

La fuerza de Ampère-Grassmann-Lorentz

Daniel Powell Martínez Ricardo García-Pelayo Novo

Julio 2021

Índice

1. Introducción	2
2. Primeras leyes	3
3. Experimentos de Ampère	7
4. Experimentos de Biot y Savart	11
5. Ley de Ampère	27
6. Ley de Grassmann	31
7. Ley de Lorentz	34
8. Ley de Abraham-Lorentz	39
9. Conclusión	41

1. Introducción

James Clerk Maxwell, en 1873, llama a Ampère el “Newton de la electricidad” [1, art. 528]. Hendrick Lorentz, en 1895, 22 años más tarde, expone su ley de Lorentz [2]. Y, sin embargo, queda patente en el artículo de Einstein sobre la relatividad especial de 1906, que fue la ley de Lorentz la que se impuso en la posteridad [3].

¿Qué pasó en esos 22 años, en los que, pese a la enorme autoridad de Maxwell, se pasó de la ley de Ampère, a una ley para la fuerza electromagnética que no respetaba el principio de acción y reacción?

Para entender todo esto, hagamos un breve repaso histórico. En 1820, Oersted demostró, con su famoso experimento, la relación entre electricidad y magnetismo [4, p. 21] y, poco después (1825), Ampère fue el primero en dar con una ley cuantitativa [5]. La fuerza magnética de Ampère se posicionó rápidamente como un estándar, y logró mantener esa posición a lo largo de gran parte del siglo XIX. Maxwell, el gran referente del electromagnetismo, en su Tratado sobre Electricidad y Magnetismo (1873), la defendió fervientemente [1, art. 527].

Sin embargo, hoy en día, la forma original de la fuerza de Ampère prácticamente ha desaparecido de los libros. Aparece principalmente en libros de índole histórica, como en los textos de Tricker [4] o Whittaker [6]. ¿El motivo? La larga cadena de descubrimientos de la segunda mitad del siglo XIX, que desembocó en la ley de Lorentz.

Lorentz postuló, en 1895, su fuerza magnética de Lorentz [2], que fue la ley que se acabó aceptando como definitiva. Es una ley que no cumple la tercera ley de Newton [7]. Este hecho debió ser preocupante para los físicos del siglo XIX, puesto que las leyes de Newton son fundamentales en la física clásica. Y, sin embargo, esta ley ha predominado hasta nuestros días. En este artículo, intentaremos explicar cómo se llegó a ella históricamente, y por qué ha prevalecido.

2. Primeras leyes

2.1. Introducción teórica

Antes de hablar de la ley de Lorentz, nos interesa hablar de su predecesora: la ley de Biot-Savart, obtenida en 1820 [4, p. 23]. La ley de Biot-Savart pasó por tres etapas: En 1820 su formulación original, en 1845 la ley de Grassmann [6, p. 86-92], y en 1895 la ley de Lorentz [2].

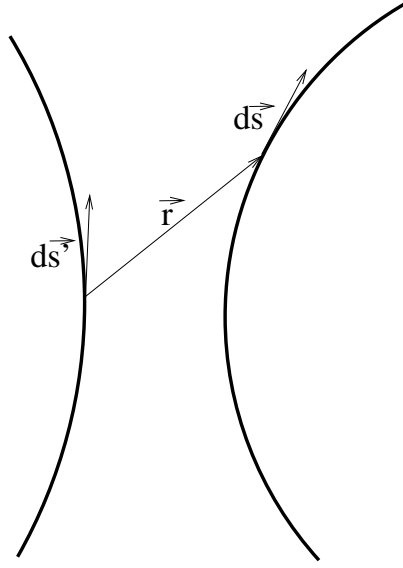
Las tres leyes están íntimamente ligadas. La ley de Biot-Savart nos proporciona el campo magnético producido por un elemento de corriente. La ley de Grassmann indica la fuerza que experimenta otro elemento de corriente en dicho campo magnético. La ley de Lorentz describe la fuerza eléctrica y magnética experimentada por una partícula cargada moviéndose en el seno de un campo magnético, y la ley de Grassmann es consecuencia directa de la misma. Dedicaremos una sección de este artículo a cada una de estas leyes. Sin embargo, lo que más nos interesa comparar son las leyes de Ampère y Grassmann, puesto que describen el mismo fenómeno: la fuerza magnética entre elementos de corriente.

Podemos escribir la ley de Ampère y la ley de Grassmann para la fuerza ejercida por un elemento de corriente $I'd\vec{s}'$, actuando sobre un elemento de corriente $I\vec{ds}$, como, respectivamente:

$$d^2\vec{F}^A = \frac{\mu_0 I' I}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} [3(\vec{ds}' \cdot \hat{r})(\vec{ds} \cdot \hat{r}) - 2(\vec{ds}' \cdot \vec{ds})] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} d^2\vec{F}^G &= I'\vec{ds}' \times d\vec{B}_{ds'}(\vec{r}_{ds}) = I'\vec{ds}' \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{ds}' \times \hat{r}}{r^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I' I}{4\pi} \frac{1}{r^2} [(\vec{ds} \cdot \hat{r})\vec{ds}' - (\vec{ds}' \cdot \vec{ds})\hat{r}], \end{aligned} \quad (2)$$

donde $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m C}^{-2}$ es la permeabilidad magnética del vacío, r es la distancia entre los dos elementos de corriente, y $\hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$ es el vector unidad que va desde $I'd\vec{s}'$ hasta $I\vec{ds}$. En la expresión de Grassmann, $d\vec{B}_{ds'}(\vec{r}_{ds})$ es el campo magnético en la posición del elemento $I\vec{ds}$ debido al elemento de corriente $I'd\vec{s}'$ [7, p. 6-7].

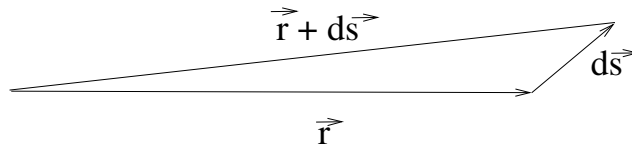


La diferencia entre ambas expresiones es la siguiente [8]:

$$d^2 \vec{F} = d^2 \vec{F}^A - d^2 \vec{F}^G = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \frac{1}{r^2} [3(d\vec{s} \cdot \hat{r})(d\vec{s}' \cdot \hat{r})\hat{r} - (d\vec{s} \cdot \hat{r})d\vec{s}' - (d\vec{s}' \cdot d\vec{s})\hat{r}],$$

que puede escribirse como:

$$d^2 \vec{F} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \left[\frac{3}{r^5} (d\vec{s} \cdot \vec{r})(d\vec{s}' \cdot \vec{r})\vec{r} - \frac{1}{r^3} (d\vec{s} \cdot \vec{r})d\vec{s}' - \frac{1}{r^3} (d\vec{s}' \cdot d\vec{s})\vec{r} \right]$$



En general $dr = |\vec{r} + d\vec{s} - d\vec{s}'| - |\vec{r}|$. Cuando sólo varía \vec{s} ,

$$dr = |\vec{r} + d\vec{s}| - |\vec{r}| = \sqrt{r^2 + ds^2 + 2\vec{r} \cdot d\vec{s}} - r = r \sqrt{1 + 2\frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{r^2} + \frac{ds^2}{r^2}} - r =$$

$$r \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{r^2} + o(ds/r) \right) - r = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{r} + o(ds) \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot d\vec{s} \approx r dr(\vec{s}) \quad (3)$$

donde se ha empleado el teorema del coseno y la notación $dr(\vec{s})$ nos recuerda que la aproximación sólo es válida cuando sólo se varía \vec{s} . (Análogamente $\vec{r} \cdot d\vec{s}' \approx -r dr(\vec{s}')$.)

Haciendo esta sustitución, queda:

$$d^2\vec{F} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \left[\frac{3}{r^4} (d\vec{s}' \cdot \vec{r}) dr \vec{r} - \frac{1}{r^3} (d\vec{s}' \cdot \vec{r}) d\vec{s}' - \frac{1}{r^3} (d\vec{s}' \cdot d\vec{s}') \vec{r} \right]. \quad (4)$$

Por otra parte, si en la siguiente expresión la diferencial más externa es con respecto a \vec{s} , ya que la diferencial con respecto a \vec{s}' ya va dentro del paréntesis, entonces

$$-\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} d \left(\frac{\vec{r}}{r^3} (d\vec{s}' \cdot \vec{r}) \right) = -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \left((d\vec{s}' \cdot \vec{r}) \frac{d\vec{r}}{r^3} - 3 \frac{\vec{r}}{r^4} (d\vec{s}' \cdot \vec{r}) dr + \frac{\vec{r}}{r^3} (d\vec{s}' \cdot d\vec{r}) \right) =$$

$$-\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \left(-3 \frac{\vec{r}}{r^4} (d\vec{s}' \cdot \vec{r}) dr + (d\vec{s}' \cdot \vec{r}) \frac{d\vec{s}}{r^3} + \frac{\vec{r}}{r^3} (d\vec{s}' \cdot d\vec{s}) \right).$$

Este resultado y la expresión (4) se diferencian en los términos centrales. Pero dichos términos dan una contribución nula. En efecto:

$$\oint_{\Gamma'} d\vec{s}' \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{s}' \cdot \vec{r}}{r^3} = \oint_{\Gamma'} d\vec{s}' \cdot 0 = 0,$$

ya que la integral interna es el trabajo realizado por una fuerza conservativa. Análogamente, $\oint_{\Gamma} d\vec{s} \oint_{\Gamma'} \frac{d\vec{s}' \cdot \vec{r}}{r^3} = 0$.

Por tanto $d^2\vec{F}$ es una diferencial exacta y para circuitos cerrados las leyes de Ampère y de Grassmann son equivalentes.

2.2. Introducción a los experimentos

Las expresiones (1) y (2) provienen de resultados experimentales, los cuales desarrollaremos en profundidad en las secciones 4 y 5. El primer tal experimento fue

llevado a cabo por Ampère, y consistía en dos canales de mercurio, conectados entre sí por un puente de alambre de cobre [1, art. 688]:

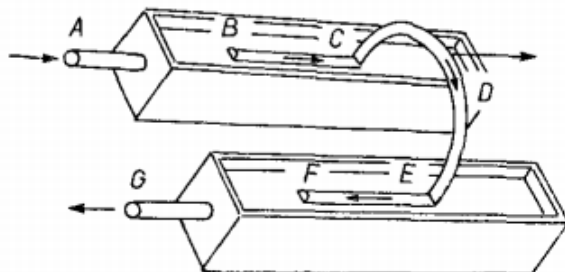


Figura 1: Experimento de Ampère

Cuando circula una corriente entre A y G, que pasa por BCDEF, vemos que el puente siempre se desplaza hacia adelante. La explicación dada por Ampère fue que las corrientes AB y BC (así como EF y FG en el otro canal) se repelían longitudinalmente, según la expresión (1). Para cuantificar esta repulsión, haría falta saber cuál es la distribución de corriente en el mercurio de los canales, lo cual no es fácil.

