



**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS**

**MÁSTER EN INGENIERÍA EN ESTRUCTURAS, CIMENTACIONES Y
MATERIALES**

Trabajo Fin de Máster

La influencia de la tensión residual en la
inestabilidad de cilindros inflados

Manuel Enrique Mulder Pacheco

Tutor

José Merodio Gómez

Universidad Politécnica de Madrid
2018

AGRADECIMIENTO

A mi madre, Gisela, que me ha guiado en todo momento, mi hermano, mis tíos y primos cercanos por ser parte fundamental en mi vida.

A mi esposa, Fabianna, por estar día a día para darme ánimos y el apoyo necesario para culminar esta meta. Al igual que su familia que siempre ha estado para mí cuando lo he necesitado.

A todos los que de alguna forma u otra me han apoyado en el camino con su granito de arena.

ABSTRACT

Many biological materials show a phenomenon known as strain stiffening. This is often associated with the limited extensibility of the molecules that compose the material, in particular the collagen proteins. These materials act very differently from typical rubberlike materials. For instance, healthy arterial wall tissue is modelled with significant stiffening behavior. There is another group of biologically interesting materials that show a limited amount of strain stiffening followed by strain softening and then by further stiffening. We shall refer to such materials as localized strain softening materials, with the abbreviation LSS. One of the most impressive features exhibited by such materials, as compared with strain stiffening materials, is that a typical stress strain curve has a characteristic sigmoidal shape, rather similar to that for some rubberlike materials. This behavior has been seen in the arterial tissue of patients suffering from Marfan's syndrome. But there are also other features such as residual stress that we study here

We are going to investigate the behavior characteristics of a material model, a neo-Hookean strain–energy function that includes residual stress with respect to buckling. Instabilities that cause important changes in the diameter and/or thickness of a tube may be related to changes in soft tissue behavior associated with Marfan's syndrome and cardiac valve problems. A dilatation of the aorta may cause blood to leak backwards through a valve, in particular the mitral valve, thereby increasing the workload on the heart. As a result, the heart may enlarge in time. People with Marfan's syndrome often have an oversized mitral valve.

This paper consists in, first, studying the strain produced in the cylindrical membrane tube subjected to a uniform axial loading combined with a uniform internal pressure is described, along with the elastic material model (constitutive law) for the tube. This procedure will be done for two different thicknesses, the first thickness analyzed is 5% of the diameter, and, the second thickness simulated is 10% of the diameter. Afterwards, bifurcation from the deformed circular cylindrical geometry of the membrane tube is analyzed.

INDICE DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. OBJETIVOS	4
2. ECUACIONES BÁSICAS	5
3. BIFURCACIÓN	8
3.1. MODO ABOMBAMIENTO (BULGING)	8
4. MARCO TEÓRICO	9
4.1. PRETENSADO	9
4.2. LEY CONSTITUTIVA. TENSIÓN RESIDUAL	9
4.3. IMPLEMENTACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS	11
4.4. TENSIONES INICIALES	13
5. SIMULACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS	15
6. CONCLUSIONES	286
6.1. CONCLUSIONES	26
6.2. FUTUROS TRABAJOS	27
7. BIBLIOGRAFÍA	288

INDICE DE FIGURAS

Figura 1: Esquema de la tensión uniaxial (t) versus deformación (e), respuesta del tejido arterial afectado por el síndrome de Marfan (curva continua) comparada con un tejido arterial sado (curva segmentada).....	6
Figura 2: Gráfico “LPF contra longitud de arco” para una prueba previa.....	16
Figura 3: Abombamiento localizado por ablandamiento por deformación en una simulación.....	16
Figura 4: Chequeo de tensiones residuales con el espesor normalizado (Caso 1).....	17
Figura 5: Chequeo de tensiones residuales con el espesor normalizado (Caso 2).....	17
Figura 6: Máxima deformación circunferencial en la bifurcación (Caso 1).....	18
Figura 7: Máxima deformación circunferencial en la bifurcación (Caso 2).....	19
Figura 8: Presión infladora normalizada en la bifurcación vs. Deformación axial (Caso 1).....	20
Figura 9: Presión infladora normalizada en la bifurcación vs. Deformación axial (Caso 2).....	20
Figura 10: Progreso de la inflación normalizada durante una simulación (Caso 1).....	21
Figura 11: Progreso de la inflación normalizada durante una simulación (Caso 2).....	22
Figura 12: Progreso de la deformación circunferencial durante una simulación (Caso 1).....	23
Figura 13: Progreso de la deformación circunferencial durante una simulación (Caso 2).....	23
Figura 14: Deformación circunferencial vs. Presión infladora normalizada (Caso 1).....	24
Figura 15: Deformación circunferencial vs. Presión infladora normalizada (Caso 2).....	25
Figura 16: Se observó que el cilindro se flexionaba durante una simulación para $\lambda_z = 1$	27
Figura 17: Gráfico “LPF vs. Longitud de arco” de una simulación para $\lambda_z = 1$	27

1. INTRODUCCIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

Muchos materiales biológicos muestran un fenómeno conocido como endurecimiento por deformación. Esto es frecuentemente asociado con la extensibilidad limitada de las moléculas que componen un material. Estos materiales se comportan muy diferentemente de los materiales de tipo goma, por ejemplo, el tejido sano de la pared arterial que presenta un comportamiento de rigidez significativo (ver (1)). Hay otro grupo de materiales biológicamente interesantes que tienen una cantidad limitada de endurecimiento por deformación seguido por un ablandamiento por deformación y luego un endurecimiento adicional. Se hará referencia a estos materiales como materiales con ablandamiento por deformación localizada o L.S.S. por sus siglas en inglés (localized strain softening). Una de las características más sorprendentes mostrada por estos materiales, en comparación con los materiales con endurecimiento por deformación, es que la curva típica tensión-deformación tiene una forma de sigmoide, similar a algunos materiales de goma. Este comportamiento ha sido observado en el tejido de las arterias de pacientes que sufren del síndrome de Marfan (ver (2)).

El síndrome de Marfan es un trastorno del tejido conectivo. Uno de los efectos de este trastorno es que las paredes de las arterias son débiles en comparación con arterias sanas (ver (3)). Cuando esto ocurre las arterias se dilatan, conduciendo al debilitamiento adicional de la parte interna de la pared de la arteria y un posible desgarre. Simultáneamente, el proceso de dilatación causa que la propia pared se haga más delgada y débil. Esta es una respuesta característica de la vena aorta, por ejemplo. Uno de los problemas principales que ocurren en pacientes con síndrome de Marfan es el desarrollo de aneurismas. En cuyo caso el espesor de la pared de la arteria disminuye y su diámetro incrementa (ver (4) y (5)).

En algunas investigaciones puede encontrarse que tratan con las propiedades elásticas del tejido aórtico de pacientes con el síndrome de Marfan (ver (6)). Resultados experimentales se ajustan con un modelo isotrópico no lineal elástico que exhibe el endurecimiento por deformación (ver (7)). Otros resultados preliminares en la respuesta

mecánica de arterias de pacientes con síndrome de Marfan indican que la respuesta es isotrópica y que la curva tensión deformación en ensayos uniaxiales tienen una respuesta de doble curvatura (ver (2)) que referimos a una forma sigmoidal o ablandamiento por deformación localizada como se ha indicado anteriormente. Esto está ilustrado en la Fig. 1, que es comparado con la curva de un tejido blando normal (curva segmentada). El mecanismo de dilatación de las arterias es poco entendido por varios factores involucrados, incluyendo la geometría, la no homogeneidad del material, la anisotropía, el desarrollo, el remodelamiento, la edad, la hipertensión, entre otros. No es posible considerar todas estas variables en un análisis simple y es por ello que se va a focalizar el trabajo en las tensiones residuales y su relación con el síndrome Marfan. El comportamiento de presión-radio tanto para elementos esféricos y cilíndricos ha sido estudiado en muchos trabajos (ver, (8) y (9)), en los que los puntos de cambio de presión están asociados al comienzo de la inestabilidad.

El abombado y el comportamiento de bifurcación de una membrana cilíndrica han sido investigados en (10). Aquí se va a investigar el comportamiento característico para el material con tensiones residuales con materiales de goma modelado como una función desplazamiento-energía neo-Hookeano. Inestabilidades que causan cambios significantes en el diámetro y/o espesor del tubo están relacionados con comportamiento de tejido blando asociado con el síndrome de Marfan y problemas de válvulas cardíacas. Una dilatación de la aorta puede causar que la sangre se escape hacia atrás a través de una válvula, en particular la válvula mitral, aumentando así la carga de trabajo en el corazón y como resultado el corazón puede sufrir un alargamiento con el tiempo. Es por esto que personas con el síndrome de Marfan frecuentemente tienen la válvula mitral de un tamaño mayor a lo normal (ver (6)).

Últimamente, las tensiones residuales han sido incluidas en el análisis. Esto ha estado motivado por varias razones. Primero, tensiones residuales son frecuentemente introducidas en materiales de goma durante su proceso de fabricación afectando el comportamiento del material (ver (11)). Segundo, en el tejido biológico blando, las tensiones residuales son producidas durante el desarrollo y el remodelamiento y tiene una influencia en el comportamiento mecánico de varios órganos como las arterias (ver (12)). De hecho, el efecto de las tensiones residuales en el comportamiento del material necesita no sólo ser considerado sino también entendido.

En el contexto de paredes de arterias, las tensiones residuales son frecuentemente consideradas por el llamado método de ángulo de apertura, que muestra que cuando un anillo de arteria es cortado este se abre. Esto indica que son tensiones residuales y ha sido utilizado considerando la torsión de un tubo tensionado residualmente, por ejemplo, (13) y (14).

Un enfoque más general del modelo de tensión residual lo considera como una tensión que está en equilibrio en ausencia de cargas externas, (ver (15)). Siguiendo este trabajo, Hoger (16), (17) y (18), proporcionó un material hiperelástico transversal isotrópico residual, en términos de invariantes. Esta formulación se ha desarrollado luego en el caso en el que no hay una dirección principal y usada para examinar la extensión y torsión de un cilindro sólido estresado residualmente en (19). Además, Merodio y Ogden (20) investigan el problema de los tubos pretensados bajo una torsión finita donde el pretensado se introduce utilizando la formulación explotada en (19). El efecto de las tensiones residuales sobre la ley constitutiva puede considerarse como un tensor estructural generalizado a partir del cual pueden formarse ciertas invariantes.

