



CAMPUS  
DE EXCELENCIA  
INTERNACIONAL

**POLITÉCNICA**

"Ingeniamos el futuro"



## **Graduado en Matemáticas e Informática**

Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de  
Ingenieros Informáticos

### **TRABAJO FIN DE GRADO**

# **Teorema de Clasificación de Superficies Compactas**

**Autor: Diego Rodríguez Vicente**

**Director: Héctor Barge Yáñez**

**MADRID, JULIO 2019**



# Índice

---

• Propuesta	4
• Introducción	5
• Conceptos básicos	7
○ Espacio Topológico	7
○ Base	7
○ Espacio Hausdorff	7
○ Aplicación Continua	9
○ Homeomorfismo	9
○ Topología Cociente	10
○ Conexión	10
○ Compacidad	13
• Variedades	13
• Superficies	14
• Operaciones con palabras	23
• Teorema de clasificación de superficies compactas	24
• Algoritmo del teorema de clasificación de superficies compactas	25
• Implementación y uso del programa	28
• Bibliografía	31

## *Propuesta*

---

En este trabajo lo que se propone es entender bien el Teorema de clasificación de superficies compactas y elaborar un programa al que se le introduzca el símbolo de la superficie y devuelva su forma normal y su tipo topológico.

La topología es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar nociones espaciales que no dependen de la métrica. Propiedades como “estar dentro”, “estar fuera”, “estar en la frontera” o “tener un agujero” entran dentro de esta categoría. Es claro que estas propiedades son invariantes por deformaciones continuas del espacio en cuestión. Esta filosofía queda perfectamente recogida en la conocida expresión “para un topólogo un donut es lo mismo que una taza de café”.

El principal objetivo del trabajo es entender bien la demostración del Teorema de clasificación y a partir de ella crear un algoritmo que permita clasificar una superficie compacta a partir de su símbolo.

Con este objetivo estudiaremos algunos conceptos como el de variedad, haciendo especial hincapié en el caso 2-dimensional, el de triangulación de una superficie o el de la característica de Euler de un complejo simplicial.

El problema de clasificación de variedades ha motivado gran parte de la investigación matemática durante el siglo XX y sigue siendo un área activa en la actualidad. Hasta ahora, solamente se ha podido establecer una clasificación completa de las variedades de dimensiones 1 y 2, a éstas últimas las llamaremos superficies a lo largo del trabajo. La primera demostración rigurosa de la clasificación de superficies compactas no apareció hasta 1907 y se debe a los matemáticos Dehn y Heegaard. Sin embargo, este problema ya había sido estudiado y parcialmente resuelto por matemáticos de la talla de Möbius, Jordan o Klein a finales del siglo XIX. Cabe destacar que las superficies no compactas también están clasificadas. Esta clasificación fue obtenida en 1923 por Kerékjártó. Se recomienda al lector interesado el artículo [10] que contiene la demostración del teorema además de algunas consecuencias.

La clasificación de variedades tridimensionales no está completamente establecida. La investigación matemática en este problema concreto se ha mantenido muy activa desde que Poincaré formuló su famosa conjetura a principios del siglo XX. La conjetura de Poincaré afirma que toda 3-variedad compacta conexa y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera tridimensional. En 1982 Thurston enunció la conjetura de geometrización, que afirma que toda 3-variedad prima cerrada y orientada se puede cortar a lo largo de toros de tal modo que los interiores de las piezas obtenidas admiten estructuras geométricas de volumen finito. La conjetura de geometrización de Thurston, que implica la conjetura de Poincaré, fue demostrada en el año 2003 por Perelman.

Por otro lado, es imposible clasificar las variedades de dimensión superior a 3. Esto se debe a que todo grupo finitamente presentado se puede obtener como grupo fundamental de una variedad de dimensión superior a 3 y estos grupos no se pueden clasificar debido al problema de la palabra. Un bosquejo de la prueba de este hecho se puede encontrar en [5, chapter 4, pg. 143]. Sin embargo, este hecho no ha disuadido a la comunidad matemática de la importancia de comprender estos objetos. Al estudio de la topología de variedades de dimensión superior han contribuido matemáticos de la talla de Milnor, Smale, Freedman y Donaldson entre muchos otros. En 1956, Milnor demostró que había 7-variedades homeomorfas pero no difeomorfas a la esfera de dimensión 7. En 1962, Smale demostró el Teorema de  $h$ -cobordismo. Este resultado implica la conjetura de Poincaré generalizada para dimensiones mayores que 4. La conjetura de Poincaré para dimensión 4 fue probada por Freedman en 1982. Para más información sobre la historia de la conjetura de Poincaré se recomiendan los artículos [3] y [8].

En esta memoria se presentarán tanto conceptos básicos de topología como conceptos más avanzados, todos con el fin de entender y comprender el teorema que aborda este trabajo.

Para ello, dedicaremos el capítulo 3, se presentan los conceptos topológicos indispensables para entender este teorema, como pueden ser el concepto de espacio topológico, el de espacio conexo y los homeomorfismos, así como algunos otros más específicos.

En el siguiente capítulo se hablará de las variedades topológicas. Se definirán formalmente y se expondrán algunos ejemplos.

El siguiente capítulo es el más importante para este trabajo, pues se centra en las superficies, las cuales son un tipo específico de variedades. Aquí se definirán las superficies desde un punto de vista topológico, se hablará del polígono fundamental, el cual es otra forma de representar una superficie; también hablaremos de las triangulaciones de superficies; y por último, de la orientabilidad de las mismas.

Le sigue un capítulo dedicado a las distintas operaciones que se pueden hacer con los polígonos fundamentales de una superficie. Operaciones como cortar y pegar.

Y para finalizar este trabajo, los 2 últimos capítulos son la exposición del teorema de clasificación de superficies compactas y el algoritmo esquematizado para la clasificación de superficies mediante una pequeña aplicación.

## Conceptos básicos

---

En esta sección se introducirán los conceptos topológicos necesarios para hacer esta memoria autocontenida. La referencia básica para esta parte es del libro de Munkres [7].

### ➤ Espacio Topológico

Un espacio topológico es un par  $(X, T)$  en el que  $X$  es un conjunto, y una  $T$  familia de subconjuntos de  $X$ , a la que llamaremos topología, que cumple lo siguiente:

1.  $\phi$  y  $X \in T$ .
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de  $T$  está en  $T$ .
3. La intersección de cualquier subcolección finita de  $T$  está en  $T$ .

### ➤ Base:

Sea  $X$  un espacio topológico. Sea  $\beta$  una colección de abiertos de  $X$ . Diremos que  $\beta$  es una base de la topología  $X$  si para cada abierto  $U$  de  $X$  y para cada  $x$  en  $U$ , existe un elemento  $b$  de  $\beta$  tal que  $x \in b \subset U$ .

