



POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AGRONÓMICA,
ALIMENTARIA Y DE BIOSISTEMAS

TÉCNICAS MULTIESCALA EN EL SEGUIMIENTO DE LA VEGETACIÓN CON IMÁGENES DE SATÉLITE

TESIS DOCTORAL

Carmelo Alonso Jiménez

Licenciado en Ciencias Físicas

MADRID, 2021

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

E. T. S. I. AGRONÓMICA, ALIMENTARIA Y DE BIOSISTEMAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA AGROFORESTAL

GRUPO DE SISTEMAS COMPLEJOS

TÉCNICAS MULTIESCALA EN EL SEGUIMIENTO DE LA VEGETACIÓN CON IMÁGENES DE SATÉLITE

TESIS DOCTORAL

Carmelo Alonso Jiménez

Licenciado en Ciencias Físicas

Directora:

Rosa María Benito Zafrilla

Dra. Ciencias Químicas

Co-Directora

Ana María Tarquis Alfonso

Dra. Ingeniera Agrónoma

*A Fabio, Hector y Astrid...,
porque el futuro les pertenece.*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar mi más profundo agradecimiento es para mis directoras de Tesis, Rosa María Benito y Ana María Tarquis, por acogerme en el Grupo de Sistemas Complejos, por el tiempo y el enorme esfuerzo que me han dedicado todos estos años, porque no me han dejado abandonar en los momentos más difíciles, por todo lo que hemos aprendido juntos. Sin ese apoyo este trabajo no habría sido posible.

Quiero aprovechar también para mostrar mi más sincero agradecimiento a otra de las personas sin la cual este trabajo no habría sido posible, a Victoriano Moreno. Por abrirme los ojos al maravilloso mundo de los satélites de observación de la Tierra hace más de 25 años, durante los cuales he podido aprender mucho.

Finalmente, mi más cariñoso agradecimiento a mi esposa Mayte que me ha aguantado todos estos años. Sin su apoyo y empuje tampoco habría sido posible concluir este trabajo.

RESUMEN

En esta Tesis nos centramos en el estudio de la vegetación como uno de los elementos que estructuran la complejidad de los agro-ecosistemas terrestres. Un estudio que se ha desarrollado sobre dos pilares fundamentales. Por un lado, los datos sobre la vegetación que se obtienen a partir de las imágenes adquiridas por los satélites de observación de la Tierra, gracias a los índices de vegetación. Por otro lado, las herramientas utilizadas para el estudio de esos datos que son las aportadas por el análisis fractal y multifractal.

Las imágenes de satélite son hoy día una de las más importantes fuentes de información de la superficie de la Tierra. Gracias a ellas es posible una continua monitorización del estado y la salud del medio ambiente. Su importancia ha ido creciendo a lo largo de su medio siglo de vida debido, principalmente, al impacto del cambio climático global sobre los ecosistemas y la vida de las personas. La capacidad que proporcionan las imágenes de disponer, de manera inmediata, de datos históricos sobre la cobertura vegetal es una de las piedras angulares para comprender las amenazas climáticas y mitigar los efectos relacionados.

En estos cincuenta años, las imágenes de la superficie terrestre obtenidas por los satélites han ido mejorando en detalle (resolución espacial), en frecuencia de adquisición (resolución temporal), en regiones del espectro electromagnético (resolución espectral) y en rango dinámico de valores digitales (resolución radiométrica).

Gracias a ello hoy día se dispone de un gran volumen de información que hace necesario disponer de nuevas técnicas para su caracterización y análisis. Dado que una de las características inherentes de esta información es el concepto de escala, entendida como las diferentes resoluciones enumeradas, encontramos el segundo pilar que sustenta esta Tesis, la caracterización multiescala de la información.

Así, para la caracterización multiescala de la información que proporcionan las imágenes satelitales, se utiliza la potente herramienta que proporcionan el análisis fractal y multifractal. Con estas herramientas se intenta buscar respuesta a

preguntas como: ¿en qué medida es comparable la información que, sobre la vegetación, proporcionan imágenes de diferente tamaño de píxel, tomadas por distintos satélites?, ¿puede esa información caracterizarse por un único parámetro, como es la dimensión fractal?, ¿en qué medida son similares los patrones de reflectividad en las bandas espectrales de distintos satélites, en particular las que se utilizan para calcular los índices de vegetación?, o ¿puede caracterizarse la correlación entre el índice de vegetación y el de la humedad del suelo, obtenidos con imágenes satelitales, mediante el espectro multifractal?