Ejemplos de estudios que analizan inestabilidades están en (22) y de materiales constitutivos en (23). En este trabajo se sigue el trabajo que se realizó en (24) con una diferencia substancial. En el trabajo (24) se restringió el estudio de inestabilidades a bulging y por ese motivo el movimiento de los puntos del tubo no se permitía en dirección azimutal. En dicho trabajo solo se consideró, por tanto, la inestabilidad de bulging. Aquí se elimina esta restricción y, por ende, se busca la primera inestabilidad que tendrá lugar en el material con tensiones residuales tras la extensión del mismo y el posterior inflado.

1.2. OBJETIVOS

Este trabajo consiste en, primero, hacer simulaciones en un software de elementos finitos para observar la deformación producida en un cilindro circular de membrana tensionado residualmente y sujeto a una carga axial uniforme combinada con una presión interna uniforme, junto con el modelo de material elástico para el tubo, y, posteriormente, se analizará el comportamiento de la deformación del cilindro para diferentes espesores. En principio, el modo de bifurcación que se espera es el abombamiento o bulging en inglés. También se busca comparar los resultados obtenidos con un trabajo previo (ver 21), donde se estudió el fenómeno de abombamiento para diferentes espesores, observándose que al aumentar el espesor del cilindro no se presenta la bifurcación. El punto determinante para esta comparación es que, a diferencia de este trabajo, no se consideró la tensión residual en el análisis del cilindro.

2. ECUACIONES BÁSICAS

Se considerará un membrana cilíndrica circular cuya superficie media en su forma sin deformar tiene la configuración descrita a continuación por las ecuaciones

$$\mathbf{X} = R\mathbf{E}_R(\Theta) + Z\mathbf{E}_Z, \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi, \quad -\frac{L}{2} \leq Z \leq \frac{L}{2} \quad [1]$$

Donde (R, Θ, Z) son coordenadas polares cilíndricas y $\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\Theta$ y \mathbf{E}_Z son vectores unitarios en las direcciones indicadas. La longitud L del cilindro podría ser finita o infinita.

La membrana del cilindro es inflada y extendida de forma que permanezca de forma circular. La presión interna es denotada por \mathbf{P} y la carga axial por \mathbf{N} . En esta configuración deformada la superficie media de la membrana es descrita por las ecuaciones

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2} \quad [2]$$

Donde $r, \theta = \Theta$ y z , son coordenadas cilíndricas polares en esta configuración. La longitud deformada del cilindro es l . Referida a coordenadas cilíndricas, el tensor del gradiente de deformación \mathbf{F} para un material incompresible tiene componentes diagonales $(\lambda^{-1}\lambda_z^{-1}, \lambda, \lambda_z)$ donde $\lambda = \lambda_\theta = \frac{r}{R} > 0$ es la deformación principal azimutal y λ_z es la deformación axial, de forma que $l = \lambda_z L$. Porque de la incompresibilidad asumida, la deformación principal radial es $\lambda_r = \lambda^{-1}\lambda_z^{-1}$.

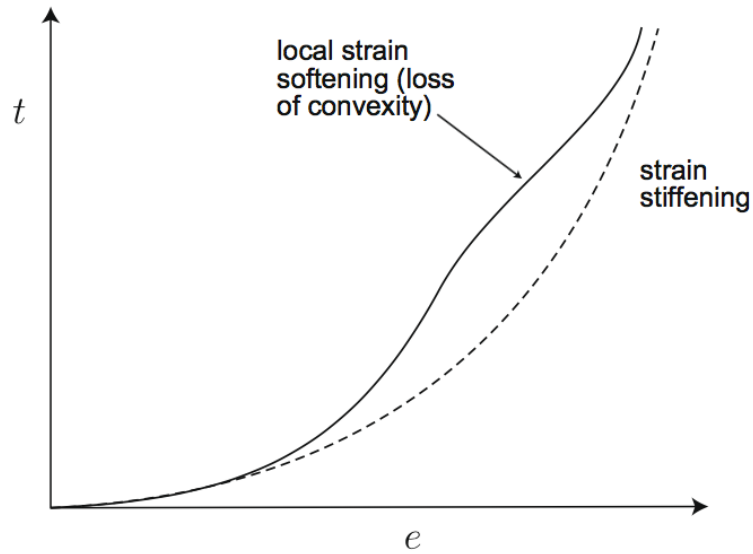


Fig. 1. Esquema de la tensión uniaxial (t) vs. deformación (e), respuesta del tejido arterial afectado por el síndrome de Marfan (curva continua) comparada con un tejido arterial sano (curva segmentada).

La tensión principal de Cauchy σ_{ii} puede ser escrita como

$$\sigma_{ii} = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p, \quad i = r, \theta, z, \quad [3]$$

Donde $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ es la función deformación-energía y p es la presión hidrostática asociada con la restricción de incompresibilidad. Usando la aproximación de la membrana $\sigma_{rr} \equiv 0$ se puede escribir

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda_i \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_i}, \quad \sigma_{zz} = \lambda_z \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_z}, \quad [4]$$

Donde tenemos que introducir la notación $\widehat{W}(\lambda, \lambda_z) = W(\lambda^{-1}\lambda_z^{-1}, \lambda, \lambda_z)$. Las ecuaciones de equilibrio para una membrana (ver (10)) son dadas por la presión infladora en la forma

$$P = \frac{H}{R} \frac{\widehat{W}_\lambda(\lambda, \lambda_z)}{\lambda \lambda_z} \quad [5]$$

Donde H es el espesor no deformado de la membrana y la \widehat{W}_λ denota $\frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda}$; similarmente, debemos usar la notación $\widehat{W}_{\lambda_z}, \widehat{W}_{\lambda\lambda}$, etc. La superficie cilíndrica exterior de la carcasa está libre de tracción.

Para investigar el comportamiento de un tubo de membrana cilíndrica para un material LSS debemos considerar la simple (incompresible, isotrópica) función deformación-energía.

$$W = \frac{\mu}{2} [I_1 - e^{-\beta(I_1-3)^2} - 2], \quad [6]$$

Donde $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ es la primera invariante principal de \mathbf{FF}^T , $\beta \geq 0$ es un parámetro material a nuestra disposición y $\mu (> 0)$ es el módulo cortante del estado de base del material. En particular, notamos que para $\beta = 0$ obtenemos el bien conocido material neo-Hookeano. El parámetro β puede luego ser usado para controlar el grado de intervención del ablandamiento del desplazamiento superimpuesto por el material base neo-Hookeano. Si $I_1 \approx 3$ entonces el término exponencial en [4] tiene un pequeño efecto. Como I_1 parte del valor 3 el término exponencial llega a ser significativo. Sin embargo, cuando I_1 es muy diferente de 3 el término exponencial pasa a ser insignificante de nuevo. Remarcamos que el término neo-Hookeano en [6] no da la tensión final el comportamiento de rigidez normalmente asociado con el tejido blando, pero es un asunto sencillo reemplazarlo por un término adecuado para éste propósito. Esto tendría poca o ninguna influencia sobre el carácter de la respuesta asociada con el ablandamiento de la deformación localizada que nos interesa, y por simplicidad nos enfocamos en la función deformación-energía [6].

Un simple cálculo usando la notación introducida por las deformaciones en [6] y [4] muestra que los componentes no cero del tensor de tensiones de Cauchy σ son dados por

$$\sigma_{\theta\theta} = \mu(\lambda^2 - \lambda^{-2}\lambda_z^{-2})[1 + 2\beta(I_1 - 3)e^{-\beta(I_1-3)^2}], \quad [7]$$

$$\sigma_{zz} = \mu(\lambda_z^2 - \lambda^{-2}\lambda_z^{-2})[1 + 2\beta(I_1 - 3)e^{-\beta(I_1-3)^2}], \quad [8]$$

Poco es sabido acerca de las deformaciones a las que trabaja una arteria enferma, aunque es sugerido que trabajan a deformaciones menores que una arteria sana (ver (7)). Se considera que una arteria sana trabaja a deformaciones axiales que está en el rango de $\lambda_z = 1.1$ to 1.5.

3. BIFURCACIÓN

Para investigar los posibles modos de bifurcación de un cilindro inflado consideramos el incremento de desplazamientos de la forma.

$$\dot{\mathbf{x}} = u(\theta, z)\mathbf{e}_r + v(\theta, z)\mathbf{e}_\theta + w(\theta, z)\mathbf{e}_z \quad [9]$$

Para algunos de los modos de bifurcación no es necesario simplificar $\dot{\mathbf{x}}$. La forma de $\dot{\mathbf{x}}$ para un modo de bifurcación particular es dado en (10).

3.1. MODO ABOMBAMIENTO (BULGING)

Se va a examinar deformaciones axisimétricas, donde los componentes de incremento de desplazamiento dependen de Z y no de θ . El resultado de la bifurcación es la típica forma de un globo de fiesta. El criterio para una longitud de tubo infinita es

$$\lambda_z^2 \widehat{W}_{\lambda_z \lambda_z} (\lambda^2 \widehat{W}_{\lambda \lambda} - \lambda \widehat{W}_\lambda) - (\lambda_z \lambda \widehat{W}_{\lambda_z \lambda} - \lambda \widehat{W}_\lambda)^2 = 0, \quad [10]$$

Como es mostrado en (10), el lado izquierdo de [11] será negativo o positivo dependiendo de su primer término. Usando [4] este primer término puede ser escrito como

$$\lambda_z^2 \widehat{W}_{\lambda_z \lambda_z} (\lambda^2 \widehat{W}_{\lambda \lambda} - \lambda \widehat{W}_\lambda) = \left(\lambda_z^2 \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \lambda_z} - \sigma_{zz} \right) \left(\lambda \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \lambda} - 2\sigma_{\theta\theta} \right). \quad [11]$$

4. MARCO TEÓRICO

4.1. PRETENSADO

La estabilidad elástica de tubos bajo torsión finita ha sido analizada últimamente en términos de diferentes pre-deformaciones (ver (22)). Se va a desarrollar un alcance diferente al utilizado en (22) para tratar pretensado. En particular, vamos a considerar que el modelo está dado por una ley constitutiva de tensión residual no lineal elástico que depende del número de invariables (ver (23)). Esta metodología puede ser utilizada en la codificación de un software comercial de elementos finitos, que podría abrir la posibilidad de ser muy utilizada por ingenieros en muchos diseños. Es suficiente decir que el modelado de tensiones residuales en marcos teóricos tiene el potencial de ser usado en diferentes problemas con diferentes condiciones de contorno y geometrías.