### ➤ Espacio Hausdorff o espacio $T_2$

Un espacio topológico  $X$  es Hausdorff si para cada par de puntos  $x$  e  $y$  de  $X$  distintos existen abiertos  $\mathcal{U}_x$  y  $\mathcal{U}_y$  tales que  $x \in \mathcal{U}_x$  e  $y \in \mathcal{U}_y$ :

$$\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \phi$$

*Ejemplo:*

El espacio topológico de los números reales ( $\mathbb{R}$ ) con la topología usual,  $(\mathbb{R}, T_u)$  es Hausdorff:

Sean  $x$  e  $y$  dos puntos distintos de  $\mathbb{R}$ .

Podemos suponer que  $x < y$ . Entonces, existen tres reales  $a$ ,  $b$  y  $c$  tales que

$$a < x < b < y < c$$

Luego los conjuntos

$$A = (a, b)$$

$$B = (b, c)$$

Son abiertos por ser intervalos abiertos. Y, además, son disjuntos cumpliendo que  $x \in A$  e  $y \in B$ .



En general, el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^n$  es Hausdorff. Para ver esto recordaremos brevemente la bien conocida topología de  $\mathbb{R}^n$ :

En  $\mathbb{R}^n$  está tenemos definida una función distancia, o métrica, conocida como distancia Euclídea, y que viene dada por la siguiente expresión:

$$d(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$$

Por otro lado, llamaremos bola de centro  $c$  y radio  $r$  al conjunto:

$$B_c(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(c, x) < r\}$$

Es decir, los puntos de  $\mathbb{R}^n$  cuya distancia a  $c$  es menor que  $r$ .

En  $\mathbb{R}^n$  se define la topología Euclídea o usual utilizando la distancia Euclídea del siguiente modo:

Un conjunto  $U$  es abierto si para cada  $x$  de  $U$  existe  $r > 0$  tal que  $B_x(r)$  está contenida en  $U$ .



Así pues,  $\mathbb{R}^n$  es un espacio Hausdorff, pues para cada par de puntos  $x$  e  $y$  distintos, las bolas abiertas  $B_\gamma(x)$  y  $B_\gamma(y)$  con  $\gamma < d(x, y)/2$  son disjuntas.

### ➤ **Aplicación continua**

Una aplicación entre espacios topológicos,  $f: X \rightarrow Y$ , es continua en un punto  $x \in X$  si para todo abierto  $U \ni f(x)$  existe un abierto  $V \ni x$  tal que  $f(V) \subset U$ .

Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  se dice que es continua si, y sólo si (de ahora en adelante sii), es continua en todos sus puntos.

Equivalentemente, una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es continua sii la imagen inversa de un abierto en  $Y$  es abierto en  $X$ .

### ➤ **Homeomorfismo**

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos, y  $f$  una aplicación de  $X$  a  $Y$ ; diremos que  $f$  es un homeomorfismo si se cumple que:

1.  $f$  es una biyección.
2.  $f$  es continua.
3.  $f^{-1}$  es continua.

Dos espacios son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. Dos espacios homeomorfos son equivalentes desde el punto de vista topológico, lo cual facilita mucho el estudio y la clasificación de los mismos.

*Ejemplo:*

Supongamos la topología usual. Sean  $X = [0, 1]$  e  $Y = [a, b]$  con  $a < b$ , dos intervalos cerrados.  $X$  e  $Y$  son espacios homeomorfos, y su homeomorfismo viene dado por la aplicación continua  $f(x) = (b - a)x + a$ .

Se dice que una propiedad es topológica (o invariante topológico) si se preserva mediante homeomorfismos. Algunos de estos invariantes son la conexión y la compacidad, de los cuales hablaremos a continuación.

➤ **Topología cociente:**

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación sobreyectiva (cada elemento de  $Y$  es imagen de mínimo un elemento de  $X$ ). La aplicación  $f$  se dice que es una aplicación cociente siempre que un subconjunto  $U$  de  $Y$  es abierto en  $Y$  sii  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ .

Un ejemplo de espacio cociente es la esfera unidad de dimensión 1 ( $S^1$ ), resultado de identificar los extremos del intervalo  $[0,1]$  como uno solo.

➤ **Conexión:**

Aquí hablaremos sobre 2 tipos de conexión distintos: la conexión propiamente dicha, y la conexión por caminos.

1. Espacio conexo:

Sea  $X$  un espacio topológico. Una separación de  $X$  es un par  $U, V$  de abiertos disjuntos no vacíos de  $X$  cuya unión es  $X$ . Se dice que  $X$  es conexo si no existe dicha separación.

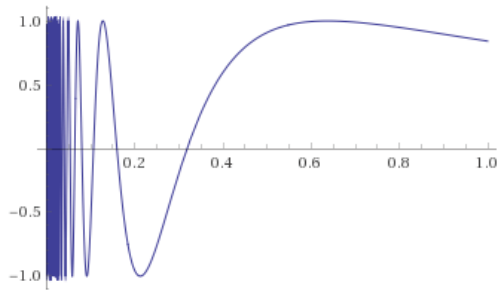
2. Espacio conexo por caminos:

Dados  $x$  e  $y$  puntos de un espacio topológico  $X$ , un camino en  $X$  desde  $x$  hasta  $y$  es una aplicación continua  $f: [0,1] \rightarrow X$ , tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ . Se dice que un espacio es conexo por caminos si existe un camino para cada par de puntos de  $X$ .

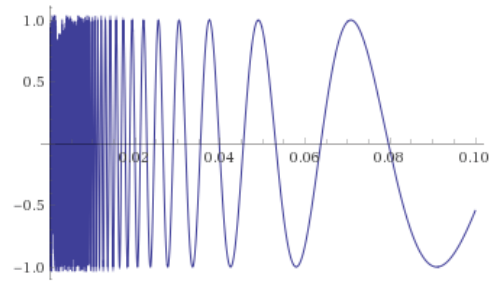
Se cumple que todo espacio conexo por caminos es también conexo, pero el recíproco no siempre se cumple.

Un ejemplo es el famoso seno del topólogo, que se define como la adherencia de la función  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , es decir, el conjunto  $G = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0, 1]\}$ .

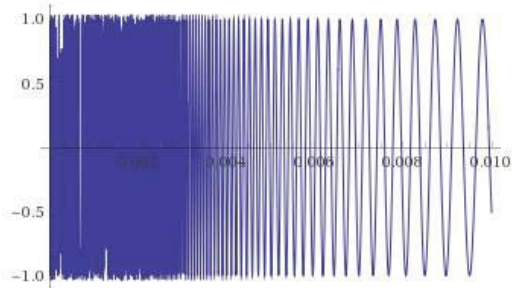
Como el gráfico de una función es conexo por ser la imagen del intervalo  $(0,1)$  de una aplicación continua, su adherencia también. Sin embargo nunca podremos conectar un punto del grafo con un punto del eje  $x$ .



