

Cálculo estructural de vigas por el Método de las Diferencias Finitas Generalizadas

Rubén Galindo Aires, ragalindoa@hotmail.com

Alejandro Clemente García

Departamento de Ingeniería del Terreno, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

This paper applies the generalized finite difference method to solve a classic problem of engineering, outlining its scope, its comparison with the finite element method and is exposed the improvement line of classical finite difference methods by means of use the generalized finite difference method.

To this end, is studied the structural problem of the Bernoulli beam in several cases with different load and boundary conditions. We compare the result with that obtained with the finite element method calculated by SAP 2000 program and we obtained conclusions regarding the use of the numerical method for solving engineering problems in situations where the classic schemes of finite differences are limited.

Introducción

La resolución de problemas estructurales, una vez planteadas las ecuaciones, se reducen en muchas ocasiones a su resolución numérica; es importante comprender que no es en general posible resolver mediante métodos exactos los sistemas de ecuaciones obtenidos y es preciso recurrir a técnicas numéricas.

El método de las diferencias finitas como método de resolución de problemas planteados en ecuaciones en derivadas parciales ha ido perdiendo fuerza en aplicaciones numéricas frente a otros métodos de resolución, sobre todo el método de los elementos finitos. Sin embargo, son muchos los autores que han seguido confiando en el desarrollo del método de diferencias finitas, proponiendo diferentes soluciones para poder aplicar las diferencias finitas a cualquier tipo de dominio. Así, de las limitaciones del método clásico de diferencias finitas se proyecta el método de las diferencias finitas generalizadas, aplicable a cualquier dominio con distribución irregular de puntos.

En este trabajo se aplica el método de las diferencias finitas al cálculo de estructuras, se indica su alcance, su comparación con el método de los elementos finitos y se expone la línea de mejora de los métodos de diferencia finitas clásicos a los de diferencias finitas generalizadas.

Con el propósito anterior se estudia el problema estructural de la viga Bernoulli en varios casos de carga y con diversas condiciones de contorno, comparando el resultado con el obtenido mediante el método de los elementos finitos obtenido a través del programa SAP 2000.

El método de las diferencias finitas

Las ecuaciones en derivadas parciales o los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales rigen muchos fenómenos de ingeniería según establecen los principios físicos y sus correspondientes desarrollos matemáticos.

Se topa con importantes dificultades, en la resolución de este tipo de ecuaciones y sus condiciones de contorno aún con coeficientes constantes, con lo que se recurre a la búsqueda de soluciones aproximadas. Entre los diversos métodos que permiten la obtención de este tipo de solución uno de los más clásicos es el denominado de diferencias finitas. Dicho método se basa en discretizar de forma regular el dominio, estableciendo un conjunto finito de puntos interiores y de la frontera donde se va a calcular el valor de la función. Para hallar el valor aproximado de la función en dichos puntos llamados nodos, es necesario sustituir las derivadas parciales para cada punto por cocientes de diferencias entre los valores de la solución en diferentes puntos, obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones que incógnitas. A las expresiones de transformación de cada operador diferencial en cocientes de diferencias, se le denomina fórmula en diferencias finitas.

Las fórmulas en diferencias clásicas centradas, para una función f donde se define como h y k los incrementos de las variables de dicha función x e y respectivamente, tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f(x, y+k) - f(x, y-k)}{2k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{f(x, y+k) - 2f(x, y) + f(x, y-k)}{k^2}\end{aligned}$$

Dichas ecuaciones se pueden generalizar para órdenes superiores, que sustituyendo en las ecuaciones diferenciales y de contorno, permiten obtener un sistema de ecuaciones algebraicas, con tantas ecuaciones como incógnitas, de igual número que

nodos tenga el dominio. Al resolver el sistema se obtienen valores aproximados de la función en los puntos del dominio discretizado.

Este método de resolución tiene la gran ventaja de su planteamiento aunque tiene limitaciones. Por un lado la malla debe ser regular, ya que en caso contrario para cada malla se debería encontrar una fórmula en diferencias finitas; por otro lado, el número de nodos y la selección de dichos nodos en la malla para la obtención de las fórmulas en diferencias finitas, es fijo.

