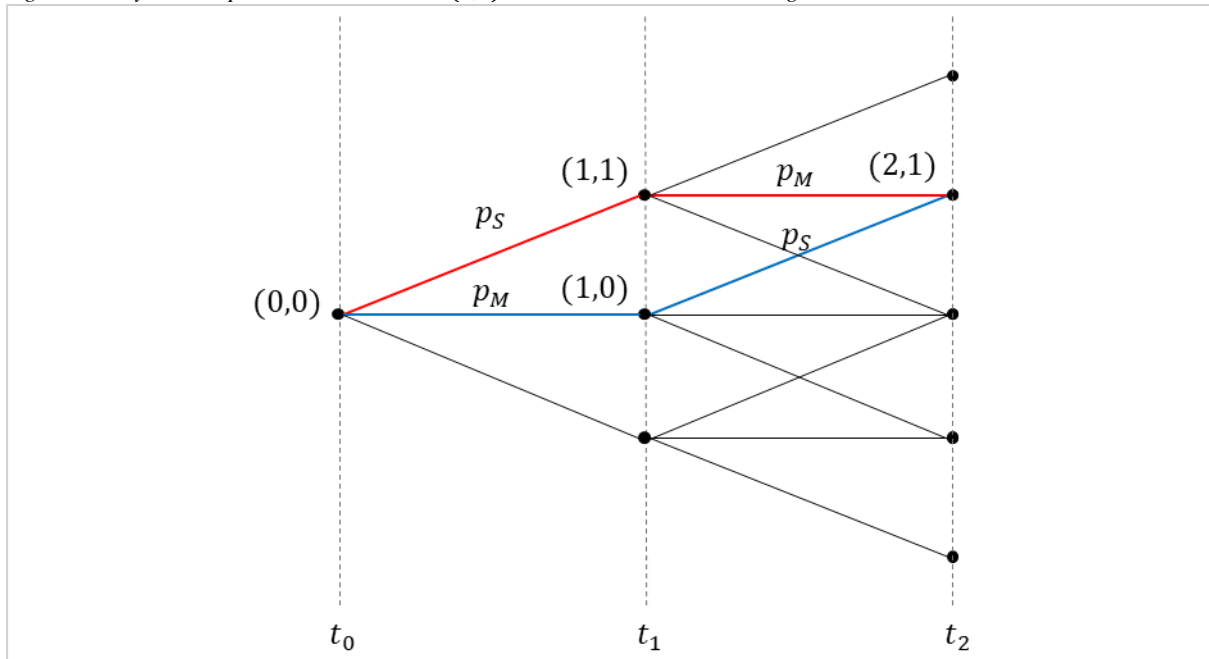
donde $Q_{1,1}$, $Q_{1,0}$, $r_{1,1}$ y $r_{1,0}$ se conocen ya que se han obtenido anteriormente.

Este resultado se puede generalizar para el resto de precios $Q_{2,j}$ como

$$Q_{2,j} = \sum_{h=-1}^{h=1} Q_{1,h} p_{1,h \rightarrow 2,j} e^{-r_{1,h}\Delta t},$$

donde $p_{1,h \rightarrow 2,j}$ es la probabilidad de saltar del nodo (1, h) al nodo (2, j). Por ejemplo, en la Figura 8 se puede observar que $p_{1,1 \rightarrow 2,1} = p_M$ mientras que $p_{1,-1 \rightarrow 2,1} = 0$, ya que no es posible saltar del nodo (1, -1) al nodo (2,1). Se puede observar que para obtener todos los parámetros $Q_{2,j}$ es necesario haber calculado previamente los parámetros $Q_{1,h}$ y los valores $r_{1,h}$, que necesitan de α_1 para ser calculados.

Figura 8. Trayectorias posibles hasta el nodo (2,1) en el árbol trinomial de la Figura 7.



Una vez obtenidos los parámetros $Q_{2,j}$, se puede calcular α_2 con un razonamiento similar al que se utilizó para obtener α_1 :

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Delta t} \left[R(0, t_3) t_3 + \ln \left(\sum_{j=-2}^{j=2} Q_{2,j} e^{-x_{2,j}\Delta t} \right) \right]$$

En el caso más general, para el instante de tiempo t_i se calculan los precios $Q_{i,j}$ utilizando los precios $Q_{i-1,h}$ y el parámetro α_{i-1} mediante la ecuación

$$Q_{i,j} = \sum_{h=\underline{h_{i-1}}}^{\overline{h_{i-1}}} Q_{i-1,h} p_{i-1,h \rightarrow i,j} e^{-r_{i-1,h} \Delta t},$$

donde $r_{i-1,h} = x_{i-1,h} + \alpha_{i-1}$ y en el sumatorio $h \in \{\underline{h_{i-1}}, \dots, \overline{h_{i-1}}\}$, donde $\underline{h_{i-1}}$ y $\overline{h_{i-1}}$ son los índices de los nodos inferior y superior, respectivamente, en el tiempo $i - 1$. Una vez obtenidos estos valores, se puede calcular el parámetro α_i mediante la expresión

$$\alpha_i = \frac{1}{\Delta t} \left[R(0, t_{i+1}) t_{i+1} + \ln \left(\sum_{j=\underline{j_i}}^{\overline{j_i}} Q_{i,j} e^{-x_{i,j} \Delta t} \right) \right].$$

De esta forma se obtienen los parámetros $\alpha_i, \forall i \in \{0, \dots, N\}$ y se pueden calcular los valores $r_{i,j}$ del *short rate* para cada nodo (i, j) del árbol como

$$r_{i,j} = x_{i,j} + \alpha_i,$$

obteniéndose un árbol completo para el tipo de interés instantáneo.

5.1.3. Aplicación a las *swaptions* bermuda

Como se ha comentado en el Capítulo 3, los *swaptions* son instrumentos que permiten a la posición larga decidir en la fecha T de vencimiento del instrumento si desean entrar en un IRS subyacente. Las condiciones de este IRS, ya sea de tipo *payer* o *receiver*, se acuerdan en la fecha t de la firma del contrato. En este capítulo, t se va a considerar igual a cero, es decir, la fecha de la firma del contrato es el tiempo actual, ya que se busca obtener el valor actual del derivado. Otros aspectos importantes a tener en cuenta respecto al IRS subyacente son las N fechas de fijación de la tasa variable $R_V (T_0, T_1, \dots, T_{N-1})$ y las N fechas en las que se intercambian los intereses acumulados (T_1, T_2, \dots, T_N) . La fecha T de vencimiento del *swaption* coincide con alguna de las fechas T_0, T_1, \dots, T_{N-1} de fijación del IRS subyacente. Generalmente, para los *swaptions* de tipo europeo se cumple que $T = T_0$.