El marco de la teoría fractal proporciona un algoritmo de análisis multiescala que se implementa de manera sencilla a las imágenes de satélite, el algoritmo de "recuento de cajas" o de *box-counting*, que permite calcular la dimensión fractal de un objeto, en nuestro caso de una imagen.

Hemos utilizado este algoritmo para caracterizar el índice de vegetación obtenido con imágenes de 250 m de tamaño de píxel y de 30 m. Así se ha podido estudiar el comportamiento del índice de vegetación entre escalas que van de los 960 m a los 16 km, calculando la dimensión fractal del NDVI segmentado en diferentes rangos de valores. Se observan grandes diferencias en las dimensiones fractales de los índices a 250 m y a 30 m cuando la vegetación es escasa o ausente, siendo mínimas las diferencias cuando la vegetación cubre más del 40% del píxel.

El marco del análisis multifractal proporciona otro algoritmo multiescala, equivalente al de box-counting, que también se implementa de manera sencilla a las imágenes, el algoritmo de Chhabra-Jensen. Con este algoritmo se pueden calcular de manera directa los dos parámetros que determinan el denominado "espectro de singularidades" o "espectro multifractal".

Hemos utilizado este algoritmo para estudiar los patrones de la reflectividad en las bandas espectrales comunes de dos satélites, con imágenes de 30 y de 4 m de tamaño de píxel. También se ha utilizado para estudiar dos índices de vegetación obtenidos con esas bandas. Del análisis geométrico del espectro multifractal se han caracterizado los patrones de la reflectividad de cada una de las bandas del visible y el infrarrojo cercano, así como de dos índices de vegetación obtenidos con ellas

(NDVI y EVI), en función de la resolución espacial y radiométrica de las imágenes. Es la primera vez que se informa sobre el comportamiento de estos patrones.

También se ha aplicado en el estudio de la correlación entre el índice de vegetación y el de humedad del suelo obtenidos con imágenes de 500 m de tamaño de píxel. En este estudio también se ha utilizado una variante del análisis multifractal, muy novedoso en el ámbito de la teledetección, denominada "análisis multifractal conjunto". Este análisis se utiliza para el estudio simultáneo de varias medidas multifractales correlacionadas, como son los índices de vegetación y de humedad del suelo.

Finalmente hemos abordado el estudio de la dinámica entre los índices de vegetación y de humedad del suelo a lo largo de un ciclo anual y su correlación, centrándonos en un paisaje mediterráneo de pastos.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous nous concentrons sur l'étude de la végétation comme l'un des éléments qui structurent la complexité des agro-écosystèmes terrestres. Une étude qui a été développée sur deux piliers fondamentaux. D'une part, les données sur la végétation sont obtenues à partir des images acquises par les satellites d'observation de la Terre, grâce aux indices de végétation. D'autre part, les outils utilisés pour étudier ces données sont ceux fournis par l'analyse fractale et multifractale.

Les images satellitaires sont aujourd'hui l'une des sources d'informations les plus importantes sur la surface de la Terre. Grâce à elles, une surveillance continue de l'état et de la santé de l'environnement est possible. Son importance s'est accrue tout au long de son demi-siècle d'existence, principalement en raison de l'impact du changement climatique mondial sur les écosystèmes et la vie des populations. La capacité de l'imagerie à disposer immédiatement de données historiques sur l'occupation du sol est l'une des pierres angulaires de la compréhension des aléas climatiques et de l'atténuation des effets connexes.

Au cours des cinquante dernières années, les images de la surface terrestre obtenues par les satellites se sont améliorées en détail (résolution spatiale), en fréquence d'acquisition (résolution temporelle), en régions du spectre électromagnétique (résolution spectrale) et en gamme dynamique de valeurs numériques (résolution radiométrique).