Al discretizar un dominio, surgen como más habituales el método de diferencias finitas clásico de cinco nodos y de nueve nodos. En ambos métodos la frontera debe ser una poligonal cerrada de lados contiguos perpendiculares, los puntos de estimación deben estar repartidos de forma regular y los nodos que rodean al nodo central debe ser 4 u 8 pero no arbitrario.

Para el método de diferencias finitas de cinco nodos (siendo el nodo central el nodo cero, el uno el de su derecha y el resto creciendo en sentido antihorario), de manera que se elige una discretización del dominio de igual paso h en ambas variables y llamando f_i al valor de la función f a aproximar en el nodo i , se tiene:

$$D_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_1 - f_3}{2h} \\ \frac{f_2 - f_4}{2h} \\ \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{2h} \\ \frac{f_1 + f_4 - 2f_0}{2h} \end{bmatrix}$$

Análogamente, para el método de diferencias finitas de nueve nodos (siendo el nodo central el nodo cero, el uno el de su derecha y el resto creciendo en sentido antihorario) se tiene:

$$D_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5} f_1 + \frac{f_2}{20} - \frac{f_4}{20} - \frac{2}{5} f_5 - \frac{f_6}{20} + \frac{f_8}{20} \right) \\ \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5} f_3 + \frac{f_2}{20} + \frac{f_4}{20} - \frac{2}{5} f_7 - \frac{f_6}{20} - \frac{f_8}{20} \right) \\ \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{3} f_0 + \frac{5f_1}{6} + \frac{f_2}{12} - \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{12} + \frac{5f_5}{6} + \frac{f_6}{12} - \frac{f_7}{6} + \frac{f_8}{12} \right) \\ \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{3} f_0 + \frac{f_1}{6} + \frac{f_2}{12} + 5 \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{12} - \frac{f_5}{6} + \frac{f_6}{12} + \frac{5f_7}{6} + \frac{f_8}{12} \right) \\ \frac{1}{4h^2} (f_2 - f_4 + f_6 - f_8) \end{bmatrix}$$

El método de las diferencias finitas generalizadas

El método de las diferencias finitas generalizadas [1] supone una evolución del método clásico de diferencias finitas, el cual permite resolver problemas donde la nube de puntos generada sea irregular. Se plantea el método para ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, evidentemente su generalización es inmediata, al igual que hemos generalizado el método de diferencias finitas clásico.

Sea un problema gobernado por una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en el dominio bidimensional:

$$L_2[U] = f \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

con las condiciones de contorno:

$$L_1[U] = g \quad \text{en } \Gamma \quad (2)$$

donde la función U es al menos dos veces diferenciable en el dominio $\Omega \subset R^2$, con frontera Γ . L_2 es una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden, L_1 es una ecuación lineal diferencial de primer orden, mientras que f y g son dos funciones conocidas.

Se establecen un conjunto de nodos que se reparte en todo el dominio, de tal forma que a cada nodo del dominio se le asocia una estrella, es decir un conjunto de nodos de influencia alrededor de un nodo central.

El número y la posición de los nodos en cada estrella son factores decisivos que afectan a la aproximación mediante fórmulas en diferencias finitas. Se utilizará una nube de nodos lo más regular posible buscando un buen condicionamiento de las estrellas. El criterio de selección de nodos empleado será el de los cuatro cuadrantes, es decir, el área alrededor del punto central se divide en 4 sectores correspondientes a los cuadrantes de un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el nodo central. En cada cuadrante se seleccionan los dos nodos más cercanos (se seleccionan dos nodos para tener un conjunto de nodos alrededor del central de 8 que parece ser un número óptimo [1]), si esto no fuera posible (por ejemplo en un contorno) se pueden añadir nodos para conseguir el número de nodos necesarios para la resolución de las ecuaciones en diferencias.

Por su parte las funciones de ponderación definen un dominio relativamente pequeño en el que su valor es distinto de cero, siendo nulo en el resto del dominio. Cada función de ponderación se asocia a un nodo, pudiéndose superponer con otros subdominios. Se usará la función de peso potencial $w(x, y)$ (las mejores funciones de ponderación son las exponenciales y las potenciales [1]) que se define a continuación:

$$w(x, y) = \frac{1}{(dist)^3}$$

donde $dist$ es la distancia del nodo central al nodo considerado de la estrella.