En lo siguiente, vamos a describir brevemente, primero, la metodología para introducir las tensiones iniciales en la ley constitutiva, segundo, la implementación de la ley constitutiva en un código comercial de elementos finitos en mano y, tercero, una forma particular de tensión residual apropiada para la geometría considerada. Finalmente se aplicará la metodología de inestabilidades torsional.

4.2. LEY CONSTITUTIVA. TENSIÓN RESIDUAL

En la literatura, tres métodos son usados para introducir tensiones residuales, estos son:

1. Definir una configuración de tensiones globales libres y virtuales, y deformar la estructura desde esa configuración virtual a la configuración inicial. Este es el método a seguir para revertir el método de ángulo de aperturas utilizado en arterias.
2. Definir el comportamiento del material con respecto a una configuración de tensiones virtuales (similar al método anterior) y la distribución de tensiones iniciales. En cada punto se calcula el tensor de deformación que produce el

pretensado, que define la configuración en cada punto del material. Este método es usado, por ejemplo, por Abaqus para definir pretensados y está disponible para materiales isotrópicos.

3. Definir la energía de deformación en función del pretensado. Esta formulación es más general que las nombradas previamente y no usa configuraciones virtuales.

Vamos a utilizar el tercer método, el cual no había sido utilizado anteriormente en un código comercial de elementos finitos hasta la implementación de esto en (24). Es por ello que creemos que es de suma importancia para ingenieros que trabajan en estas áreas. Por esta razón, en lo siguiente se describirá la forma en la que el material a usar tiene que ser implementado y detallado para el modelo a usar.

En este marco, la energía de deformación es de la forma $W(\mathcal{C}, \sigma_0)$, donde σ_0 es la tensión inicial en la configuración referente \mathcal{B}_r (ver (25)). Es asumido que la tensión residual no está acompañada por el par de tensiones intrínseco, así que es simétrica ($\sigma_0^T = \sigma_0$), y, además, la ecuación de equilibrio

$$Div \sigma_0 = \mathbf{0}, \quad [12]$$

Se debe satisfacer, donde Div es el operador divergente con respecto a la configuración referencia. Se deduce que no existe distinción entre tensión nominal y tensión de Cauchy para la tensión residual, ya que la deformación se mide desde la configuración de referencia. No existe superficie a tracción y σ_0 debe satisfacer la condición de contorno.

$$\sigma_0 \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \partial \mathcal{B}_r. \quad [12]$$

Nótese que σ_0 es una tensión residual en el sentido de Hoger (26) y que es distinguida de otros tipos de tensiones iniciales que pueden ser asociadas con superficies de tracción.

La función particular de energía deformación a considerar será:

$$W := c(I_1 - 3) + \frac{f}{2}(I_5 - \text{tr}\sigma_0) + \frac{1-f}{4}(I_6 - \text{tr}\sigma_0), \quad [14]$$

Donde $I_5 := \text{tr}(\sigma_0 \mathbf{C})$ y $I_6 := \text{tr}(\sigma_0 \mathbf{C}^2)$. En este caso el pequeño módulo de deformación constante no es $2c$. Además, tensiones residuales son necesariamente no uniforme y geoméricamente dependiente, y la respuesta elástica de un cuerpo de material tensionado residualmente es por ello inhomogéneo. Los valores de $f \in \{0,1\}$.

Si $f = 0$, entonces [14] no incluye la invariante I_5 mientras que si $f = 1$, la función [14] no incluirá la invariante I_6 .

4.3. IMPLEMENTACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

El modelo del material se implementará en una subrutina de Abaqus (UMAT) para ser usado como un elemento híbrido incompresible. El usuario debe proveer el tensor de tensiones de Cauchy σ . En particular, la tensión desviatoria debe ser provista por un material totalmente incompresible (ver (27)). La función de energía deformación [14] se describe como $\bar{W}(\bar{\mathbf{C}}, \sigma_0)$ donde $\bar{\mathbf{C}} := J_3^{-1/3} \mathbf{C}$ con $I_3 = \det \mathbf{C} = J^2$. La condición de incompresibilidad es luego impuesta por el código de elementos finitos usando el multiplicador de Lagrange.

Ahora, la tensión viene dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \mathbf{F}^T, \quad [15]$$

Donde

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad [16]$$

Con índice repetido i siguiendo el convenio de convención de Einstein.

Para presentar el tensor de tensiones de Cauchy en forma explícita se hace de las fórmulas

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1}, \quad \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial I_6}{\partial \mathbf{C}} = \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{C} + \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_0. \quad [17]$$

Seguido de una simple manipulación usando (19), de forma que

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} = I_3^{-\frac{1}{3}} \left(c \mathbf{1} + \frac{f \boldsymbol{\sigma}_0}{2} + \frac{c I_1 \mathbf{C}^{-1}}{3} - \frac{f I_5 \mathbf{C}^{-1}}{6} \right) + (1-f) I_3^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial I_6}{\partial \mathbf{C}} - \frac{I_6 \mathbf{C}^{-1}}{6} \right). \quad [18]$$

Además, se debe proporcionar el tensor de módulo tangente para funciones de energía de deformación basadas en invariantes. El tensor coherente (algorítmico) del módulo tangente en el código de elementos finitos que estamos usando es

$$\mathbf{C}^J := \frac{1}{J} \frac{\partial J \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}}{\partial \mathbf{D}}, \quad [19]$$

Donde $J \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$ es la tasa de Jaumann de la tensión de Kirchoff y \mathbf{D} es la tasa de deformación definida como la parte simétrica del gradiente de velocidad $\mathbf{L} = \partial v / \partial x$. Más específicamente, la velocidad de deformación se descompone cuando $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ y el tensor de rotación (asimétrico) \mathbf{W} se utiliza para definir la velocidad de Jaumann (objetivo) de un tensor espacial como

$$(\blacksquare)^{\nabla J} = \frac{\partial(\blacksquare)}{\partial t} - \mathbf{W}(\blacksquare) - (\blacksquare)\mathbf{W}. \quad [20]$$

La constante Jacobiana \mathbf{C}^J puede ser computada como

$$C_{ijkl}^J = C_{ijkl}^C + \frac{1}{2} (\delta_{ik} \sigma_{ij} + \delta_{il} \sigma_{kj} + \delta_{jl} \sigma_{ik} + \delta_{jk} \sigma_{il}), \quad [21]$$

Donde

$$C_{ijkl}^C = \frac{4}{J} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} F_{l\delta} \left. \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{C}^2} \right|_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad [22]$$

Las siguientes formas son necesitadas:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right|_{ijkl} = \frac{1}{2} (C_{ik}^{-1} C_{lj}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{kj}^{-1}), \quad [23]$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{C} + \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_0)}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \sigma_{0ij} + \delta_{il} \sigma_{0kj} + \delta_{jl} \sigma_{0ik} + \delta_{jk} \sigma_{0il}), \quad [24]$$

Donde se ha tomado en consideración que los tensores de cuarto orden actúan sobre tensores simétricos de segundo orden.

Más explícitamente, usando (20), (27) y (28), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \mathbf{C}^2} = I_3^{-1/3} & \left[-\frac{c}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{1}) - \frac{f}{6} (\boldsymbol{\sigma}_0 \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{\sigma}_0) \right. \\ & + \left(\frac{cl_1}{9} l + \frac{fI_5}{18} \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \left(\frac{cl_1}{3} l + \frac{fI_5}{6} \right) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \Big] \\ & + (1-f) I_3^{-2/3} \left[\frac{I_6}{9} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{6} \left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial I_6}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial I_6}{\partial \mathbf{C}} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) - I_6 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 I_6}{\partial \mathbf{C}^2} \right], \end{aligned} \quad [25]$$

Que completa los detalles necesarios para implementar la ley constitutiva y el código de elementos finitos a usar.

4.4. TENSIONES INICIALES

Las tensiones iniciales que se consideran son dadas en (25) y son

$$\sigma_{ORR} = \beta(R - A)(R - B) \quad \text{and} \quad [26]$$

$$\sigma_{O\theta\theta} = \beta[3R^2 - 2(A + B)R + AB], \quad [27]$$

Donde β es la fuerza de la tensión residual con unidades de tensión por longitud cuadrada. Puede ser no dimensional tomando $\beta = c \bar{\beta} / RT$. Este es un campo de tensión axisimétrico con $\sigma_{0ZZ} = 0$

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Marco teórico

En particular, si $\sigma_{0ZZ} = 0$, entonces cualquier campo de esfuerzo inicial posible debe obedecer al componente no trivial de la ecuación de equilibrio (14), que es la ecuación radial

$$\frac{\partial \sigma_{0RR}}{\partial R} + \frac{1}{R}(\sigma_{0RR} + \tau_{0\theta\theta}) = 0, \quad [28]$$

Con condiciones de contorno

$$\sigma_{0RR} = 0 \quad \text{on} \quad R = A, B. \quad [29]$$

Notamos que [26] y [27] obedecen [28] en

$$\frac{d(R\sigma_{0RR})}{dR} = \sigma_{0\theta\theta}. \quad [30]$$

Numéricamente, algunas iteraciones pueden ser necesarias para establecer el equilibrio inicial del tubo sometido a tensiones residuales. Para aumentar la convergencia disminuyendo el paso del tiempo, la resistencia de la tensión residual β se incrementa linealmente de cero a su valor real.

5. SIMULACIÓN CON ELEMENTOS FINITOS

Para evaluar la influencia las tensiones residuales en la estabilidad elástica de tubos bajo deformación axial, la metodología desarrollada se aplicó a un cilindro con relación $T/D = 0.05$ y 0.10 y $L/D = 20$. En este estudio, se seleccionó un diámetro exterior de 10 mm, espesor de 0.50 mm (Caso 1) y 1.00 mm (Caso 2) y una longitud de 200 mm. Para capturar el campo de tensión inicial, se tomaron 5 elementos en dirección del espesor, 32 elementos en dirección circunferencial y 200 elementos en dirección longitudinal. La dirección axial es la más importante, ya que la geometría del abombamiento debe estar correctamente definida por un número apropiado de elementos en esta dirección.

