

Historias de Matemáticas

Ingeniería y Matemática: armonías

Engineering and mathematics: harmonies

Marco Castrillón López, Omar Gil Álvarez, y María Jesús Vázquez-Gallo

Revista de Investigación



Volumen IX, Número 2, pp. 037-048, ISSN 2174-0410

Recepción: 15 Feb'19; Aceptación: 14 Sep'19

1 de octubre de 2019

Resumen

La ingeniería y la matemática se han retroalimentado desde sus inicios. La ingeniería como la aplicación del conocimiento científico a la invención práctica y la matemática como el conocimiento científico en sí mismo. Este artículo se sitúa en el germen del desarrollo de la física-matemática como herramienta clave en la ingeniería, a través del problema de la cuerda vibrante, con un final envuelto en "armonías".

Palabras Clave: ingeniería, matemática, física, cuerda vibrante, ondas, armonía.

Abstract

Engineering and mathematics have been fed back since its inception. Engineering as the application of scientific knowledge to practical invention and mathematics as scientific knowledge itself. This article is placed in the germ of the development of mathematical physics as a key tool in engineering, through the vibrating string problem, with an end wrapped in "harmonies".

Keywords: engineering, mathematics, physics, vibrating string, waves, harmony.

1. Introducción

Daniel y Leonard se habían conocido cuando estudiaban en Suiza, en la Universidad de Basilea. Sus familias eran amigas. Daniel estudió medicina influido por su padre, médico y matemático, llegando a realizar una tesis sobre la respiración. Leonard recibió el título en filosofía y siguió estudiando teología, griego y hebreo porque su padre quería que fuese pastor religioso. A la vez, el padre de Daniel, comenzó a dar lecciones de matemáticas a los dos amigos, y percibió en Leonard tal capacidad para esta ciencia que, finalmente, logró que se doctorase en este campo con una tesis sobre la propagación del sonido.

Un tiempo después, Daniel trabajaba en la Academia de San Petersburgo, como profesor de fisiología. Se encontraba fascinado por las ideas del filósofo Descartes -para quien la vida se

fundamentaba en el calor concentrado en el corazón que se comunicaba mecánicamente con el resto del cuerpo- y también por los trabajos de W. Harvey sobre el sistema circulatorio. Había leído tratados italianos en los que se empleaban métodos de hidráulica para estudiar la circulación sanguínea y conocía la tesis de doctorado de su padre Johann, en la que se modelaba el movimiento de los músculos como un problema mecánico de medios elásticos. Inspirado por estos trabajos y con la intención de potenciar una escuela de fisiología basada en principios mecánicos y matemáticos, Daniel invitó a la Academia a su amigo Leonard, consciente de su talento físico-matemático, y durante varios años compartieron apartamento a orillas del Neva. Fueron tiempos creativos y fructíferos, plagados de discusiones científicas entre la visión intuitiva y experimental de Daniel y el enfoque riguroso de Leonard, más preocupado por la teoría general.

A partir de la combinación de las dos inquietudes: “cómo hacer” y “cómo pensar”, tras aquellos años, Daniel publicó una teoría hidráulica sólida y rigurosa, basada en la dinámica de fluidos, considerando la interacción de la presión y de la velocidad. Esta teoría sustenta buena parte de la ingeniería actual: desde el suministro de agua hasta el diseño de las alas de un avión.

2. Ingeniería y matemática

Podríamos calificar a Daniel y a Leonard como antiguos ingenieros o antiguos matemáticos o antiguos físico-matemáticos porque la frontera era porosa y ni siquiera había nacido la ingeniería moderna... Nuestro Daniel era Daniel Bernoulli (1700-1782), miembro de una familia de celebrados matemáticos, a quien la Universidad de Basilea le acabó concediendo en 1750 la cátedra que había ocupado su padre, Johann. Daniel Bernoulli contribuyó no sólo a la hidrodinámica sino también a la termodinámica, a la teoría cinética de los gases y a la teoría de la probabilidad, esencial en los modernos ensayos con medicamentos o en el control de calidad en ingeniería, entre otros muchos campos.



Figura 1. Daniel Bernoulli: obra y aplicaciones.

Daniel ganó 10 premios de la Academia de Ciencias de París, sólo superado por... Por su amigo Leonard, Leonard Euler (1707-1783), que ganó 12 premios de la academia francesa, después de quedar segundo tras un ingeniero naval cuando compitieron para encontrar la forma óptima de posicionar un mástil en un buque.