Sin embargo, Ampère no dejó muy claro cómo llegó a su expresión. Maxwell explica en su Tratado sobre Electricidad y Magnetismo [1, art. 529]: *"Nos inclinamos a pensar que descubrió la ley mediante algún proceso que no nos ha revelado, y que después de haber concebido una deducción perfecta, retiró todos los rastros del andamio que le había permitido alcanzarla."*¹

Por tanto, Maxwell quiso repasar las conclusiones de Ampère y compararla con alternativas como la ley de Grassmann. La explicación que dio del experimento fue que las corrientes ABC y EFG generan una fuerza hacia adelante sobre el puente CDE. Esto sería compatible tanto con la ley de Grassmann como con la ley de Ampère. Sin embargo, Maxwell se inclinaba por la ley de Ampère, puesto que cumplía la ley de acción-reacción.

¹"The method of Ampère, however, though cast into an inductive form, does not allow us to trace the formation of ideas which guided it. We can scarcely believe that Ampère really discovered the law of action by means of the experiments which he describes. We are lead to suspect, what, indeed, he tells us himself [5, p. 9], that he discovered the law by some process which he has not shown us, and that when he had afterwards built up a perfect demonstration he removed all traces of the scaffolding by which he had raised it."

3. Experimentos de Ampère

A pesar de lo que dijo Maxwell sobre la opacidad de los métodos de Ampère, sí es conocido que se basó en cuatro experimentos fundamentales. Todos estos experimentos se basan en el llamado método nulo de comparación de fuerzas. Este método se basa en ejercer dos fuerzas de la misma naturaleza sobre un cuerpo tal que, si no se aprecia ningún efecto sobre el mismo, puede decirse que estas dos fuerzas están en equilibrio [1, art. 503].

Esto es algo particularmente útil en el caso de corrientes eléctricas. Si todos los elementos de corriente están en serie, como ocurre en un hilo conductor, podemos suponer que todos ellos se activan de manera prácticamente simultánea al empezar la corriente, y que la intensidad es la misma en todos los puntos. Entonces, cada uno de ellos genera una fuerza simultánea sobre un cuerpo en suspensión y, si éste no se ve afectado, podemos afirmar que todas estas fuerzas se encuentran en equilibrio, y que el cuerpo no se ve afectado por empezar o parar la corriente.

Ampère empezó por crear una configuración que eliminara en la medida de lo posible los efectos del magnetismo terrestre. Para ello, conectó rígidamente dos planos verticales y paralelos, que podían girar sobre un eje vertical central, que contenían dos circuitos cerrados iguales. Las corrientes viajan en sentidos opuestos. Es la llamada combinación astática. Esto consigue que el dispositivo se oriente según el campo magnético terrestre y se elimine esa consideración de los experimentos [1, art. 504].

El primer experimento es sobre el efecto entre dos corrientes vecinas que circulan en sentido opuesto. Doblamos un cable sobre sí mismo, de tal forma que se divide en corrientes opuestas, y lo ponemos al lado del balancín astático. Cuando hacemos pasar una corriente por el cable y por el balancín, el equilibrio del balancín no se ve afectado, lo que muestra que dos corrientes opuestas neutralizan sus efectos magnéticos. Por tanto, en el balancín astático, podemos suponer también que los efectos magnéticos de los dos circuitos se neutralizan, al ser iguales y opuestas [1, art. 505].

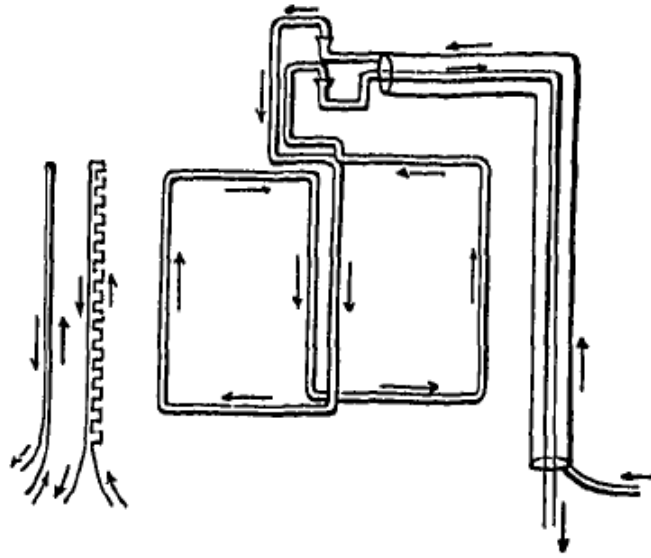


Figura 2: Primer experimento de Ampère

En el segundo experimento, hacemos lo mismo, pero una de las ramas del cable doblado lo arrugamos ligeramente de tal forma que presente un aspecto almenado. Se observa, de nuevo, que no hay ningún efecto sobre el balancín. Esto sugiere que dos elementos de corriente perpendiculares entre sí no se ejercen fuerza [1, art. 506].

El tercer experimento [1, art. 507] es parecido al que hemos analizado en la introducción. Ya no usamos el balancín astático. La configuración del experimento es la siguiente: Sobre dos canales M y M' , que contienen mercurio, se sitúa un arco conductor AA' . Los canales están unidos a dos depósitos de mercurio P y P' a través de dos conductores metálicos MN y $M'N'$. Los depósitos P y P' están sobre el eje GH y están aislados entre sí. Además, simétricamente respecto a O situamos dos conductores metálicos RI y $R'I'$. Los puntos I e I' están conectados con los vasos P y P' , respectivamente. En el punto S hay una cavidad de mercurio, que une las cavidades de mercurio en R y R' .

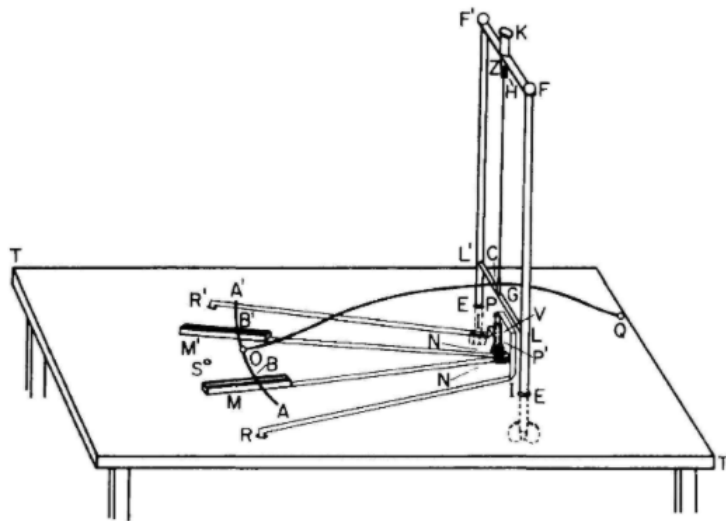


Figura 3: Tercer experimento de Ampère. En el dibujo, las letras N e I que aparecen al fondo deberían estar primadas.

El dispositivo se usa de la siguiente manera: El polo positivo de una pila se conecta a la cavidad de mercurio R, y el negativo a la cavidad S. La cavidad S está conectada a la cavidad R' mediante un conductor (que no aparece en Fig. 3). La corriente pasa por RI, al vaso P, por NM, atraviesa el arco BB', por M'N' hasta P' y por I'R'. Esto forma un circuito cerrado. Nótese que los elementos representados por letras primadas son las más alejadas del lector.

El resultado del experimento es que el arco AA' no se mueve. Su único grado de libertad posible es en el sentido de su longitud, debido a la restricción OG. Si se abre ligeramente la apertura, sigue sin moverse el arco (incluso sin conservarse la simetría), por lo que necesariamente el circuito cerrado ejerce momento nulo sobre cada elemento de corriente. Esto es así porque, si el momento es nulo para BB' y para $BB' + dl$, lo será necesariamente también para dl .

Nótese que, para que el momento de todo el circuito sobre un elemento de corriente en BB' sea nulo, es necesario que la fuerza que se ejerce sobre el mismo sea en la dirección del momento. En este caso es la vertical, que es perpendicular al elemento. Por tanto, la conclusión fundamental del experimento es: *La fuerza que ejerce un circuito cerrado sobre un elemento de corriente es perpendicular al elemento.* Este resultado es interesante, porque más tarde Ampère propuso que la fuerza entre elementos de corriente es longitudinal, y pasa a ser perpendicular cuando se integra sobre el circuito cerrado. Sin embargo, Grassmann confirmó que hay una componente no longitudinal

en la fuerza diferencial entre elementos (véanse secciones 5 y 6). Este debate ha continuado hasta nuestros días. Fue un tema que preocupó a Maxwell [1, art. 509-527], y a autores modernos como Almeida [7] y Christodoulides [8].

En el cuarto experimento, utilizamos de nuevo el balancín astático [1, art. 508]. Si llamamos al circuito del balancín B, tomamos un circuito A n veces mayor, y un circuito C n veces menor. La distancia entre C y B será n veces mayor que la distancia entre A y B. El objetivo aquí es medir los efectos de tamaño y distancia, por eso es importante que mantengamos esta proporcionalidad. El sentido e intensidad de la corriente es la misma en A y C, y el sentido en B puede ser el mismo, u opuesto. El resultado es que, sea cual sea la forma de los circuitos, el balancín astático se encuentra en equilibrio bajo los efectos combinados de A y C.

Este experimento lo vamos a usar para demostrar que la fuerza es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia.