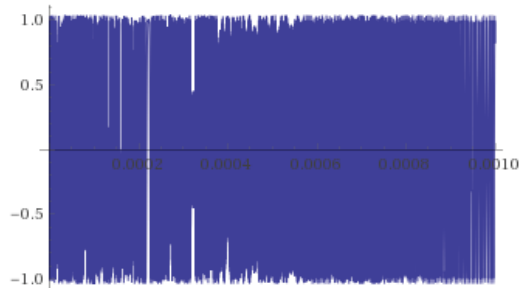
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1)$$



$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 0.1)$$



$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 0.01)$$



$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 0.001)$$

Como se puede apreciar, cuanto más cerca del eje  $x$  nos encontremos, más veces oscilará la función. Intuitivamente, podemos decir que oscila infinitas veces, lo cual implica que no existe un camino finito entre un punto del eje  $x$  y otro punto perteneciente a la función.

➤ **Compacidad:**

Se dice que una colección  $\Gamma$  de subconjuntos de  $X$  es un recubrimiento de  $X$  si la unión de los elementos de  $\Gamma$  coincide con  $X$ . Se dice que un recubrimiento es abierto si está formado por conjuntos abiertos de  $X$ .

Un espacio topológico  $X$  se dice compacto si de cada recubrimiento abierto  $\Gamma$  de  $X$  podemos extraer una subcolección finita que también recubra  $X$ .

*Ejemplo:*

La recta real  $\mathbb{R}$  no es compacta, pues el recubrimiento de  $\mathbb{R}$  por intervalos abiertos  $\Gamma = \{(n, n + 2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  no contiene ninguna subcolección finita que recubra  $\mathbb{R}$ .

*Ejemplo:*

Cualquier espacio  $X$  que contenga un número finito de puntos es compacto, pues cualquier recubrimiento por abiertos de  $X$  es finito.

Según el teorema de Heine-Borel, un subconjunto  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual es compacto sii es cerrado y acotado.

Supongamos  $n$  un entero positivo. Una variedad topológica  $n$ -dimensional es un espacio Hausdorff tal que para cada punto existe una vecindad homeomorfa a la bola unidad abierta  $B_0(1)$ .

*Ejemplos:*

- $\mathbb{R}^n$ :

$\mathbb{R}^n$  es en sí mismo una variedad. No solo por ser espacio Hausdorff, también porque dado un  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $B_x(1)$  es homeomorfa a  $B_0(1)$ .

- Esfera  $S^2$ :

Se puede demostrar fácilmente que  $S^2$  es una variedad. Es Hausdorff por estar contenida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Por otro lado,  $S^2$  es una variedad debido a la proyección estereográfica. Esta aplicación está definida para todos los puntos de la esfera salvo el polo norte. La proyección estereográfica mapea cada punto de la esfera con la intersección de la recta que pasa por un punto  $x$  de la esfera y el polo norte.

Como una recta está definida por 2 puntos distintos, cuando el punto seleccionado sea el propio polo norte, dicha proyección se hará entre el polo norte y el polo sur. Así todos los puntos de la esfera tendrán su imagen sobre el plano real. Y como ya hemos visto,  $\mathbb{R}^2$  es una variedad, entonces la esfera  $S^2$  también lo es.

Aunque no es el objeto de este trabajo, las 1-variedades están clasificadas. En particular, toda 1-variedad conexa es homeomorfa a  $S^1$  si es compacta o a  $\mathbb{R}$  si no lo es. Una demostración de este resultado utilizando técnicas diferenciales puede encontrarse en los libros [6, Appendix, pg. 55], [11]. Una demostración utilizando técnicas combinatorias se encuentra en [2, Theorem 6.1, pg. 118].

## Superficies

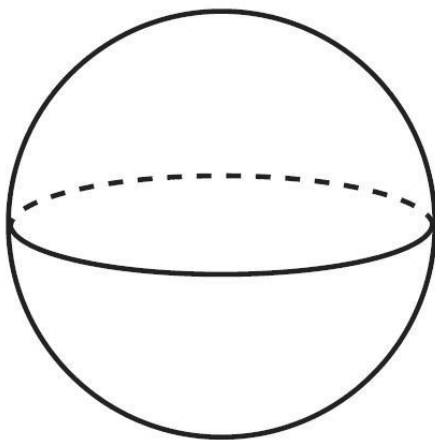
---

En esta sección se hablará de las superficies y algunas de sus propiedades más importantes. La referencia fundamental para este capítulo es [4], aunque también serán de utilidad los libros [1], [2], [7] y [9].

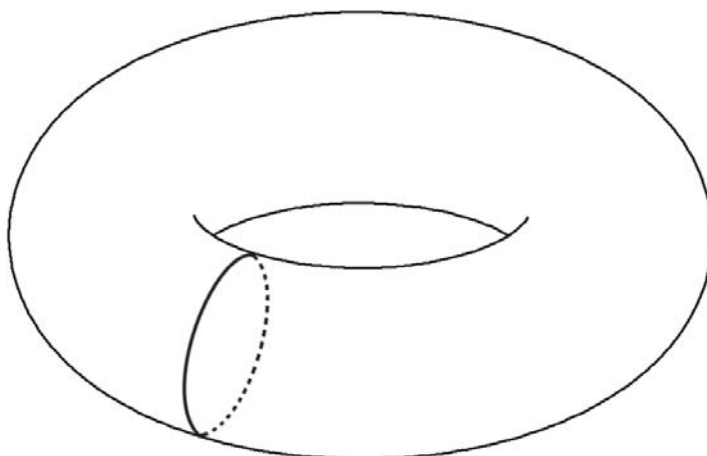
Para nosotros, una superficie será una variedad conexa de dimensión 2.

Algunos ejemplos de superficies son:

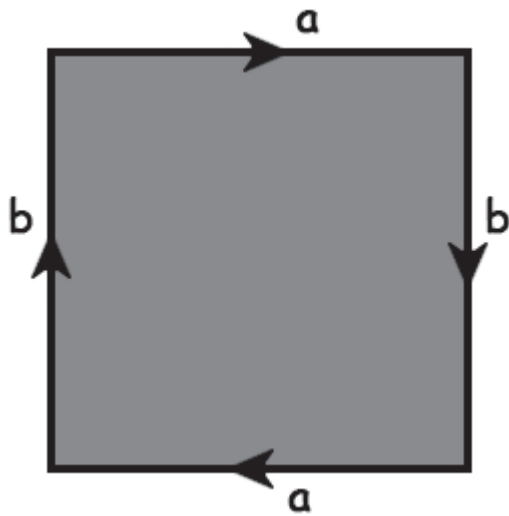
- Esfera  $S^2$ :



- Toro  $T$ :



- Plano proyectivo real  $P^2$ :

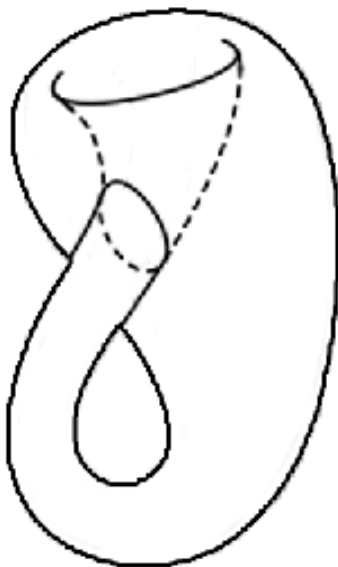


Esta representación del plano proyectivo es lo que se conoce como polígono fundamental.