Grâce à cela, aujourd'hui un grand volume d'informations est disponible et il exige de disposer de nouvelles techniques pour sa caractérisation et son analyse. Etant donné que l'une des caractéristiques inhérentes à ces informations est la notion d'échelle, entendue comme les différentes résolutions répertoriées, on retrouve le deuxième pilier qui soutient cette thèse, la caractérisation multi-échelles de l'information.

Ainsi, pour la caractérisation multi-échelle des informations fournies par les images satellitaires, l'outil puissant fourni par l'analyse fractale et multifractale est utilisé.

Avec ces outils, on s'efforce de trouver des réponses à des questions telles que : Dans quelle mesure les informations sur la végétation fournies par les images de différentes tailles de pixels, prises par différents satellites, sont-elles comparables? Cette information peut-elle être caractérisée par un seul paramètre, comme la dimension fractale? Dans quelle mesure les modèles de réflectivité dans les bandes spectrales de différents satellites sont-ils similaires, en particulier ceux utilisés pour calculer les indices de végétation? La corrélation entre l'indice de végétation et l'indice d'humidité du sol, obtenu avec des images satellites, peut-elle être caractérisée par le spectre multifractal?

Le cadre de la théorie fractale fournit un algorithme d'analyse multi-échelles qui s'applique facilement sur des images satellites, l'algorithme de « box-counting », qui permet de calculer la dimension fractale d'un objet, dans notre cas d'une image.

Nous avons utilisé cet algorithme pour caractériser l'indice de végétation obtenu avec des images de 250 m de pixel et 30 m. Ainsi, il a été possible d'étudier le comportement de l'indice de végétation entre des échelles allant de 960 m à 16 km, en calculant la dimension fractale du NDVI segmenté dans différentes plages de valeurs. De grandes différences sont observées dans les dimensions fractales des indices à 250 m et à 30 m lorsque la végétation est rare ou absente, les différences étant minimales lorsque la végétation couvre plus de 40 % du pixel.

Le cadre d'analyse multifractale fournit un autre algorithme multi-échelle, équivalent au comptage de boîtes, que l'on peut facilement appliquer sur les images, l'algorithme de Chhabra-Jensen. Avec cet algorithme, les deux paramètres qui déterminent le soi-disant "spectre de singularité" ou "spectre multifractal" peuvent être directement calculés.

Nous avons utilisé cet algorithme pour étudier les modèles de réflectivité dans les bandes spectrales communes de deux satellites, avec des images de 30m et 4 m de taille de pixel. Il a également été utilisé pour étudier deux indices de végétation obtenus avec ces bandes. A partir de l'analyse géométrique du spectre multifractal, les patrons de réflectivité de chacune des bandes visible et proche infrarouge ont été caractérisés, ainsi que deux indices de végétation obtenus avec eux (NDVI et

EVI), en fonction de la résolution spatiale et radiométrique des images. C'est la première fois que le comportement de ces modèles est signalé.

On l'a aussi utilisé dans l'étude de la corrélation entre l'indice de végétation et l'indice d'humidité du sol obtenu avec des images de 500 m de taille de pixel. Cette étude a également utilisé une variante d'analyse multifractale, très nouvelle dans le domaine de la télédétection, appelée « analyse multifractale conjointe ». Cette analyse est utilisée pour l'étude simultanée de plusieurs mesures multifractales corrélées, telles que les indices de végétation et d'humidité du sol.

Enfin, nous avons abordé l'étude de la dynamique entre les indices d'humidité de la végétation et du sol tout au long d'un cycle annuel et leur corrélation, en nous concentrant sur un paysage de pâturage méditerranéen.

SUMMARY

This Thesis focuses on the study of vegetation as one of the elements that structure the complexity of terrestrial agro-ecosystems. It is a study that has been developed on two fundamental pillars. On the one hand, the data on the vegetation is obtained from the images acquired by the Earth observation satellites, thanks to the vegetation indices. On the other hand, the tools used to study these data are those provided by fractal and multifractal analysis.

Satellite images are today one of the most important sources of information on the Earth's surface. Thanks to them, continuous monitoring of the state and health of the environment is possible. Its importance has grown throughout its half century of life, mainly due to the impact of global climate change on ecosystems and people's lives. The ability of imagery to immediately have historical data on vegetal cover is one of the cornerstones of understanding climate hazards and mitigating related effects.