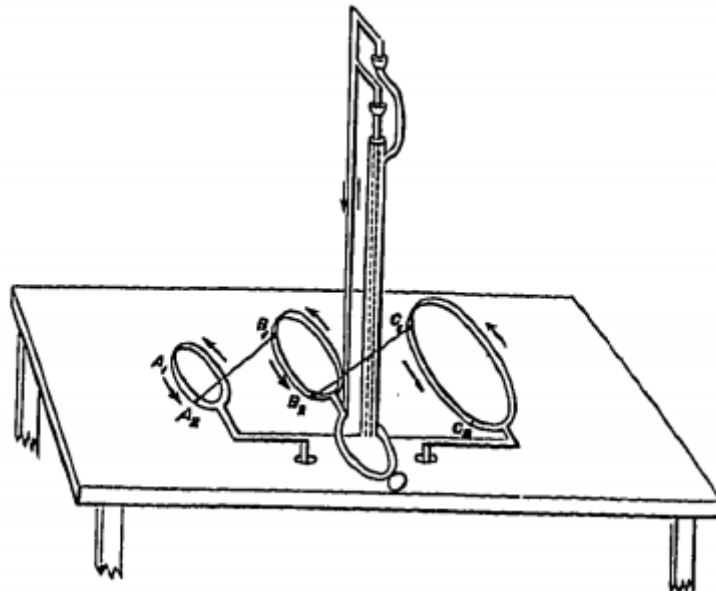


Figura 4: Cuarto experimento de Ampère. Con este montaje, demostró que la fuerza entre elementos de corriente es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Consideramos que A1, B1, C1 son tres elementos correspondientes de cada circuito. A2, B2, C2 son otros tres elementos de cada circuito. Hemos escogido estos últimos tal que la posición relativa entre A1 y A2 es la misma que entre B1 y B2, y entre C1 y C2 (semejanza geométrica). Además, observamos en la figura que la posición relativa

de B1-A2 es igual que la de C1-B2, pero la distancia de esta última es n veces mayor. La intensidad a es la misma que la intensidad c , y que la intensidad b . La fuerza entre B1 y A2 puede escribirse de la siguiente manera:

$$F = B_1 \cdot A_2 f(\overrightarrow{B_1 A_2}) ab$$

Es proporcional al tamaño y a la intensidad de corriente en cada elemento, y a la distancia entre ellos. Análogamente, la fuerza entre C1 y B2 se puede escribir:

$$F' = C_1 \cdot B_2 f(\overrightarrow{C_1 B_2}) bc$$

Nótese que $a = b = c$. Sabemos que C1 es n veces B1, y B2 es n veces A2 y, además, C1-B2 es nn veces B1-A2. Por tanto, podemos reescribir la fuerza entre C1 y B2 como:

$$F' = n^2 B_1 A_2 f(\overrightarrow{n B_1 A_2}) ab$$

Hemos observado experimentalmente que el balancín astático no se ve afectado por las corrientes A y C. Como los elementos de corriente B1-A2 y C1-B2 tienen la misma posición relativa (pero distinta distancia), podemos decir que ambas fuerzas están en equilibrio (dado que el balancín no se ve afectado). Por tanto, las fuerzas son iguales en módulo. Igualando ambas expresiones:

$$n^2 f(\overrightarrow{n B_1 A_2}) = f(\overrightarrow{B_1 A_2})$$

Si sustituimos esto en la expresión de F sin variar el tamaño de los elementos, vemos que la fuerza *escala como el inverso del cuadrado de la distancia*.

Ahora bien, Maxwell comenta sobre estos experimentos que *todos* han sido llevados a cabo con circuitos cerrados [1, art. 509]. Entonces, realmente, no podemos decir que una ley entre elementos de corriente obtenida de esta forma es *empírica*.

4. Experimentos de Biot y Savart

De forma simultánea a Ampère, los físicos Jean-Baptiste Biot y Félix Savart trabajaron para dar su propia respuesta al descubrimiento de Oersted. En 1820 publicaron los primeros resultados cuantitativos, adelantándose cinco años a Ampère.

Los experimentos que emplearon estaban directamente derivados del experimento de Oersted: El estudio de la fuerza magnética sobre la aguja de una brújula.

En el primer experimento, tal y como se observa en la Fig. 4, suspendemos verticalmente una aguja magnética A-B sujeta por el punto central [4, p. 119-139]. Es importante que esta aguja sea muy corta, de manera que podamos asegurar que todo el comportamiento magnético se concentra en los polos. Nótese que en tiempos de Biot y Savart era ya conocido que los polos magnéticos no se podían separar [9]. Este resultado se recoge en $\nabla \times \vec{B}$, una ecuación que Maxwell formalizó a partir de las afirmaciones que hizo Faraday a comienzos del siglo XIX [1, art. 374]. Sin embargo, Biot y Savart deciden modelar la aguja como un dipolo magnético, formado por dos polos separados una distancia infinitesimal.

Para eliminar la fuerza magnética terrestre, situamos un imán A'-B' a una distancia tal que la cancele. Perpendicular al plano horizontal, y en la vecindad de la aguja, hacemos pasar un alambre conductor largo.

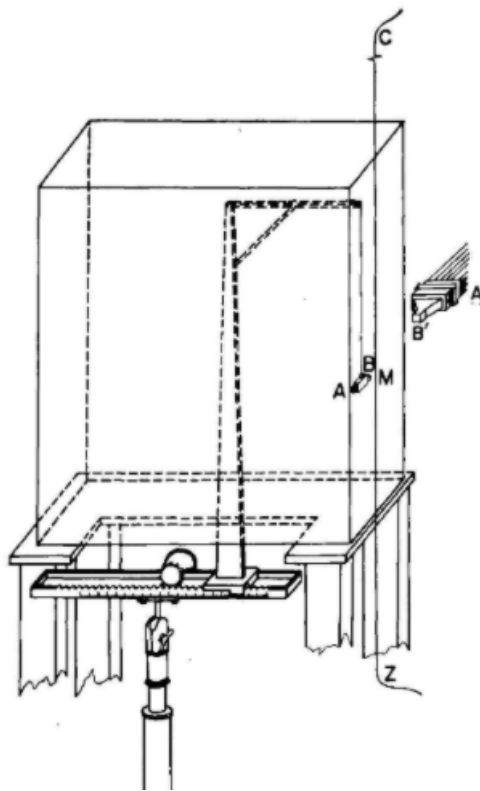


Figura 5: Primer experimento de Biot-Savart

Inicialmente, la aguja A-B está orientada según los polos magnéticos terrestres. La manera de situar el imán A'-B' para cancelar el efecto del magnetismo terrestre es el siguiente: Primero, soltamos la aguja y medimos el período de su movimiento oscilatorio. La única fuerza electrodinámica que actúa es la fuerza magnética terrestre. Situamos un imán de gran intensidad y longitud según el meridiano magnético de la aguja. Muy lejos de la misma, la resultante magnética sobre la aguja es prácticamente nula, lo que se comprueba haciendo oscilar la aguja (el período será aproximadamente el que experimenta bajo el efecto terrestre únicamente). Al acercar el imán, poco a poco y manteniendo la orientación relativa, las oscilaciones de la aguja van disminuyendo. Llega un punto en el que la aguja no oscila, aún a una distancia considerable, lo que demuestra que la resultante total magnética sobre ella es nula: Con esta posición anulamos el efecto magnético terrestre. Es importante que este imán sea grande y de gran intensidad frente a la aguja, de manera que las pequeñas oscilaciones de la aguja no afecten al equilibrio de fuerzas.

Lo que se observa en el experimento es que la aguja oscila sobre la vertical en torno al punto central, hasta situarse en una posición de equilibrio transversal al alambre. Es decir, la aguja se sitúa de forma que la distancia del alambre a cada polo es la misma. Sabemos que es un equilibrio estable, porque si desplazamos a la aguja, vuelve a oscilar hasta situarse de nuevo en la posición de equilibrio.

Por tanto, la primera conclusión: *La fuerza que produce una corriente que pasa por un alambre de gran longitud, sobre una aguja magnética, es constante y presenta simetría cilíndrica.*

Las oscilaciones bajo el efecto de un campo estacionario (y así, constante en los polos al ser oscilaciones pequeñas) se tienen que deber, por tanto, a las variaciones en el ángulo, como ocurre en el movimiento de un péndulo simple.

Antes de proceder, tenemos que hacer un apunte histórico [10]. La idea clásica de magnetismo se basaba en que todos los materiales magnéticos tenían polos, y estos polos eran una propiedad material: Materia "aureal" y materia "boreal". Los metales que no son magnéticos, pero que se pueden polarizar, se suponía que estaban "separando su magnetismo natural", lo cual quiere decir aislando su materia aureal y boreal en los polos. Se observa en el experimento que la corriente únicamente tiene efecto cuando el material de la aguja está polarizado (o cuando es directamente un imán). La aguja no-polarizada no se ve afectada por la corriente, por lo que la conclusión lógica es que la cantidad de materia aureal y boreal está homogéneamente distribuida, y la fuerza sobre cada tipo de materia es igual y contraria, de manera que la resultante de la corriente sobre la aguja es nula.

Como estamos suponiendo que el alambre es de longitud infinita, es obvio que ambos lados producirán efectos cancelatorios — puesto que siempre podrá considerarse que el plano horizontal está a la “mitad” del alambre — de manera que la resultante sobre los polos está contenida en el plano horizontal. Además, sabemos que el efecto sólo depende de la distancia a la aguja, porque si giramos el alambre sobre sí mismo, o si lo desplazamos longitudinalmente, no se produce efecto apreciable sobre la aguja. El campo magnético tiene simetría cilíndrica, tal y como era de esperar.

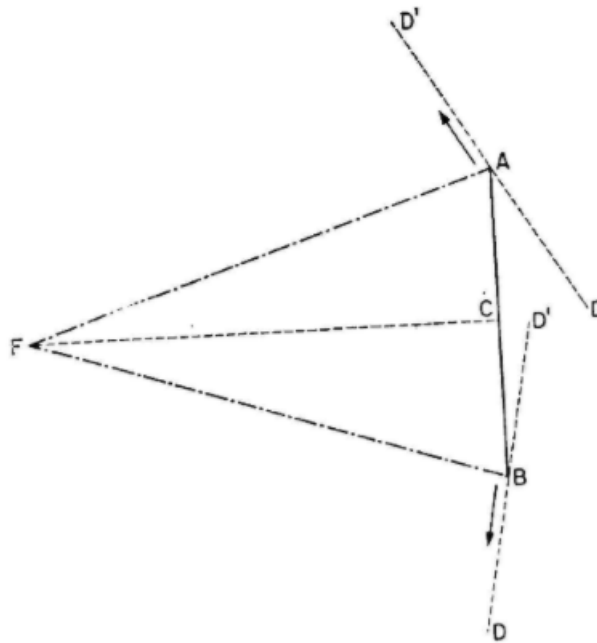


Figura 6: Primer experimento de Biot-Savart - Plano horizontal

Como hemos dicho, la fuerza sobre cada polo está contenida en el plano horizontal. En el polo B según la línea genérica DBD', y en el polo A según la línea genérica DAD'. En la posición de equilibrio, la aguja se sitúa de manera que la distancia al alambre es la misma en ambos polos (FA y FB). Como la fuerza es de la misma naturaleza, y la distancia al alambre es la misma, podemos decir que el ángulo respecto a FA y FB de la dirección de la fuerza será igual en ambos polos. Con un análisis estático, es fácil ver que la única de forma de conseguir el equilibrio de momentos, es que las líneas DBD' y DAD' sean perpendiculares, respectivamente, a las líneas FB y FA. Por tanto: *La fuerza magnética que produce sobre cada polo está contenida en el plano transversal al alambre, y es perpendicular a la distancia más corta entre polo y alambre. O sea, que las brújulas en torno a un cable se disponen circularmente.*

Este razonamiento nos da la dirección en cada polo, y sabemos que sobre las líneas DBD' y DAD' las fuerzas tendrán sentido opuesto, pero no sabemos cuál es este sentido, y tampoco sabemos su intensidad. Sin embargo, al ser fuerzas iguales y contrarias, con mismo brazo, podemos modelar la oscilación sin conocer el sentido.