A Leonard Euler se le describe como matemático -quizá el más prolífico de todos los tiempos- pero también fue filósofo y físico, haciendo contribuciones a la mecánica, a la óptica y a la astronomía; y realizó además aportaciones específicas a la ingeniería, en balística y en topografía, entre otras áreas; suya es la ley sobre el pandeo de soportes verticales y la carga crítica de columnas.

Leonard Euler cultivó todas las áreas de la matemática, incluso dando origen a algunas de ellas, como la teoría de grafos, que tiene un antecedente directo en la resolución, a petición de sus ciudadanos, del célebre problema de los puentes de Königsberg: ¿es posible pasearse por la ciudad atravesando una sola vez cada uno de los siete puentes existentes? (ver figura 2). Algunos de estos puentes ya no existen y otros han sido remodelados. La teoría de grafos sigue siendo fuente de actividades lúdicas, pero es también una rama de la matemática con su cuerpo propio de teoría y aplicaciones sumamente variadas, por ejemplo, aplicaciones a cuestiones logísticas, como la optimización de rutas. En general, esta teoría se puede utilizar en todo tipo de problemas que involucren conexiones en redes de cualquier naturaleza.

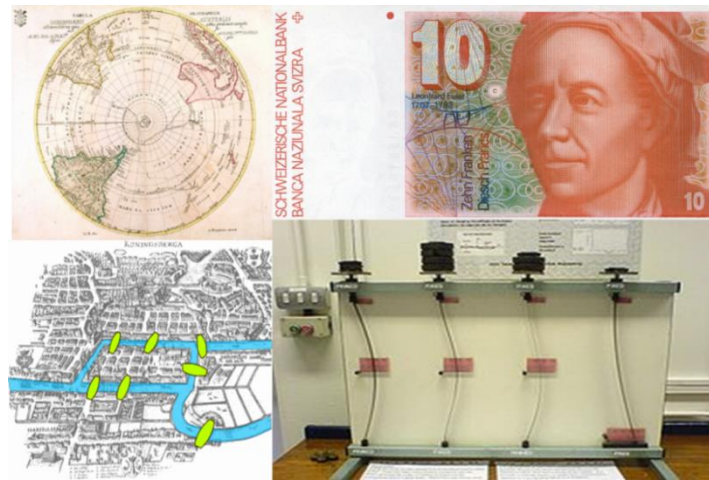


Figura 2. Leonard Euler. Los puentes de Königsberg. Aplicaciones.

Daniel y Leonard mantuvieron un intercambio fructífero, uno hacía de guía en la comprensión de los fenómenos físicos concretos, y el otro en la matemática necesaria para formular principios y leyes generales. En este intercambio, la controversia y la discusión científica condujeron a cruciales avances.

De la misma manera, la ingeniería y la matemática se han retroalimentado desde sus inicios. La ingeniería como la aplicación del conocimiento científico a la invención práctica: ¿cómo hacer? (el término ingeniería viene del latín "ingenium": inteligencia inventiva; el origen del término puede estar en un ariete con ese nombre inventado hacia el 200 d. C. para atacar las murallas) y la matemática como el conocimiento científico en sí mismo: ¿cómo pensar? (el

término matemática viene del griego “mathema”: aprendizaje, conocimiento, estudio). Si bien hasta el Renacimiento, la ingeniería fue eminentemente práctica y con una gran componente artística -el “arte de inventar”-, tras la Revolución Francesa, se gesta la ingeniería moderna con una sólida formación científica en matemática y en física como pilares fundamentales: en lo metodológico y en lo instrumental. La física-matemática está cuajada de ecuaciones diferenciales que describen todo tipo de procesos relevantes en ingeniería.

El germen del desarrollo de la física-matemática, como herramienta clave en la ingeniería, está precisamente en los trabajos de nuestros protagonistas: Daniel Bernoulli, Leonard Euler y el francés Jean D’Alembert (1717-1783), matemático, filósofo y enciclopedista ilustrado, autor del conocido principio D’Alembert, emparentado con las leyes de Newton, que permite determinar las reacciones mecánicas en el cálculo con vigas y otros problemas de mecánica de sólidos.

