Iteración de cuartetos utilizando soluciones de ecuaciones diofánticas: una relación entre la poesía y la teoría de números.

Rodrigo Hitos, Javier. jrodrigo@upcomillas.es
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Pontificia Comillas de Madrid

López González, Mª Dolores. marilo.lopez@upm.es
Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil
Universidad Politécnica de Madrid

RESUMEN

Este artículo sólo pretende ser un experimento de aplicación de las matemáticas a la literatura. En él se busca un paralelismo entre la forma de algunas soluciones triviales a ecuaciones diofánticas y los cuartetos que se utilizan en diversas composiciones poéticas, y se explota este paralelismo para analizar cómo actuarían sobre estos cuartetos determinadas funciones que dan nuevas soluciones a ciertas ecuaciones diofánticas a partir de soluciones conocidas. Este análisis da lugar a transformaciones de los cuartetos que se pueden tomar como punto de partida para crear nuevas formas de hacer poemas que en cierta medida preserven la riqueza rítmica de estructuras poéticas conocidas como los sonetos.

***Palabras claves*:** Ecuaciones diofánticas, poesía y matemáticas

ABSTRACT

This paper is just an experiment of how to apply the mathematics in the literature. The paper searches for a relation between: the shape of some trivial solutions of diophantine equations and the quatrains used in some poetic compositions. This relation is applied to a study about how two defined functions transform these quatrains. Said functions carry new solutions of diophantine equations of three degree from an initial known solution.

The transformed quatrains can be considered as a start point to create new ways to write poems, preserving in some sense the rhythm of known poetic structures as the sonnets

Keywords

Diophantine equations, Poetry and mathematics.

1. INTRODUCCIÓN

La relación entre las matemáticas y la literatura se ha probado como muy estrecha especialmente en los últimos años, no sólo en el campo especializado de la literatura científica, sino también en facetas de la literatura en principio muy alejadas de lo matemático, como puede ser la novela y el ensayo [Dioxadis, Taleb].

La poesía es en este sentido la rama de la literatura que más "juego matemático" puede dar, ya que en determinadas estructuras poéticas subyacen conceptos matemáticos que en algunos casos no resultan en absoluto triviales. Se puede destacar en este aspecto el uso de la simetría en determinados poemas [Schiavetta], la aparición de las permutaciones circulares en las reglas de composición de la sextina, de entre los estilos poéticos uno de los más difíciles y quizás por ello menos utilizado [Schiavetta], ó incluso el uso de los fractales para hacer poesía [Fulton].

En otras ocasiones es en los propios contenidos de los poemas donde aparecen alusiones a temas matemáticos. Hay una interesante recopilación de este tipo de poemas en:

http://www.matematicasdivertidas.com/Poesia%20Matematica/poesiamatematica.html .

Quizás se eche en falta en esta relación algún ejemplo más de alusión de temas propios de la teoría de números en los poemas, ó de utilización de técnicas de la teoría de números en el establecimiento de nuevas métricas. Es posible que en este aspecto se haya experimentado más con la parte de la teoría de números dedicada al estudio de los números primos, pero no tanto con una rama fundamental en esta teoría como es el análisis de las ecuaciones diofánticas.

En este artículo se pretende cubrir esta falla proponiendo un método para crear nuevas métricas a partir de los cuartetos, aplicándoles a éstos funciones generadoras de soluciones de ecuaciones diofánticas.

Antes de entrar en la sección en la que se desarrolla el método, definamos los conceptos matemáticos de los que se está hablando y que se van a tratar a lo largo del artículo:

Definición 1: Una ecuación diofántica es una ecuación con coeficientes y exponentes enteros.

(Para un muy completo estudio de las ecuaciones diofánticas, ver [Dickson, Mordell])

Definición 2: Una solución a una ecuación diofántica es una elección de valores enteros para las incógnitas que satisface la ecuación.

2. DESARROLLO

Hemos definido en la introducción el concepto de ecuación diofántica. Veamos algunas de las más conocidas.

1) La ecuación de Pell: $x^2 - D\,y^2 = 1$, donde D no es un cuadrado perfecto. Siempre tiene infinitas soluciones y hay un método para hallarlas todas. Una solución para $D = 5$ sería $x = 9,\ y = 4$
2) La ecuación de Catalan: $x^n - y^m = 1$, que no tiene soluciones no nulas salvo si $n = 2$, $m = 3$. En este caso, la única solución no nula es $x = 3$, $y = 2$
3) La ecuación de Fermat: $x^n + y^n = z^n$, que no tiene soluciones no nulas salvo si $n = 2$. En este caso, la solución no nula con la x más pequeña es $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ (ver [Edwards], [Ribenboim])
4) La ecuación $x^n + y^n = z^n + u^n$, $n \geq 2$, generalización a cuatro variables de la ecuación de Fermat. Esta ecuación es muy interesante porque sus soluciones dan números que se pueden poner como suma de dos n-potencias de dos formas distintas. Para $n = 2, 3, 4$ se sabe que la ecuación tiene infinitas soluciones y hay expresiones paramétricas que incluyen infinitas soluciones a la ecuación. Para $n = 5$ no se sabe si hay alguna solución no trivial.