Los *swaptions* de tipo bermuda proporcionan a la parte larga del contrato varias posibles fechas de ejercicio entre t y T , aparte de T (que es la única posibilidad en los *swaptions* europeos). Sean $t_1^E, t_2^E, \dots, t_M^E$ el conjunto de fechas de ejercicio estipuladas en el contrato (con $t_M^E = T$), donde $T_0 \leq t_1^E < t_2^E \leq t_M^E \leq T_{N-1}$. Generalmente, se cumple la igualdad $T_0 = t_1^E$. Si el *swaption* se ejerciese en la fecha $t_i^E, i \in \{1, \dots, M\}$, el inversor en la parte larga del *swaption* estaría entrando en un IRS cuya primera fecha $T_j, j \in \{0, \dots, N - 1\}$ de fijación de la tasa variable R_V coincide con la fecha t_i^E de ejercicio.

Para la valoración de las *swaptions* bermuda mediante árboles trinomiales considerando el modelo de Hull & White, el primer paso es construir el árbol trinomial correspondiente al *short rate* como se ha detallado en los apartados anteriores. Este árbol debe cubrir un horizonte

temporal que vaya desde la fecha actual $t = 0$ hasta la última fecha $t = T_N$ de intercambios de flujos de caja del IRS subyacente. El tiempo se debe discretizar en un conjunto t_0, t_1, \dots, t_L de fechas (donde $t_0 = 0$ y $t_N = T_N$) tal que T_0, T_1, \dots, T_N sea un subconjunto de dichas fechas. Recuérdese que las fechas de ejercicio del *swaption* son a su vez un subconjunto de las fechas T_0, T_1, \dots, T_N del IRS subyacente, y por tanto también serán un subconjunto de las fechas del árbol.

El segundo paso consiste en valorar los *swaptions* de tipo bermuda utilizando el procedimiento descrito previamente. Es decir, yendo de adelante hacia atrás en el árbol, el valor del derivado en cada nodo se calculará mediante la ecuación (20) (para aquellos nodos pertenecientes a los instantes de tiempo t_i^E en los que se puede ejercer el derivado) o la ecuación (19) (para los nodos restantes). Dado que en el árbol trinomial del *short rate* el tipo de interés instantáneo asume un valor distinto en cada nodo, las ecuaciones (19) y (20) se deben de modificar ligeramente. De esta forma, la ecuación (19) pasa a ser

$$f_{i,j} = \mathbb{E}[e^{-r_{i,j}(t_{i+1}-t_i)} f_{i+1} | S_{i,j}],$$

y la ecuación (20) pasa a ser

$$f_{i,j} = \max\{F(S_{i,j}), \mathbb{E}[e^{-r_{i,j}(t_{i+1}-t_i)} f_{i+1} | S_{i,j}]\},$$

donde se deja de considerar un tipo de interés r constante libre de riesgo y se pasa a considerar el tipo de interés que se ha modelizado en el árbol trinomial, cuyo valor depende del nodo (i, j) que se esté considerando.

El *payoff* del derivado (en los momentos en que se puede ejercer) se debe calcular mediante las ecuaciones (6) o (7), dependiendo de si se trata de un *payer swaption* o *receiver swaption*, respectivamente, cambiando T por t_i^E .

Capítulo 6: Implementación en MATLAB

En este capítulo se comentará la lógica que se debe seguir para poder implementar la valoración de *swaptions* de tipo bermuda con árboles trinomiales bajo el modelo de Hull & White dentro de un lenguaje de programación. En este trabajo, se ha optado por utilizar MATLAB como entorno de programación. El código desarrollado se encuentra en el Anexo 2.

El programa a desarrollar debe cumplir dos objetivos básicos:

- 1) Calibrar el modelo de Hull & White a partir de datos históricos. Es decir, producir los parámetros constantes a y σ del modelo. Esto se podría realizar de dos maneras distintas: utilizando datos históricos de los propios instrumentos que se van a valorar o utilizando datos históricos de derivados más sencillos cuyos precios se pueden obtener mediante ecuaciones analíticas. Cada una de estas alternativas presenta un conjunto de ventajas y desventajas que se mencionarán más adelante.
- 2) Obtener el precio actual del *swaption* bermuda que se pretende valorar a partir de los parámetros calibrados del modelo obtenidos en el punto 1) y de datos actuales del mercado, en particular, la curva de tipos de interés actual.

6.1. Calibración del modelo

Sea cual sea el conjunto de datos que se utilice para la calibración del modelo, esta tarea consiste en encontrar la pareja de valores a y σ que mejor aproxime los datos históricos. Considerándose un conjunto de N precios históricos de derivados, para cada valor de a y σ se obtienen los precios teóricos de estos derivados. Esto puede hacerse mediante algún método numérico o mediante una ecuación analítica. Se buscan los valores de a y σ que minimizan la diferencia entre los valores históricos y teóricos de los derivados de acuerdo con la ecuación (18).

La calibración utilizando productos más sencillos presenta la ventaja de que estos suelen ser más líquidos y que, por ende, existe más información histórica disponible del mercado. En este trabajo, la calibración del modelo se llevará a cabo utilizando *swaptions* de tipo europeo, ya que es más fácil disponer de información histórica de estos instrumentos que de los *swaptions* bermuda.

La función de calibración debe tener los siguientes parámetros de entrada:

- El valor de a máximo y el valor de a mínimo que se deben de considerar y el número total de valores a tener en cuenta.
- El valor de σ máximo y el valor de σ mínimo que se deben de considerar y el número total de valores a tener en cuenta.
- Vector de datos históricos de los precios de los N distintos *swaptions* europeos.
- Vector con las fechas de ejercicio de los N *swaptions* europeos.

- Matrices para las fechas y los tipos de interés de las N curvas de tipos de interés observadas en los N momentos contemplados con los datos históricos.
- Tipo de interés fijo, nominal y cantidad de intercambios anuales de los *swaps* subyacentes a los *swaptions* europeos.

Como variables de salida, la función debe devolver los parámetros calibrados a_{cal} y σ_{cal} .

Para encontrar a_{cal} y σ_{cal} se discretizan el conjunto de posibles valores que pueden tomar los dos parámetros y se elige el que de el menor error.

6.2. Valoración de *swaptions* bermuda

Para obtener el precio actual de un *swaption* bermuda se debe emplear una función que, mediante árboles trinomiales bajo el modelo de Hull & White, devuelva dicho valor al introducirle una serie de parámetros de entrada. Estas variables de entrada deben de describir las condiciones del *swaption*, así como la situación actual del mercado.