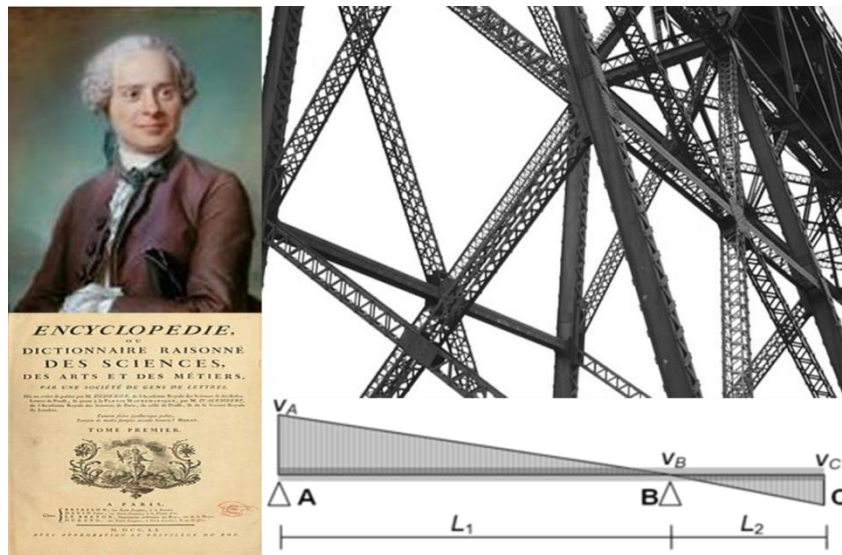


Figura 3. Jean D’Alembert. Obra y aplicaciones.

En el discurso preliminar a la Enciclopedia (1751), D’Alembert afirmaba:

No podemos esperar conocer la naturaleza mediante hipótesis vagas y arbitrarias, sino por el estudio reflexivo de los fenómenos, por la comparación que haremos de los unos con los otros, por el arte de reducir, en la medida de lo posible, un gran número de fenómenos a uno solo que puede ser mirado como su principio.

D. Bernoulli, Euler y D’Alembert protagonizaron una interesante polémica sobre el llamado problema de la cuerda vibrante con un final envuelto en “armonías”.

3. El problema de la cuerda vibrante

Podría parecer que una cuerda que vibra no tiene mayor interés. Pero una cuerda que vibra, por ejemplo, la cuerda de un violín, o cualquiera de nuestras cuerdas vocales, crea un sonido

que en la mayoría de los casos podemos oír, ya que poseemos unos órganos capaces de detectar ondas de compresión en el aire. Las ondas son perturbaciones que se propagan en el espacio transportando energía y... están en todas partes... Por ejemplo, nuestra vista, en general, detecta ondas de radiación electromagnética, y este tipo de ondas, que no necesitan un medio material para propagarse, son la base de la radio, la televisión, el radar o los teléfonos móviles. También son ondas las producidas por un terremoto, llamadas ondas sísmicas. Entonces, el descubrir qué leyes gobiernan las ondas nos puede ayudar a predecir un tsunami o a mejorar la comunicación con un satélite.

Desde luego, en el siglo XVIII, las motivaciones de D. Bernouilli, Euler y D'Alembert no tenían que ver con satélites. Pero el mundo actual de las comunicaciones a gran velocidad o el sofisticado diseño estructural, sería ciertamente distinto sin sus consideraciones físicas y matemáticas sobre cómo vibra la cuerda de un violín, utilizando un modelo aún más simple que la cuerda real y dando sentido, como veremos en un momento, a la teoría pitagórica de la armonía de la naturaleza.

El término "armonía" deriva del griego "ἁρμονία", como acuerdo y concordancia; en el sentido de ajuste o conexión. Nos ha llegado a través del latín "harmonia", derivado de "armós" (juntar, hombros). En mitología, la diosa griega Harmonía tuvo su equivalente romano en la diosa Concordia. El concepto de armonía implica juntar una cosa con otra en un orden placentero.

Volviendo a los pitagóricos, unos 500 años a. C., creían que todo se basaba en números (naturales: los que usamos para contar 1, 2, 3...) y en proporciones entre ellos. Opinaban que los movimientos de los planetas generaban vibraciones armónicas imperceptibles: la "música de las esferas" mencionada también por Platón (427-347 a. C.), y por Kepler (1571-1630) en su obra "Harmonices mundi". Uno de los grandes logros de la visión pitagórica sentó las bases de la música occidental, afirmando que proporciones simples gobiernan la armonía musical. Se cuenta que Pitágoras al pasar por una herrería se dio cuenta de que los martillos pequeños emitían sonidos más agudos que los grandes... Para entender lo esencial de este fenómeno, por qué no pensar primero en el problema simplificado -como suele hacer la matemática- estudiando el comportamiento de una simple cuerda vibrando... De hecho, Ptolomeo documentó en su obra "Harmonicos", hacia el año 150 d.C., los experimentos realizados por los pitagóricos con un monocordio, un rudimentario instrumento musical con una única cuerda.