Tensiones residuales son generadas durante el primer paso. Fueron necesarios seis incrementos con una iteración en cada uno de ellos para establecer el equilibrio. Las tensiones residuales radiales y circunferenciales junto al espesor en ambas direcciones del plano que corta al tubo en forma circular son mostradas en la Fig. 4. Como mostrado, la magnitud de la tensión residual circunferencial en el borde del cilindro (máximo) es cerca de 30 veces más que la magnitud de tensión residual radial a mitad del espesor (máximo). Estas tensiones son bajas comparadas con el valor máximo de Tensión de Von Mises a niveles mucho mayor al comienzo de la bifurcación de abombamiento con y sin pretensión. La tensión de Von Mises debido a tensión residual, para el caso que analizamos, es en promedio 20 veces menos que al del valor de la bifurcación.

La deformación axial es impuesta en el segundo paso. Otros seis incrementos con una iteración en cada uno de ellos fueron necesarios para obtener la deformación axial requerida para cada simulación. La aplicación de esta condición de frontera claramente incrementa la tensión de Von Mises a niveles muchos mayores a los obtenidos por las tensiones residuales. Para el máximo valor de deformación axial computado ($\lambda_z = 2$), la máxima tensión de Von Mises normalizada registrada es $\frac{\sigma_{VM}}{c} = 7$.

El tercer paso está reservado para el Método Riks Modificado. La carga utilizada por el programa para realizar el cálculo es una presión normal sobre los elementos de la superficie interna del cilindro. La bifurcación de la geometría se obtiene mediante la

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

interpretación apropiada del gráfico de salida de éste método. Por lo tanto, es esencial capturar el máximo valor de la gráfica "LPF (factor de carga proporcional) contra la longitud del arco".

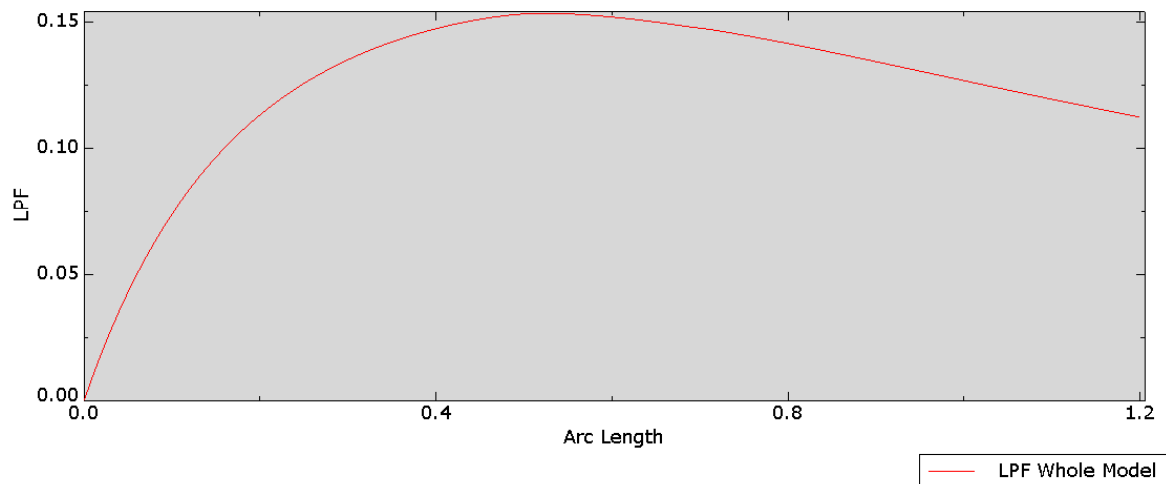


Fig. 2. Gráfico "LPF vs. Longitud de arco" de una simulación.

Se estudiaron cinco casos, uno sin tensión residual y cuatro más correspondientes a las combinaciones de los valores de f (0,1) y β (-0.5, 0.5). Estos valores de β han sido seleccionados de acuerdo a previos análisis en orden de encontrar la convergencia de la malla en cada uno de los cinco casos. Para lograr la obtención de valores precisos en el análisis de abombamiento se realizaron gráficos de presión normalizada de inflación vs. Deformación axial; y máxima tensión circunferencial al momento de la bifurcación vs. Deformación axial.

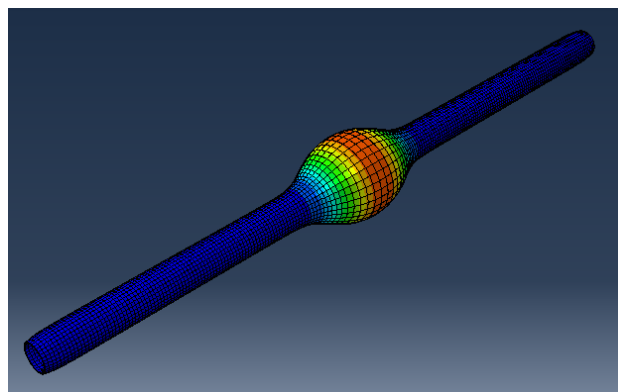


Fig. 3. Abombamiento localizado por ablandamiento por deformación en una simulación.

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

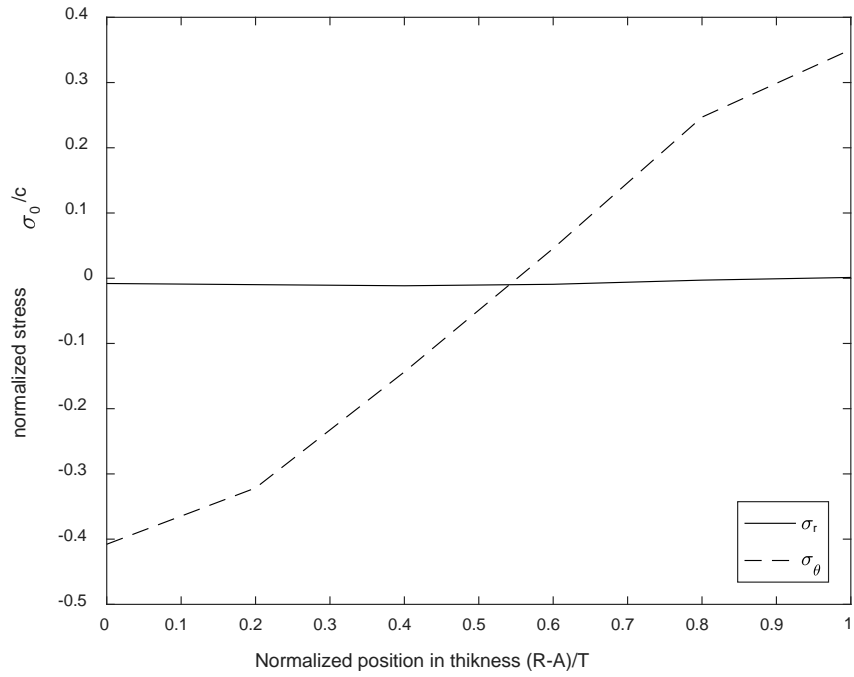


Fig. 4. Chequeo de tensiones residuales con el espesor normalizado (Caso 1).

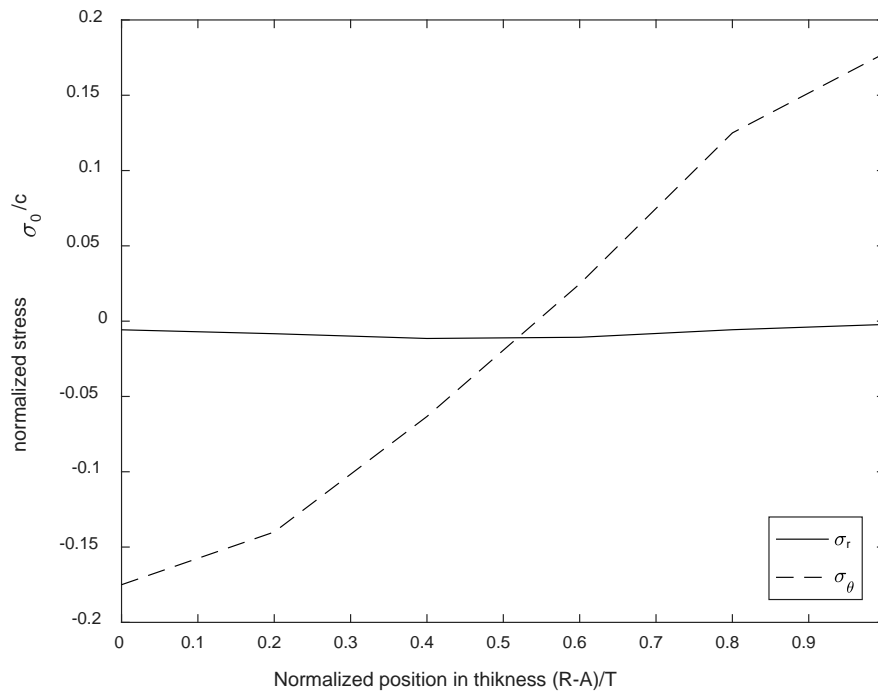


Fig. 5. Chequeo de tensiones residuales con el espesor normalizado (Caso 2).

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

Para $\bar{\beta} = 0.5$, se llevó a cabo un chequeo en las tensiones residuales como muestra las Figs. 4 y 5. Podemos observar que las tensiones circunferenciales alcanzan un valor máximo al igual que las tensiones radiales. Las tensiones radiales alcanzan un máximo a la mitad del espesor, aproximadamente $\frac{\sigma_0}{c} = -0.01$. En las tensiones circunferenciales se observa un comportamiento diferente, estas van desde valores de tracción hasta valores de compresión a lo largo de todo el espesor, es cero en el medio de este y su forma es casi simétrica y con signos opuestos.