Esta función debe pedir los siguientes parámetros de entrada:

- Las constantes a y σ . Se deben utilizar los valores a_{cal} y σ_{cal} obtenidos mediante la función de calibración.
- Los datos actuales del mercado. Un vector con los tipos de interés actuales y otro vector con sus fechas de vencimiento. También es necesario un tercer vector con los tipos de intereses *forward* instantáneo observados en la actualidad para dichas fechas.
- Las condiciones del contrato. Se debe especificar el tipo de interés constante del *swap* subyacente y su nominal. También se debe incluir un vector con las posibles fechas de ejercicio del *swaption*.

La función debe devolver el precio actual del contrato como variable de salida.

La lógica que emplea esta función es más compleja que la función de calibración, pero sigue teniendo una relativa sencillez. El código se puede dividir en dos partes fundamentales: la construcción del árbol trinomial del *short rate* y la valoración del derivado.

El primer paso de la construcción del árbol trinomial es especificar los valores clave x , k , Q , α y r en el nodo inicial. Después, se calculan de forma secuencial en cada instante de tiempo del árbol los parámetros relevantes algunos del tiempo actual y otros del siguiente. Dentro de cada instante de tiempo, se recorren los distintos nodos en orden, empezando por el nodo superior, hasta alcanzar el nodo inferior. En cada nodo se calculan los valores del índice k (índice del nodo intermedio al que se puede llegar en el siguiente instante de tiempo), las probabilidades de salto p hacia los nodos siguientes, las variables ficticias x y los valores de los derivados fictios Q en estos nodos siguientes. Una vez se obtienen estos parámetros en todos los nodos de un tiempo determinado se obtiene el parámetro α para dicho tiempo y, con él, el valor aproximado del *short rate* r en cada nodo.

Una vez construido el árbol trinomial, se pasa a valorar el derivado. Para ello se comienza con los nodos del penúltimo instante de tiempo del árbol. Se calculan los tipos de interés variable

del *swap* subyacente de cada nodo y si esta penúltima fecha del árbol fuese una fecha de ejercicio del *swaption*, se valoraría el derivado. Luego se recorre el resto de los instantes de tiempo del árbol de adelante hacia atrás hasta llegar al tiempo inicial. En cada instante de tiempo se calcula el valor del *swaption* en cada uno de los nodos. Para ello se comprueba si el tiempo en el que se está es una fecha de ejercicio del instrumento. Si este es el caso, se compara el ejercicio prematuro con los precios descontados en el tiempo. En caso contrario, solamente se descuenta el precio del derivado. Finalmente, se obtiene el precio actual del derivado como el precio correspondiente al nodo inicial.

Capítulo 7: Conclusiones

El modelo de Hull & White es el modelo más sencillo que permite, con una precisión aceptable, valorar derivados de tipos de interés. Dos características fundamentales de este modelo son que incorpora reversión a la media para el tipo de interés instantáneo y que respeta la curva de tipos de interés actual. Estas dos propiedades son necesarias para que sea considerado un modelo apto en la valoración de instrumentos de tipos de interés. Otros modelos más simples, como, por ejemplo, el modelo lognormal o el modelo de Vasicek, carecen de alguna de estas propiedades fundamentales haciéndolos inadecuados para llevar a cabo este tipo de valoración.

Por otro lado, el modelo de Hull & White admite tipos de interés negativos. En la actualidad, esta es una característica necesaria en los modelos de renta fija ya que, en la zona euro, los tipos de interés a corto y medio plazo tienen valores negativos. Otro aspecto importante a destacar de este modelo es que obtiene una distribución normal para el tipo de interés instantáneo. Esto implica una mayor manejabilidad del modelo, lo cual permite conseguir ecuaciones analíticas para derivados sencillos, como bonos y opciones sobre bonos, e incluso para instrumentos no tan simples, como *swaptions* europeos.

En este trabajo se ha optado por valorar los *swaption* bermuda ya que son el caso más sencillo de derivados exóticos que no admiten ecuaciones analíticas. Esto se debe a la posibilidad de ejercicio prematuro. Se han escogido deliberadamente con el motivo de analizar los métodos numéricos y su implementación en el modelo de Hull & White. Se puede concluir de los Capítulos 5 y 6 que dicho procedimiento se puede llevar a cabo de manera sencilla, sin necesidad de implementar nociones de programación demasiado complicadas.

Finalmente, cabe destacar que en el presente no existe un modelo de tipos de interés que se asuma como estándar por las entidades financieras. Existen modelos más complejos que el de Hull & White, como son los modelos del *short rate* con varios factores, el modelo de Heath, Jarrow & Morton²⁶ o el *LIBOR market model*²⁷. Estos otros modelos tienen una mayor precisión y fidelidad a los datos del mercado que el modelo de Hull & White. No obstante, estos también requieren un análisis más detallado para comprender su funcionamiento y el procedimiento de implementación y calibración es más complejo. En efecto, el balance entre simplicidad y precisión del modelo de Hull & White hace que este se suela utilizar en la práctica para valorar ciertos derivados de tipos de interés.

²⁶ (Heath, Jarrow, & Morton, 1992)

²⁷ (Brace, Gatarek, & Musiela, 1997)