En un monocordio, la longitud de la cuerda se podía modificar como hoy se pisa con los dedos la cuerda de una guitarra o de un violín. Cuanto más corta era la cuerda más alto o agudo era el sonido. Metódicamente, los pitagóricos compararon por pares los sonidos producidos por distintas longitudes, descubriendo que las parejas de sonidos producidos por cuerdas con largos relacionados por números pequeños resultaban los más placenteros -armónicos-. En concreto, la relación de 2 a 1, en la que se pulsa una cuerda y otra de longitud mitad, suenan prácticamente indistinguibles. Esta relación se conoce hoy en día como octava, y configura el patrón fundamental de las escalas actuales. De esta forma, a dos sonidos que se separen por octavas, es decir, cuyas frecuencias están una relación igual a una potencia de dos, se les asigna el mismo nombre.

La siguiente armonía en importancia dentro de la jerarquía pitagórica es la derivada de la relación 3 a 1, o equivalentemente con un cambio de octava, de la relación 3 a 2. A este intervalo musical se le denomina quinta. La escuela pitagórica seleccionó así, a partir de concatenaciones de quintas, una colección de notas, que es la conocida como escala pitagórica. Más en concreto, se consideran razones del tipo $\frac{3^m}{2^n}$, de forma que para cada $m = 1, 2, \dots$ se escoge el menor n para que este cociente esté entre 1 y 2 (entre una nota y la separada por una octava). Con 7 pasos, se tiene las famosas 7 notas de la escala Do Re Mi Fa Sol La Si, y con 12, la escala cromática. El siguiente paso, el 13, nos daría una nota muy cercana a la de partida...pero no la misma. A la diferencia entre esas dos notas se le denomina coma pitagórica, y su resolución llevó posteriormente a la construcción de las llamadas escalas temperadas¹. De cualquier manera, los pitagóricos establecieron un modelo matemático de un fenómeno físico, con una motivación estética, como hicieron después los renacentistas con la proporción áurea. Los modelos no capturan todos los aspectos de la realidad pero guían su análisis.

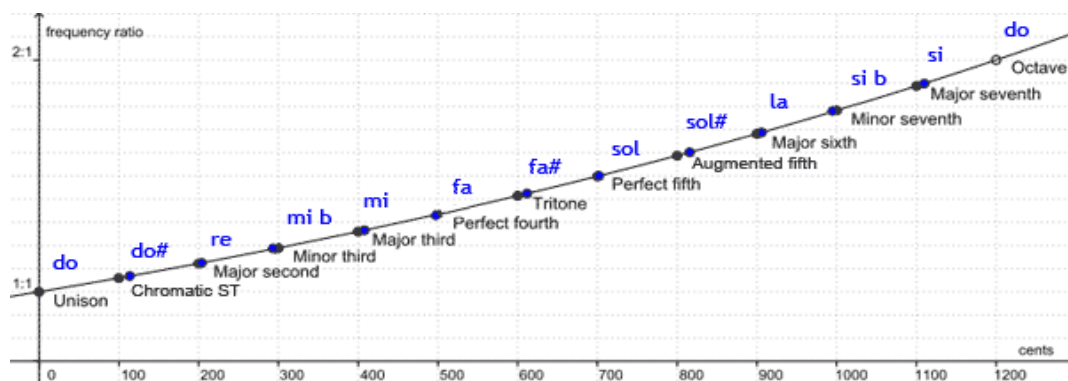


Figura 4. Las diferencias de afinación pitagórica y temperada son sutiles. Gráfica tomada de <https://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-temperada.html>

Con este modelo, ya tendríamos el ¿cómo hacer? Pero: ¿cómo pensar? ¿Por qué las proporciones simples producen sonidos armoniosos? ¿Qué ocurre al ejercer fuerza sobre la cuerda?