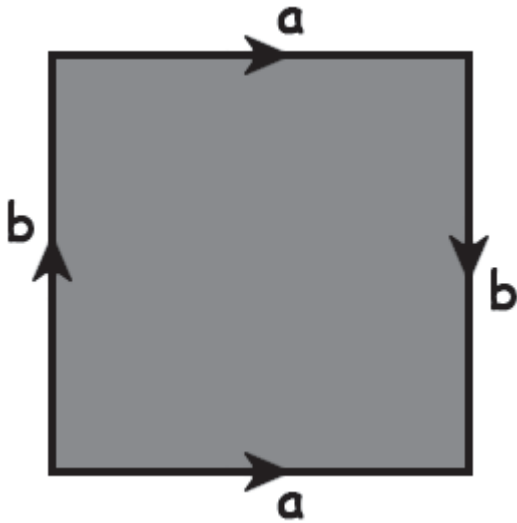
El polígono fundamental de una superficie es la representación de dicha superficie como un cociente de un subconjunto de plano real con los lados identificados a pares.

Otro ejemplo de polígono fundamental es el siguiente:

La famosa botella de Klein, representada en la siguiente imagen



también puede ser representada de la siguiente forma:



El sentido de las flechas indica el espacio cociente resultado de la relación de equivalencia de identificar los lados con la misma letra en el sentido correspondiente.

Topológicamente, son la misma superficie; la primera representada en el espacio tridimensional, y, esta última, representada de forma planar, es su polígono fundamental. Los lados  $a$  y  $b$  se pegarían siguiendo la orientación que posee cada uno.

Así pues, una tercera manera de referirnos a una superficie será mediante su palabra, la cual es una codificación del polígono fundamental.

Por ejemplo, una palabra del ejemplo anterior, sería  $aba^{-1}b$ . Denotaremos con el exponente  $-1$  si la orientación del lado en cuestión difiere del sentido en el que estamos escribiendo el polígono. Aunque de esto se hablará más adelante, cabe destacar que no importa el lado tomado como origen, pero sí ha de conservarse el sentido de lectura, ya sea positivo o negativo.

Como las superficies que se usarán en la demostración de este teorema son la esfera, el toro y el plano proyectivo real, a continuación están sus correspondientes palabras:

- Esfera:  $aa^{-1}$ .
- Toro:  $aba^{-1}b^{-1}$ .
- Plano:  $aa$ .



Con el polígono fundamental de una superficie definido, podemos triangular una superficie triangulando su polígono, pues, como hemos dicho anteriormente, topológicamente una superficie y su polígono fundamental son equivalentes.

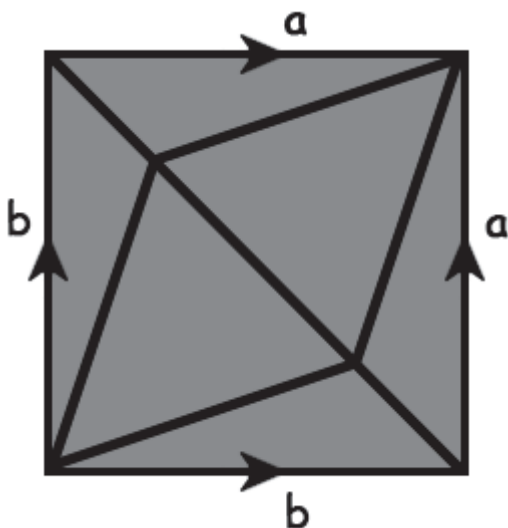
Una triangulación de una superficie compacta es una descomposición de la misma en un número finito de triángulos topológicos tal que dos triángulos o son disjuntos, o tienen exactamente una arista completa en común, o tienen exactamente un vértice en común.

Un triángulo topológico es un conjunto homeomorfo a un triángulo plano  $T$ . Los vértices y las aristas dicho triángulo son la imagen mediante ese homeomorfismo de los vértices y aristas de  $T$ .

Como demostró el matemático húngaro Tibor Radó en 1925, toda superficie tiene al menos una triangulación, la cual no es única. Este teorema es solo aplicable a variedades de dimensión menor o igual que 3. En dimensión 4 se pueden encontrar ejemplos de variedades que no son triangulables. En 2013, Manolescu demostró que para toda dimensión mayor o igual que 5, existían ejemplos de superficies no triangulables [4].

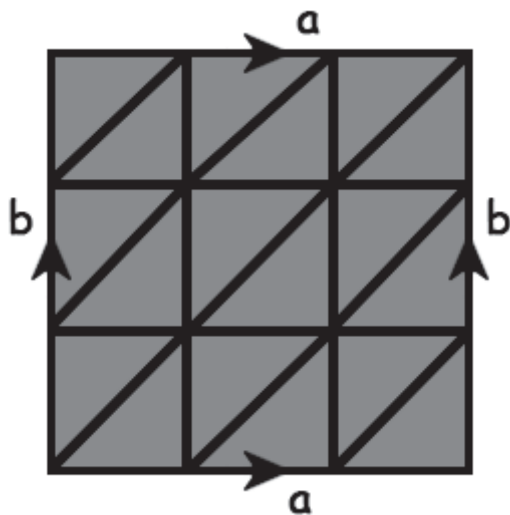
A continuación, se exponen las triangulaciones de las 3 superficies que, como veremos, sirven como cimientos para construir todas las demás.

- Esfera:



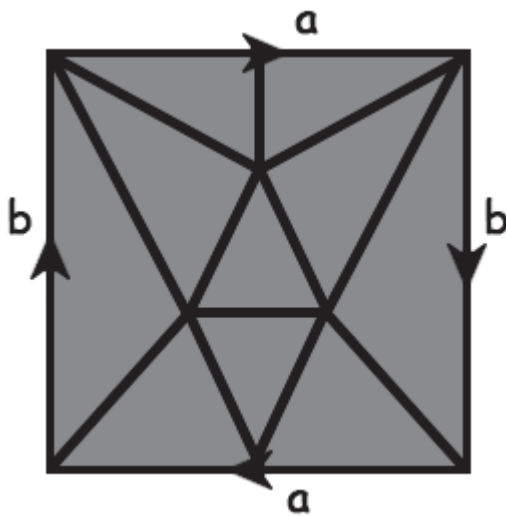
Triangulación de la esfera  $S^2$ .