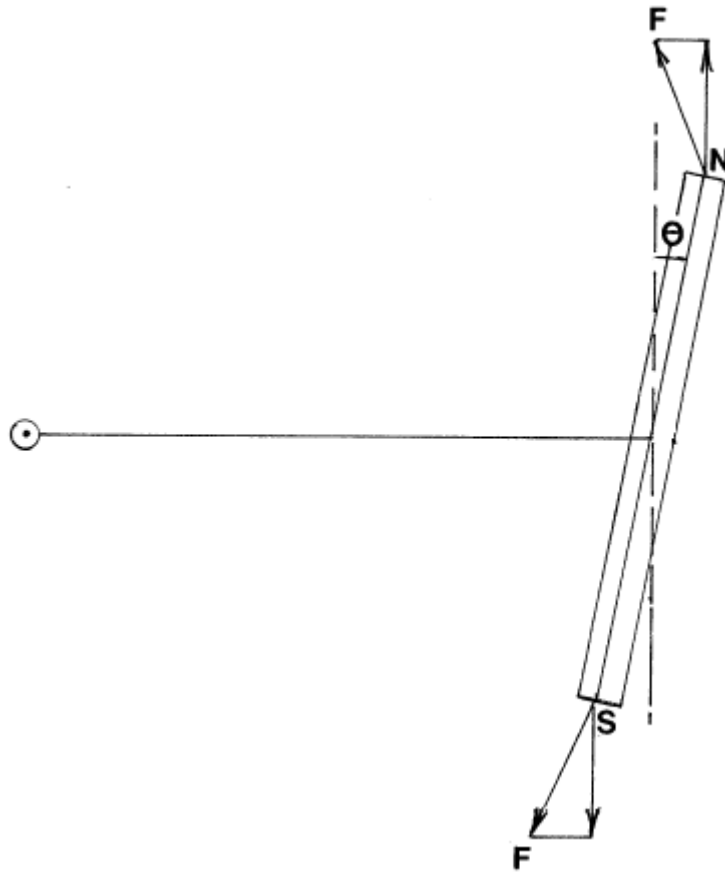


Figura 7: Primer experimento de Biot-Savart - Oscilación

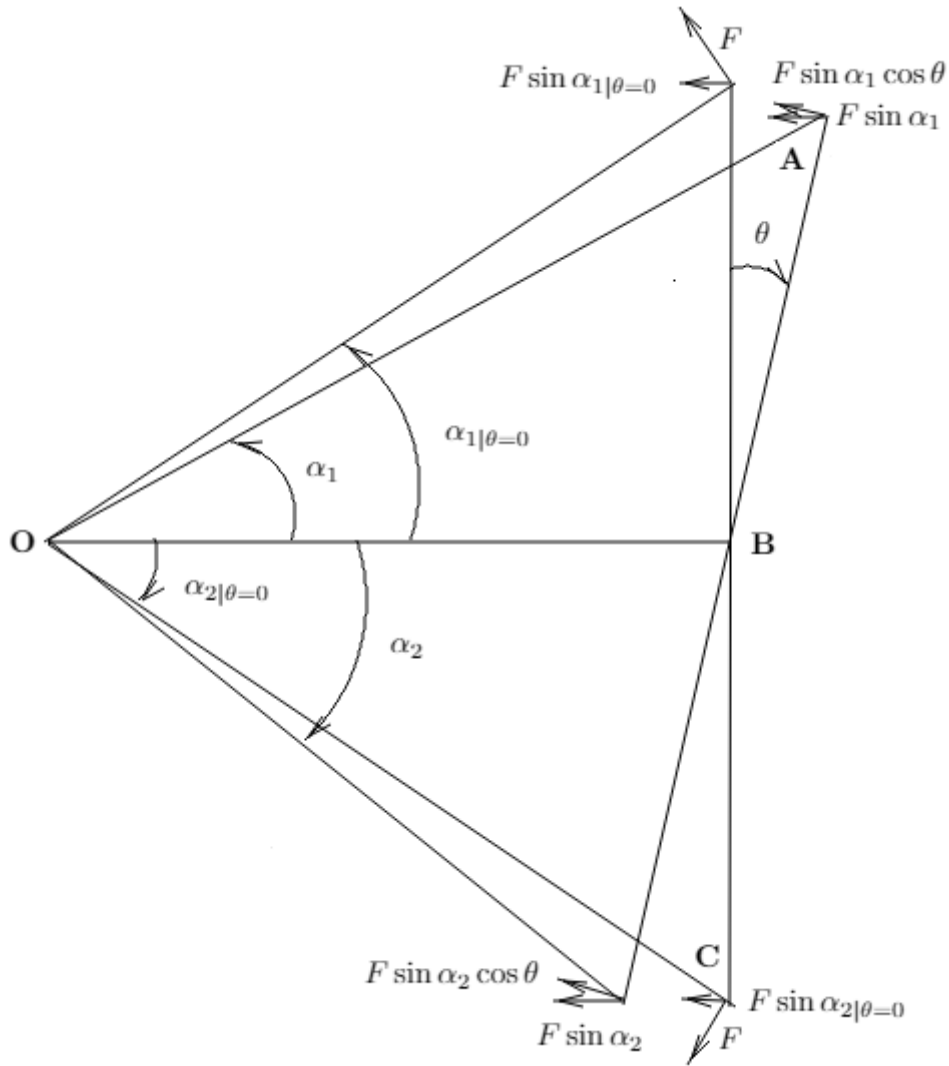


Figura 8: Primer experimento de Biot-Savart - Plano horizontal - Detalle

Para analizar la mecánica de este problema, consideramos los ángulos α_1 y α_2 que forman las líneas cable-polo con la horizontal, O-A y O-C respectivamente. Nótese que estos ángulos oscilan con la misma frecuencia y periodo que θ , por lo que podemos hacer el análisis mecánico para α_1 y α_2 y después medir experimentalmente el periodo de los movimientos observando la aguja (el ángulo θ), sin cometer error alguno.

Si fijamos un sistema cartesiano de coordenadas en dos dimensiones con origen en el cable (punto O), y llamamos A al polo superior, B al punto intermedio de la aguja y

C al polo inferior, las coordenadas de los puntos en este sistema de referencia son:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \left(d + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta, \frac{l}{2} \cos \theta\right) \\ \vec{B} &= (d, 0) \\ \vec{C} &= \left(d - \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta, -\frac{l}{2} \cos \theta\right)\end{aligned}$$

donde d es la distancia entre el cable y el centro de la aguja y l es la longitud de la aguja. Es evidente, por tanto, que:

$$\begin{aligned}\tan \alpha_1 &= \frac{\frac{l}{2} \cos \theta}{d + \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta} \\ \tan \alpha_2 &= \frac{\frac{l}{2} \cos \theta}{d - \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta}\end{aligned}$$

La aguja es muy pequeña, ya que Biot y Savart consideraron que para que pudiera comportarse como un dipolo debía ser muy pequeña. Por tanto, $l \rightarrow 0$ y $\alpha_i \rightarrow 0$. De esta forma, $\tan \alpha_i \approx \alpha_i$. Además, consideramos que el ángulo θ es pequeño:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\approx \frac{\frac{l}{2}}{d + \frac{l}{2}\theta} \\ \alpha_2 &\approx \frac{\frac{l}{2}}{d - \frac{l}{2}\theta}\end{aligned}$$

La fuerza \vec{F} en cada polo es perpendicular a la línea cable-polo. De esta forma, el momento alrededor del centro de la aguja es:

$$M = -\frac{l}{2}F(\operatorname{sen} \alpha_1 - \operatorname{sen} \alpha_2) \cos \theta$$

donde F es el módulo de la fuerza magnética y l es la longitud de la aguja. Como α_1 , α_2 y θ son pequeños:

$$M = -\frac{l}{2}F(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Podemos emplear la variable $\beta \equiv \alpha_1 - \alpha_2$. α_1 y α_2 tienen el mismo periodo y frecuencia que el movimiento de θ , por lo que β también lo tendrá. Por tanto, podemos plantear la segunda ley de Newton como:

$$-\frac{l}{2}F\beta = I \frac{d^2\beta}{dt^2}$$

donde I es el momento de inercia alrededor de la aguja alrededor de su centro.

Esta ecuación responde a un movimiento armónico simple, con la siguiente frecuencia natural:

$$\omega = \sqrt{\frac{lF}{2I}}$$

Por tanto, el período no amortiguado es:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2I}{lF}}$$

Finalmente:

$$F \propto \frac{1}{\tau^2}$$

La fuerza magnética sobre cada polo de la aguja es inversamente proporcional al cuadrado del período. Nótese que, en el experimento real, habrá amortiguamiento, pero en primera aproximación, podemos decir que la pseudofrecuencia amortiguada y, por tanto, el período amortiguado es igual al período no amortiguado.

Variando la distancia d de la aguja a la corriente (con un soporte móvil como se observa en Fig. 5), y midiendo el inverso del cuadrado del período, podemos hallar una relación experimental entre F y d .

La siguiente tabla es la traducción de la que da Biot en su libro *Précis Élémentaire De Physique Expérimentale* [10]:

Order of the observations	Distances from the connecting wire to the centre of the needle (mm)	Duration of ten oscillations (sec)
1	30	42·25
2	40	48·85
3	30	42·00
4	20	33·50
5	30	41·00
6	50	54·75
7	30	42·25
8	60	56·75
9	30	41·75
10	120	89·00
11	30	42·50
12	15	30·00
13	30	43·15

Figura 9: Tabla - Primer experimento de Biot-Savart. Los encabezamientos de las columnas son, respectivamente, 1. Ordinal de la observación. 2. Distancia del alambre al centro de la aguja en mm. 3. Duración de diez oscilaciones en s.

El resultado es que la fuerza magnética varía inversamente a la distancia al alambre:

$$F \propto \frac{1}{d}$$

Este resultado es válido para un alambre de longitud infinita. Sin embargo, al igual que Ampère, Biot y Savart estaban más interesados en la fuerza ejercida por un elemento diferencial de corriente. Es evidente que si la fuerza integral depende de la distancia, cada elemento de corriente ejercerá una fuerza diferencial que también dependerá de la distancia y de la dirección.