Observamos que la ecuación de 4) siempre tiene la solución trivial $x = a$, $y = b$, $z = a$, $u = b$, es decir, (a, b, a, b) y también la solución trivial (a, b, b, a). Esta es precisamente la estructura de los cuartetos, y lo que motiva el que elijamos esta ecuación para nuestro experimento: aunque parezca extraño, se puede decir que un cuarteto es una solución formal de la ecuación de 4), ya que al sustituirlo en la ecuación la satisface.

Nos planteamos entonces qué pasaría si le aplicamos al cuarteto una función que nos genera soluciones de la ecuación de 4) a partir de una solución particular. Esto transformaría al cuarteto en una nueva estructura, pero que al ser solución de la misma ecuación, podemos imaginar que comparta alguna de las propiedades de musicalidad del cuarteto.

El problema ahora es saber cuándo dicha función generadora existe: conocemos funciones que generan soluciones para $n = 2, 3, 4$ (para $n = 5$ el problema es más difícil al no conocerse ninguna solución no trivial de la ecuación como se comentó anteriormente). De los tres casos nos quedamos con $n = 3$ por ser más sencillo que el caso $n = 4$ (aunque más difícil que el caso $n = 2$) y porque la ecuación $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$ tiene una cierta leyenda: el matemático inglés Hardy retó al matemático indio Ramanujan a que encontrara alguna propiedad matemática para el número de licencia del taxi en que iban, 1729. Este contestó de inmediato que era el número más pequeño que se puede expresar como suma de dos cubos de dos formas distintas:

$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Esto acarrea la solución más pequeña a la ecuación anterior: $x = 1$, $y = 12$, $z = 9$, $u = 10$. En honor a la anécdota, se llama *n*-ésimo número de taxicab al número natural más pequeño que se puede expresar como suma de 2 cubos positivos de *n* formas distintas; 1729 es así el segundo número de taxicab.

Vemos el resultado que nos dice que de hecho hay infinitas funciones generadoras para $n = 3$:

Proposición: Las funciones

$(x(g, h, i, j)=-e^3 g^7-f^3 g^7-3 d e^2 g^4 h^2 i-3 d^2 e g^4 h i^2-6 d^2 e g h^4 i^2+3 e^3 g^4 i^3+d^3 g h^3 i^3+6 d e^2 g h^2 i^4+d^3 g i^6-2 e^3 g i^6-3 d f^2 g^4 h^2 j+3 e f^2 g^4 i^2 j-3 d^2 f g^4 h j^2-6 d^2 f g h^4 j^2+3 e^2 f g^4 i j^2+12 d e f g h^2 i^2 j^2-6 e^2 f g i^4 j^2+3 f^3 g^4 j^3+d^3 g h^3 j^3+2 d^3 g i^3 j^3+6 d f^2 g h^2 j^4-6 e f^2 g i^2 j^4+d^3 g j^6-2 f^3 g j^6$,

$y(g, h, i, j)=-2 d^3 g^6 h-e^3 g^6 h-f^3 g^6 h-3 d^3 g^3 h^4-d^3 h^7+3 d e^2 g^6 i+6 d^2 e g^3 h^2 i^2+3 d^2 e h^5 i^2+e^3 h i^6-3 d e^2 i^7+3 d f^2 g^6 j+6 d^2 f g^3 h^2 j^2+3 d^2 f h^5 j^2+3 e^2 f h i^4 j^2-6 d e f i^5 j^2-3 d e^2 i^4 j^3+3 e f^2 h i^2 j^4-3 d f^2 i^3 j^4-6 d e f i^2 j^5+f^3 h j^6-3 d f^2 j^7$,

$z(g, h, i, j)=-3 d^2 e g^6 h-3 d^2 e g^3 h^4+d^3 g^6 i+2 e^3 g^6 i-f^3 g^6 i-d^3 h^6 i+6 d e^2 g^3 h^2 i^2+3 d^2 e h^4 i^3-3 e^3 g^3 i^4-3 d e^2 h^2 i^5+e^3 i^7+3 e f^2 g^6 j-6 d e f h^5 j^2+3 d^2 f h^4 i j^2-6 e^2 f g^3 i^2 j^2+3 e^2 f i^5 j^2+3 e f^2 h^3 j^4-3 d f^2 h^2 i j^4+6 d e f h^2 j^5+f^3 i j^6-3 e f^2 j^7$,