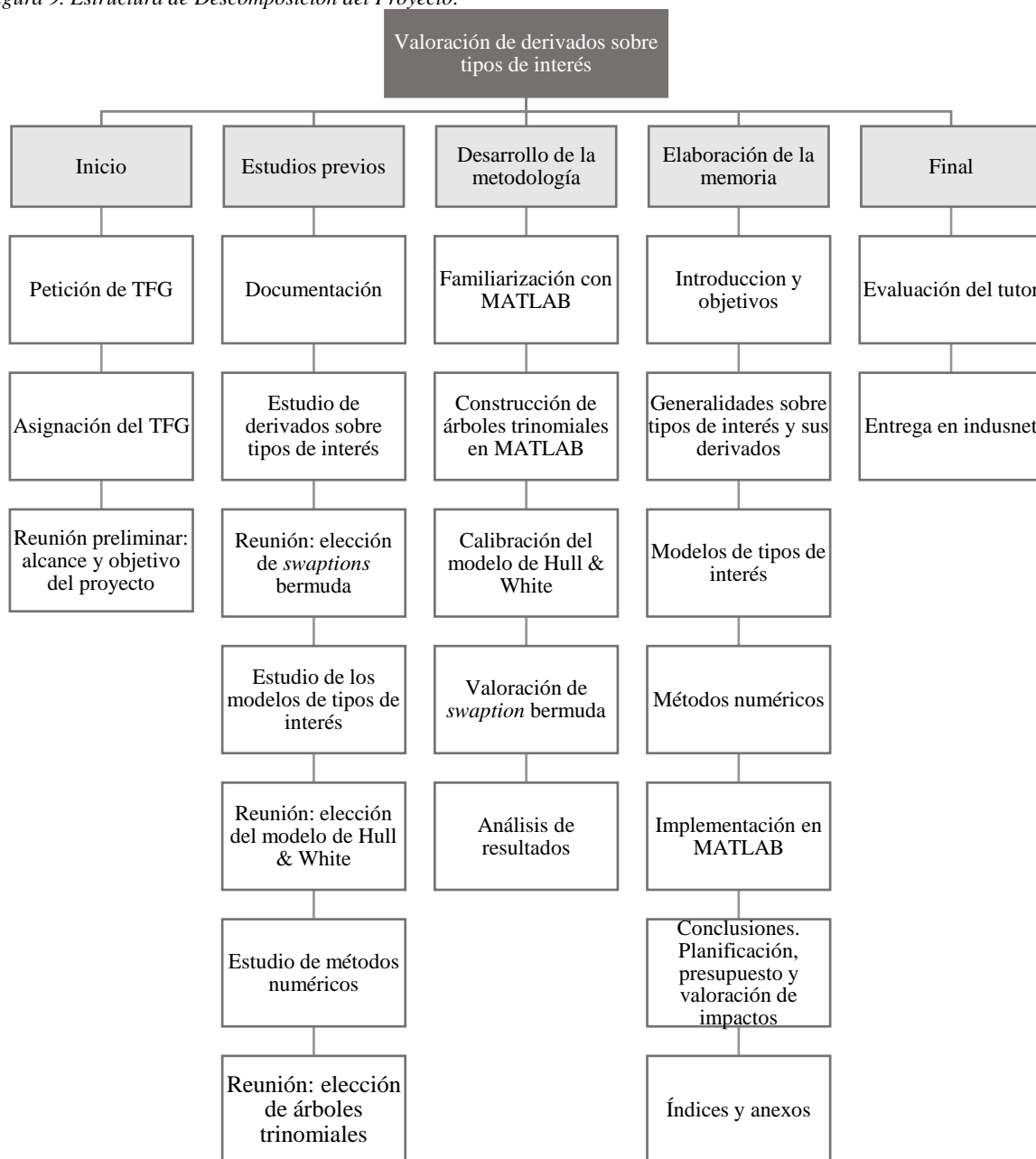
Capítulo 8: Planificación, Presupuesto y Valoración De Impactos

8.1. Planificación

8.1.1. EDP del proyecto

Habiendo definido los objetivos del proyecto, se ha realizado un proceso de gestión del alcance con motivo de asegurar que se han cumplido de forma adecuada todos los requisitos del trabajo. Con este fin, se ha realizado una Estructura de Descomposición del Proyecto (EDP) organizando las tareas en cinco etapas fundamentales. En la Figura 9 se representa la EDP del proyecto.

Figura 9. Estructura de Descomposición del Proyecto.



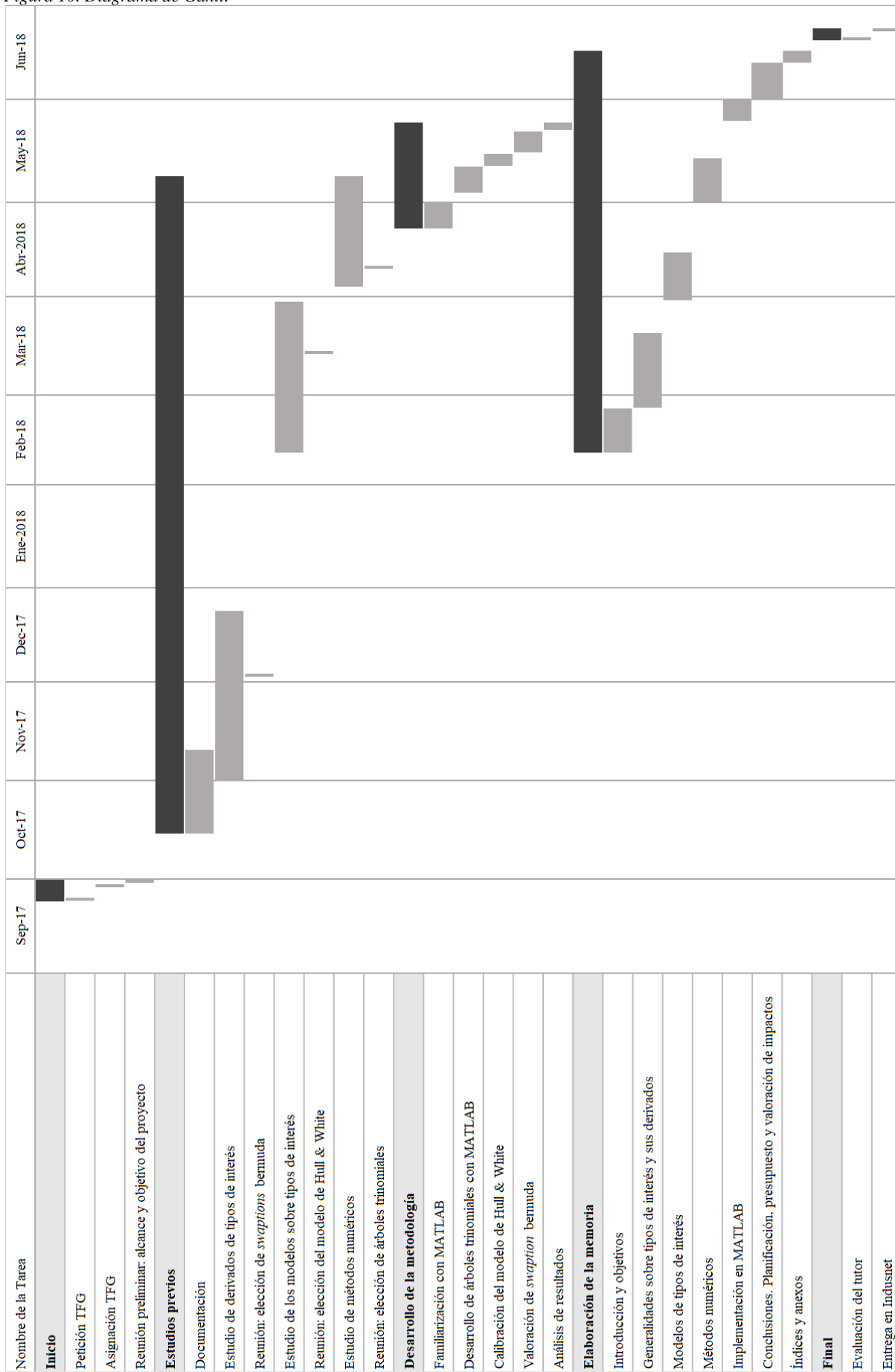
8.1.2. Diagrama de Gantt

En la Tabla 1 se representan las tareas realizadas durante el trabajo junto con su duración y sus fechas de inicio y fin. Se muestran las cinco etapas fundamentales de la EDP desglosadas en sus subactividades correspondientes. A partir de esta información se ha construido el diagrama de Gantt de la Figura 10. En este diagrama, las tareas realizadas durante el proyecto se representan mediante barras horizontales con longitudes dependientes de la duración de la actividad. Las barras negras representan la duración de las etapas fundamentales de la EDP.