Poco antes de que nacieran Daniel y Leonard, Sir Isaac Newton (1643-1727) ya había publicado sus “Principia”, estableciendo con sus leyes las bases de la mecánica clásica. Estas leyes estaban formuladas en el lenguaje del cálculo diferencial e integral, que Newton desarrolló de forma paralela al alemán Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). La segunda ley de Newton (1643-1727) afirma que la fuerza aplicada a cierto objeto es directamente proporcional a la aceleración producida y el factor de proporcionalidad es la masa del objeto. Otro inglés de la época, Robert Hooke (1635-1703), que polemizó con Newton sobre la autoría

¹Desde finales del siglo XVII aproximadamente, predominan las llamadas escalas temperadas, o de igual temperamento, en las que las razones entre frecuencias no son tan simples como en la escala pitagórica, pero son muy, muy cercanas a ellas. Surgieron como remedio al problema de la “coma pitagórica”, es decir, al hecho de que no cuadren doce quintas, o sea $(3/2)^{12}$, y siete octavas, es decir 2^7 (hecho relacionado con el de que una potencia no trivial de 3 no puede ser igual a una potencia de 2). Una de las opciones posibles para liberarse de esa discrepancia la proponen las escalas temperadas, con una octava dividida en n intervalos iguales de tamaño la raíz n -ésima de 2 y, como consecuencia, involucrando números irracionales en lugar de números racionales, como hacía la escala pitagórica. La escala temperada más utilizada en la música occidental emplea $n = 12$ intervalos iguales. En la figura 4, en el eje horizontal, la unidad de afinación utilizada es el cent, equivalente a la centésima parte logarítmica de un semitono temperado, es decir, $1 \text{ cent} = \sqrt[12]{2}$.

de la ley de gravitación universal, descubrió que el cambio de longitud en un objeto elástico es proporcional a la fuerza ejercida en él, y el factor de proporcionalidad es una constante que depende de la mayor o menor elasticidad del objeto.

Parecería que la respuesta ya está clara... porque la aceleración es el cambio de velocidad con respecto al tiempo, y la velocidad es el cambio en el desplazamiento con respecto al tiempo (en el lenguaje del cálculo diferencial: la aceleración es la segunda derivada de la función desplazamiento con respecto a la variable tiempo). Entonces, traduciendo las dos leyes anteriores (Newton y Hooke) a ecuaciones diferenciales (con derivadas), se podría obtener como solución de dichas ecuaciones el desplazamiento, es decir, el cómo se mueve la cuerda.

Pero la ley de Newton se aplicaba a un único objeto, en un único punto, o en todo caso a un sistema con un número finito de masas... y una cuerda es una línea formada por un infinito de puntos, como una recta de números reales... Aquí entra nuevamente la matemática en juego y fue el reputado matemático Johann Bernouilli, el padre de Daniel, quien trabajó sobre el problema, considerando primero una cuerda sin peso, flexible e inextensible sobre la que se colocan una serie de masas idénticas igualmente espaciadas. Johann fue capaz de pasar al caso continuo, el de la cuerda "real", tomando límite en el número de masas (hablando de límites, fue Johann quien en realidad demostró la famosa regla de L'Hôpital, un marqués ducho en matemáticas que le había contratado para que lo instruyera). La solución que encontró Johann, era que el comportamiento de la cuerda, al vibrar arriba y abajo, repitiendo el mismo movimiento una y otra vez, corresponde técnicamente a que, en cada instante de tiempo, la forma de la cuerda es una curva sinusoidal en el espacio (gráfica de la función trigonométrica "seno"), es decir, una onda, cuya máxima altura (la amplitud de la onda) también sigue una curva sinusoidal en el tiempo.

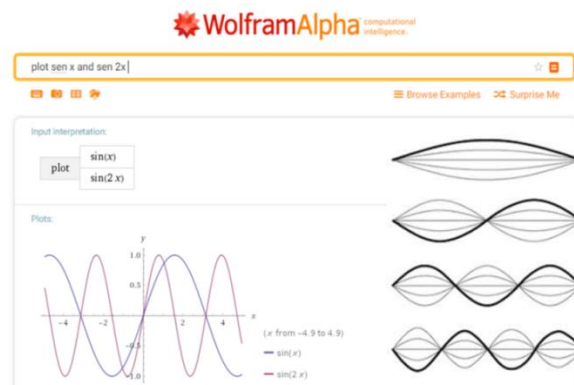


Figura 5. Funciones seno. Modos de vibración: fundamental y armónicos.