A finales de 1820, Biot y Savart expusieron el resultado de su primer experimento en la *Académie des Sciences* en París. En 1825, Ampère publicó sus resultados. Atraído

por este debate, fue Pierre-Simon Laplace quien intentó, a raíz del trabajo de los tres, hacer su propia aportación [11].

Laplace hizo una serie de cálculos para averiguar cuáles tenían que ser las fuerzas que ejercía cada elemento diferencial para producir un resultado integral que variase inversamente con la distancia:

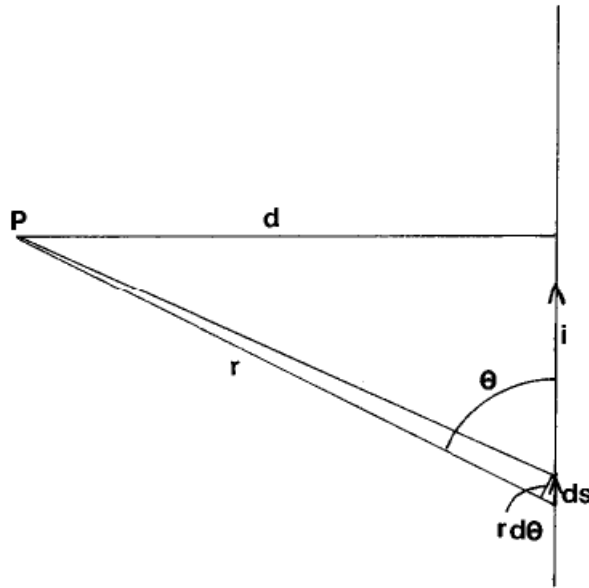


Figura 10: Diagrama para calcular la fuerza integral a partir de la fuerza ejercida por los elementos de corriente. Obsérvese que la figura está recolocada respecto de Fig. 7. P es un polo de la aguja y la línea vertical es el cable.

Este análisis matemático es un análisis *escalar*. La dirección de la fuerza producida por el elemento de corriente es desconocida. Sin embargo, la dirección de la resultante integral sobre cada polo sí es conocida, según los razonamientos de Biot y Savart.

El punto P es el polo aureal de la aguja. Hacemos el análisis para un solo polo, sabiendo que la fuerza sobre el otro polo será idéntica en módulo.

Ampère mostró, en su cuarto experimento, que la fuerza magnética es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. *Por tanto, la fuerza será proporcional al elemento de corriente $I ds$, a una función de la coordenada angular θ , e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r^2 .* Siendo k una constante desconocida:

$$dF = k \frac{I ds'}{r^2} f(\theta) \quad (5)$$

La acción del alambre infinito $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es inversamente proporcional al inverso de la distancia, como se sabe del primer experimento de Biot-Savart.

Hacemos la siguiente sustitución geométrica, que se observa fácilmente en el diagrama:

$$ds' \sin \theta = r d\theta$$

Por tanto:

$$dF = k \frac{I d\theta}{r \sin \theta} f(\theta)$$

Suponiendo simetría en el alambre, integramos en $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y doblamos el resultado:

$$F = 2kI \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\theta)}{r \sin \theta} d\theta$$

Nótese que $\sin \theta = \frac{d}{r}$, luego:

$$F = \frac{2kI}{d} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta \quad (6)$$

Aquí se observa un resultado fundamental, dado que la integral definida, al calcularse, se convierte en una constante: *Para cualquiera que sea la función $f(\theta)$, se verifica la proporcionalidad inversa con la distancia.*

La inclinación de cada elemento de corriente respecto a cada polo de la aguja no altera la proporcionalidad inversa con la distancia del conjunto. Esto refuerza, matemáticamente, el resultado de Biot y Savart, e introduce la necesidad de una serie de nuevos experimentos que permitan obtener la constante de proporcionalidad k y la función $f(\theta)$. Nótese que no es seguro que $f(\theta)$ no sea constante, es una mera hipótesis que la fuerza magnética pudiera depender de la inclinación del elemento de corriente, por lo que hay que comprobarlo experimentalmente.

Es evidente, como expone Biot en su libro [10], que la forma más fácil de comprobar esto es comparando la influencia, sobre un elemento magnético, de dos hilos conductores infinitos, dispuestos de manera que la inclinación respecto del elemento no es la misma.

De aquí nació el segundo experimento de Biot-Savart [10], que tuvo lugar varios años después del primero, después de las aportaciones de Laplace y de los experimentos de Ampère.

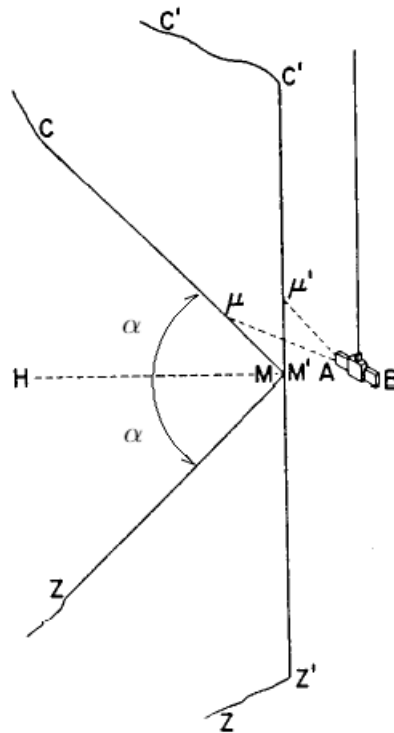


Figura 11: Segundo experimento de Biot-Savart. ZMC está en el plano vertical, no es una representación en perspectiva. Se ha conservado el dibujo histórico, salvo por la representación de α .

El objetivo de este experimento es hallar la dependencia de la fuerza resultante sobre la aguja con la inclinación del cable respecto de la horizontal (ángulo α , véase Fig. 11). La inclinación del cable respecto de la horizontal afecta, evidentemente, a la inclinación de cada elemento de corriente respecto de la aguja (ángulo θ , véase Fig.

11). Por tanto, Biot y Savart usaron este experimento para hallar una función $g(\alpha)$ que relacionara la fuerza F producida por el cable vertical con la fuerza F' producida por el cable inclinado: $F' = Fg(\alpha)$. Esta sería la expresión general para la fuerza producida por un cable infinito *con inclinación* sobre una aguja magnética (la cual es equivalente a un elemento de corriente).

A partir de esta expresión, debían buscar la expresión para la fuerza entre dos elementos de corriente (que será dependiente del ángulo θ — véase Fig. 11 — a través de una función $f(\theta)$) tal que, integrando sobre θ a lo largo del cable infinito, obtuvieran el resultado del experimento $F' = Fg(\alpha)$. Por tanto, el objetivo último de este experimento es hallar la dependencia con la inclinación de la fuerza entre elementos de corriente, representada por la función $f(\theta)$.

Suspendemos la aguja magnética por su centro, de forma que su centro esté a la altura de M , y corregimos el campo magnético terrestre de la manera que hicimos en el primer experimento. Tenemos dos hilos conductores infinitos, del mismo material y sección, contenidos en el mismo plano vertical. Este plano vertical es perpendicular al meridiano magnético local. Uno de ellos ($Z'M'C'$) está extendido verticalmente, y el otro (ZMC) está doblado en M , pero con ángulo α respecto a la horizontal tal que se conserva la simetría respecto del plano horizontal. Los puntos M y M' se separan únicamente por una lámina de papel fino, de forma que $M = M'$ en el espacio, pero las dos corrientes son independientes. Se observa en Fig. 9 que hay elementos correspondientes μ y μ' , a la misma altura sobre M , donde tanto la distancia r del elemento al polo como la inclinación θ respecto al mismo es diferente. Sin embargo, no nos importa lo que pasa a nivel de elemento diferencial, sino comparar el efecto resultante sobre la aguja del cable no doblado con el efecto del cable doblado. Los únicos dos parámetros relevantes en este estudio son d , la distancia de $M=M'$ al centro de la aguja, y α , la inclinación del cable, que es simétrica respecto al plano horizontal. Como $M=M'$, $d = d'$, y cuando decimos que no varía la distancia nos referimos a esto. Lo clave es la distancia al centro del cable, porque la componente vertical producida por el tramo superior se anula con la componente vertical producida por el tramo inferior.

Sabemos que la fuerza resultante es proporcional al inverso del cuadrado del período. Hacemos pasar corriente por un alambre, y después por el otro, y medimos las oscilaciones en cada caso. La fuerza que ejerce el hilo vertical sobre la aguja es F , y está representada por el dato experimental $\frac{1}{\tau^2}$. Por tanto, si hay una dependencia con la inclinación, será de la forma:

$$F' = Fg(\alpha)$$

De esta forma, si k_1 representa la proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia:

$$\frac{k_1}{\tau'^2} = \frac{k_1}{\tau^2}g(\alpha) \rightarrow \frac{1}{\tau'^2} = \frac{1}{\tau^2}g(\alpha)$$

Los primeros experimentos de Biot hacían parecer que al reducir α , la fuerza se reducía de manera proporcional a α . Es decir, a menor α , menor fuerza ($g(\alpha) = \alpha$). Este resultado, para el caso límite $\alpha = 0^\circ$, producía resultados congruentes con lo esperado. En el caso $\alpha = 0^\circ$ tenemos dos ramas opuestas cuyo efecto magnético se neutraliza, tal y como demostró Ampère en su tercer experimento. Por tanto, para este caso, la fuerza es nula ($g(\alpha = 0) = 0$). Sin embargo, en el caso $\alpha = 90^\circ$ la fuerza debe ser la misma que ejerce el hilo vertical, por lo que $g(\alpha = 90^\circ)$ debería valer 1, y la función $g(\alpha) = \alpha$ no cumple esa condición. Por tanto, esta función no era el resultado buscado.

Durante el experimento, para distintos valores de α , se medían valores de $g(\alpha)$ que parecían indicar que la función $g(\alpha)$ era, por ejemplo, $g(\alpha) = \tan(\frac{\alpha}{2})$ ó $g(\alpha) = \tan(\frac{\alpha}{2})$, según el valor de α medido. Obviamente, sólo puede haber una función $g(\alpha)$, que para cualquier valor de α nos da la relación entre la fuerza producida por el cable vertical y la producida por el cable inclinado: $F' = Fg(\alpha)$. Por tanto, la disparidad de resultados indicaba que había errores en los experimentos. Biot sólo se dio cuenta de esto después de varias críticas de Ampère, ya que originalmente había publicado, incorrectamente, que el valor de la función era $g(\alpha) = \tan(\alpha)$ [4].