Llamando U_0 al valor de la función en el nodo central de la estrella de coordenadas (x_0, y_0) y U_i al valor de la función en el resto de los nodos de coordenadas (x_i, y_i) , con $i = 1, 2, \dots, N$, entonces el desarrollo en serie de Taylor es:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) + \dots$$

donde $h_i = x_i - x_0$; $k_i = y_i - y_0$.

Por tanto, despreciando los términos de orden superior al segundo, la aproximación u_i de U_i es:

$$u_i = u_0 + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)$$

La expresión anterior es válida para cualquier $i = 1, 2, \dots, N$ con lo que, sumando todas las expresiones que resultan para los diferentes valores de i se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N (u_i - u_0) = \sum_{i=1}^N \left(h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right)$$

Se define el funcional $B(u)$ como sigue:

$$B(u) = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right) w(h_i, k_i) \right]^2$$

donde $w(h_i, k_i)$ es una función de ponderación.

A continuación minimizamos el funcional $B(u)$ con respecto a las derivadas parciales y así obtenemos un conjunto de cinco ecuaciones lineales con cinco incógnitas

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)$$

cuya resolución proporciona expresiones explícitas de las incógnitas en términos del valor de las aproximaciones de segundo orden en todos los nodos de la estrella u_i , de los valores h_i y k_i , y de la función de ponderación w . Así, el sistema que se obtiene es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] h_i w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] k_i w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{h_i^2}{2} w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{k_i^2}{2} w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] h_i k_i w^2 = 0 \end{array} \right.$$

donde $w = w(h_i, k_i)$.

Expresándolo matricialmente:

$$AD_u = b$$

$$D_u = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

$$b = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) k_i w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{h_i^2}{2} w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{k_i^2}{2} w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i k_i w^2 \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N h_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^2}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i w^2 \\ & \sum_{i=1}^N k_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i^2 w^2 \\ & & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i^2}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3 k_i}{2} w^2 \\ & & & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^3}{2} w^2 \\ & & & & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i^2 w^2 \end{pmatrix}$$

SIM

Para la resolución del sistema es evidente que se necesitan al menos cinco nodos (sin incluir el central).

Para la resolución del sistema se puede aplicar el método de Cholesky ya que la matriz A es simétrica. Se puede descomponer A como producto de una matriz triangular por su transpuesta QQ^T . Con lo que se puede escribir:

$$QQ^T D_u = b$$

Y ahora resolvemos en dos etapas:

$$Q^T D_u = Y \tag{3}$$

$$QY = b \tag{4}$$

Así, resolviendo el sistema (4) en orden descendente se obtienen los valores de Y , después a partir del sistema (3) se obtienen las fórmulas en diferencias siguientes:

$$\begin{cases} Y(k) = -u_0 \sum_{i=1}^5 M_{ki} c_i + \sum_{j=1}^N u_j (\sum_{i=1}^p M_{ki} d_{ji}), & k = 1, \dots, 5 \\ D(k) = \frac{1}{q_{kk}} (Y(k) - \sum_{i=1}^{5-k} q_{(k+1)k} D(k+i)), & k = 1, \dots, 5 \end{cases} \tag{5}$$

donde:

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{q_{ij}} \sum_{k=j}^{i-1} q(ik)M(kj) & \text{for } j < i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{1}{q_{ij}} & \text{for } j = i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \\ 0 & \text{for } j > i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

con δ_{ij} el delta de Kronecker, y:

$$c_i = \sum_{j=i}^N d_{ji}$$

$$d_{j1} = h_j w^2; \quad d_{j2} = k_j w^2; \quad d_{j3} = \frac{h_j^2}{2} w^2; \quad d_{j4} = \frac{k_j^2}{2} w^2; \quad d_{j5} = h_j k_j w^2$$

Incluyendo en la ecuación en derivadas parciales (1) y (2) los valores explícitos de las derivadas parciales expresados en (5) se obtiene la ecuación de la estrella, que es posible expresarla como:

$$u_0 = \sum_{i=1}^N m_i u_i + m_f f_0 \quad (6)$$

La expresión (6) es una ecuación lineal que relaciona el valor de la función en el nodo central de la estrella (u_0) con los valores de la función en el resto de los nodos de la estrella (u_i).

La formulación dada debe ser aplicada a cada uno de los nodos del dominio, obteniéndose un número de ecuaciones e incógnitas igual al número de nodos seleccionados para calcular el valor de la función. La resolución del sistema de ecuaciones lineales resuelve el problema.