Johann Bernouilli encontró además otras soluciones: diferentes modos de vibrar que mostraban varias ondas a lo largo de la longitud de la cuerda. Cuantas más ondas, más rápido se mueve la cuerda, es decir, la frecuencia de la vibración es mayor. Los extremos de la cuerda siempre están fijos y en cada modo de vibración, exceptuando el primero, hay más puntos que se quedan quietos: los nodos de la vibración. Las distancias entre nodos y, por tanto, las frecuencias, están en proporciones sencillas, como las que observaban los pitagóricos: la

distancia entre nodos del tercer modo, multiplicada por 3 y dividida por 2, nos da la distancia entre nodos del segundo modo, etc.

Pero ¿por qué suenan agradables –armoniosas- estas proporciones? Si las proporciones entre frecuencias no son simples, al superponer las ondas correspondientes, se produce el efecto conocido como batimiento. El oído también vibra cuando registra los sonidos y el batimiento produce un zumbido a veces fuerte y a veces suave que no nos resulta agradable (o quizá habría que decir conocido... en esto último hay una dimensión cultural porque el oído se compenetra con los sonidos que escucha habitualmente).

Volviendo al problema de la cuerda vibrante, los experimentos con cuerdas reales mostraban que, así como nuestros oídos perciben un sonido más complejo que el tono fundamental o sus diversos armónicos cuando una cuerda de un violín vibra, la forma que adopta una cuerda al vibrar partiendo de cierta posición inicial no es siempre sinusoidal, sino una onda periódica más compleja.

Así que Johann Bernouilli no estaba resolviendo del todo el problema... Fue Daniel quien, gracias a su vena experimental y a sus conocimientos musicales, llegó más allá que su padre y que otros matemáticos de la época, proponiendo que la solución general del problema matemático era una superposición de vibraciones fundamentales, o sea, una suma de ondas sinusoidales. Un poco más tarde, su amigo Leonard, -Leonard Euler-, junto a Jean D’Alembert, más duchos en el formalismo matemático, fueron capaces de considerar el desplazamiento de la cuerda vibrante como función simultánea del espacio y del tiempo, es decir, como función de dos variables. Históricamente, esta fue la primera ocasión en que se utilizó con éxito una ecuación en derivadas parciales.

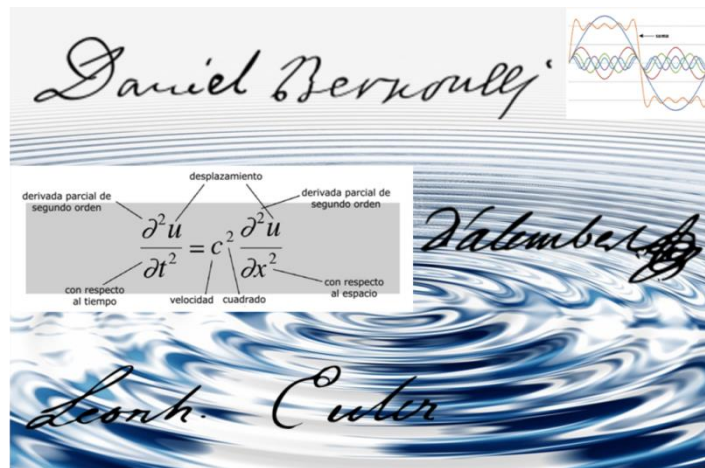


Figura 6. La ecuación de ondas. (Figura basada en Las 17 ecuaciones que cambiaron el mundo. I.Stewart)

D’Alembert y Euler consiguieron demostrar que si una cuerda tensa con los extremos fijos vibra a partir de cierta posición o perfil inicial, su comportamiento lo describe una función periódica de las variables espacio y tiempo que se puede escribir como suma de senos (y cosenos) con distintas amplitudes y frecuencias. A su vez, entre ellos discrepaban incluso en el

concepto de función, porque D'Alembert sólo consideraba funciones con gráficas suaves mientras que Euler aceptaba funciones más acordes con la realidad, cuyas gráficas pueden presentar picos...

Una vez más, Daniel entró en la polémica y recordándole a Leonard los viejos tiempos en San Petersburgo, empleó argumentos físicos e intuición musical para proponer que el movimiento de una cuerda que vibra partiendo de una forma inicial cualquiera (con picos o sin ellos), se puede describir como suma de infinitos, ¡sí!, infinitos, movimientos armónicos sinusoidales.