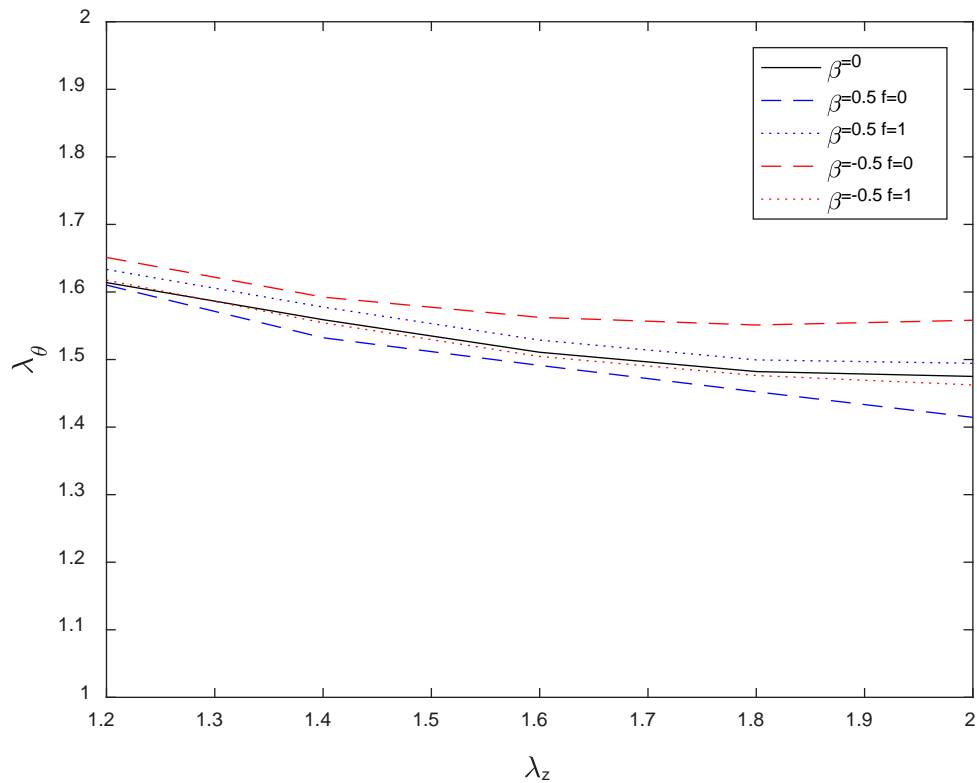


Fig. 6. Máxima deformación circunferencial en la bifurcación (Caso 1).

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

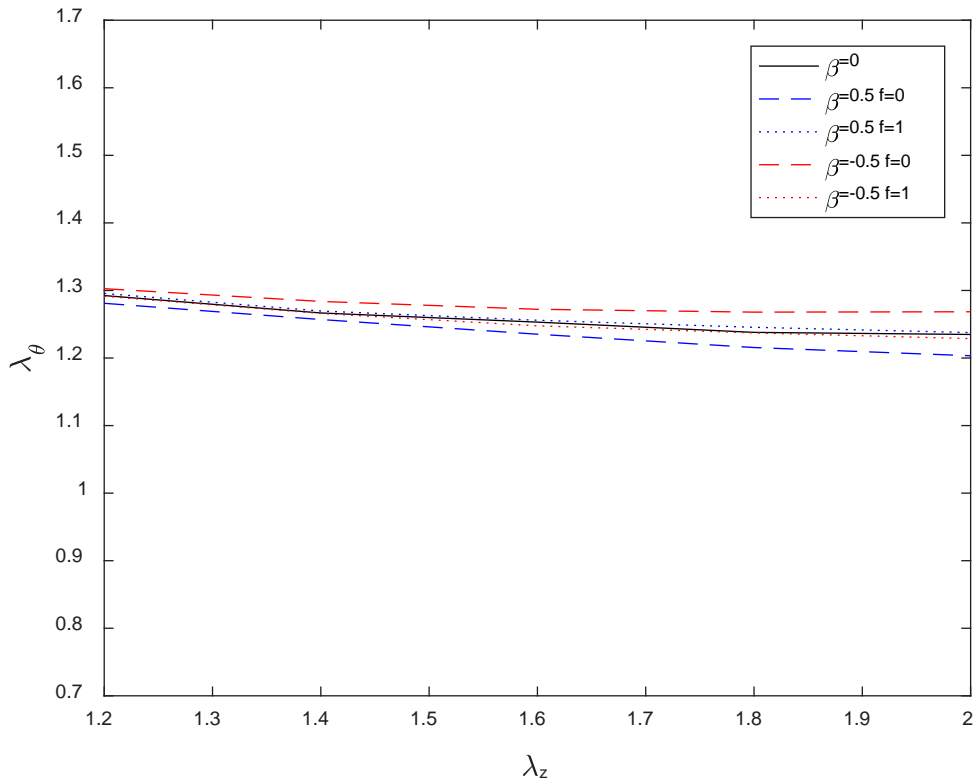


Fig. 7. Máxima deformación circunferencial en la bifurcación (Caso 2).

En las Figs. 6 y 7 se muestra la influencia del inicio de las tensiones residuales en la bifurcación, en función de la deformación axial. Se escogieron valores de λ_z en intervalos de 0.20, desde 1.00 hasta 2.00. Sin deformación axial, la bifurcación se observa aproximadamente al mismo valor de deformación circunferencial, $\lambda_\theta \approx 1.6$ para el Caso 1 y $\lambda_\theta \approx 1.3$ para el Caso 2. A medida que λ_z incrementa, para ambos casos con $f = 1$, la curva se mantiene paralela al caso neo-Hookeano. Para los casos con $f = 0$, los valores se separan gradualmente del neo-Hookeano, alcanzando una diferencia del 5% en $\lambda_z = 2$.

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

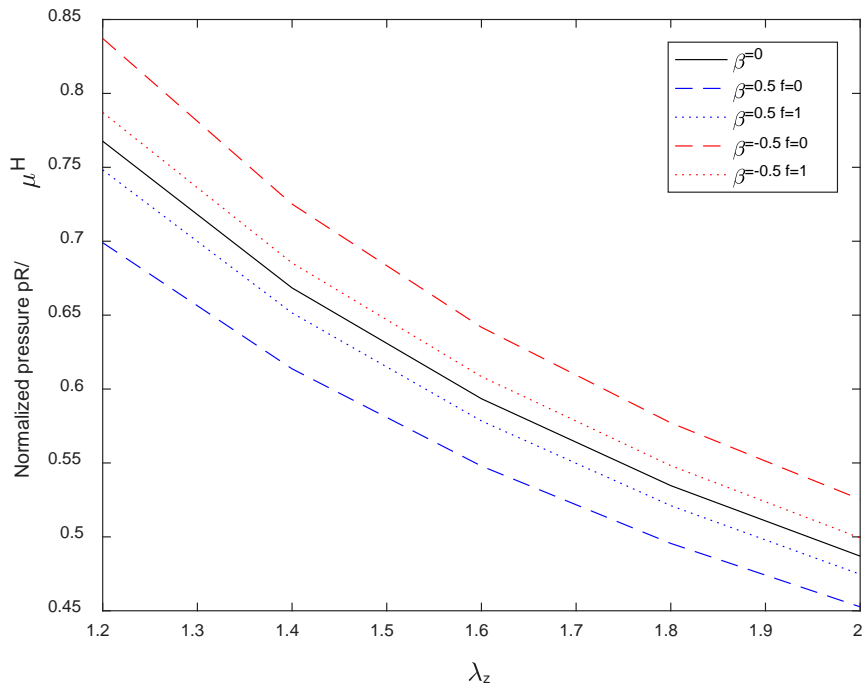


Fig. 8. Presión normalizada en la bifurcación vs. Deformación axial (Caso 1).

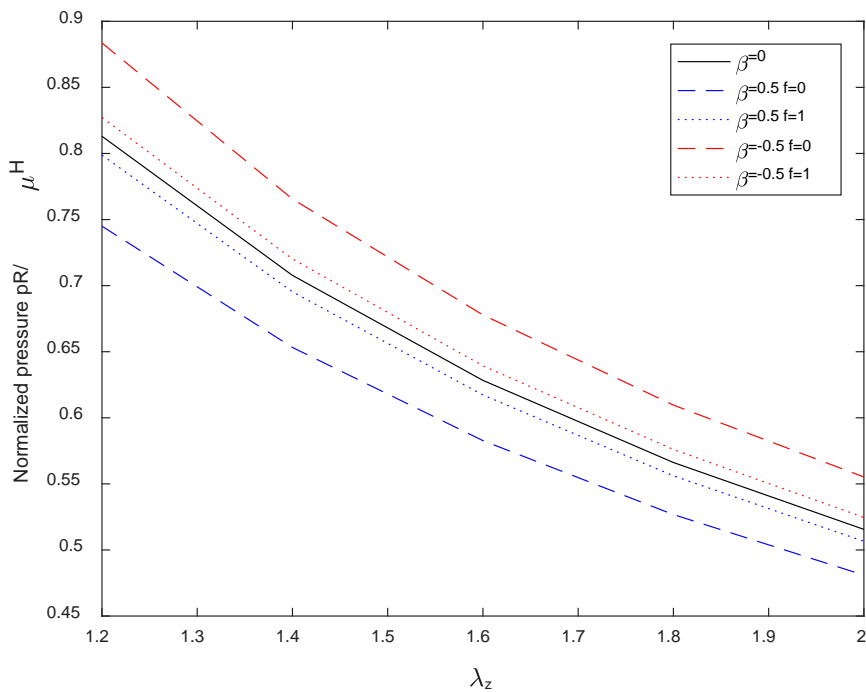


Fig. 9. Presión normalizada en la bifurcación vs. Deformación axial (Caso 2).

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

En las Figs. 8 y 9 se observa que la presión normalizada dentro del cilindro en función a la deformación axial (λ_z). Esta presión ha sido extraída del máximo valor de las Figs. 10 y 11 respectivamente. En los casos con $f = 0$ son nuevamente los que presentan mayores diferencias con respecto al caso neo-Hookeano. La curva comienza con valores entre 0.70 y 0.85 en el Caso 1 y 0.75 y 0.90 en el Caso 2. A medida que λ_z incrementa, los casos con $f = 1$ se mantienen paralelo y en los casos con $f = 0$ se reducen las diferencias con el caso neo-Hookeano notablemente.