Por tanto, el método de las diferencias finitas generalizadas puede ser aplicado a problemas con forma irregular de frontera y una distribución aleatoria de los nodos centrales de las estrellas, de tal forma que cada nodo central está rodeado por un número de puntos que no tienen que ser necesariamente iguales para todos ellos.

Estudio de la viga Bernoulli

Planteamiento de las ecuaciones

Se considera una viga Bernoulli de directriz recta, sección variable, longitud L y apoyo fijo en sus dos extremos. Esta viga se encuentra sometida a una distribución de carga perpendicular a la directriz definida por la función $P(X)$, en donde X es la

distancia de la sección al origen de coordenadas situado en el apoyo izquierdo. La variación de la rigidez a flexión es $EI(X)$.

El comportamiento de la viga en las anteriores condiciones se rige por medio de un problema de contorno conocido, cuya deducción a partir de las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y constitutivas se indica a continuación:

1. Ecuaciones de equilibrio (figura 1):

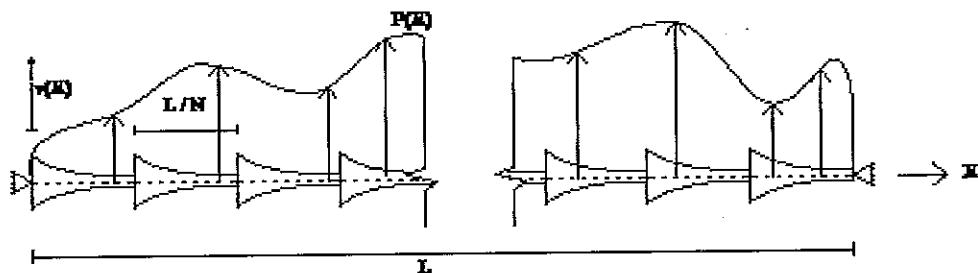
- Equilibrio de fuerzas verticales:

$$\frac{dV(X)}{dX} + p(X) = 0$$

- Equilibrio de momentos en el punto:

$$\frac{dM(X)}{dX} + V(X) = 0$$

Figura 1. Viga de Bernoulli sometida a una fuerza distribuida vertical y detalle del



equilibrio de fuerzas en una rebanada de la misma.

2. Ecuaciones de compatibilidad:

$$\chi(X) = \frac{d\theta(X)}{dX}$$

$$\gamma(X) = \frac{dv(X)}{dX} - \theta(X)$$

3. Ecuaciones constitutivas:

$$M(X) = EI(X)\chi(X)$$

$$V(X) = GA(X)\gamma(X)$$

La viga Bernoulli carece de deformación por cortante, por tanto: $GA(X) \rightarrow \infty$ y $\gamma(X) \rightarrow 0$.

Luego, de la ecuación:

$$\gamma(X) = \frac{dv(X)}{dX} - \theta(X)$$

resulta que:

$$\theta(X) = \frac{dv(X)}{dX}$$

Por tanto al considerar la ecuación de la curvatura, se observa que puede obtenerse como derivada segunda de la flecha:

$$\chi(X) = \frac{d^2v(X)}{dX^2}$$

Luego de la ecuación expresión del momento es:

$$M(X) = EI(X) \frac{d^2v(X)}{dX^2}$$

Derivando la ecuación de equilibrio en fuerzas verticales se obtiene la ecuación diferencial del problema de la viga de Bernoulli [2]:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(EI(X) \frac{d^2v(X)}{dX^2} \right) = p(X); X \in (0, L)$$

Las condiciones de contorno son de flecha y momento nulos en los extremos de la viga en el caso de viga biapoyada:

$$v(0) = v(L) = 0$$

$$v''(0) = v''(L) = 0$$

Estudiamos la viga biapoyada bajo condiciones de carga uniforme y puntual.

Resolución de la viga biapoyada bajo carga uniforme

Adoptamos un esquema en diferencias finitas centradas con la distribución de nodos de la figura 2.



Figura 2. Distribución de nodos en viga apoyada.