In these fifty years, the images of the earth's surface obtained by satellites have been improving in detail (spatial resolution), in acquisition frequency (temporal resolution), in regions of the electromagnetic spectrum (spectral resolution) and in the dynamic range of digital values (radiometric resolution).

Thanks to this, today a large volume of information is available that makes it necessary to have new techniques for its characterization and analysis. Because one of the inherent characteristics of this information is the concept of scale, understood as the different resolutions listed above, we find the second pillar that supports this Thesis: the multiscale characterization of the information.

Thus, for the multiscale characterization of the information provided by satellite images, the powerful tool provided by fractal and multifractal analysis is used. With these tools, an attempt is made to find answers to questions such as: How comparable is the information on vegetation provided by images of different pixel size, taken by different satellites? Can this information be characterized by a single parameter, such as the fractal dimension? How similar are the reflectivity patterns

in the spectral bands of different satellites, particularly those used to calculate the vegetation indices? Or, can the correlation between the vegetation index and the soil moisture index, both obtained with satellite images, be characterized by the multifractal spectrum?

The fractal theory framework provides a multiscale analysis algorithm that is easily implemented to satellite images, the box-counting algorithm, which allows calculating the fractal dimension of an object, in our case of an image.

We have used this algorithm to characterize the vegetation index obtained with images of 250 m and 30 m pixel size. Thus, it has been possible to study the behaviour of the vegetation index between scales ranging from 960 m to 16 km, calculating the fractal dimension of the segmented NDVI in different ranges of values. Large differences are observed in the fractal dimensions of the indices at 250 m and at 30 m when the vegetation is scarce or absent, the differences being minimal when the vegetation covers more than 40% of the pixel.

The multifractal analysis framework provides another multiscale algorithm, equivalent to box-counting, which is also easily implemented to images, the Chhabra-Jensen algorithm. With this algorithm, the two parameters that determine the so-called "singularity spectrum" or "multifractal spectrum" can be directly calculated.

We have used this algorithm to study the reflectivity patterns in the common spectral bands of two satellites, with images of 30 and 4 m pixel size. It has also been used to study two vegetation indices obtained with these bands. From the geometric analysis of the multifractal spectrum, the reflectivity patterns of each of the visible and near-infrared bands have been characterized, as well as two vegetation indices obtained with them (NDVI and EVI), depending on the spatial resolution and radiometric of the images. It is the first time that the behavior of these patterns has been reported.

It has also been applied in the study of the correlation between the vegetation index and the soil moisture index obtained with images of 500 m pixel size. This study

also used a variant of multifractal analysis, very new in the field of remote sensing, called "joint multifractal analysis". This analysis is used for the simultaneous study of several correlated multifractal measurements, such as vegetation and soil moisture indices.

Finally, we have approached the study of the dynamics between the vegetation and soil moisture indices throughout an annual cycle and their correlation, focusing on a Mediterranean pasture landscape.

Índice

1	INTRODUCCIÓN	25
1.1	Vegetación y complejidad	25
1.2	Cambio Climático	26
1.3	La Teledetección, herramienta clave para el estudio de la vegetación....	28
1.4	Análisis multiescala en el tratamiento de imágenes	29
1.5	Objetivos y estructura de la Tesis.....	31
2	CONCEPTOS DE TELEDETECCIÓN	33
2.1	Principios físicos de la Teledetección desde satélites.....	33
2.1.1	El espectro electromagnético	35
2.1.2	Magnitudes radiométricas.....	37
2.1.3	Detección de la radiación electromagnética: sensores	42
2.1.4	Efecto de la atmósfera. Corrección atmosférica.....	46
2.1.5	Resoluciones de un sensor.....	49
2.1.6	Firmas espectrales	55
2.2	Satélites y sensores de observación de la Tierra.....	56
2.2.1	Los satélites Landsat	57
2.2.2	El instrumento MODIS.....	61
2.2.3	La muy alta resolución: Ikonos	63
2.2.4	El programa europeo Copernicus y los satélites Sentinel.....	64
2.3	Índices biofísicos obtenidos con teledetección.....	66
2.3.1	Índices de vegetación.....	66
2.3.2	Índice de humedad del suelo	70
3	FRACTALES Y ALGORITMOS MULTIESCALA.....	71
3.1	Fractales.....	71