Tabla 1. Planificación para el diagrama de Gantt.

Tarea	Duración	Fecha Inicio	Fecha Fin
Inicio	5 días	lun 25/09/2017	vie 29/09/2017
Petición TFG	1 día	lun 25/09/2017	lun 25/09/2017
Asignación TFG	1 día	jue 28/09/2017	jue 28/09/2017
Reunión preliminar: alcance y objetivo del proyecto	1 día	vie 29/09/2017	vie 29/09/2017
Estudios previos	146 días	lun 16/10/2017	mar 08/05/2018
Documentación	19 días	lun 16/10/2017	jue 09/11/2017
Estudio de derivados de tipos de interés	38 días	mié 01/11/2017	vie 22/12/2017
Reunión: elección de <i>swaptions</i> bermuda	1 día	lun 04/12/2017	lun 04/12/2017
Estudio de los modelos sobre tipos de interés	34 días	lun 12/02/2018	jue 29/03/2018
Reunión: elección del modelo de Hull & White	1 día	mié 14/03/2018	mié 14/03/2018
Estudio de métodos numéricos	26 días	mié 04/04/2018	mar 08/05/2018
Reunión: elección de árboles trinomiales	1 día	mar 10/04/2018	mar 10/04/2018
Desarrollo de la metodología	24 días	lun 23/04/2018	jue 24/05/2018
Familiarización con MATLAB	6 días	lun 23/04/2018	lun 30/04/2018
Desarrollo de árboles trinomiales con MATLAB	6 días	jue 03/05/2018	jue 10/05/2018
Calibración del modelo de Hull & White	3 días	vie 11/05/2018	mar 15/05/2018
Valoración de <i>swaption</i> bermuda	5 días	mié 16/05/2018	mar 22/05/2018
Análisis de resultados	2 días	mié 23/05/2018	jue 24/05/2018
Elaboración de la memoria	90 días	lun 12/02/2018	vie 15/06/2018
Introducción y objetivos	10 días	lun 12/02/2018	vie 23/02/2018
Generalidades sobre tipos de interés y sus derivados	17 días	lun 26/02/2018	mar 20/03/2018
Modelos de tipos de interés	11 días	vie 30/03/2018	vie 13/04/2018
Métodos numéricos	13 días	mar 01/05/2018	lun 15/05/2018
Implementación en MATLAB	5 días	vie 25/05/2018	jue 31/05/2018
Conclusiones. Planificación, presupuesto y valoración de impactos	8 días	vie 01/06/2018	mar 12/06/2018
Índices y anexos	3 días	mié 13/06/2018	vie 15/06/2018
Final	3 días	mié 20/06/2018	vie 22/06/2018
Evaluación del tutor	1 día	mié 20/06/2018	mié 20/06/2018
Entrega en Indusnet	1 día	vie 22/06/2018	vie 22/06/2018

Figura 10. Diagrama de Gantt.



El periodo entre el viernes 22 de diciembre de 2017 y el lunes 12 de febrero de 2018 representa una época de inactividad debido a vacaciones y exámenes. De acuerdo con el diagrama de Gantt la duración combinada de las cinco etapas fundamentales del proyecto fue de 160 días laborables (excluyendo el periodo de 35 días laborables de inactividad). Considerando que se ha trabajado, en media, 2 horas y 30 minutos por día, se ha empleado un total de 400 horas en el proyecto. Se ha dedicado un tiempo que se corresponde con los 12 ECTS que representa el TFG en el programa académico.

8.2. Presupuesto

Con el fin de obtener el presupuesto total del proyecto se ha considerado el coste de los recursos humanos utilizados, así como coste de los recursos materiales empleados. Una vez calculados estos costes, se ha obtenido el presupuesto total del proyecto

En cuanto a los costes asociados a los recursos humanos, estos se han cuantificado teniendo en cuenta las horas empleadas por cada una de las partes involucradas en el proyecto y salarios que se consideran apropiados para cada una de estas partes. El proyecto se ha llevado a cabo en su totalidad por el autor, Juan Pablo Bonfrisco Ayala, y el tutor, Carlos Eduardo González Guillén; que se pueden considerar como ingenieros junior y senior, respectivamente. Como se ha calculado en el apartado anterior mediante el diagrama de Gantt, el autor ha empleado aproximadamente 400 horas en el proyecto. La aportación del tutor al proyecto se puede estimar alrededor del 25% de las horas empleadas por el autor, es decir, 100 horas. El porcentaje de horas empleadas por el tutor ha sido elevado en cuanto un trabajo de este tipo, esto se debe a que se ha contado con un único tutor. Se ha considerado un salario de 20,00 €/hora para un cargo de ingeniero junior y 40,00 €/hora para un cargo de ingeniero senior. En la Tabla 2 se desglosa el coste total de los recursos humanos teniendo en cuenta las consideraciones anteriores.

El coste total de los recursos humanos asciende a un total de 12.000,00 €.

Tabla 2. Desglose de los costes de recursos humanos.

Concepto	Horas de trabajo (h)	Salario horario (€/hora)	Importe (€)
Ingeniero junior	400	20,00	8.000,00
Ingeniero senior	100	40,00	4.000,00
Coste total de los recursos humanos			12.000,00 €

Dentro de los recursos materiales empleados en el proyecto se incluyen los equipos de hardware y las licencias de software utilizadas. Estos artículos se recopilan con sus respectivos precios unitarios en la Tabla 3. En cuanto a la licencia de MATLAB, se deben considerar los complementos utilizados para el programa obtenido en el Capítulo 6. Para calcular la amortización de los recursos materiales, se ha considerado una amortización lineal del 20% para los equipos electrónicos y del 33% para los sistemas y programas informáticos²⁸. El plazo de amortización es igual a los 10 meses de duración del proyecto, obtenidos del diagrama de Gantt.

²⁸ (Agencia Tributaria, 2016)

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, se ha obtenido un coste total de recursos materiales de 279,91 €.

Tabla 3. Desglose de los costes de recursos materiales.