$u(g, h, i, j)=-3 d^2 f g^6 h-3 d^2 f g^3 h^4+3 e^2 f g^6 i-6 d e f h^5 i^2-3 e^2 f g^3 i^4+6 d e f h^2 i^5+d^3 g^6 j-e^3 g^6 j+2 f^3 g^6 j-d^3 h^6 j+3 d^2 e h^4 i^2 j-3 d e^2 h^2 i^4 j+e^3 i^6 j+6 d f^2 g^3 h^2 j^2-6 e f^2 g^3 i^2 j^2+3 d^2 f h^4 j^3+3 e^2 f i^4 j^3-3 f^3 g^3 j^4-3 d f^2 h^2 j^5+3 e f^2 i^2 j^5+f^3 j^7$)

dan soluciones a la ecuación diofántica $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$ si (g, h, i, j) es una solución de la misma, para cualesquiera números enteros d, e, f

Demostración: Basta con sustituir las funciones en la ecuación y simplificar, teniendo en cuenta que $g^3 + h^3 = i^3 + j^3$ (el programa Mathematica lleva a cabo la simplificación. Para más información sobre este software matemático, ver [Wolfram]).

Si sustituimos entonces, buscando simplicidad, d, e, f por los primeros naturales 1, 2, 3 (no sustituimos por números iguales porque puede dar lugar a soluciones triviales), llegamos a la siguiente función que da soluciones a la ecuación a partir de una solución dada:

$\{x(g, h, i, j)=-35 g^7-12 g^4 h^2 i-6 g^4 h i^2-12 g h^4 i^2+24 g^4 i^3+g h^3 i^3+24 g h^2 i^4-15 g i^6-27 g^4 h^2 j+54 g^4 i^2 j-9 g^4 h j^2-18 g h^4 j^2+36 g^4 i j^2+72 g h^2 i^2 j^2-72 g i^4 j^2+81 g^4 j^3+g h^3 j^3+2 g i^3 j^3+54 g h^2 j^4-108 g i^2 j^4-53 g j^6$,

$y(g, h, i, j)=-37 g^6 h-3 g^3 h^4-h^7+12 g^6 i+12 g^3 h^2 i^2+6 h^5 i^2+8 h i^6-12 i^7+27 g^6 j+18 g^3 h^2 j^2+9 h^5 j^2+36 h i^4 j^2-36 i^5 j^2-12 i^4 j^3+54 h i^2 j^4-27 i^3 j^4-36 i^2 j^5+27 h j^6-27 j^7$,

$z(g, h, i, j)=-6 g^6 h-6 g^3 h^4-10 g^6 i-h^6 i+24 g^3 h^2 i^2+6 h^4 i^3-24 g^3 i^4-12 h^2 i^5+8 i^7+54 g^6 j-36 h^5 j^2+9 h^4 i j^2-72 g^3 i^2 j^2+36 i^5 j^2+54 h^3 j^4-27 h^2 i j^4+36 h^2 j^5+27 i j^6-54 j^7$,

$u(g, h, i, j)=-9 g^6 h-9 g^3 h^4+36 g^6 i-36 h^5 i^2-36 g^3 i^4+36 h^2 i^5+47 g^6 j-h^6 j+6 h^4 i^2 j-12 h^2 i^4 j+8 i^6 j+54 g^3 h^2 j^2-108 g^3 i^2 j^2+9 h^4 j^3+36 i^4 j^3-81 g^3 j^4-27 h^2 j^5+54 i^2 j^5+27 j^7\}$

Por ejemplo, para la "solución de Ramanujan" $(1, 12, 9, 10)$, la función da la solución $(-352781, 2118603, 1586871, 1761895)$

Si metemos en la función la estructura de cuarteto (a, b, a, b), nos da la solución:

{-26 a^7+48 a^6 b-24 a^5 b^2+48 a^4 b^3-48 a^3 b^4-16 a b^6,

-2 a^6 b-24 a^5 b^2+24 a^4 b^3-12 a^3 b^4+24 a^2 b^5+8 b^7,

-26 a^7+48 a^6 b-24 a^5 b^2+8 a b^6,

46 a^6 b-72 a^5 b^2+24 a^4 b^3-36 a^3 b^4+24 a^2 b^5+8 b^7}

Si metemos la estructura de cuarteto (a, b, b, a), nos da la solución:

{-7 a^7+27 a^6 b-27 a^5 b^2+9 a^4 b^3-18 a^3 b^4-2 a b^6,

2 a^6 b-18 a^5 b^2+27 a^4 b^3-3 a^3 b^4+9 a^2 b^5+b^7,

11 a^6 b-36 a^5 b^2+27 a^4 b^3-6 a^3 b^4+9 a^2 b^5+b^7,

-7 a^7+27 a^6 b-27 a^5 b^2+a b^6}

La pregunta ahora es: ¿Cómo podemos obtener de estas expresiones una estructura poética? Como lo que se pretende es hacer un experimento, podemos echarle imaginación dentro del rigor necesario en las matemáticas y la poesía. El primer problema es cómo interpretar los términos negativos. Podemos suponer que se cancelan con los positivos, por lo que el mayor en valor absoluto de los coeficientes de cada componente, que no se cancela con otro de distinto signo, es el dominante y el término correspondiente es el que hay que aplicar por tanto. Por ejemplo, en la primera componente de la primera solución el mayor coeficiente en valor absoluto es 48. Aunque se cancela con un coeficiente -48, queda otro coeficiente 48, correspondiente al término a^6 b, luego este término es el que hay que aplicar. Para ello, "barajamos" lo más posible a y b para que haya la menor repetición posible de letras: *abaaaaa*. Esto es lo que sustituye a a como primera componente del cuarteto.

De la misma forma a^2 b^5 es el término dominante en la segunda componente de la solución (coeficiente máximo 24, se cancelan -24 y 24 antes), por lo que la segunda componente del cuarteto hay que sustituirla por *ababbbb*. Como a^6 b es el término dominante en la tercera componente de la solución, la tercera componente del cuarteto se transforma como la primera. Como a^5 b^2 es el término de mayor coeficiente en la cuarta componente de la solución, la segunda b del cuarteto inicial se transforma en *abab aaa*. Entonces la nueva estructura de cuarteto sería:

$(abaaaaa, ababbbb, abaaaaa, ababaaa)$.

Si por ejemplo tomamos como referencia el primer cuarteto de la rima numero VII de la obra "Rimas & Leyendas" de Gustavo Adolfo Bécquer:

"Del salón en el ángulo oscuro,
de su dueña tal vez olvidada,
silenciosa y cubierta de polvo,
veíase el arpa".

Cuya estructura es *abab,* siguiendo esta transformación habría que sustituir el primer verso por un verso que acabara en o, un segundo que acabara en a y 5 seguidos que acabaran en o. El segundo verso del cuarteto sería ahora un verso que acabe en o, otro en a, otro en o y cuatro últimos en a, y con la nueva estructura se compondrían también el tercer y cuarto verso.

Siguiendo el mismo método, la segunda solución transforma el cuarteto (a, b, b, a) en:

$(abababb, abababa, ababaaa, aaaaaaa)$ (nótese que en la primera y la cuarta componente de la solución los coeficientes máximos se cancelan, por lo que nos quedamos con el segundo mayor coeficiente en valor absoluto)

Observación.

Cuando hay varios coeficientes en los que se alcanza el máximo en valor absoluto y alguno de ellos se cancela, tenemos cierta libertad para elegir el término representante.

Por ejemplo, en la primera componente de la primera solución podíamos haber supuesto que se cancela el primer 48 con -48 y haber elegido $a^4 b^3$ como representante, con mayor equilibrio entre el número de "*a's*" y el de "*b's*"

3. CONCLUSIONES

En este artículo se ha relacionado de forma novedosa las matemáticas con la poesía, al haberse hecho la relación a partir de las soluciones de ciertas ecuaciones diofánticas, a las que se ha encontrado un paralelismo con las estructuras de los cuartetos que forman parte de los sonetos. De esta manera se han establecido nuevas formas para los cuartetos como las mostradas en la sección anterior.

Aunque la tendencia actual de la poesía va más por el verso libre (como un excelente ejemplo de poesía moderna, ver [Neuman]), estos "cuartetos transformados" pueden ser útiles a la hora de crear nuevas composiciones poéticas con formas de rimar derivadas de las actuales.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] DICKSON, L.E.. (1992). History of the Theory of Numbers (vol.2). AMS Chelsea Publishing.

[2] DOXIADIS, A. (2005). El tio Petros y la conjetura de Goldbach. Ed. Zeta Bolsillo.

[3] EDWARDS, H.M. (1977). Fermat last theorem. Ed. Springer-Verlag.

[4] FULTON, A. (1998). Fractal amplifications: writing in three dimensions", thumbscrew nº 12.

[5] MORDELL, L.J. (1970). Diophantine equations. Ed. Academic Press, London.

[6] NEUMAN, A. (2002). El tobogán. Ed. Hiperión (XVII premio poesía Hiparión).

[7] RIBENBOIM, P. (1980). 13 lectures on Fermat's last theorem. Ed. Springer Verlag).

[8] SCHIAVETTA, B. (1990). Fórmulas para Cratilo. Ed. Visor libros (III premio poesía fundación Loewe).

[9] TALEB, N.N. (2008). El cisne negro. Ed. Paidos.

[10] WOLFRAM. (1991). *Mathematica* (A System for Doing Mathematics by Computer), ed. Addison-Wesley, California.