Para aislar la función correcta, estudió con más detalle el caso $\alpha = 45^\circ$. Para este valor de α , midió que la relación entre las fuerzas era $F' = F \tan(22^\circ 30')$, que si se generaliza para todo valor de α es $F' = F \tan(\frac{\alpha}{2})$. Para confirmar este resultado, dobló el alambre de forma que pasase dos veces por el mismo lugar por el que pasaba antes. De esta manera, era de esperar que la fuerza fuera el doble: $F' = 2F \tan(22^\circ 30')$, y éste fue precisamente el resultado que obtuvo. Esto parecía confirmar que había dado con la función $g(\alpha)$ correcta. Para asegurarse de que era el resultado correcto, repitió este mismo procedimiento para todos los valores de α que indicaban una función $g(\alpha)$ diferente a la obtenida para el caso $\alpha = 45^\circ$. Cuando doblaba el cable, obtenía otro valor de $g(\alpha)$, y tomando la media entre los valores obtenidos con el cable doblado y sin doblar, siempre salía misma función $g(\alpha)$. Por tanto, declaró el valor correcto

como:

$$g(\alpha) = \tan \frac{\alpha}{2} \quad (7)$$

Nótese que esta función $g(\alpha)$ no es más que la dependencia de la fuerza total del hilo infinito sobre la aguja con el ángulo de inclinación respecto a la horizontal. No la debemos confundir con $f(\theta)$, que es la dependencia con la inclinación de la fuerza producida por un elemento de corriente. Por tanto, a partir de los cálculos de Laplace, debemos obtener la función $f(\theta)$ y, por tanto, la expresión para dF — la fuerza entre dos elementos de corriente — que, integrada a lo largo del cable infinito, produzca el resultado experimental. La diferencia entre $g(\alpha)$ y $f(\theta)$ queda muy bien reflejada en Fig. 11.

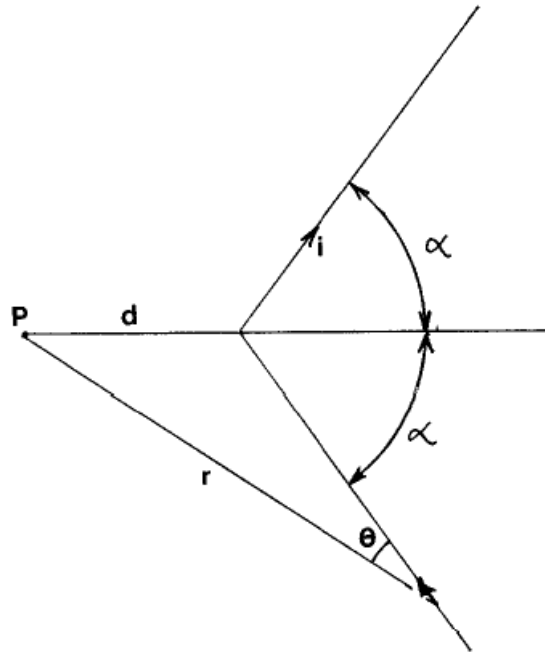


Figura 12: Hilo conductor inclinado. Nótese que la figura está representada sobre un plano vertical, donde P es uno de los polos de la aguja. El ángulo θ es la coordenada angular de cada elemento de corriente, y representa la inclinación del elemento de corriente respecto de la aguja. Además, θ es nuestra variable de integración.

Biot predijo que la función correcta es $f(\theta) = \text{sen}(\theta)$. Lo hizo tanteando y probando

distintas funciones, ya que el cálculo es muy sencillo. Partimos del diferencial de fuerza (en módulo):

$$dF = k \frac{I ds'}{r^2} \text{sen } \theta$$

Nótese que en este caso cambia el intervalo de θ a lo largo del hilo infinito. En el hilo sin doblar, el intervalo era $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ahora es $\theta \in [-\alpha, \alpha]$. Integrando y aplicando simetría respecto al plano horizontal:

$$F = 2kI \int_0^\alpha \frac{ds' \text{sen } \theta}{r^2}$$

Hacemos la misma sustitución que antes:

$$ds' \text{sen } \theta = r d\theta,$$

$$F = 2kI \int_0^\alpha \frac{ds' \text{sen } \theta}{r^2} = 2kI \int_0^\alpha \frac{d\theta}{r}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \alpha} = \frac{d}{r}$$

Sustituyendo e integrando:

$$F = \frac{2kI}{d \text{sen } \alpha} \int_0^\alpha \text{sen } \theta d\theta = \frac{2kI(1 - \cos \alpha)}{d \text{sen } \alpha}$$

Operando, obtenemos el resultado experimental:

$$F = \frac{2kI}{d} \tan \frac{\alpha}{2} \tag{8}$$

Por tanto, la expresión que hemos supuesto para dF — la fuerza que ejerce cada elemento de corriente sobre la aguja — es correcta, y constituye la *ley original de Biot-Savart*:

$$dF = k \frac{I ds'}{r^2} \sin \theta \quad (9)$$

Como $|d\vec{s}' \times \hat{r}| = ds' \sin \theta$, en notación moderna se puede escribir como:

$$d\vec{F} = kI \frac{d\vec{s}' \times \hat{r}}{r^2} \quad (10)$$

5. Ley de Ampère

Para deducir la ley de Ampère, partimos de las conclusiones a las que llegó en sus cuatro experimentos [1, art. 503-509]:

1. El efecto de una corriente es opuesto cuando se cambia el sentido de la corriente.
2. El efecto de una corriente sobre un cable paralelo al mismo es el mismo si fluye a través de un cable recto o a través de un cable sinusoidal.
3. La fuerza que ejerce un circuito cerrado sobre un elemento de corriente del mismo o de otro circuito es perpendicular al elemento de corriente.
4. El módulo de la fuerza entre dos elementos de corriente es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los mismos.
5. *Hipótesis de Ampère*: Hizo la hipótesis de que la fuerza magnética entre dos elementos de corriente actúa sobre la línea que une los elementos de corriente. No hizo experimento alguno que validase esto, pero Grassmann demostró después que es correcto circuitos cerrados en su conjunto [4, pág 201-214].

Aunque Ampère no usó el cálculo vectorial en su demostración, haremos la demostración en términos vectoriales porque los razonamientos son exactamente los mismos. La única diferencia es que la ley original de Ampère está dada en términos de senos y cosenos de las inclinaciones de los elementos entre ellos y respecto a la línea que los une. En términos vectoriales, esa misma información puede recogerse mediante el producto escalar.

Sean $d\vec{s}'$ y $d\vec{s}$ dos elementos de corriente, \vec{r} el vector que los une, e I, I' las intensidades de corriente en cada uno de ellos. Para que el punto 2 de la enumeración superior sea el caso, es necesario que haya cancelaciones entre elementos de corriente, lo que indica que el efecto de $d\vec{s}'$ sobre $d\vec{s}$ es la suma vectorial de los efectos de dx, dy, dz , donde éstas son las componentes de $d\vec{s}'$. Los efectos de cada componente en el espacio pueden combinarse linealmente. Esto puede parecer evidente para un lector moderno, pero tenía que comprobarse experimentalmente, porque hubiera sido posible que estos tres efectos no pudieran combinarse linealmente.

Al ser la fuerza colineal con \vec{r} , debe ser de la forma $k\vec{r}$, siendo k una cantidad escalar.

Ampère impone a la ecuación que verifica el punto 1 arriba citado, que sea proporcional a I, I' , que dependa de la inclinación de cada elemento respecto la línea que los une y de la inclinación entre los elementos, y cuya dirección es \vec{r} , es [5]:

$$d^2\vec{F} = II'\vec{r}[(\vec{ds} \cdot \vec{ds}')\phi(r) + (\vec{ds} \cdot \vec{r})(\vec{ds}' \cdot \vec{r})\psi(r)], \quad (11)$$

donde $\phi(r)$ y $\psi(r)$ son funciones de r , la distancia entre elementos de corriente.

Puede comprobarse que esta expresión verifica todas las premisas. Es evidente que si se cambia el signo de ds' , obtenemos la misma fuerza en sentido contrario, la fuerza es la suma de los efectos de las componentes de ds' , y es de la forma $k\vec{r}$. Nótese que un término es proporcional a la inclinación relativa entre los elementos, y el otro es proporcional a la inclinación de cada elemento respecto a la línea que los une. Aquí se aprecia la influencia de Biot y Savart, que insistieron en la importancia de la inclinación en la fuerza magnética.

Del punto 4, es evidente que si ds, ds' y r se multiplican por el mismo factor, la fuerza F se conserva. El cuarto experimento de Ampère demuestra esta ley de proporcionalidad. Las únicas funciones $\phi(r)$ y $\psi(r)$ que cumplen esta condición son:

$$\phi(r) = \frac{A}{r^3}, \quad \psi(r) = \frac{B}{r^5},$$

donde A y B son constantes.

Para un factor cualquiera k , se observa fácilmente que:

$$d^2 \vec{F} = II' k \vec{r} \left[(k \vec{ds} \cdot \vec{ds}') \frac{A}{(kr)^3} + (k \vec{ds} \cdot \vec{r})(k \vec{ds}' \cdot k \vec{r}) \frac{B}{(kr)^5} \right] =$$

$$II' \vec{r} \left[(\vec{ds} \cdot \vec{ds}') \frac{A}{r^3} + (\vec{ds} \cdot \vec{r})(\vec{ds}' \cdot \vec{r}) \frac{B}{r^5} \right]$$

Del punto 3, es evidente que cuando integramos esta fuerza alrededor del circuito cerrado s' , la resultante debe ser perpendicular a \vec{ds}' . De esta forma, la proyección de $d\vec{F}$ sobre \vec{ds}' debe anularse al hacer la integral.

La proyección es la siguiente (por simplicidad eliminamos la proporcionalidad con I, I'):

$$\frac{A}{r^3} (\vec{ds} \cdot \vec{ds}') (\vec{r} \cdot \vec{ds}) + \frac{B}{r^5} (\vec{ds}' \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{ds})^2$$

Esto debe ser una diferencial exacta. Puesto que integramos en el circuito s' , fijamos ds tal que $dr = -ds'$. Por tanto, podemos escribir:

$$-\frac{A}{2r^3} d[(\vec{r} \cdot \vec{ds})^2] + \frac{B}{r^5} (\vec{ds}' \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{ds})^2$$

Para que esto sea una diferencial exacta debe cumplirse:

$$d\left(\frac{A}{2r^3}\right) = -\frac{B}{r^5} (\vec{ds}' \cdot \vec{r}),$$

es decir:

$$-\frac{3A}{2r^4} dr = \frac{B}{r^4} dr$$

Por tanto:

$$B = -\frac{3}{2}A$$

Finalmente, sustituyendo obtenemos la *Ley de Ampère*:

$$d^2\vec{F} = \text{Cte.} \times II' \left[\frac{3}{r^5} (\vec{ds} \cdot \vec{r})(\vec{ds}' \cdot \vec{r}) - \frac{2}{r^3} (\vec{ds} \cdot \vec{ds}') \right] \vec{r},$$

que, tomando en cuenta que $\vec{r} = r\hat{r}$, se puede escribir finalmente como:

$$d^2\vec{F} = \text{Cte.} \times II' \frac{\hat{r}}{r^2} \left[3(d\vec{s} \cdot \hat{r})(d\vec{s}' \cdot \hat{r}) - 2(d\vec{s} \cdot d\vec{s}') \right] \quad (12)$$

Vemos que, efectivamente, esto sirve como una segunda demostración de que la fuerza entre elementos de corriente escala como el inverso del cuadrado de la distancia.