Concepto	Unidades	Precio unitario (€)	Amortización (€)	Importe (€)
Portátil Asus UX430UA GV266T	1	1.049,00	174,83	174,83
Office Hogar y Estudiantes 2016	1	149,00	40,98	40,98
MATLAB and Simulink Student Suite	1	83,49	22,96	22,96
MATLAB Financial Toolbox	1	8,47	2,33	2,33
MATLAB Financial Instruments Toolbox	1	8,47	2,33	2,33
Impresión y encuadernación	1	36,48	-	36,48
Coste total de los recursos materiales				279,91 €

Finalmente se ha obtenido el presupuesto total del proyecto sumando los costes asociados a los recursos humanos y los costes asociados a los recursos materiales, y teniendo en cuenta el 21% de IVA. Esta información viene reflejada en la Tabla 4. Se ha obtenido un presupuesto total de 14.858,69 €.

Tabla 4. Presupuesto total del proyecto.

Concepto	Importe (€)
Coste total de los recursos humanos	12.000,00
Coste total de los recursos materiales	279,91
Coste total del proyecto antes de impuestos	12.279,91
IVA (21%)	2.578,78
Coste total del proyecto después de impuestos	14.858,69 €

8.3. Valoración de impactos

El procedimiento detallado en este trabajo permite obtener un valor imparcial para los *swaptions* de tipo bermuda utilizando información disponible en el mercado. El cálculo adecuado de este precio tiene un gran impacto socioeconómico ya que entidades financieras tanto públicas como privadas emplean este tipo de instrumentos para llevar a cabo reestructuraciones de deuda y coberturas frente a variaciones en los tipos de interés. Dado que estas operaciones financieras involucran cantidades monetarias significativas la correcta valoración de estos productos tiene un impacto directo en la situación financiera de las entidades que los emplean.

El modelo analizado en este trabajo representa un excelente punto de partida para la valoración de derivados de tipos de interés ya que aun manteniendo una relativa sencillez permite obtener precios precisos para derivados complejos como los *swaption* bermuda. El estudio realizado representa un escalón intermedio hacia modelos más complejos como los modelos del *short rate* con varios factores, el modelo de Heath, Jarrow & Morton o el *LIBOR market model*. Estos modelos son ampliamente implementados por las entidades financieras por su precisión.

Anexo 1: Generalidades Sobre El Cálculo Diferencial Estocástico

En este anexo se hace una breve introducción a los conceptos del calculo diferencial estocástico referenciados a lo largo del trabajo. Para una información más detallada de dichos conceptos, el lector puede referirse a (Karatzas & Shreve, 1998).

Definición 8.1 (Proceso de Wiener): Se dice que una variable estocástica z_t dependiente del tiempo t sigue un proceso de Wiener si cumple las siguientes condiciones:

- 1) $z_0 = 0$
- 2) La variación dz_t experimentada por la variable en un tiempo t determinado es independiente de los incrementos producidos en otros instantes cualesquiera de tiempo.
- 3) Los incrementos dz_t producidos a lo largo de periodos infinitésimamente pequeños de tiempo dt siguen una distribución normal con media 0 y desviación estándar \sqrt{dt}

$$dz_t \sim N(0, \sqrt{dt})$$

Definición 8.2 (Martingala): Una martingala es un proceso estocástico cuya deriva es nula. La esperanza del valor de una martingala en cualquier tiempo futuro $t = T$ es igual a su valor en el tiempo actual $t = 0$:

$$E(\phi_T) = \phi_0 .$$

Lema 8.1 (Lema de Itô): Sea $x(t)$ un proceso de Itô, es decir, una variable que sigue una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz_t .$$

Una función f que depende de x y del tiempo t debe seguir un proceso tal que:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial f}{\partial x} dz_t .$$

Teorema 8.1 (Teorema de isometría de Itô): Sea $X(t)$ un proceso estocástico y dz_t un proceso de Wiener, se cumple que

$$E \left\{ \left[\int_0^\infty X(t) dz_t \right]^2 \right\} = E \left[\int_0^\infty X^2(t) dt \right] ,$$

Este resultado se puede extender para dos límites cualesquiera

$$E \left\{ \left[\int_s^t X(u) dz_u \right]^2 \right\} = E \left[\int_s^t X^2(u) du \right] .$$

Anexo 2: Código De MATLAB

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calibración del modelo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function[a_cal,sigma_cal] = Calibracion(a_max, a_min, cant_a, sigma_max,...
    sigma_min, cant_sigma, PreciosHistoricos, FechaEjercicio,...
    CurvasTIFechas, CurvasTIValores, K, IntercambiosAnualesSwap, Nominal)

a = a_min:(a_max-a_min)/(cant_a-1):a_max;
sigma = sigma_min:(sigma_max-sigma_min)/(cant_sigma-1):sigma_max;

for i = 1:cant_a
    for j = 1:cant_sigma
        for k = 1:length(PreciosHistoricos)
            HWVolSpec = hwvolspec(CurvasTIFechas(1,k), CurvasTIFechas(:,k),...
                sigma(j), CurvasTIFechas(:,k), a(i));
            RateSpec = intenvset('Compounding', -1, 'ValuationDate',...
                CurvasTIFechas(1,k), 'StartDates', CurvasTIFechas(1,k),...
                'EndDates', CurvasTIFechas(2:end,k), 'Rates',...
                CurvasTIValores(2:end,k));
            HWTimeSpec = hwtimespec(CurvasTIFechas(1,k),...
                CurvasTIFechas(2:end,k), -1);
            ArbolHW = hwtree(HWVolSpec, RateSpec, HWTimeSpec);
            dif_abs(i,j,k) = sqrt((PreciosHistoricos(k)-swaptionbyhw(ArbolHW,...
                'call', K, FechaEjercicio(k), 0, FechaEjercicio(k),...
                CurvasTIFechas(end,k), 'SwapReset', IntercambiosAnualesSwap,...
                'Principal', Nominal))^2);
        end
        error(i,j) = sum(dif_abs(i,j,:));
    end
end

[~,i]=min(min(error,[], cant_a));
[~,j]=min(min(error));
a_cal = a(i);
sigma_cal= sigma(j);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Valoración de swaptions bermuda %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [PrecioActualSwaptionBermuda] = ValoracionSwaptionsBermudaHW(a,...
    sigma, CurvaTIFechas, CurvaTIValores, CurvaTIForwardInst, K, Nominal,...
    FechasEjercicio)