3.1.1	Definición de fractal. Dimensión fractal.....	71
3.1.2	Algoritmos multiescala para el cálculo de la dimensión fractal	76
3.2	Entropía. Dimensión de entropía	77
3.3	Multifractales. Dimensiones generalizadas	78
3.3.1	La medida binomial, el paradigma multifractal	80
3.3.2	Dimensiones generalizadas:	85
3.3.3	Algoritmos multiescala para el cálculo del espectro multifractal	89
3.4	Multifractales Universales	98
3.5	Multifractales conjuntos.....	101
4	SEGUIMIENTO MULTIESCALA DE LA VEGETACIÓN	104
4.1	Análisis fractal de imágenes de distinta resolución espacial	104
4.1.1	Material y métodos.....	105
4.1.2	Resultados y discusión	107
4.1.3	Conclusiones.....	116
4.2	Estructura multifractal en distintas bandas de imágenes	117
4.2.1	Material y métodos.....	119
4.2.2	Resultados y discusión	122
4.2.3	Conclusiones.....	137
4.3	Correlación entre vegetación y humedad del suelo	139
4.3.1	Imágenes utilizadas	140
4.3.2	Metodología y resultados	141
4.3.3	Conclusiones.....	148
4.4	Análisis de la dinámica de la vegetación natural	148
4.4.1	Material y métodos.....	149
4.4.2	Resultados y discusión	153
4.4.3	Conclusiones.....	157

5	Conclusiones y líneas de trabajo futuro	159
5.1	Conclusiones.....	159
5.2	Líneas de trabajo futuro	161
6	Referencias	163
7	Anexo	175

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Vegetación y complejidad

La "cobertura vegetal" terrestre, entendida como la capa de vegetación que cubre la superficie terrestre, comprende un amplio rango de tipologías que van de los pastizales a las áreas forestales, pasando por coberturas vegetales inducidas por la acción humana como son los cultivos agrícolas o las áreas verdes urbanas.

La cobertura vegetal es un elemento clave para comprender la compleja dinámica de los ecosistemas terrestres. Su distribución y su dinámica están influenciadas por múltiples factores. Entre ellos destacan principalmente el clima (precipitación, temperatura,...), el tipo de suelo o la actividad humana.

La vegetación regula numerosos ciclos biogeofísicos y biogeoquímicos de la biosfera terrestre, como son el del agua, el del carbono o el del nitrógeno, entre otros. Además, es de gran importancia en el balance energético a múltiples escalas (Duveiller et al., 2018).

Como resultado de la interacción entre todos estos factores surgen patrones en la distribución de la vegetación, tanto en su dimensión espacial como temporal, consecuencia de procesos de auto-organización que han sido ampliamente estudiados en los últimos años (Vincenot et al., 2016; Newman et al., 2019; Cornacchia et al., 2020). Algunos de estos estudios han podido recopilar estadísticas sobre el tamaño de los "parches" de vegetación y descubrir que siguen una distribución de ley de potencia, lo que significa que la probabilidad de encontrar un parche de vegetación de tamaño n es proporcional a $n^{-\beta}$, con $n > 1$ (Manor y Shnerb, 2008).

Otro tipo de estudios se han realizado en los últimos años centrados en la relación de la vegetación con el clima. Algunos de ellos se han centrado en la influencia de factores ambientales (como la precipitación, la temperatura del aire o el contenido de agua del suelo) en la aparición de patrones de vegetación y su estructura, particularmente en pastizales semiáridos (Tietjen y Jeltsch, 2007).

El análisis fractal se ha utilizado para caracterizar la complejidad de estos patrones espaciales de la vegetación en numerosos estudios. Así, por ejemplo, el estudio de los efectos del uso del suelo sobre la diversidad y distribución espacial de los pastos en cinco comunidades semiáridas del este de España (Alados et al., 2005) reveló que la dimensión fractal es un buen estimador de la perturbación del ecosistema, independientemente de la escala, pudiendo ser utilizado para el seguimiento de su dinámica.

Estos estudios permiten establecer que las relaciones de escala y los fractales proporcionan un poderoso marco analítico para simplificar la complejidad de la vegetación en el paisaje, así como para comprender su dinámica.