- Toro:



Triangulación del toro  $T$ .

- Plano Proyectivo:



Triangulación del plano proyectivo  $P$ .

Otro teorema dice que toda superficie compacta puede ser considerada como espacio cociente de un polígono con los lados identificados a pares.

Este último teorema es fundamental para este trabajo, pues es el que nos permite expresar las superficies como palabras. Gracias a esto, el problema del estudio de superficies compactas se reduce al estudio de polígonos con los lados identificados a pares.

Otro concepto importante en la clasificación de superficies compactas, es el invariante topológico conocido como la característica de Euler, denotado por la letra  $\chi$ . La característica de Euler de una superficie se puede calcular de la siguiente forma:

$$\chi = V - A + C,$$

donde  $V$  es el número de vértices,  $A$  es el número de aristas, y  $C$  es el número de caras de una triangulación de dicha superficie.

Este resultado está bien definido, es decir, no depende de la triangulación elegida.

*Ejemplos:*

- La esfera, representada por la palabra  $p = abb^{-1}a^{-1}$ , tiene  $\chi(p) = 5 - 9 + 6 = 2$ .
- El toro, representado por la palabra  $p = aba^{-1}b^{-1}$ , tiene  $\chi(p) = 9 - 27 + 18 = 0$ .
- El plano proyectivo, representado por la palabra  $p = abab$ , tiene  $\chi(p) = 10 - 27 + 18 = 1$ .

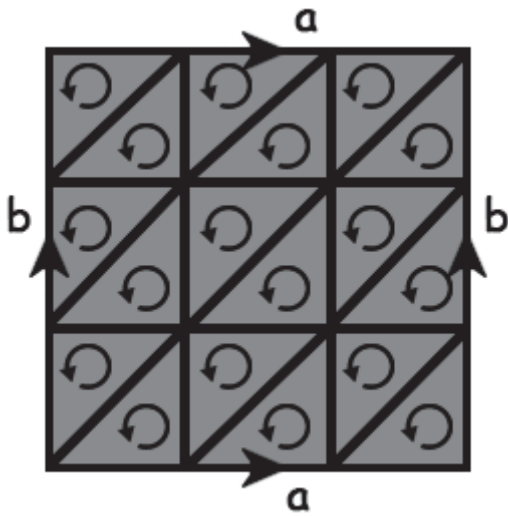
Tras haber visto lo que es la triangulación de una superficie, podemos definir la orientabilidad de la propia triangulación, para, posteriormente, extenderla a una superficie compacta cualquiera.

Una triangulación es orientable si es posible orientar sus triángulos de manera que dos triángulos que compartan una arista tienen, para dicha arista, orientaciones opuestas.

Orientar un triángulo es simplemente ordenar sus vértices.

Ejemplos:

- Toro:



Esta triangulación del toro, sí es orientable, pues para cada par de triángulos, la arista que comparten tiene orientaciones opuestas.

Aclarar que como esta triangulación es orientable, cualquier otra también lo es.

- Banda de Möbius:



Esta triangulación de la banda de Möbius, no es orientable. En rojo están coloreados los conflictos con la orientación.

De forma similar al toro, como esta triangulación no es orientable, ninguna lo es.

Ahora que hemos definido la orientación de una superficie triangulada, podemos enunciar los siguientes teoremas, ambos equivalentes:

- Una superficie compacta es orientable sii tiene una triangulación orientable.
- Una superficie compacta es orientable sii no contiene una banda de Möbius.

Otro resultado importante para el teorema de clasificación de superficies compactas es el siguiente:

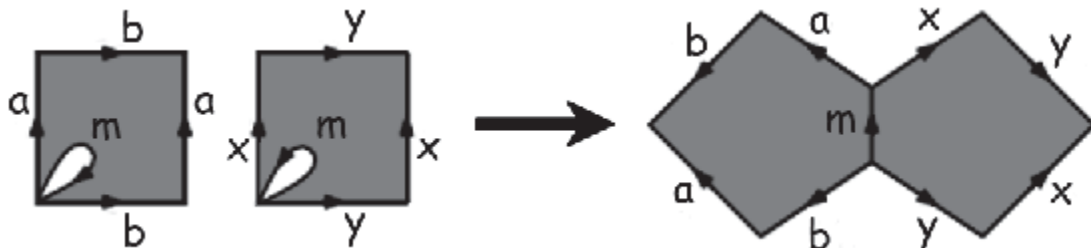
Sea  $M = M_1 \# M_2$ . Entonces  $M$  es orientable sii  $M_1$  y  $M_2$  lo son.

El símbolo  $\#$  denota la suma conexa de 2 superficies, de la cual hablaremos a continuación.

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos superficies disjuntas. La suma conexa de  $M_1$  y  $M_2$  es el espacio topológico  $M_1 \# M_2$  que se obtiene eliminando un disco abierto de  $M_1$  y otro de  $M_2$  y pegando los espacios resultantes por la frontera de los discos mediante un homeomorfismo. El espacio resultante es una superficie, y su topología no depende ni de los discos ni del homeomorfismo escogido.

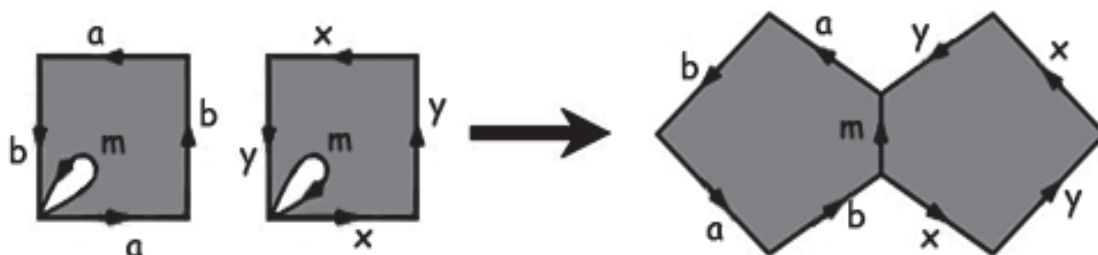
Ahora veremos cómo es la palabra que define la suma conexa de  $n$  toros y de  $n$  planos proyectivos. Esto se hace por inducción, pero mostraremos en las siguientes figuras el caso  $n = 2$ .

- Suma conexa de  $n$  toros:



Como se puede ver en la imagen resultante, la suma conexa de 2 toros viene dada por la palabra  $aba^{-1}b^{-1}xyx^{-1}y^{-1}$ . Es fácil ver, por inducción, que la suma conexa de  $n$  toros viene representada por la palabra  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ .

- Suma conexa de  $n$  planos proyectivos:



En el caso de 2 planos proyectivos, su suma conexa viene representada por la palabra  $ababxyxy$ . Del mismo modo que con la suma conexa de  $n$  toros, se puede ver que, para el caso de los planos proyectivos, la palabra resultante es  $a_1b_1a_1b_1 \dots a_nb_na_nb_n$ .