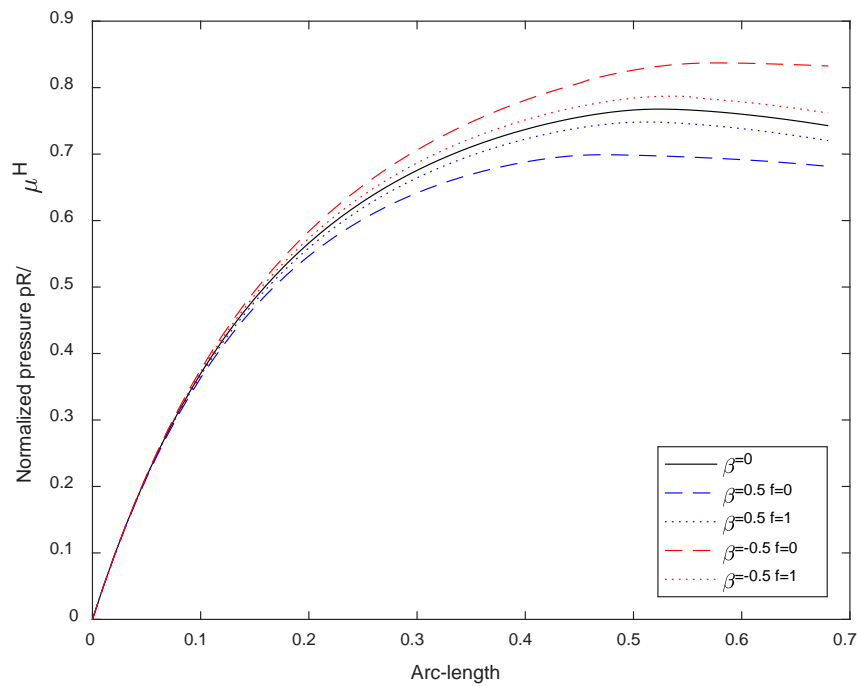


Fig. 10. Progreso de la inflación normalizada durante una simulación (Caso 1).

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

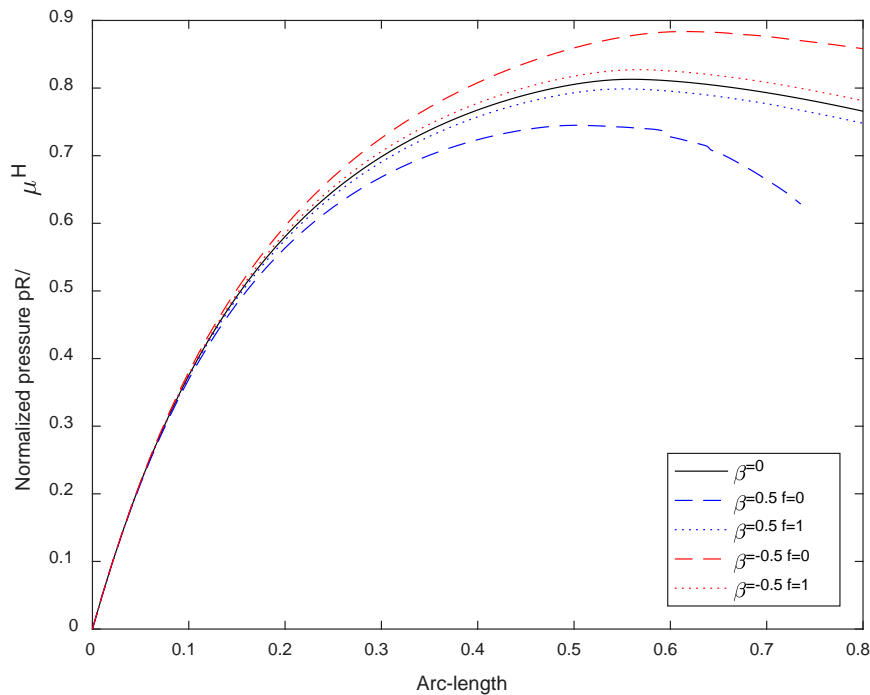


Fig. 11. Progreso de la inflación normalizada durante una simulación (Caso 2).

En las Figs. 10 y 11 observamos la curva típica “Carga – Deformación” obtenido del análisis de software. La presión en cada incremento de tiempo impuesto por el programa es normalizada, junto con el material y los parámetros geométricos (espesor, radio, parámetro neo-Hookeano). A su vez, los valores de “Arc-length” son también magnitudes normalizadas. De lo contrario, ambos valores en conjunto se estarían usando de forma errónea.

En ambos casos, para cada curva mostrada, el máximo valor de la carga corresponde con la ocurrencia de una inestabilidad. Como era de esperarse, todas las combinaciones comienzan en el origen y, a medida que la presión aumenta, la geometría del cilindro aumenta hasta que aparece el abombamiento o bulging. Las curvas alcanzan picos entre 0.70 y 0.85 en el Caso 1 y 0.70 y 0.90 en el Caso 2, y luego decrecen levemente. Realmente el valor del pico observado no es lo importante en este estudio sino la ocurrencia de la inestabilidad en cada uno de los casos.

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

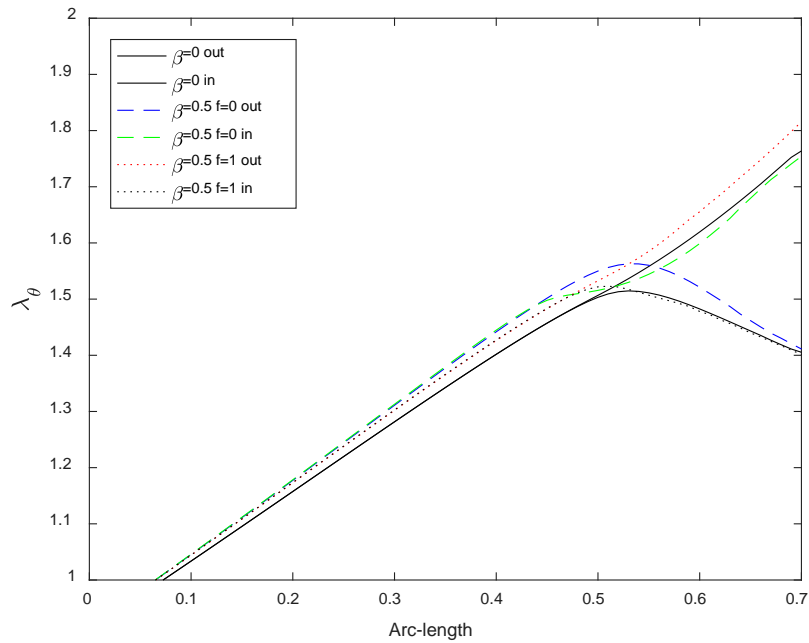


Fig. 12. Progreso de la deformación circunferencial durante una simulación (Caso 1).

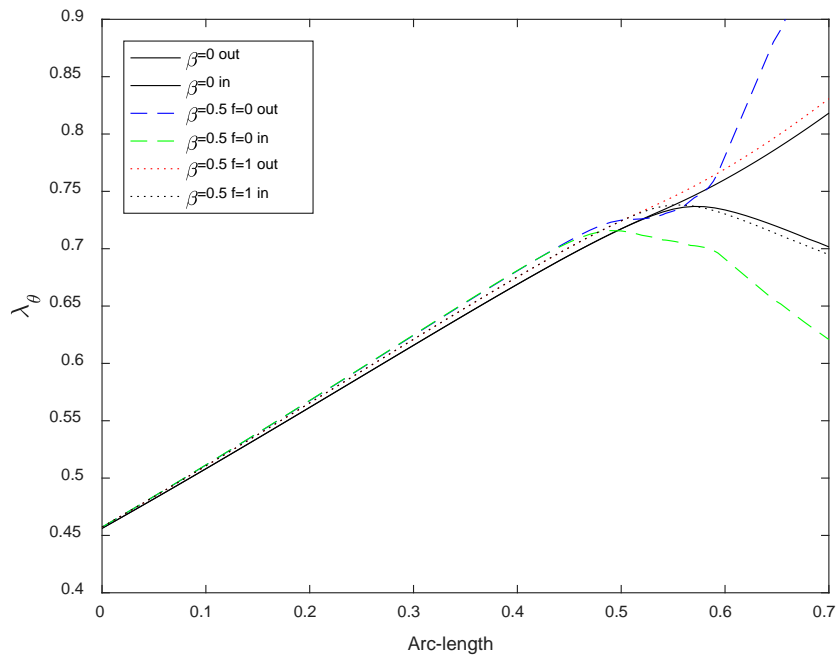


Fig. 13. Progreso de la deformación circunferencial durante una simulación (Caso 2).

Las Figs.12 y 13 representan la deformación circunferencial medida en dos puntos en el cilindro al momento en el que la presión interna comienza a incrementarse. Este gráfico muestra otra vía para obtener el momento de cuándo ocurre la bifurcación. Uno de los

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

puntos estudiados está situado dentro del abombamiento y el otro fuera de él, donde no se ve afectado por la inestabilidad. Para deformaciones axiales de $\lambda_z = 1.2$, los tres casos estudiados aquí presentan formas diferentes donde comienzan las curvas. En ese instante, el punto dentro del abombamiento se continua deformando a un ritmo diferente en comparación a como lo hacía previamente. En cambio, el otro punto fuera del abombamiento recobra los niveles de deformación previos.