Cabe destacar, como se ha visto hasta ahora, que la preocupación principal de estos años era obtener datos empíricos sobre el fenómeno magnético. Las especulaciones filosóficas sobre la naturaleza de la fuerza fueron poco predominantes. Ampère introdujo dos ideas que, aunque falsas, contextualizan el debate de la época:

1. La fuerza entre corrientes eléctricas se deben a la reacción del “fluido elástico” que se extiende por el espacio (una idea que provenía de la teoría del éter, cuyos primeros modelos relacionados con el electromagnetismo fueron propuestos por Fresnel y por Stokes). Las vibraciones de este fluido producen el fenómeno de la luz, y estas vibraciones son excitadas por corrientes eléctricas. Esta idea fue fundamental para Maxwell, quien la emplea en su *Treatise* para describir la radiación electromagnética como una perturbación de un campo eléctrico que se extiende en el espacio en forma de onda.
2. En cuanto a la corriente en sí, sugiere que entre las moléculas del material metálico del cable hay un “fluido” o “éter” que contiene “dos electricidades”. La existencia de estas dos electricidades explicaba la naturaleza dipolar de los imanes. En cada espacio intermolecular hay un cantidad desigual de un tipo vs el otro, y hay una asociación/desasociación entre ellas en cadena, que forma la corriente eléctrica. Es importante darse cuenta de que Ampère no conocía el concepto de electrón, y se pensaba en términos de “carga”, entendiéndose ésta como la habilidad de atraer o repeler otros elementos con carga.

6. Ley de Grassmann

En 1845, Hermann Grassmann revisó las premisas de la ley de Ampère e introdujo una serie de modificaciones importantes. Basándose tanto en la ley de Ampère como en la de Biot y Savart, formuló una nueva ley para la fuerza electromagnética: La ley de Grassmann.

La idea de Grassmann es que las hipótesis en las que se basaban las leyes de Ampère y Biot-Savart no eran totalmente representativas de la realidad:

1. Todos los experimentos se habían hecho con circuitos cerrados, y las leyes para explicar la fuerza entre dos elementos de corriente no se pueden basar en resultados obtenidos de experimentos con circuitos cerrados. El motivo es que se podrían estar ignorando efectos integrales. *Naturalmente, antes de empezar, Grassmann predijo que su ley equivaldría a la de Ampère para circuitos cerrados. La ley de Ampère había sido derivada de forma rigurosa, pero a partir de experimentos con circuitos cerrados. Se podía afirmar que **produce un resultado correcto únicamente cuando se integra alrededor de un circuito cerrado**. Pero no se podía afirmar con total certeza que no hubiera componentes de la fuerza magnética general entre dos elementos de corriente que se anularan al integrar sobre circuitos cerrados (en términos modernos, una componente que fuera una diferencial exacta).*
2. La hipótesis de Ampère de que la fuerza entre dos elementos de corriente actúa sobre la línea que los une no había sido comprobada.

En términos escalares, la ley de Ampère, tal y como se dedujo originalmente, tiene la siguiente forma:

$$d^2F = k \frac{ab}{r^2} (3 \cos \epsilon - 2 \cos \alpha \cos \beta),$$

siendo $a = Ids$, $b = I'ds'$, k una constante, α y β los ángulos de cada elemento de corriente respecto a la línea que los une, y ϵ el ángulo entre los dos elementos.

Si consideramos el caso más simple, $\epsilon = 0$, $\alpha = \beta$, la expresión de Ampère se convierte en:

$$d^2F = k \frac{ab}{r^2} (3 - 2 \cos \alpha^2)$$

Suponemos $\cos \alpha^2 = \frac{2}{3}$ o, lo que es lo mismo, $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$. En este caso la fuerza se anula. Esto quiere decir que, si un elemento de corriente ds' descansara sobre el vértice de un cono, perpendicular al eje del mismo, y otro elemento ds estuviera sobre la superficie de ese cono formando $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$ con el primero, no habría interacción. Por ángulos menores habría repulsión, y para ángulos mayores atracción.

Este es un resultado que a Grassmann le pareció muy sospechoso e improbable, y parecía indicar que la analogía que Ampère había hecho con otras fuerzas tenía que ser incorrecta. Una solución era que la recta de acción de la fuerza no fuese la recta que unía los elementos de corriente. La hipótesis de fuerza longitudinal se había hecho por analogía con las fuerzas eléctrica y gravitacional, pero estas son fuerzas entre elementos puntuales, no entre elementos claramente orientados en el espacio por lo que, para Grassmann, no tenía sentido hacer esta analogía. ***Sin embargo, Grassmann reconoció que la ley de Ampère producía un resultado correcto cuando se integraba alrededor de un circuito cerrado.***

Grassmann dedujo la ley de Ampère a partir de las mismas hipótesis, eliminando la hipótesis de que la fuerza actuaba sobre la línea que une los elementos de corriente. Partió de la ley tal y como la derivó Ampère, y empezó a investigar posibles términos añadidos que se anularían al integrar sobre un circuito cerrado. La ley de Ampère es la siguiente:

$$d^2\vec{F} = kII' \frac{\hat{r}}{r^2} \left[3(d\vec{s} \cdot \hat{r})(d\vec{s}' \cdot \hat{r}) - 2(d\vec{s} \cdot d\vec{s}') \right]$$

Podemos añadir términos de la forma:

$$\phi(r)(d\vec{s} \cdot \vec{r}) \cdot d\vec{s}',$$

que es una diferencial exacta, que se anula al integrar sobre el circuito s , ya que (considerando que $ds' = -dr$, puesto que s es constante):

$$(d\vec{s} \cdot \vec{r}) = -\vec{r}d\vec{r}$$

El otro término que podemos incluir que es una diferencial exacta es uno de la forma:

$$d[\vec{r} \cdot (d\vec{s}' \cdot \vec{r})\chi(r)],$$

donde $\chi(r)$ es una función cualquiera de r , y d representa la diferenciación a lo largo del arco s . Esta diferencial puede escribirse como:

$$-\chi(r)(d\vec{s}' \cdot \vec{r})d\vec{s} - \chi(r)(d\vec{s} \cdot d\vec{s}')\vec{r} - \frac{\chi'(r)}{r}(d\vec{s} \cdot \vec{r})(d\vec{s}' \cdot \vec{r})\vec{r}$$

Para que se cumpla la ley de acción y reacción, hay que combinar estos dos términos de forma que obtengamos una expresión simétrica en $d\vec{s}$ y $d\vec{s}'$. De esta manera, la ley de Grassmann queda como:

$$d^2\vec{F} = k \left[II' \frac{\hat{r}}{r^2} \left[3(d\vec{s} \cdot \hat{r})(d\vec{s}' \cdot \hat{r}) - 2(d\vec{s} \cdot d\vec{s}') \right] + \chi(r)(d\vec{s}' \cdot \vec{r})d\vec{s} + \chi(r)(d\vec{s} \cdot \vec{r})d\vec{s}' \right. \\ \left. + \chi(r)(d\vec{s} \cdot d\vec{s}')\vec{r} + \frac{\chi'(r)}{r}(d\vec{s} \cdot \vec{r})(d\vec{s}' \cdot \vec{r})\vec{r} \right]$$

La fuerza entre elementos de corriente debe ser dependiente de las intensidades de corriente. No tiene por qué ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, porque Ampère demostró esto para elementos pertenecientes a circuitos cerrados. Sin embargo, cualquier función $\chi(r)$ verifica la condición de diferencial exacta, y su valor correcto debería ser obtenido experimentalmente. A pesar de esto, Grassmann escogió la siguiente función:

$$\chi(r) = \frac{II'}{r^3},$$

que verificaba la proporcionalidad con las intensidades de corriente y con el inverso del cuadrado de la distancia.

Sustituyendo, se obtiene la *ley original de Grassmann*:

$$d^2F = k \frac{II'}{r^3} \left[(d\vec{s} \cdot \vec{r})d\vec{s}' + (d\vec{s}' \cdot \vec{r})d\vec{s} - (d\vec{s} \cdot d\vec{s}')\vec{r} \right] \quad (13)$$

Esta ley cumple la ley de acción y reacción. Una serie de experimentos posteriores [4, p. 201] demostraron que el término $(d\vec{s}' \cdot \vec{r})d\vec{s}'$ no existe, lo que hace que la expresión sea asimétrica en $d\vec{s}$ y $d\vec{s}'$. Por tanto, la *ley de Grassmann final*:

$$d^2 F = k \frac{II'}{r^3} \left[(d\vec{s}' \cdot \vec{r})d\vec{s} - (d\vec{s} \cdot d\vec{s}')\vec{r} \right] \quad (14)$$

no cumple la ley de acción y reacción.

7. Ley de Lorentz

En el *Treatise*, Maxwell reformula las leyes de Ampère y Grassmann, obteniendo lo que hoy conocemos como la Ley de Lorentz. Esta es la fuerza sobre una carga eléctrica en movimiento a través de un campo magnético.

En el artículo 603 de su *Treatise*, Maxwell formula la densidad de fuerza \vec{f}_c sobre un conductor que transporta una densidad de corriente \vec{J} a través de un campo magnético \vec{B} como:

$$\vec{f}_c = \vec{J} \times \vec{B} \quad (15)$$

Su deducción se basa en la inducción mútua en corrientes eléctricas. Sin embargo, Maxwell nunca expresa \vec{J} como $\rho\vec{v}$, donde ρ es la densidad de carga eléctrica y \vec{v} es la velocidad de la misma. Por tanto, a quien se le atribuye normalmente la formulación de $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, la fuerza sobre una carga q moviéndose en el seno de un campo magnético \vec{B} , es a Olivier Heaviside. La fuerza general, cuando el campo es eléctrico además de magnético, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, se le atribuye a Hendrick Lorentz.