## Operaciones elementales con palabras

---

Como ya hemos explicado anteriormente, una palabra (o esquema) es una forma de codificar el polígono fundamental de una superficie.

Dado un esquema  $\omega$  se pueden realizar sobre él las siguientes operaciones elementales sin que alteren el espacio cociente  $X$ .

**Corte:** Se puede sustituir el esquema  $\omega = y_0y_1$  por el esquema  $y_0c^{-1}$  y  $cy_1$ , siempre que  $c$  no aparezca en algún otro sitio del esquema total y que  $y_0$  e  $y_1$  sean de longitud al menos dos.

**Pegado:** Se puede sustituir el esquema  $y_0c^{-1}$  y  $cy_1$  por el esquema  $y_0y_1$  siempre que  $c$  no aparezca en algún otro sitio del esquema total.

**Reetiquetado:** Se pueden sustituir todas las presencias de una etiqueta dada por alguna otra etiqueta que no aparezca en otro lugar del esquema. Análogamente, se puede cambiar el signo del exponente de todas las apariciones de una etiqueta  $a$  dada, esto equivale a invertir todas las orientaciones de las aristas con la etiqueta  $a$ .

**Permutación:** Se puede sustituir uno cualquiera de los esquemas  $\omega$  por una permutación cíclica de  $\omega$ . Específicamente, si  $\omega = y_0y_1$ , se puede sustituir  $\omega$  por  $y_1y_0$ .

**Inversión:** Se puede sustituir el esquema  $\omega = (a_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots (a_{i_n})^{\varepsilon_n}$  por el esquema  $\omega^{-1} = (a_{i_n})^{-\varepsilon_n} \dots (a_{i_1})^{-\varepsilon_1}$

Esto es simplemente “invertir el polígono  $\mathcal{P}$ ”. El orden de los vértices se invierte y por tanto la orientación de cada arista. El espacio cociente no se ve alterado.

**Eliminación:** Se puede sustituir el esquema  $\omega = y_0aa^{-1}y_1$  por el esquema  $\omega = y_0y_1$  siempre que  $a$  no aparezca en otro sitio del esquema total y ambos  $y_0$  e  $y_1$  sean de longitud al menos dos.

Sean  $b$  y  $c$  las etiquetas que no aparecen en ningún otro sitio del esquema total. En primer lugar se sustituye  $y_0aa^{-1}y_1$  por el esquema  $y_0ab$  y  $b^{-1}a^{-1}y_1$  usando la operación de corte. Entonces las aristas  $a$  y  $b$  de cada polígono se combinan para formar una nueva arista de etiqueta  $c$ , resultando en el esquema  $y_0c$  y  $c^{-1}y_0$ , que se puede sustituir por el esquema simple  $y_0y_1$  mediante la operación de pegado.

**Añadido:** Es la operación inversa de Eliminación. Consiste en sustituir el esquema  $y_0y_1$  por el  $y_0aa^{-1}y_1$ , siendo  $a$  una etiqueta que no aparezca en ningún otro lugar del esquema total.

### *Teorema de clasificación de superficies compactas*

---

Después de haber visto todo lo anterior, podemos enunciar el teorema objeto de este trabajo.

El teorema de clasificación de superficies compactas dice lo siguiente:

Toda superficie compacta 2-dimensional es homeomorfa a alguna de las siguientes familias:

- A la esfera  $S^2$ .
- A la suma conexa de  $n$  toros.
- A la suma conexa de  $m$  planos proyectivos.

Supongamos que  $\omega_1, \dots, \omega_k$  es un esquema de los polígonos  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ . Si cada etiqueta aparece exactamente dos veces en el esquema, entonces será un esquema propio.

Sea  $\omega$  un esquema propio de un polígono. Diremos que  $\omega$  es de tipo toro si cada etiqueta aparece en  $\omega$  una vez con exponente  $+1$  y otra vez con exponente  $-1$ . En otro caso se dirá que  $\omega$  es de tipo proyectivo.



### Algoritmo del teorema de clasificación de superficies compactas

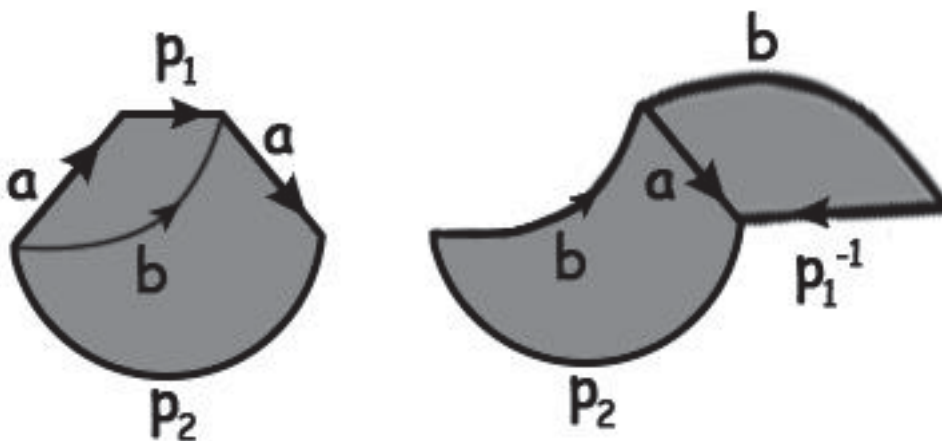
Para la implementación del algoritmo primero veremos gráficamente algunos movimientos en el esquema de palabras los cuales no alteran la superficie que tratamos.

Sean  $\rho_i$  un esquema de palabras y  $\alpha_i$  una letra del esquema, a saber:

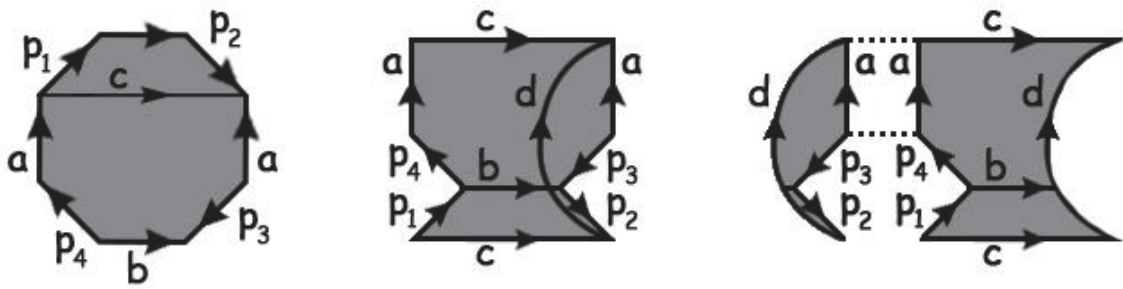
1.  $\rho_1\rho_2 \rightarrow \rho_2\rho_1$ . Este movimiento es simplemente empezar el esquema desde otra posición.
2. Se puede invertir el exponente de una letra. Es decir, cambiar  $\alpha$  por  $\alpha^{-1}$  y  $\alpha^{-1}$  por  $\alpha$  simultáneamente. Implica cambiar la orientación de dos lados identificados.
3.  $\rho \rightarrow \rho^{-1}$ . Invertir una palabra consiste en invertir el orden de las letras, así como su exponente. Significa leer el polígono en sentido opuesto.
4.  $\alpha\alpha^{-1}\rho \rightarrow \rho$ . Este movimiento consiste en eliminar las esferas.