Se sabe que la ecuación diferencial de la viga Bernoulli para inercia constante es:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{P}{EI}$$

Adoptamos el esquema en diferencias centradas se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} - 2 \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} \right) = \\ &= \frac{1}{h^4} (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación general a los nodos:

Nudo 1:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 u_1}{dx^2} = \frac{1}{h^4} (2u_3 - 8u_2 + 6u_1)$$

Nudo 2:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 u_2}{dx^2} = \frac{1}{h^4} (u_4 - 4u_3 + 7u_2 - 4u_1)$$

Nudo 3:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 u_3}{dx^2} = \frac{1}{h^4} (u_A - 4u_4 + 6u_3 - 4u_2 + u_1)$$

Teniendo en cuenta que las condiciones de contorno son:

$$u_4 = 0$$

$$u_A = -u_3$$

Queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2u_3 - 8u_2 + 6u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \\ -4u_3 + 7u_2 - 4u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \\ 5u_3 - 4u_2 + u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \end{aligned} \right\}$$

De la que se obtiene que:

$$u_1 = 17,25 \frac{h^4 P}{EI}$$

$$u_2 = 15 \frac{h^4 P}{EI}$$

$$u_3 = 8,75 \frac{h^4 P}{EI}$$

Adoptamos una viga de acero de un metro de sección maciza de 0,1m x 0,1 m y carga uniformemente repartida de 100 kN. Así:

$$u_1 = 17,25 \frac{h^4 P}{EI} = 17,25 \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^4 100}{2 \times 10^8 \frac{1}{12} (0,1)^4} = 7,99 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Resultado similar al que se obtiene con un modelo de elementos finitos con el SAP 2000 [3], según se muestra en la figura 3.

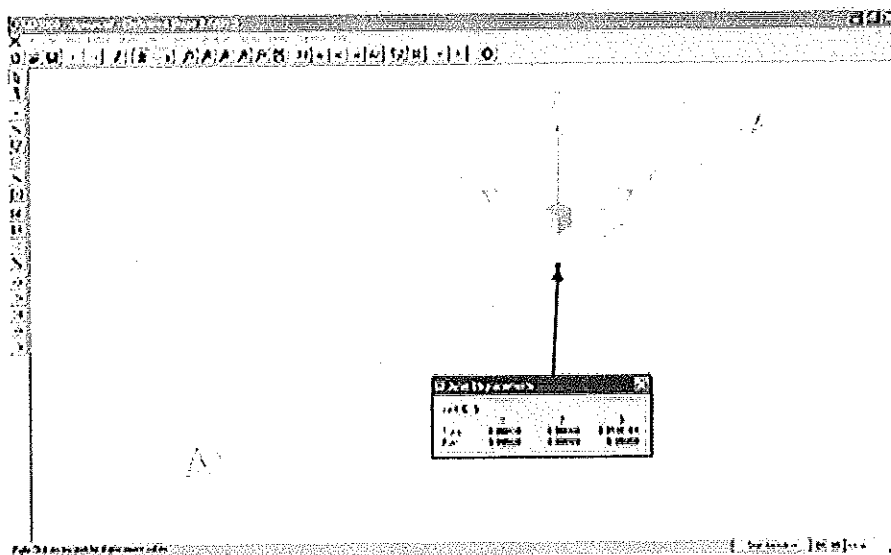


Figura 3. Viga Bernoulli biapoyada con carga uniforme con SAP 2000.

Resolución de la viga biapoyada bajo carga puntual

Para resolver el caso de carga puntual sobre viga biapoyada usamos la misma estrategia usada en el cálculo de placas, es decir colocamos la carga uniformemente en el entorno del nodo donde se carga puntualmente, abarcando el intervalo de discretización realizado. Evidentemente una mejor aproximación se alcanza con una discretización de nodos más fina entorno a la carga puntual.

En nuestro caso supondremos cargado el centro de la viga con una carga puntual de 100kN y resolveremos el caso para la discretización del dominio igual a como se hizo en el caso de carga uniforme y con otra más fina según se indica en la figura 4.



Modelo Simple



Modelo más fino

Figura 4. Distribución de los nodos para carga puntual en viga Bernoulli biapoyada.