Sin embargo, fue Maxwell quien dedujo por primera vez la expresión para la fuerza sobre una carga de intensidad unidad moviéndose en el seno de un campo electromagnético. Esta demostración fue reformulada por Heaviside, la cual damos a continuación. En notación moderna:

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (16)$$

Los experimentos de Faraday le llevaron a pronunciar lo que llamó *la verdadera ley de inducción electromagnética*: **La fuerza electromotriz total actuando alrededor de un circuito cerrado en un momento dado se puede medir por el ritmo al que decrece el número de líneas de fuerza magnética que pasan a su través.** Esto es esencialmente la ley de inducción electromagnética de Faraday. Matemáticamente, puede escribirse como:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) \quad (17)$$

donde $\mathcal{E}(t)$ es la integral de línea de la fuerza electromotriz dinámica por unidad de carga sobre un circuito que puede ser móvil, y $p(t)$ una función que mide el número de líneas de campo que atraviesan el circuito. Nótese que Maxwell define la fuerza electromotriz sobre un arco como: *el trabajo ejercido sobre una carga de intensidad unidad para desplazarlo entre los extremos del arco.* Para un circuito cerrado sin partes móviles, por tanto:

$$\mathcal{E}(t) = \oint \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}$$

El término $\Phi(t)$ es el flujo del campo magnético a través de una superficie delimitada por el circuito cerrado:

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} dS$$

donde \vec{B} es el campo magnético que atraviesa el circuito, \hat{n} es el versor normal (según la regla de la mano derecha en el sentido de la corriente) a la superficie $S(t)$ delimitada por el circuito cerrado.

Para un circuito con partes móviles, la integral de línea será dependiente del tiempo, porque sobre cada $d\vec{l}$ no actúa sólo \vec{E} , sino también una fuerza magnética. Al conjunto de estas dos fuerzas la llamamos \vec{F} . Recordamos al lector que ésta es la fuerza de Lorentz sobre una carga de intensidad unidad, el caso que aquí estamos analizando. La integral de línea puede escribirse como:

$$\mathcal{E}(t) = \oint_{C(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}$$

De esta manera, Maxwell obtuvo la forma más general de la ley de Faraday:

$$\oint_{C(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} dS \quad (18)$$

Hoy en día sabemos que la fuerza por unidad de carga viene dada por la fuerza de Lorentz: $\vec{E}_v = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$. Esto ilustra la diferencia entre el campo eléctrico estático \vec{E} , y el no-estático, donde interviene el término dependiente de la velocidad $\vec{v} \times \vec{B}$. Maxwell usó la forma general de la ley de Faraday para demostrar este hecho.

Para aplicar el teorema de Stokes, podemos definir un potencial vectorial tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. De esta forma:

$$\int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} dS = \oint_{C(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}$$

$\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}$ puede escribirse en coordenadas cartesianas como:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = A_x \frac{\partial x}{\partial s} ds + A_y \frac{\partial y}{\partial s} ds + A_z \frac{\partial z}{\partial s} ds,$$

donde ds es el diferencial de longitud del arco, en una posición del circuito y momento dados.

Si hacemos el cambio de variable $s' = \frac{s}{s_{max}}$, al hacer la integral de línea los límites de la integral son $s' = 0$ y $s' = 1$, los cuales no varían con el tiempo. Para simplificar la notación, a esta variable la llamaremos s .

Derivando la integral de línea, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[A_x[\vec{r}(t, s), t] \frac{\partial x}{\partial s} + \dots \right] ds \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial A_x(\vec{r}, t)}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial A_y(\vec{r}, t)}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial A_z(\vec{r}, t)}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial t} \\
& + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial t} \\
& + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial z}{\partial t} \\
& + \left(A_x(\vec{r}, t) \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + A_y(\vec{r}, t) \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} + A_z(\vec{r}, t) \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \right) ds
\end{aligned}$$

donde $\frac{ds}{dt} = 0$, ya que s varía entre 0 y 1 independientemente del tiempo.

Nótese que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, por lo que se cumple $\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z$, y $\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - B_y$. Usando estas igualdades, podemos hacer la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned}
& \oint_0^1 \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{t} ds \\
& = \oint_0^1 \left(B_z \frac{\partial y}{\partial s} - B_y \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial t} ds \\
& = \oint_0^1 \left(B_z \frac{\partial y}{\partial s} - B_y \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial A_x}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial t} ds
\end{aligned}$$

Hemos tomado en cuenta que el siguiente término es una diferencial exacta:

$$\frac{\partial A_x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + A_x \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(A_x \frac{\partial x}{\partial t} \right)$$

Usando esta sustitución, la expresión original queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} &= \oint_0^1 \left[\left(\frac{\partial A_x(\vec{r}, t)}{\partial t} + B_y \frac{\partial z}{\partial t} - B_z \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial s} \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y(\vec{r}, t)}{\partial t} + B_z \frac{\partial x}{\partial t} - B_x \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial s} \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial A_z(\vec{r}, t)}{\partial t} + B_x \frac{\partial y}{\partial t} - B_y \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial s} \right] ds \\ &= \oint_{C(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

donde $\vec{v} = \frac{\partial x}{\partial t} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial t} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial t} \hat{z}$. De esta manera, Maxwell ha demostrado que:

$$\oint_{C(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \oint_{C(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \cdot d\vec{l} \quad (19)$$

Si aplicamos el teorema de Stokes a la ley de Faraday en forma integral (17), la podemos escribir en forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (20)$$

Según Maxwell, esta ecuación implica que:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla \psi_e(\vec{r}, t) \quad (21)$$

donde $\nabla\psi_e(\vec{r}, t)$ es lo que llama el *potencial electrostático*. Nótese que el rotacional de un gradiente es siempre cero. Además, al ser el potencial eléctrico un gradiente, su integral de línea alrededor de una curva cerrada también es cero.

Por tanto, la expresión (18) demuestra que:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla\psi_e(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (22)$$

Sustituyendo la ecuación (20) en la expresión anterior:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (23)$$

que es la ley de Lorentz para una carga de intensidad unidad.

Finalmente, generalizando al caso de una carga cualquiera q , obtenemos:

$$\vec{F} = q[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \quad (24)$$

que es la *ley de Lorentz*.

8. Ley de Abraham-Lorentz

El gran problema que presentaba la ley de Lorentz, así como la de Biot-Savart y la de Grassmann, es que no cumplía el principio de acción-reacción. Es decir, $\vec{F}_{12} \neq \vec{F}_{21}$.

Fue Max Abraham, estudiante de Planck, el que resolvió esta paradoja. Una partícula cargada, cuando es acelerada por un campo eléctrico o magnético, emite una radiación electromagnética. Esta radiación ejerce una fuerza de reacción sobre la partícula, que es la componente que faltaba para que la fuerza de Lorentz cumpliera la ley de conservación del momento.

El valor de esta fuerza depende de la radiación emitida y, por tanto, de la fuerza ejercida sobre la partícula. Podemos calcularla, en función de la aceleración de la partícula, para el caso simple de un movimiento periódico.

La intensidad de la onda electromagnética viene representada por el vector de Poynting, que es el producto vectorial del campo eléctrico por el magnético, y cuyo módulo es la intensidad de la onda:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (25)$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{H} es la intensidad del campo magnético inducido por el movimiento de la partícula, μ es la permeabilidad del medio y \vec{B} es el campo de inducción magnética.

El vector de Poynting apunta en la dirección y sentido de la propagación, y su módulo representa la intensidad instantánea de energía electromagnética que fluye a través de una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación de la onda electromagnética.

Para calcular la reacción sobre una partícula cargada en movimiento, partimos de la fórmula de Larmor para la potencia radiada por una partícula cargada:

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2 \quad (26)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío, q es el valor de la carga, c es la velocidad de la luz y a es la aceleración de la partícula. Al ser periódico el movimiento, el trabajo medio ejercido sobre la partícula en un período de τ_1 a τ_2 es:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} -P dt = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2 dt \\ &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt \end{aligned}$$

Esta integral puede ser integrada por partes. Si suponemos que hay movimiento periódico, uno de los términos desaparece:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = - \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} \cdot \vec{v} dt$$

$$= 0 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}} \cdot \vec{v} dt$$

Finalmente:

$$\vec{F}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}} \quad (27)$$

Más adelante, la expresión general, sin condición de movimiento periódico, fue encontrada usando una formulación basada en la teoría de campo efectivo.

9. Conclusión

El experimento de Oersted desembocó en la ley de Ampère y la ley de Biot-Savart, dos leyes incompatibles. La ley de Ampère es totalmente correcta para elementos pertenecientes a circuitos cerrados. La ley de Biot-Savart fue reformulada por Grassmann para elementos no pertenecientes a circuitos cerrados, y luego por Maxwell y posteriormente Lorentz para el caso general de campo magnético generado por una partícula en movimiento. El aparente no-cumplimiento de la ley de acción-reacción de las leyes de Biot-Savart-Grassmann-Lorentz fue resuelto a principios del siglo XX, cuando se descubrió que la onda electromagnética emitida por una partícula cargada en movimiento ejerce una fuerza de reacción sobre la misma.

Referencias

- [1] James Clerk Maxwell. *Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. 2. Clarendon Press, 1873.
- [2] Hendrick Lorentz. “La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. (French) [Maxwell’s electromagnetic theory and its application to moving bodies]”. En: *Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles* 25 (1892), págs. 363-552.
- [3] Albert Einstein. “Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]”. En: *Annalen der Physik* 322.10 (1905), págs. 891-921.

- [4] R. A. R. Tricker. *Early Electrodynamics: The First Law of Circulation*. Pergamon Press, 1965.
- [5] André-Marie Ampère. *Théorie des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience*. Méquignon-Marvis, 1826.
- [6] E. T. Whittaker. *A history of the theories of aether and electricity*. Dublin University Press, 1910.
- [7] Marcelo de Almeida Bueno y Andre Koch Torres Asis. *Inductance and force calculations in electrical circuits*. Nova Science Publishers, 2001. ISBN: 9781560729174.
- [8] C. Christodoulides. "Comparison of the Ampère and Biot-Savart magnetostatic force laws in their line-current-element forms." En: *American Journal of Physics* 56.4 (1988), págs. 357-362.
- [9] Michael Faraday. *Experimental Researches in Electricity*. Vol. 1. Printers y Publishers to the University of London, 1839.
- [10] Jean Baptiste Biot. *Précis élémentaire de physique expérimentale*. Imprimerie Impériale, 1861.
- [11] Herman Erlichson. "The experiments of Biot and Savart concerning the force exerted by a current on a magnetic needle." En: *American Journal of Physics* 66.5 (1998).