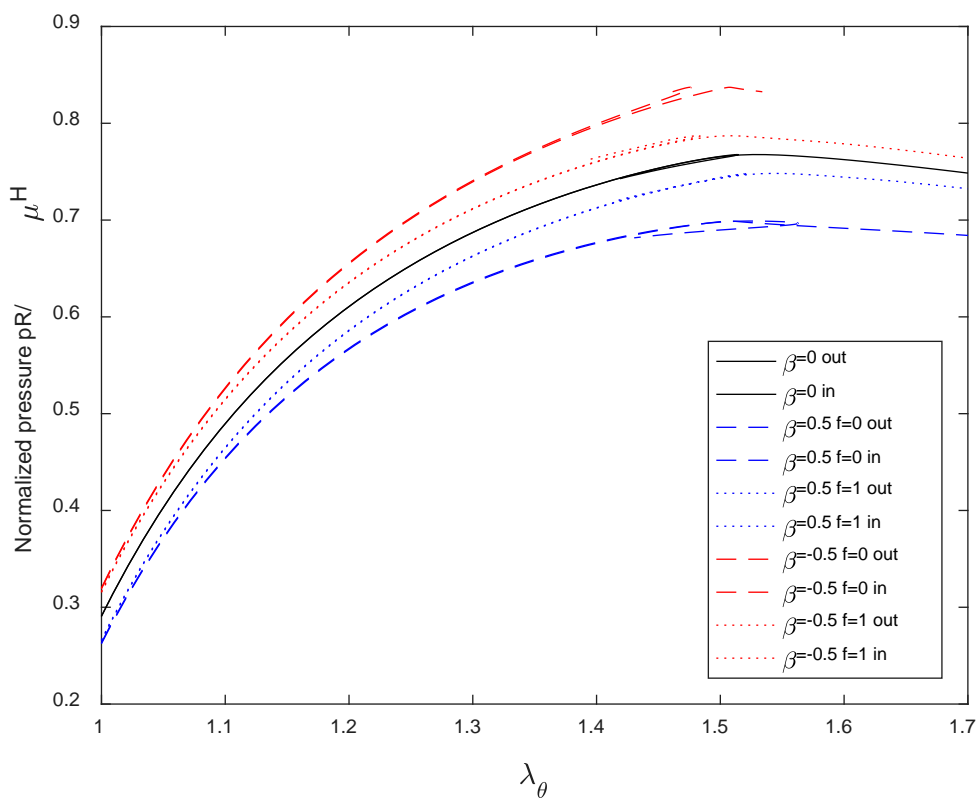


Fig. 14. Deformación circunferencial vs. Presión infladora normalizada (Caso 1).

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Simulación con elementos finitos

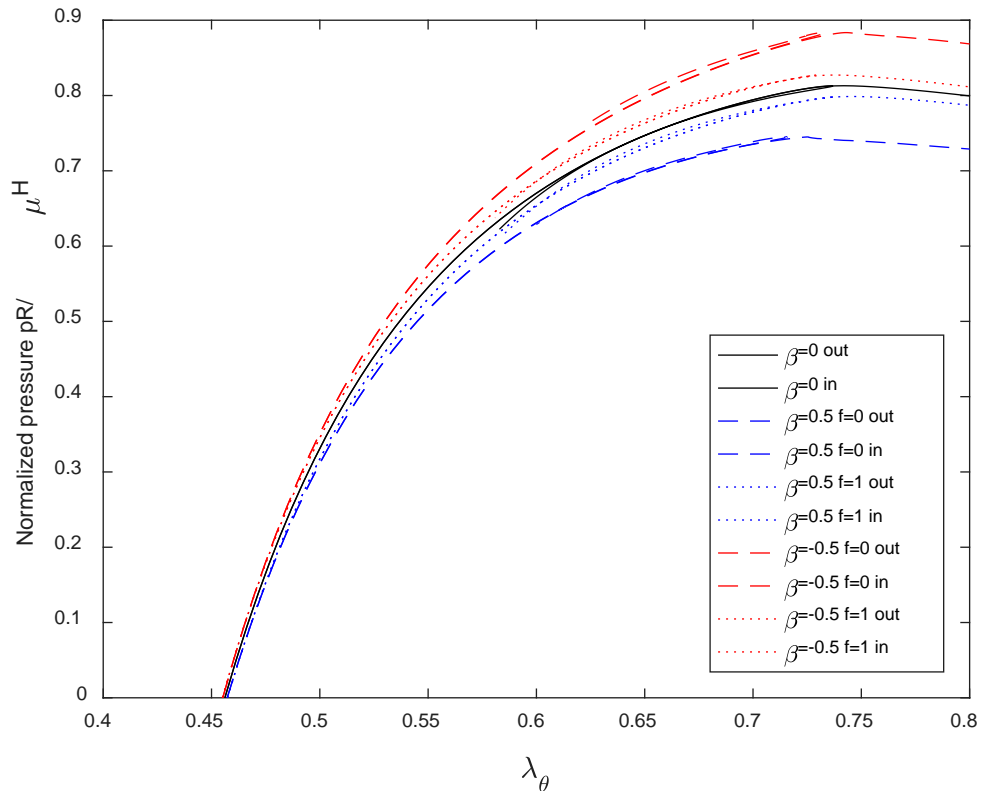


Fig. 15. Deformación circunferencial vs. Presión infladora normalizada (Caso 2).

Las Figs. 14 y 15 combinan los resultados de las Figs. 10 y 12 y Figs. 11 y 13 respectivamente. Para $\lambda_z = 1.2$ y ambos puntos de control en el cilindro explicados anteriormente, en las curvas se observan nuevamente un valor máximo cuando ocurre la bifurcación. Para el punto dentro del abombamiento, deformación circunferencial continúa su ritmo de crecimiento con una forma similar a la de las Figs. 10 y 11. Para el punto fuera del abombamiento, la deformación circunferencial decrece y continúa con el ritmo de crecimiento que tenía antes de la bifurcación.

6. CONCLUSIONES

6.1. CONCLUSIONES

- Se observó el mismo comportamiento en el análisis de los Casos 1 y 2, en la comparación de los gráficos analizados se evidenció un conducta idéntica, por lo que se deduce que para estudios donde se considera la tensión residual en el análisis de cilindros de membrana sometidos a tracción y presión interna, y para el incremento de espesores, se presenta igualmente el bifurcamiento. Queda demostrado así la gran importancia en considerar las tensiones residuales en futuros trabajos de esta naturaleza.
- Es muy importante resaltar que se observó una inestabilidad diferente para valores de deformación axial de $\lambda_z = 1$, de flexión o bending por su nombre en inglés. Esto es, cuando la extensión del tubo es pequeña, con el inflado del mismo parece existir un acoplamiento de inestabilidades, en el cual es difícil distinguir si la primera inestabilidad que ocurre es bulging o si simultáneamente se da bulging y bending. En mi caso fue imposible obtener el momento de bifurcación ya que amerita un afinamiento mucho más preciso de las variables para poder capturarlo y estudiarlo, se encontró que para esta combinación de variables, el fenómeno que ocurre es muy sensible por lo que es necesario contar con un ordenador de mayor capacidad informática con el que se pueda llevar a cabo el análisis de diferentes valores de λ_z cercanos a 1, con incrementos inferiores a 0.10, sin que este suponga un tiempo excesivo para cada simulación en el software de elementos finitos.

6.2. FUTUROS TRABAJOS

Como se mencionó en las conclusiones, queda planteado para futuras investigaciones el estudio en profundidad de la inestabilidad de flexión en cilindros inflados con valores de λ_z cercanos a 1, donde se debe hacer un afinamiento de las variables, partiendo de que el incremento progresivo de λ_z de 0.10 no fue suficiente para capturar el punto de bifurcación de este tipo de inestabilidad, es por ello que se recomienda, por lo menos, el incremento en las simulaciones a intervalos de λ_z de 0.01 o inferior para observar si se tiene el resultado buscado.

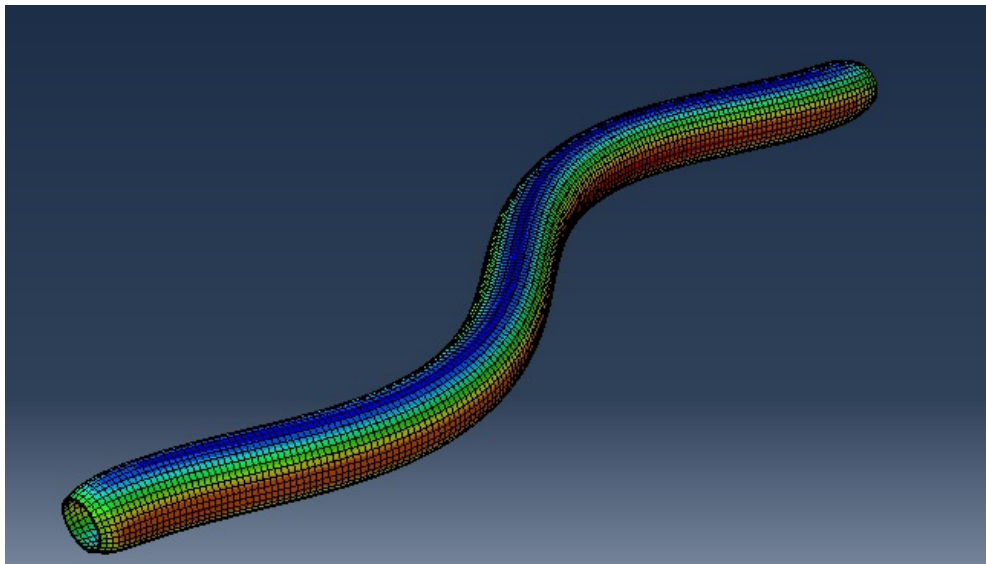


Fig. 16. Se observó que el cilindro se flexionaba durante una simulación para $\lambda_z = 1$.

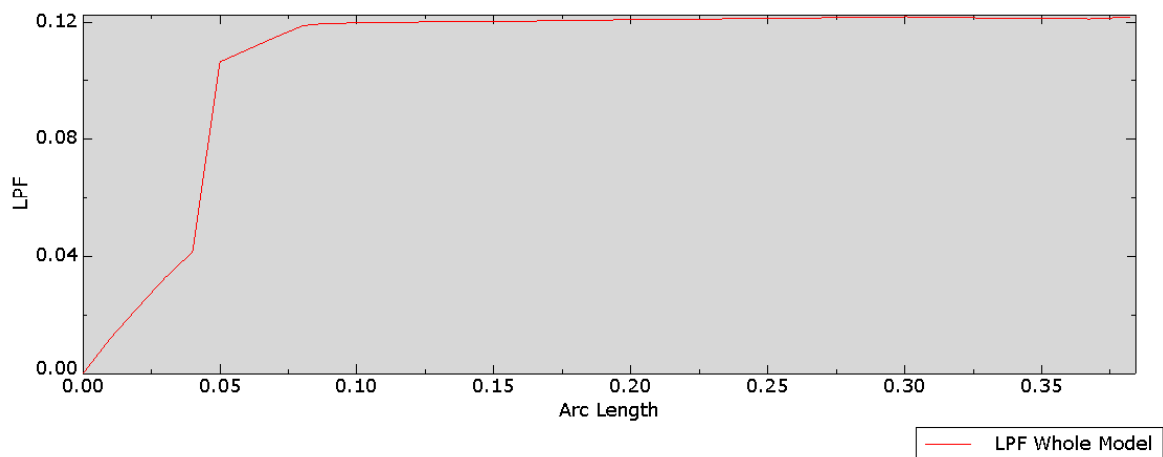


Fig. 17. Gráfico "LPF vs. Longitud de arco" de una simulación para $\lambda_z = 1$.