Para el modelo más simple se tienen las siguientes ecuaciones de forma análoga a como se obtuvieron en el apartado anterior:

$$\left. \begin{aligned} 2u_3 - 8u_2 + 6u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \\ -4u_3 + 7u_2 - 4u_1 &= \frac{h^4 P/2}{EI} \\ 5u_3 - 4u_2 + u_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Se observa que son las mismas ecuaciones que las obtenidas para el caso de carga uniforme con la única variación del término independiente que supone la carga de influencia que llega a cada nudo, es decir que al tener cargado uniformemente solo el dominio que va del nodo 1 al 2 en ambos sentidos, al aplicar la ecuación de la viga al nudo 1 se lleva toda la carga de influencia; sin embargo al hacer el equilibrio en el nudo 2 solo se lleva la mitad de la carga pues para el nodo 2 de la derecha solo recibe carga de la parte de dominio de su izquierda y para el nodo 2 de la izquierda de la viga solo recibe carga de la parte derecha. Evidentemente al nodo 3 no llega carga pues los dominios discretizados a ambos lados están descargados.

Resolviendo el sistema se obtiene que:

$$u_1 = 8,75 \frac{h^4 P}{EI}$$

Donde la carga P es la carga de 100 kN repartida en el tercio central del dominio, es decir que es una carga repartida de 300 kN/m. Así:

$$u_1 = 8,75 \frac{h^4 P}{EI} = 8,75 \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^4 300}{2 \times 10^8 \frac{1}{12} (0,1)^4} = 1,22 \times 10^{-3} m$$

Resultado similar al que se obtiene con un modelo de elementos finitos con el SAP 2000, según se muestra en la figura 5.

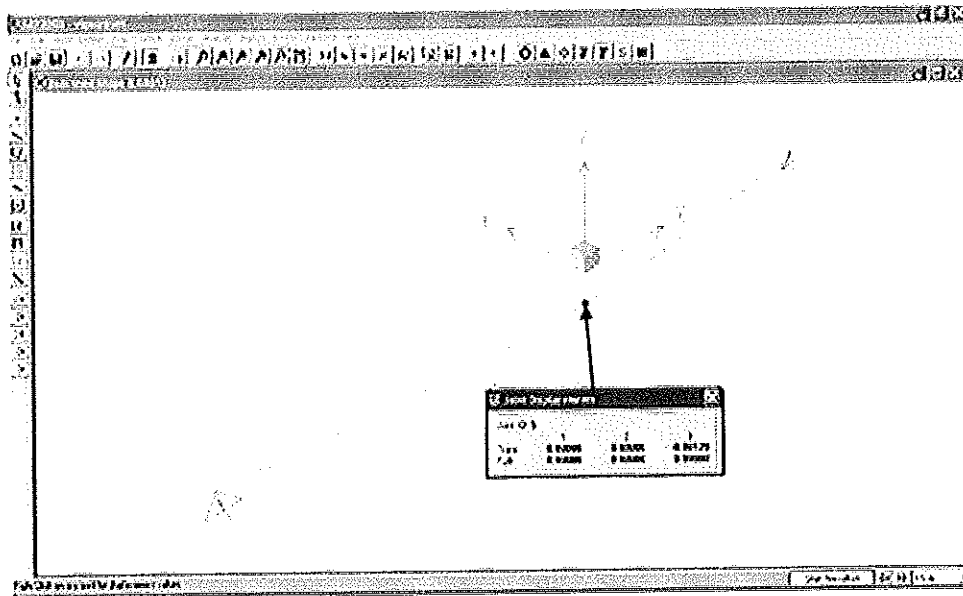


Figura 5. Viga Bernoulli biapoyada con carga puntual con SAP 2000.

Para la discretización más fina del dominio realizada para la aplicación del método de diferencias finitas se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2u_3 - 8u_2 + 6u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \\ u_4 - 4u_3 + 7u_2 - 4u_1 &= \frac{h^4 P}{2EI} \\ u_5 - 4u_4 + 6u_3 - 4u_2 + u_1 &= 0 \\ u_6 - 4u_5 + 6u_4 - 4u_3 + u_2 &= 0 \\ u_7 - 4u_6 + 6u_5 - 4u_4 + u_3 &= 0 \\ 5u_6 - 4u_5 + u_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Que permite obtener el valor:

$$u_1 = 71,5 \frac{h^4 P}{EI} = 71,5 \frac{\left(\frac{1}{12}\right)^4 600}{2 \times 10^8 \frac{1}{12} (0,1)^4} = 1,23 \times 10^{-3} m$$