%Parámetros iniciales para la construcción del árbol trinomial
%Número de instantes de tiempo considerados:
N = length(CurvaTIFechas);
%Longitud del intervalo de tiempo entre cada feha del árbol (en años):
dt = (CurvaTIFechas(end)-CurvaTIFechas(1))/(N-1)*365);
%Varianza, constante e igual para todo intervalo de tiempo:
V = ((sigma^2)/(2*a))*(1-exp(-2*a*dt));
dx = sqrt(3*V);
%Vector con la cantidad de nodos en cada instante de tiempo t_i:
CantidadNodos(1) = 1;
x(1,1) = 0;
k(1,1) = 0;
Q(1,1) = 1;
alpha(1) = CurvaTIValores(2);
r(1,1) = x(1,1)+alpha(1);

```

```

%Construcción del árbol trinomial
for i = 1:N-1
    CantidadNodosAux = 3;
    %Vector de indices j en el tiempo t_i:
    Indicej = (CantidadNodos(i)-1)/2: -1: -(CantidadNodos(i)-1)/2;
    %Inicializar los Q del instante de tiempo t_i+1:
    Q(end,end+1) = 0;
    %Matriz de esperanzas, cada nodo tiene una esperanza distinta:
    E = x(:)*exp(-a*dt);

    %Trabajo con el nodo superior del tiempo t_i
    %Cálculo de la k para el nodo superior del tiempo t_i:
    k(1,i+1) = round(E(1)/dx);
    %Valor de x en los nodos a los que puedo saltar
    %desde el nodo superior de t_i:
    x = 0;
    x(1) = (k(1,i+1)+1)*dx;
    x(2) = k(1,i+1)*dx;
    x(3) = (k(1,i+1)-1)*dx;
    % Cálculo de las probabilidades para el nodo superior de t_i
    dif(1,i) = E(1)-x(2);
    P_S(1,i) = 1/6 + dif(1,i)^2/(6*V) + dif(1,i)/(2*dx);
    P_M(1,i) = 2/3 - dif(1,i)^2/(3*V);
    P_I(1,i) = 1/6 + dif(1,i)^2/(6*V) - dif(1,i)/(2*dx);

    %Calculo de los parámetros Q
    if CantidadNodos(i) == 1 %Para el nodo inicial
        Q(1,i+1) = Q(1,i)*P_S(1,i)*exp(-(alpha(i))*dt);
        Q(2,i+1) = Q(1,i)*P_M(1,i)*exp(-(alpha(i))*dt);
        Q(3,i+1) = Q(1,i)*P_I(1,i)*exp(-(alpha(i))*dt);
    else %Para el resto de nodos del árbol
        Q(1,i+1) = Q(1,i)*P_S(1,i)*exp(-(alpha(i) + Indicej(1)*dx)*dt);
        Q(2,i+1) = Q(1,i)*P_M(1,i)*exp(-(alpha(i) + Indicej(1)*dx)*dt);
        Q(3,i+1) = Q(1,i)*P_I(1,i)*exp(-(alpha(i) + Indicej(1)*dx)*dt);

    %Trabajo con los nodos j-ésimos del tiempo t_i
    for j = 2:CantidadNodos(i)
        %Cálculo de la k para el nodo j-ésimo del tiempo t_i:
        k(j,i+1) = round(E(j)/dx);
        %Valor de x en los nodos a los que se puede saltar desde :
        xAux(1) = (k(j,i+1)+1)*dx;
        xAux(2) = (k(j,i+1))*dx;
        xAux(3) = (k(j,i+1)-1)*dx;
        % Cálculo de las probabilidades para el nodo j-ésimo del tiempo t_i
        dif(j,i) = E(j)-xAux(2);
        P_S(j,i) = 1/6 + dif(j,i)^2/(6*V) + dif(j,i)/(2*dx);
        P_M(j,i) = 2/3 - dif(j,i)^2/(3*V);
        P_I(j,i) = 1/6 + dif(j,i)^2/(6*V) - dif(j,i)/(2*dx);
        QAux(1) = Q(j,i)*P_S(j,i)*exp(-(alpha(i) + Indicej(j)*dx)*dt);
        QAux(2) = Q(j,i)*P_M(j,i)*exp(-(alpha(i) + Indicej(j)*dx)*dt);
        QAux(3) = Q(j,i)*P_I(j,i)*exp(-(alpha(i) + Indicej(j)*dx)*dt);

        if xAux(1) == x(CantidadNodosAux-2)
            Q(CantidadNodosAux-2,i+1) = Q(CantidadNodosAux-2,i+1) + QAux(1);
            Q(CantidadNodosAux-1,i+1) = Q(CantidadNodosAux-1,i+1) + QAux(2);
            Q(CantidadNodosAux,i+1) = Q(CantidadNodosAux,i+1) + QAux(3);
        elseif xAux(1) == x(CantidadNodosAux-1)
            CantidadNodosAux = CantidadNodosAux + 1;
            x(CantidadNodosAux) = xAux(3);
            Q(CantidadNodosAux-2,i+1) = Q(CantidadNodosAux-2,i+1) + QAux(1);
            Q(CantidadNodosAux-1,i+1) = Q(CantidadNodosAux-1,i+1) + QAux(2);
        end
    end
end

```

```

    Q(CantidadNodosAux,i+1) = QAux(3);
elseif xAux(1) == x(CantidadNodosAux)
    CantidadNodosAux = CantidadNodosAux + 2;
    x(CantidadNodosAux-1) = xAux(2);
    x(CantidadNodosAux) = xAux(3);
    Q(CantidadNodosAux-2,i+1) = Q(CantidadNodosAux-2,i+1) + QAux(1);
    Q(CantidadNodosAux-1,i+1) = QAux(2);
    Q(CantidadNodosAux,i+1) = QAux(3);
end
end
end

%CantidadNodos en el tiempo t_i+1 debe ser igual a la cantidad que se ha
%contado con CantidadNodosAux en la iteración i-ésima del bucle for:
CantidadNodos(i+1) = CantidadNodosAux;

%Cálculo de alpha para el tiempo t_i+1
IndicejAux = (CantidadNodosAux-1)/2: -1: -(CantidadNodosAux-1)/2;
alpha(i+1) = (1/dt)*(CurvaTIValores(i+2)*((CurvaTIFechas(i+2)-...
    CurvaTIFechas(1))/365)+ log(sum(Q(1:CantidadNodosAux,i+1)*...
    exp(-IndicejAux(:).*dx*dt))));

%Cálculo de los short rates en cada nodo del tiempo t_i+1 siguiente
rAux = x(:)+alpha(i+1);
ceros = length(r) - length(rAux);
r(1:end - ceros,i+1) = rAux;
end

%Obtención del precio del swaption bermuda
NumeroFilas = CantidadNodos';
T = dt*(N-1): -dt: 0;
t = 0: dt: dt*(N-1);
BonoAVencimiento = exp(-CurvaTIValores(N)*T(1));