1.2 Cambio Climático

En los últimos años, no hay duda de que el cambio climático global tiene impactos observables en el desarrollo, lo que amenaza seriamente la capacidad de las personas y las comunidades en todos los niveles. Durante este proceso, la clara degradación de la situación de los ecosistemas y agro-ecosistemas ha generado una preocupación mundial por la urgencia de mitigar las amenazas climáticas y los efectos relacionados (Adepoju et al., 2019).

Evaluar los impactos y la vulnerabilidad del cambio climático requiere información precisa, actualizada y mejorada. Junto con la disponibilidad inmediata de los datos históricos de observación de la Tierra, la reducción en el costo de los datos y una mayor resolución de las plataformas satelitales, la tecnología de la teledetección parece estar preparada para tener un gran impacto en las agencias de planificación y proporcionar una mejor comprensión de la dinámica del sistema climático, predecir y mitigar los cambios globales esperados y los efectos sobre la civilización humana involucrados en la cartografía de los usos y coberturas del suelo en una variedad de escalas espaciales.

En este marco, la cobertura vegetal terrestre ha recibido un especial interés, a lo largo de estas dos últimas décadas, por su actuación como sumidero del dióxido de carbono atmosférico que, a través de la fotosíntesis, lo incorpora en su biomasa.

Además, los cambios en dicha cobertura también implican cambios en el comportamiento radiativo de la superficie terrestre que, a su vez, puede afectar al clima local y el balance energético de la superficie. Estos estudios son posibles hoy día gracias a que los satélites proporcionan, por un lado, una cobertura global del planeta y, por otro lado, una serie temporal de observación coherente durante los últimos cincuenta años.

Apoyada en estas características de la tecnología de observación de la Tierra desde el espacio, la Agencia Espacial Europea ha desarrollado la Iniciativa de Cambio Climático (<https://climate.esa.int/es/esa-climate/esa-cci/>) que aprovecha todo el archivo histórico de imágenes de los satélites para monitorizar el clima en base a las denominadas Variables Climáticas Esenciales (Bojinski et al. 2014), un conjunto de 21 parámetros que permiten caracterizar el clima terrestre y su evolución en el tiempo. De ellas, cuatro están relacionadas directamente con la cobertura vegetal: la cobertura del suelo, la fracción de radiación fotosintéticamente activa absorbida (FAPAR), el índice de área foliar (LAI) o la biomasa.

La cobertura del suelo constituye uno de los principales mapas que, tradicionalmente, se vienen realizando con las imágenes de satélite desde finales de la década de los 80 del pasado siglo. En este tipo de mapas se ven reflejados procesos como deforestación (Hu et al. 2021), desertificación (Wijitkosum, 2016), urbanización (Dadashpoor et al. 2019) o la pérdida de biodiversidad de los ecosistemas (Newbold, 2018). Como ejemplos más cercanos de este tipo de mapas encontramos SIOSE (<https://www.siose.es/>), en España, o CORINE (<https://land.copernicus.eu/pan-european/corine-land-cover>), en Europa.

FAPAR representa la fracción de la radiación solar de longitud de onda entre 0.4 y 0.7 μm que llega a la superficie de la Tierra y es absorbida por la cubierta vegetal a través de la fotosíntesis. Se obtiene a partir de los datos adquiridos por los satélites de observación de la Tierra con diferentes resoluciones temporal y espacial (Wang et al., 2016).

LAI es una variable adimensional y se corresponde geoméricamente con la superficie foliar de la vegetación ocupada por unidad de superficie de terreno. El

cambio de este parámetro es un indicador del crecimiento y el vigor de la vegetación en el planeta (Zheng and Moskal, 2009).

Finalmente, la biomasa corresponde a la masa de toda la materia orgánica por unidad de superficie en un momento determinado. Su importancia como variable climática radica en dos importantes funciones de la cobertura vegetal dentro del ciclo del carbono (Galidaki et al., 2017):

- la fotosíntesis absorbe CO₂ de la atmósfera y lo almacena como biomasa, que ya mencionamos más arriba
- la biomasa consumida durante un incendio emite a la atmósfera una cantidad de CO₂, junto con otros gases traza y aerosoles.