La consecuencia de aquello es que hoy en día, la ingeniería es capaz, por ejemplo, de analizar la vibración de la estructura de un puente sometido al efecto del viento y del tráfico, como una vibración compleja que se obtiene combinando modos fundamentales de vibración con diversas frecuencias.

4. Armonías

Daniel Bernouilli, Leonard Euler y Jean D'Alembert, nuestros tres ¿filósofos? ¿físico-matemáticos? ¿o quizá ingenieros modernos? siguieron discrepando porque el análisis matemático aún no estaba suficientemente desarrollado en cuanto a las ecuaciones en derivadas parciales y al propio concepto de función, pero Daniel había dado un gran paso hacia el conocido como análisis armónico, iniciado ochenta años después de estas discusiones científicas por el francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1772-1837), cuando estudiaba en otro contexto un problema relacionado con el anterior, a saber, el comportamiento de la temperatura de una varilla cuyos extremos se mantienen a una temperatura constante, conocido el estado inicial de la varilla.

A comienzos del siglo XIX, el barón de Fourier publicaba su teoría analítica del calor, demostrando que cualquier función (real) por muy complicada que sea, puede representarse en cualquier intervalo finito por una serie o suma infinita de funciones sencillas (senos/cosenos) y que, además, si el intervalo y la serie se fijan, los coeficientes quedan unívocamente determinados. La primera parte ya la había intuido Daniel y la segunda era lo que le preocupaba a Leonard. En el lenguaje del álgebra, las funciones sencillas son autovectores de cierto problema y las frecuencias son los autovalores correspondientes. A partir de entonces, las series de Fourier comenzaron a utilizarse en multitud de aplicaciones: acústicas, ópticas, eléctricas...

En la actualidad, los métodos de Fourier y otros relacionados -como el análisis de ondículas de Ives Meyer, el Premio Abel de Matemáticas en 2017, análogo al Nobel- se emplean en gran parte de la ciencia y de la ingeniería modernas. Estas ideas, que implicaron enormes avances en el desarrollo de las matemáticas necesarias para comprender los medios continuos tienen también impacto en nuestro mundo digital. Así como el cine genera la sensación de un movimiento continuo a través de la proyección sucesiva de imágenes estáticas, el sonido se codifica digitalmente tomando muestras espaciadas, y una imagen en la pantalla de nuestra computadora surge de las combinaciones de píxeles. Millones de ellos, pero un conjunto finito.

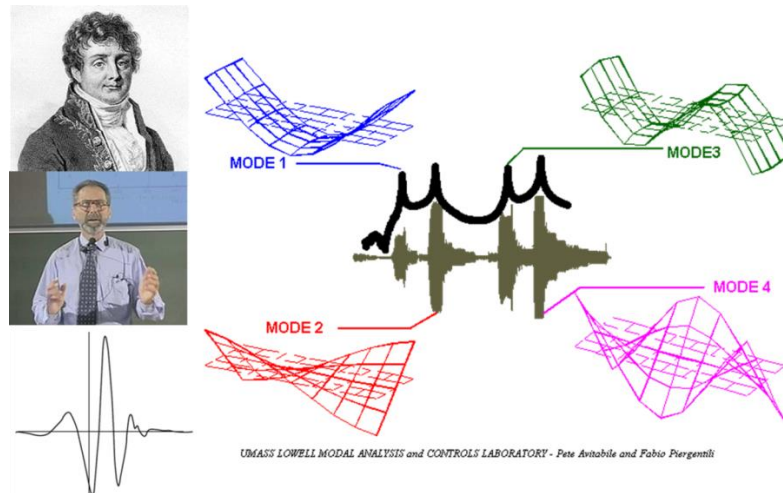


Figura 7. Fourier. I. Meyer. Modos de vibración. Ondículas.

Estas nociones de muestreo y de reconstrucción a partir de una muestra conectan el mundo digital con el analógico. Es así que el análisis armónico de Fourier tiene en la actualidad versiones discretas, con aplicaciones diversas a la tecnología de comunicaciones. Intervienen en la codificación de sonidos, algo que nuestras historias de violines y otras estructuras vibrantes podrían hacernos presumir, y también en la codificación de imágenes.