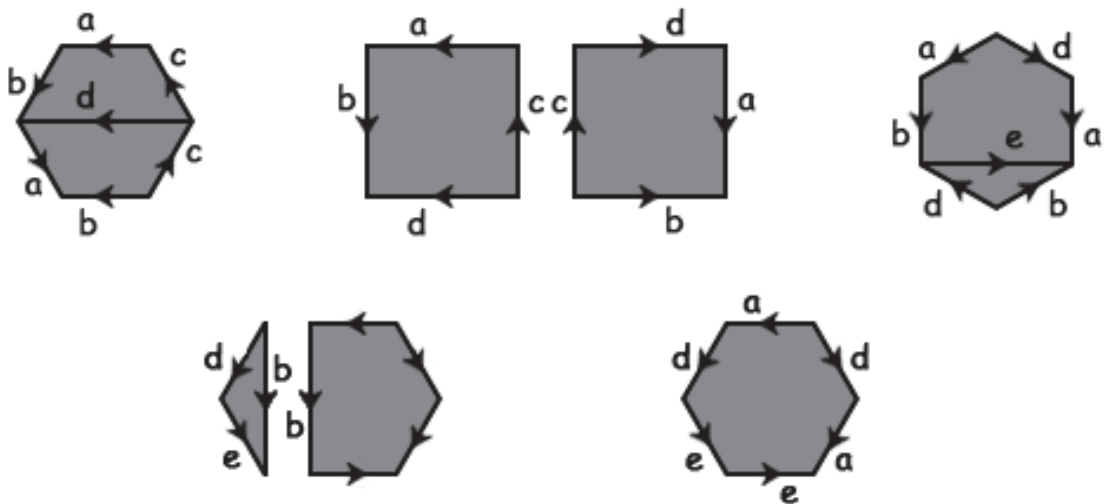
5.  $\alpha\rho_1\alpha\rho_2 \rightarrow b\rho_1^{-1}\rho_2$ . Este movimiento agrupa los planos proyectivos.



6.  $\alpha\rho_1b\rho_2\alpha^{-1}\rho_3b^{-1}\rho_4 \rightarrow \alpha b\alpha^{-1}b^{-1}\rho_1\rho_4\rho_3\rho_2$ . Este movimiento agrupa los toros.



7.  $abc b^{-1}c^{-1} \rightarrow ddeeff$ . Este movimiento relaciona un plano proyectivo y un toro con parte homeomorfa: 3 planos proyectivos.



Visto esto, tenemos todo lo necesario para proceder con el algoritmo y, del mismo modo, con la demostración del teorema.

Necesitaremos 2 variables auxiliares, ambas inicializadas a 0, que nos servirán para ir guardando la cantidad de toros y planos proyectivos que nos vayamos encontrando.

Llamaremos lados del primer tipo a aquellos que aparezcan como  $\alpha\rho_1\alpha\rho_2$ , y lados del segundo tipo a los que aparezcan como  $\alpha\rho_1\alpha^{-1}\rho_2$ .

Sea  $\rho$  un esquema de un polígono cualquiera.

Lo primero que debemos hacer es aplicar es, si procede, el movimiento 5 tantas veces como pares de lados del primer tipo haya, obteniendo así  $\rho \rightsquigarrow \alpha_1\alpha_1 \dots \alpha_k\alpha_k\rho'$ , con  $\rho'$

teniendo sólo lado del segundo tipo. De este modo nuestra palabra tendrá todos los planos proyectivos al comienzo de la misma.

Ahora trabajaremos sobre  $\rho'$ , cual será una palabra con solo lados del segundo tipo. Aplicamos ahora 6 tantas veces como parejas de lados entrelazados haya. Nótese que este movimiento no agrega lados del primer tipo.

Realizado este proceso, nuestra palabra pasará a ser de la forma  $\rho' \rightsquigarrow b_1 c_1 b_1^{-1} c_1^{-1} \dots b_g c_g b_g^{-1} c_g^{-1} \rho''$ , con  $\rho''$  solo lados del segundo tipo y no entrelazados, es decir, con parejas del tipo  $dd^{-1}$ , las cuales las podemos eliminar usando 4 hasta que  $\rho'' = \emptyset$ .

Bien, nuestras variables auxiliares  $K$  y  $G$  tendrán valores según el número de veces que hayamos aplicado 5 y 6, respectivamente.

Si  $K = 0$  y  $G = 0$  significa que nuestra palabra inicial  $\rho = \alpha\alpha^{-1}$ , ya que no hemos realizado ningún movimiento, por lo que podemos deducir que era una esfera.

Si  $K = 0$  y  $G \neq 0$  significa que nuestra palabra estaba compuesta solo por toros, con lo que podemos decir que nuestra superficie es homeomorfa a una suma conexa de  $G$  toros; o, lo que es lo mismo, a un toro de género  $G$ .

Si  $K \neq 0$  y  $G = 0$  significa que nuestra palabra estaba compuesta por planos proyectivos, implicando que nuestra superficie es homeomorfa a una suma conexa de  $K$  planos proyectivos, o a un plano proyectivo de género  $K$ .

Por último, si  $K \neq 0$  y  $G \neq 0$  tenemos una palabra tanto con planos proyectivos como con toros. Llegados a este punto, aplicamos 7 para eliminar los toros, quedando así una palabra con  $K + 2G$  planos proyectivos. Es decir, nuestra palabra sería homeomorfa a un plano proyectivo de género  $K + 2G$ .

## Implementación y uso del programa

---

Para la implementación de este algoritmo he decidido usar el conocido lenguaje Python, en su versión 3.6.2, la cual incluye un módulo denominado `re`. Este módulo contiene funciones basadas en expresiones regulares, las conocidas `regex` (regular expression). Las expresiones regulares son una forma muy útil de encontrar patrones en un texto.

Aclarar que este programa solo funciona en Windows, ya que es un archivo `.exe`, y que no precisa de ninguna instalación para su correcto funcionamiento.

El programa, primero comprueba que cada letra de la palabra introducida aparezca únicamente 2 veces. En caso de no ser así, el programa pedirá al usuario que vuelva a introducir una superficie válida. Por comodidad, la implementación se ha realizado considerando que las letras minúsculas van en el mismo sentido en el que se escribe la palabra correspondiente al polígono fundamental, y en mayúsculas sin van al contrario. Es decir, el toro  $aba^{-1}b^{-1}$  estaría representado por `abAB`.