%Trabajando solamente con los nodos anteúltimos
BonoAFechaN_1 = exp(-CurvaTIValores(N-1)*t(N-1));
for i = 1:NumeroFilas(N-1)
    B(i,N-1) = (1/a)*(1 - exp(-a*(T(N-1))));
    A(i,N-1) = (BonoAVencimiento(i)/BonoAFechaN_1(i))*exp(B(i,N-1)*...
        CurvaTIForwardInst(N-1)-(sigma/(4*a))*(1 - exp(-2*a*t(N-1)))*...
        B(i,N-1)^2);
    Bono(i,N-1) = A(i,N-1)*exp(-B(i,N-1)*r(i,N-1));
    SumaBono(i,N-1) = T(N-1)*Bono(i,N-1);
    SwapTIVariable(i) = (1-Bono(i,N-1))/SumaBono(i,N-1);
    if isempty(find(CurvaTIFechas(i)==FechasEjercicio,1))
        PrecioSwaptionBermuda(i,N-1) = 0;
    else
        PrecioSwaptionBermuda(i,N-1) = max(SumaBono(i,N-1)*...
            (SwapTIVariable(i)-K),0);
    end
end

%Trabajando con el resto de nodos
for j = (N-2):-1:2
    BonoAFechaj(j) = exp(-CurvaTIValores(j)*t(j));
    for i = 1:NumeroFilas(j)
        B(i,j) = (1/a)*(1 - exp(-a*(T(j))));
        A(i,j) = (BonoAVencimiento/BonoAFechaj(j))*exp(B(i,j)*...
            CurvaTIForwardInst(j)-(sigma/(4*a))*(1 - exp(-2*a*t(j)))*B(i,j)^2);
        Bono(i,j) = A(i,j)*exp(-B(i,j)*r(i,j));
    end
end

```

```

SumaBono(i,j) = T(j)*Bono(i,j)+(P_S(i,j)*SumaBono(k(i,j)+1,j+1)+...
    P_M(i,j)*SumaBono(k(i,j),j+1)+P_I(i,j)*SumaBono(k(i,j)-1,j+1));
SwapTIVariable(i) = (1 - Bono(i,j))/SumaBono(i,j);
CC(i,j) = exp(-r(i,j)*dt)*(P_S(i,j)*PrecioSwaptionBermuda(k(i,j)+...
    1,j+1)+P_M(i,j)*PrecioSwaptionBermuda(k(i,j),j+1)+P_I(i,j)*...
    PrecioSwaptionBermuda(k(i,j)-1,j+1));
if isempty(find(CurvaTIFechas(i)==FechasEjercicio,1))
    PrecioSwaptionBermuda(i,j)=CC(i,j);
else
    PrecioSwaptionBermuda(i,j) = max(SumaBono(i,j)*...
        (SwapTIVariable(i)-K),CC(i,j));
end
end
end

%Precio actual del swaption bermuda
PrecioActualSwaptionBermuda = Nominal*PrecioSwaptionBermuda(1,1);

```

Índice De Figuras

Figura 1. Evolución temporal del nominal de los derivados en los mercados OTC (en trillones de dólares americanos).	9
Figura 2. Curva de tipos de interés del EURIBOR fijada en Enero de 2018.	15
Figura 3. Evolución temporal de la curva de tipos de interés del EURIBOR. Puede observarse que los tipos de interés a corto plazo en la zona Euro tienen valores negativos en la actualidad.	16
Figura 4. Árbol binomial con tres instantes de tiempo.	45
Figura 5. Árbol binomial para la evolución temporal del precio de una acción.	47
Figura 6. Evolución de la variable x desde el nodo i, j hacia los nodos $i + 1, k + 1, i + 1, k$ o $i + 1, k - 1$ con probabilidades pS, pM y pI , respectivamente.	50
Figura 7. Árbol trinomial para una variable x desde el instante inicial t_0 hasta t_3 donde existe recombinación de los nodos.	52
Figura 8. Trayectorias posibles hasta el nodo $(2,1)$ en el árbol trinomial de la Figura 7.	55
Figura 9. Estructura de Descomposición del Proyecto.	62
Figura 10. Diagrama de Gantt.	64

Índice De Tablas

Tabla 1. Planificación para el diagrama de Gantt.	63
Tabla 2. Desglose de los costes de recursos humanos.	65
Tabla 3. Desglose de los costes de recursos materiales.	66
Tabla 4. Presupuesto total del proyecto.	66

Bibliografía

- Agencia Tributaria. (2016). *Tabla de coeficientes de amortización lineal*. Obtenido de https://www.agenciatributaria.es/AEAT.internet/Inicio/_Segmentos_/Empresas_y_profesionales/Empresas/Impuesto_sobre_Sociedades/Periodos_impositivos_a_partir_de_1_1_2016/Base_imponible/Amortizacion/Tabla_de_coeficientes_de_amortizacion_lineal_.shtml
- Bank of International Settlements. (2018). *Global OTC derivatives market - Foreign exchange, interest rate, equity linked contracts*. Obtenido de <https://stats.bis.org/statx/srs/table/d5.1>
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-59.
- Brace, A., Gatarek, D., & Musiela, M. (1997). The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance*, 127-147.
- Brigo, D., & Mercurio, F. (2007). *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance.
- European Money Markets Institute. (2018). *EMMI EURIBOR*. Obtenido de <https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/about-euribor.html>
- Heath, D., Jarrow, R., & Morton, A. (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology. *Econometrica*, 77-105.
- Hull, J. C. (2009). *Options, Futures And Other Derivatives* (7ma ed.). Pearson Education.
- Hull, J. C., & White, A. D. (1990). Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4), 573-592.
- Hull, J. C., & White, A. D. (1994a). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models. *The Journal of Derivatives*, 7-16.
- Hull, J. C., & White, A. D. (1994b). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models. *The Journal of Derivatives*, 37-48.
- Hull, J. C., & White, A. D. (1995). A Note on the Models of Hull and White for Pricing Options on the Term Structure: Response. *The Journal of Fixed Income*, 97-102.
- Hull, J. C., & White, A. D. (1996). Using Hull-White Interest Rate Trees. *The Journal of Derivatives*, 26-36.
- ICE Benchmark Administration. (2018). *ICE LIBOR*. Obtenido de <https://www.theice.com/iba/libor>
- Jamshidian, F. (1989). An Exact Bond Option Pricing Formula. *The Journal of Finance*, 205-209.

- Karatzas, I., & Shreve, S. (1998). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer.
- Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economica and Management Science*, 141-83.
- Oficina Europea de Estadística. (2018). *Newsrelease Euroindicators*.
- Rendleman, R. J., & Bartter, B. J. (1980). The pricing of options on debt securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 11-24.
- Vasicek, O. A. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 177-188.