Estas variables se monitorean de manera continua y a diferentes escalas gracias a los satélites. Las escalas, que dependen de sus resoluciones y pueden abarcar hasta cuatro órdenes de magnitud, van desde los 3 km que proporcionan los satélites meteorológicos a los 0.3 m de los satélites denominados de muy alta resolución o VHR, del tipo WorldView, pasando por los 10 m que proporcionan los satélites Sentinel, del programa europeo de observación de la Tierra denominado Copernicus.

1.3 La Teledetección, herramienta clave para el estudio de la vegetación

El seguimiento de la cobertura vegetal es una de las principales aplicaciones de la teledetección espacial desde sus comienzos, en los primeros años de la década de 1970. Hoy día, los productos relacionados con la vegetación, procedentes de los satélites de observación de la Tierra, se encuentran entre los más utilizados. Basados en índices que se obtienen de las imágenes proporcionan mediciones claves sobre su productividad, su biodiversidad o su fenología, convirtiéndose en una herramienta indispensable en aplicaciones agrícolas y de gestión de recursos naturales (Huete et al., 2014).

La gran diversidad de satélites de observación orbitando actualmente la Tierra monitorizan la cobertura vegetal en múltiples escalas que van de la global a la parcela. Además, la observación permanente en su medio siglo de historia permite una monitorización continua de la cobertura vegetal terrestre en los últimos 50 años.

A esta capacidad de observación permanente se une el hecho de que los sensores, instalados a bordo de los satélites, pueden capturar la información de la cobertura vegetal en diferentes regiones del espectro electromagnético. Entre estas regiones se encuentran las bandas del rojo y el infrarrojo cercano, que son las bandas que permiten una fácil discriminación de dicha cobertura. Con estas bandas se elaboran los denominados índices de vegetación que permiten extraer, de manera automática, la cobertura vegetal.

El concepto de escala es inherente a los datos geoespaciales, en particular a los relacionados con la cobertura vegetal. Sin embargo, aún sabemos muy poco sobre cómo afecta la escala en las medidas que se extraen de estos datos geoespaciales, que se obtienen en distintos formatos y en una gran variedad de resoluciones espaciales, temporales y radiométricas.

Algunos autores (Bian y Butler, 1999), en el marco de los Sistemas de Información Geográficas, han mostrado que la correlación espacial y la resolución del sensor pueden interactuar de manera impredecible cuando las imágenes se remuestran a una resolución común y se combinan con datos obtenidos por diferentes sensores.

1.4 Análisis multiescala en el tratamiento de imágenes

Entre las técnicas del procesado de imágenes, el análisis multiescala o fractal constituye una potente herramienta que proporciona una forma objetiva de caracterizar los patrones complejos de distribución espacial como es, por ejemplo, la textura. Muchos de estos patrones, relacionados con el mundo natural, se caracterizan por presentar una estructura espacial subyacente de gran complejidad soportada en un principio de gran simplicidad, la "auto-similaridad".

En el marco matemático general de la geometría fractal, que se expondrá en el capítulo 3, se han desarrollado muchos métodos analíticos y algoritmos, tanto para el análisis como para el tratamiento de las imágenes. Así, por ejemplo, las diferentes texturas que pueden encontrarse en las imágenes se han caracterizado utilizando la dimensión fractal (Fioravanti, 1994). Igualmente se ha utilizado como medida espacial para describir la complejidad de las imágenes de teledetección (Lam and

De Cola, 1993). Otros investigadores han observado cómo los cambios en la complejidad de imágenes hiperespectrales, a través de su rango espectral, afectan a la dimensión fractal (Qiu et al. 1999). De manera similar, De Cola (1989) y Lam (1990) descubrieron que la dimensión fractal también depende de las bandas espectrales de las imágenes Landsat-7 TM.

Motivado por la geometría fractal de conjuntos (Mandelbrot, 1983), el desarrollo de la teoría multifractal, introducida en el contexto de la turbulencia, se ha aplicado en muchas áreas, como el análisis de distribución de terremotos (Hirata and Imoto, 1991), la caracterización de los poros del suelo (Kravchenko et al. 1999; Tarquis et al. 2003), el análisis de imágenes (Sánchez et al. 1992) y el de las imágenes de teledetección (Tessier et al., 1993; Cheng and Agterberg, 1996; Schmitt et al., 1997; Laferrière and Gaonac'h, 1999; Cheng, 1999; Lovejoy et al., 2001b; Du and Yeo, 2002; Parrinello and Vaughan, 2002; Harvey et al., 2002; Turiel et al. 2005).