La restricción de que cada letra aparezca 2 veces se hace ignorando mayúsculas y minúsculas, es decir, `a` y `A` son la misma letra.

Para ejecutar el programa, se deberá descomprimir el archivo `.zip` llamado "Programa", y ejecutar el archivo con extensión `.bat` denominado "Theorem". El programa recibe como entrada una palabra, y, si es válida, devuelve a qué familia de las del teorema enunciado anteriormente pertenece. Una palabra es válida si, aparte de tener todas sus letras 2 veces únicamente, todos sus caracteres son alfabéticos. Una palabra con números, o símbolos de puntuación, será considerada no válida, y el programa devolverá el correspondiente error, quedando a la espera de una nueva palabra.

Para finalizar el programa, el usuario puede cerrarlo de manera habitual, en la `x` que se encuentra en la esquina superior derecha, o escribiendo alguno de los siguientes comandos en la terminal: [`q`, `quit`, `exit`]. Cualquiera de estos 3 comandos harán que el programa finalice.

A continuación un breve ejemplo de cómo se ha utilizado el módulo de expresiones regulares para el caso número 5. La expresión regular utilizada sería: `"(.)(.*)\1(.*)"`.

El carácter `"."` representa cualquier otro carácter. En nuestro caso, solo serán letras.

El símbolo `"*"` indica 0 o más ocurrencias de lo que le preceda, en este caso `"."`, lo que significa que es una cadena de texto, la cual puede ser vacía.

Los paréntesis implican que lo que haya dentro es considerado un grupo. Esto es útil ya que como para este caso, queremos que haya 2 letras iguales, al haber capturado la primera (sea cual sea) con "(.)", podemos volver a referirnos a ella con la expresión "(\\1)". Esta expresión tendrá el valor de lo que se haya capturado en el primer grupo (una letra) y volver a hacer de ella un grupo.

Y por último, al igual que hicimos con la segunda expresión, capturar cualquier cadena de texto, la cual puede ser vacía.

Bien, ahora que tenemos el patrón  $\alpha\rho_1\alpha\rho_2$  capturado en grupos, solo nos queda transformarlo en  $bb\rho_1^{-1}\rho_2$ . Como las letras siempre aparecen por pares y nunca repetidas, podemos sustituir  $b$  por  $\alpha$ .

Llamemos  $\lambda$  a nuestra captura con dicha expresión.  $\lambda.groups()$  devuelve una lista con todos los grupos capturados. Así pues,  $\lambda.groups()[0] == \lambda.groups()[2]$ , pues recordemos que en el grupo 3 tenemos lo mismo que en el grupo 1. Y en  $\lambda.groups()[1]$  y  $\lambda.groups()[3]$  tenemos 2 cadenas de texto.

Ahora juntamos todos los grupos en el orden correspondiente:

$\lambda.groups()[0] + \lambda.groups()[2] + \lambda.groups()[1].swap() + \lambda.groups()[3]$

La función  $swap()$  invierte la cadena de texto y cambia mayúsculas por minúsculas y viceversa. Es lo que previamente hemos definido como inverso de una palabra, operación 3. Este mismo proceso se realizaría para operación número 6.

La operación número 7 no está implementada, pues es una relación de equivalencia en la que la suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfo a 3 planos proyectivos. De aquí podemos concluir que la suma conexa de  $n$  toros y  $m$  planos proyectivos es homeomorfa a  $m + 2n$  planos proyectivos, como ya se mencionó anteriormente.

### Ejemplos:

- Sea la palabra  $abbca^{-1}ddc^{-1}$ .

Como vemos, no hay lados del primer tipo sobre los que poder aplicar el paso 5. Los planos proyectivos  $bb$  y  $dd$  ya están agrupados. Pero sí hay un lado de segundo tipo, que es de la forma:  $a[bb]c[a^{-1}[dd]c^{-1}]$ . Denotamos entre  $[]$  lo que en el algoritmo denominamos  $\rho_i$ . Aplicando el paso 6, la palabra resultante sería  $aca^{-1}c^{-1}bbdd$ , la cual se corresponde a la suma conexa de 1 toro y 2 planos proyectivos. Y por el paso 7, es homeomorfo a la suma conexa de 4 planos proyectivos.

- Sea la palabra  $abcd a^{-1} c^{-1} b^{-1} d^{-1}$ .


En este caso podemos anticipar que no habrá ningún plano proyectivo involucrado, pues no aparece ningún lado del primer tipo y, como dijimos anteriormente, el movimiento número 6 no agrega lados del primer tipo. Así pues, aplicando el paso 6 sobre la palabra  $a[\ ]b[cd]a^{-1}[c^{-1}]b^{-1}[d^{-1}]$  (como en el ejemplo anterior, los  $[\ ]$  denotan los  $\rho_i$ ), obtendríamos la siguiente palabra:  $aba^{-1}b^{-1}d^{-1}c^{-1}cd$ . Como vimos en el paso 4, podemos eliminar la esfera  $c^{-1}c$ , quedando  $aba^{-1}b^{-1}d^{-1}d$ . Volvemos a aplicar el paso número 4, ya que ahora ha aparecido la esfera  $d^{-1}d$ . Nuestra palabra final se correspondería con  $aba^{-1}b^{-1}$ , la cual representa un toro.

## Bibliografía

---

- [1] C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980.
- [2] J.M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag New York, 2011.
- [3] M.T. Lozano, La conjetura de Poincaré. Cien años de investigación, *bulleti-digital*, 2014.
- [4] C. Manolescu, Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture, *J. Amer. Math. Soc.*, 29, 2016, no. 1, 147-176.
- [5] W.S. Massey, *Algebraic Topology, an Introduction*, Springer-Verlag, 1977.
- [6] J.W. Milnor, *Topology From the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [7] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Inc., 2000.
- [8] V. Muñoz, Cien años de la conjetura de Poincaré, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 7, 2004, 629-653.
- [9] V. Muñoz, J.J. Madrigal, *Topología Algebraica*, Sanz y Torres, 2015.
- [10] I. Richards, On the classification of noncompact surfaces, *Trans. Amer. Soc.*, 106, 1963, 259-269.
- [11] J.M.R. Sanjurjo, J.M. Ruiz, *Introducción a la Geometría Diferencial: Curvas*, Sanz y Torres, 2012.

Este documento esta firmado por

	<b>Firmante</b>	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
	<b>Fecha/Hora</b>	Sun Jul 07 18:20:52 CEST 2019
	<b>Emisor del Certificado</b>	EMAILADDRESS=camanager@fi.upm.es, CN=CA Facultad de Informatica, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
	<b>Numero de Serie</b>	630
	<b>Metodo</b>	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)