7. BIBLIOGRAFÍA

1. Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., Ogden, R.W., 2000. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J. Elasticity* 61, 1–48.
2. Guinea, G., 2008. Private communication. .
3. Mizuguchi, T., Matsumoto, N., 2007. Recent progress in genetics of Marfan syndrome and Marfan-associated disorders. *J. Hum. Genet.* 52, 1–12. .
4. Watton, P.N., Heil, M., Hill, N.A., 2004. A mathematical model for the growth of the abdominal aortic aneurysm. *Biomech. Model. Mechanobiol.* 3, 98–113. .
5. Watton, P.N., Hill, N.A., 2009. Evolving mechanical properties of a model of abdominal aortic aneurysm. *Biomechan. Model. Mechanobiol.* 8, 25–42. .
6. Okamoto, R.J., Wagenseil, J.E., DeLong, W.R., Peterson, S.J., Kouchoukos, N.T., Sundt, T.M., 2002. Mechanical properties of dilated human ascending aorta. *Ann. Biomed. Eng.* 30, 624–635. .
7. McEniery, C.M., Wilkinson, I.B., Avolio, A.P., 2007. Age, hypertension and arterial function. *Clin. Exptl. Pharm. Physiol.* 34, 665–671. .
8. Gent, A.N., 2005. Elastic instabilities in rubber. *Int. J. Non-Linear Mech.* 40, 165–175. .
9. Kanner, L.M., Horgan, C.O., 2007. Elastic instabilities for strain-stiffening rubber-like spherical and cylindrical thin shells under inflation. *Int. J. Non-Linear Mech.* 42, 204–215. .
10. Haughton, D.M., Ogden, R.W., 1979. Bifurcation of inflated circular cylinders of elastic material under axial loading. I. Membrane theory for thin-walled tubes. *J. Mech. Phys. Solids* 27, 179–212. .
11. R.E. Paige, FEA in the design process of rubber bushings, in: *ABAQUS Users' Conference*, Simulia, Dassault Systèmes, Providence, RI, 2002, pp. 1–15.
12. G.A. Holzapfel, R.W. Ogden, Modeling the layer-specific 3D residual stresses in arteries, with an application to the human aorta, *J. R. Soc. Interface* 7 (2010) 787–799.

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Bibliografía

13. [16] M. Zidi, Effects of a prestress on a reinforced, nonlinearly elastic and compressible tube subjected to combined deformations, *Int. J. Solids Struct.* 38 (2001) 4657–4669. .
14. M. Zidi, M. Cheref, Finite deformations of a hyperelastic, compressible and fibre reinforced tube, *Eur. J. Mech. A/Solids* 21 (2002) 971–980.
15. A. Hoger, On the residual stress possible in an elastic body with material symmetry, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 88 (1985) 271–290.
16. A. Hoger, The constitutive equation for finite deformations of a transversely isotropic hyperelastic material with residual stress, *J. Elast.* 33 (1993) 107–118.
17. [20] A. Hoger, The constitutive equation for finite deformations of a transversely isotropic hyperelastic material with residual stress, *J. Elast.* 33 (1993) 107–118. .
18. A. Hoger, On the determination of residual stress in an elastic body, *J. Elast.* 16 (1986) 303–324.
19. J. Merodio, R.W.Ogden and J. Rodríguez The influence of residual stress on finite deformation elastic response, *International Journal of Non Linear Mechanics*, 2013, 56, 43-49.
20. J. Merodio, R.W.Ogden Extension, inflation and torsion of a residually stressed circular cylindrical tube, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 28, 157-174, 2016. <http://dx.doi.org/10.1007/s00161-015-0411-z>, in press.
21. Y.B. Fu, J.L. Liu, G.S. Francisco. Localized bulging in an inflated cylindrical tube of arbitrary thickness - the effect of bending stiffness. *Journal of the Mechanics and physics of Solids*, vol. 90, 45-60, 2016.
22. V. Balbi, P. Ciarletta, Helical buckling of thick-walled, pre-stressed, cylindrical tubes under a finite torsion, *Math. Mech. Solids* (2014) 1–17.
23. J. Merodio, R.W.Ogden and J. Rodríguez The influence of residual stress on finite deformation elastic response, *International Journal of Non Linear Mechanics*, 2013, 56, 43-49.

24. M. Jiménez. Behavior of inflated cylinders under residual stress, 2016.
25. J. Merodio, R.W.Ogden Extension, inflation and torsion of a residually stressed circular cylindrical tube, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 28, 157-174, 2016. <http://dx.doi.org/10.1007/s00161-015-0411-z>, in press.
26. A. Hoger, On the residual stress possible in an elastic body with material symmetry, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 88 (1985) 271–290.
27. SIMULIA, Abaqus Analysis User's Guide, version 6.14., 2014. .
28. J. Merodio and R.W.Ogden, On Tensile Instabilities and Ellipticity Loss in Fiber-Reinforced Incompressible Non-Linearly Elastic Solids, *Mech. Research Comm*, Vol. 32 (2005) 290-299. .
29. J. Merodio and R.W.Ogden, Remarks on instabilities and ellipticity for a fiber reinforced compressible nonlinearly elastic solid under plane deformation, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 63 (2005) 325-333. .
30. J. Merodio and R.W.Ogden, Tensile Instabilities and Ellipticity in Fiber-Reinforced Compressible Non-Linearly Elastic Solids, *International Journal of Engineering Science*, 43 (2005) 697--706. .
31. J. Merodio, On constitutive equations for fiber-reinforced non-linearly viscoelastic materials, *Mechanics Research Communications*, Vol. 33 (2006) 764-770. .
32. J. Merodio and P. Neff, A note on tensile instabilities and loss of ellipticity for a fiber reinforced nonlinearly elastic material, *Archives of Mechanics*, Vol 58, N° 3, (2006) 293-303. .
33. J. Merodio and R.W.Ogden, The influence of the invariant I8 on the stress-deformation and ellipticity characteristics of doubly fiber-reinforced nonlinearly elastic solids, *International Journal of Non Linear Mechanics*, Vol. 41 (2006) 556-563. .
34. J. Merodio and G. Saccomandi, Remarks on cavity formation in fiber-reinforced incompressible nonlinearly elastic materials, *EJMS/A*, Vol. 25 (2006) 778-792. .

La influencia de la tensión residual en la inestabilidad de cilindros inflados

Bibliografía

35. J. Merodio ,G. Saccomandi and I. Sgura, The Rectilinear Shear of Fiber-Reinforced Incompressible non-linearly Elastic Solids, International Journal of Non Linear Mechanics, issue in memory of Rivlin, Vol. 42 (2007) 342-354. .
36. F. Kassianides, R.W.Ogden, J. Merodio and T. J. Pence, Azimuthal shear of a transversely isotropic elastic solid, Mathematics and Mechanics of Solids, 13, 2008.690-724. .
37. D. Haughton and J. Merodio, The elasticity of arterial tissue affected by Marfan´s syndrome, Mechanics Research Communications, 36, 2009, 659-668 .
38. L. Dorfmann, J. Merodio and R.W.Ogden, Non-smooth solutions in the azimuthal shear of an anisotropic nonlinearly elastic material, Journal of Engineering Mathematics, 2010, Volume 68, Number 1, Pages 27-36.
39. J. Merodio and D. Haughton, Bifurcation of thick-walled cylindrical shells and the mechanical response of arterial tissue affected by Marfan´s syndrome, Mechanics Research Communications, 37, 2010, 1-6 .
40. Roger Bustamante and Jose Merodio, On simple constitutive restrictions for transversely isotropic nonlinearly elastic materials and isotropic magneto-sensitive elastomers, Journal of Engineering Mathematics, 2010, Volume 68, Number 1, Pages 15-26 .
41. J. Rodriguez and J. Merodio, A new derivation of the bifurcation conditions of inflated cylindrical membranes of elastic material under axial loading. Application to aneurysm formation, Mechanics Research Communications, 38 (2011) 203--210. .
42. A.A. Alhayani, J. A. Giraldo, J. Rodríguez and J. Merodio, Computational modeling of bulging of inflated cylindrical shells applicable to aneurysm formation and propagation in arterial wall tissue, FINEL, 2013, 73, 20-29. .
43. M. El Hamdaoui, J. Merodio, R.W.Ogden and J. Rodríguez, Finite elastic deformations of transversely isotropic circular cylindrical tubes, International Journal of Solids and Structures, 2014, 51, 1188-1196. .

44. A.A. Alhayani, J. Rodríguez and J. Merodio, Numerical analysis of neck and bulge propagation in anisotropic cylinders subject to axial loading and internal pressure, *FINEL*, 2014, 90, 11-19. .
45. A.A. Alhayani, J. Rodríguez and J. Merodio, Competition between radial expansion and axial propagation during bulging of inflated cylindrical shells applicable to evolution of aortic aneurysms, *International Journal of Engineering Science*, 2014, 85, 74-89. .
46. M. El Hamdaoui, J. Merodio , A note on finite elastic deformations of fiber reinforced nonlinearly elastic tubes, *Archives of Mechanics*, 67, 95--109, 2015. .
47. M. El Hamdaoui, J. Merodio and R.W. Ogden, Loss of ellipticity in the combined helical, axial and radial elastic deformations of a fibre-reinforced circular cylindrical tube, *International Journal of Solids and Structures*, 63, 2015, 99-108. .
48. M. El Hamdaoui, J. Merodio , Azimuthal shear of doubly fiber reinforced cylindrical tubes, *Journal of Engineering Mathematics*, 95, 347-357, 2015 .
49. H. Demirkoparan and J. Merodio, Bulging Bifurcation of Inflated Circular Cylinders of Doubly Fiber-Reinforced Hyperelastic Material under Axial Loading and Swelling, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2016 .
50. J. Rodríguez and J. Merodio, Helical buckling and postbuckling of pre-stressed cylindrical tubes under finite torsion, *FINEL*, 112, 1-10, 2016 .
51. N.T. Nam, J. Merodio, R.W.Ogden and P.C. Vinh, The effect of initial stress on the propagation of surface waves in a layered half space, *International Journal of Solids and Structures*, Vol 88-89, 88-100, 2016 .