Como hemos visto, si el dominio no es lineal, las dificultades para incorporar las condiciones de contorno al sistema lineal se incrementan notablemente. De igual forma se producen complicaciones para construir esquemas en diferencias finitas sobre mallas no uniformes. En ambas situaciones se pueden utilizar ideas como la que exponemos a continuación: la aproximación en diferencias finitas definida por una estrella de 5 nodos es:

$$-\frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{ij}$$

Pues bien, esta condición sobre los puntos en los que la estrella está contenida en el interior supone que en los puntos en los que al menos un nodo caiga fuera del dominio no regular definido es necesario modificar la forma de la ecuación según la distancia de los nodos de la estrella real que se puede formar. Así, se aproxima el valor de la función en los puntos P que define el dominio irregular por el polinomio de segundo orden en la variable que corresponda (por ejemplo x) alrededor del nodo ($i=N, j=M$) como se expresa en las siguientes relaciones:

$$u(P) = u(N, M) + \alpha h \frac{\partial u}{\partial x}(N, M) + \frac{(\alpha h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) + O(h^3)$$

Donde α representa la distancia de P a ($i=N, j=M$) dividida por h , y:

$$u(N-1, M) = u(N, M) - h \frac{\partial u}{\partial x}(N, M) + \frac{(h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) + O(h^3)$$

Si se desprecian los términos de orden superior, se multiplica la segunda ecuación por α y se suman ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) = \frac{\alpha U_{n-1,m} - (1 + \alpha)U_{n,m} + u(P)}{\frac{\alpha(1 + \alpha)}{2} h^2} + O(h)$$

A la vista de esta aproximación, se puede plantear la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$-\frac{\alpha U_{n-1,m} - (1 + \alpha)U_{n,m} + u(P)}{\frac{\alpha(1 + \alpha)}{2} h^2} - \frac{U_{n,m+1} - 2U_{n,m} + U_{n,m-1}}{h^2}$$

Es de notar la caída en una unidad del orden de la aproximación, el orden de la aproximación de la derivada segunda es 1, mientras que si $\alpha = 1$, el orden sube a 2.

Cuando se compara la versión clásica del método de diferencias finitas en mallas regulares con el método de los elementos finitos, se comprueba que éste último es más efectivo en el tratamiento de las condiciones de contorno, especialmente en dominios irregulares y cuando se producen condensaciones locales de nodos. Si se

podiera usar una malla arbitraria de diferencias finitas se vencerían estas dificultades, manteniendo las ventajas del método de las diferencias finitas. Una evolución del método de las diferencias finitas ha dado lugar al desarrollo del método de las diferencias finitas generalizadas, el cual se puede aplicar sobre mallas irregulares de nodos según se indica en el apartado 3 y permite resolver las dificultades asociadas a los esquemas clásicos.

Conclusiones

El artículo pone de manifiesto las siguientes conclusiones:

- Los resultados obtenidos mediante la simulación numérica por el método de las diferencias finitas clásicas son correctos al ser comparados con otros métodos que implementan algunos programas de cálculo (en particular se ha utilizado el SAP 2000) en el cálculo de elementos estructurales.
- En el caso de cargas localizadas ya sea en el interior o contornos de elementos estructurales es necesario refinar el mallado en torno a las cargas concentradas.
- Mediante el método de diferencias finitas generalizadas se podría resolver la aplicación de los problemas con geometrías más estrictas o necesidades locales de remallado. Se propone dicho método como línea de investigación aplicable al tipo de problemas expuestos. La resolución para el caso propuesto es metódica e inmediata.
- Queda expuesta la posibilidad y necesidad de seguir usando los métodos de las diferencias finitas para la resolución numérica de ecuaciones que representan problemas de ingeniería donde tradicionalmente ha sido empleado el método de los elementos finitos. El uso de los esquemas de diferencias finitas permite un mejor análisis del problema matemático planteado, al entrar directamente en las ecuaciones matemáticas del problema, abordando con éxito los problemas bien estudiados de existencia, unicidad, convergencia, inestabilidad o bloqueo de la solución.

References

- [1] Benito, J.J.; Urefia, F., Gavete, L., The Generalized Finite Difference Method, *Applied Mathematical Modeling Research*, pp. 251-293, 2007.
- [2] Timoshenko S., Goodier J.N., Theory of Elasticity, Ed. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [3] Manual SAP 2000 Advanced 9.0.3 Structural Analysis Program, *Computer and Structures*, Berkley, 2004.