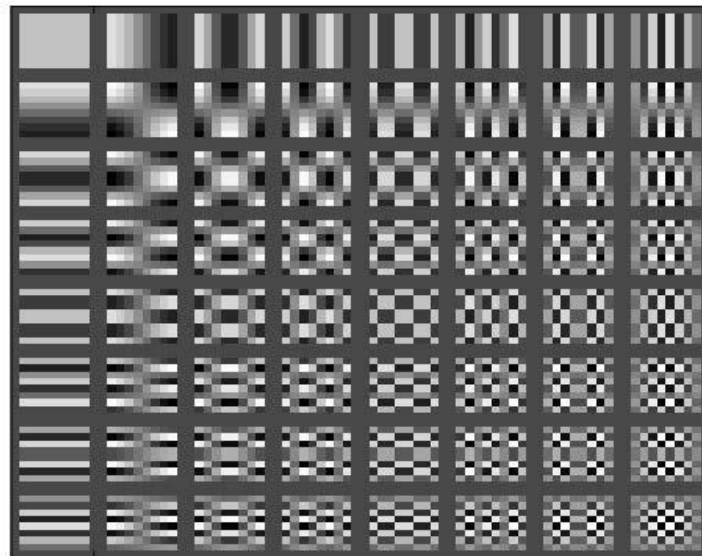


Figura 8. Colección de imágenes utilizada en el estándar JPEG.

La figura 8 muestra una familia de imágenes, con distintos modos de oscilación en cada una de las direcciones horizontal y vertical, que el estándar JPEG utiliza para representar imágenes cualesquiera, tras subdividirlas en una colección de bloques de ocho por ocho píxeles.

El desarrollo riguroso de las ideas de Fourier encontró dificultades técnicas: en la primera mitad del siglo XIX, J. Dirichlet obtuvo la primera definición clara del concepto de función, y A. Cauchy y K. Weierstrass avanzaron en la comprensión de la convergencia de series infinitas. A principios del siglo XX, el alemán David Hilbert y sus colaboradores definieron axiomáticamente el concepto abstracto de espacio de Hilbert (un espacio en el que hay una

medida o producto interior que lo hace completo: cualquier sucesión de Cauchy – en la que los términos se acercan más y más entre sí a medida que se avanza en ella- converge). Unos años más tarde, Hermann Weyl, Paul Dirac y John von Neumann establecieron este concepto como la piedra angular de la mecánica cuántica (los estados posibles de un sistema cuántico son elementos de cierta clase de espacios de Hilbert). Sin la mecánica cuántica, tecnologías como el láser (*light amplification by stimulated emission of radiation*), las pantallas planas o la energía nuclear, serían diferentes... o no existirían.



Figura 9. Armonías entre ingeniería y matemática

Del monocordio a la energía nuclear, desde la dinámica estructural a la compresión de imágenes, a la mejora de los diagnósticos médicos, al análisis de turbulencias, al reconocimiento de voz, a la biometría y a la predicción de terremotos... armonías entre ingeniería y matemática que permiten al ser humano disfrutar y avanzar. Quién podía imaginar que problemas matemáticos abstractos relacionados con motivaciones musicales condujesen a aplicaciones de tanta importancia en la ciencia y en la ingeniería. Como el timbre de nuestra voz, o el de cada instrumento musical, o la vibración de un puente, es una receta especial que combina de forma particular diversos armónicos, y confiere cierta personalidad, cada persona puede hacer valer el timbre de su pensamiento, combinando de forma especial lo aprendido y lo vivido para mejorar en lo que quiera ser: profesional de calidad en ciencia, en tecnología, en ingeniería, en matemática...

Referencias

- [1] ARBONÉS, J., MILRUD, P. *Música y Matemáticas*, RBA Ed, Barcelona, 2018.
- [2] DUNHAM, W. *EULER. El maestro de todos los matemáticos*, Editorial Nívola, Madrid, 2000.
- [3] SÁNCHEZ, C., VÁLDES, C. *Los Bernouilli. Geómetras y viajeros*, Editorial Nívola, Madrid, 2001.
- [4] STEWART, I. *Las 17 ecuaciones que cambiaron el mundo*, Editorial Planeta, Barcelona, 2013.
- [5] Web de imágenes. *Pixabay*, <http://www.pixabay.com>

Sobre los autores:

Nombre: Marco Castrillón López

Correo Electrónico: mcastri@mat.ucm.es

Institución: Universidad Complutense de Madrid, España.

Nombre: Omar Gil Álvarez

Correo Electrónico: omargil@fing.edu.uy

Institución: Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

Nombre: María Jesús Vázquez Gallo

Correo Electrónico: mariajesus.vazquez@upm.es

Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.