Por otro lado, las imágenes multispectrales de teledetección constituyen una fuente única de datos para determinar las características invariantes con la escala de los campos de radiancia relacionados con multitud de fenómenos, como la composición química del suelo y la roca madre, el contenido de humedad y la temperatura de la superficie (por ejemplo, Laferrière and Gaonac'h, 1999; Maître and Pinciroli, 1999; Lovejoy et al., 2001a, b; Harvey et al., 2002; Beaulieu and Gaonac'h, 2002; Gaonac'h et al., 2003).

En uno de los marcos utilizados en el análisis multifractal, la imagen de satélite se considera como una distribución de masa de una medida estadística en el dominio espacial y se analiza a través de un espectro multifractal (Cheng, 2004; Mao-Gui Hu, 2009; Tarquis et al., 2014), que proporciona información geométrica o probabilística sobre la distribución de píxeles con la misma singularidad.

Otro marco enfoca su atención en las variaciones de una medida que analiza los momentos de las diferencias absolutas de sus valores a diferentes escalas, la Función de Estructura Generalizada y el modelo Multifractal Universal (Lovejoy et al., 2001, 2008; Renosh et al., 2015).

La descripción fractal de las texturas se basa principalmente en la determinación de la dimensión fractal.

1.5 Objetivos y estructura de la Tesis

A lo largo de los apartados anteriores, hemos visto la importancia que la cobertura vegetal tiene como elemento regulador del sistema climático terrestre, desde una escala local a la global. Su distribución espacial y temporal depende, a su vez, de factores climáticos, entre otros. Su monitorización sistemática a lo largo del último medio siglo ha sido posible gracias a las imágenes adquiridas por los satélites de observación de la Tierra, tan fundamentales en las aplicaciones agrícolas y forestales.

En los últimos años, algunos estudios han mostrado cómo el análisis fractal no es solo una herramienta que permite caracterizar la complejidad de los patrones espaciales de la vegetación, también puede ayudar a explorar cómo la información que deseamos extraer de las imágenes está afectada por las propias manipulaciones de su procesado.

En este marco, el principal objetivo de esta tesis es explorar la aplicación de las técnicas multiescala propias de los análisis fractal y multifractal en el procesado de las imágenes de teledetección. Esta exploración no se centrará en un aspecto particular de las imágenes o de su procesado, aunque sí girará en torno a sus aplicaciones sobre la cobertura vegetal. Por ello, este objetivo principal se descompone en los siguientes aspectos:

- Definir en qué medida es comparable la información que, sobre la vegetación, proporcionan imágenes de diferente resolución espacial, tomadas por distintos satélites, utilizando el análisis fractal.
- Estudiar, mediante el análisis multifractal, los patrones de reflectividad en las bandas espectrales que son utilizadas para calcular los índices de vegetación de distintos satélites. Estas bandas espectrales, no solo pueden tener diferente resolución espacial también distinta resolución radiométrica.

- Investigar la correlación entre la cobertura vegetal y la humedad del suelo en el marco del análisis multifractal, en imágenes de satélite.
- Analizar la dinámica de la vegetación natural a través del comportamiento con la escala de la correlación entre la cobertura de vegetación y la humedad del suelo.

Con el fin de alcanzar estos objetivos se ha estructurado la Tesis en los siguientes capítulos:

- Capítulo 1: corresponde a esta introducción en la que se describe el marco en el que se encuadra la Tesis y se describen los objetivos que se persiguen con la misma.
- Capítulo 2: descripción de los principales conceptos de teledetección, centrándonos en los sistemas ópticos pasivos, así como los satélites y sensores utilizados y los índices biofísicos en los que se basa la investigación.
- Capítulo 3: desarrollo de los conceptos matemáticos de los análisis fractal y multifractal y su aplicación a las imágenes de los satélites.
- Capítulo 4: aplicación de los conceptos y algoritmos descritos en los capítulos teóricos anteriores para alcanzar los objetivos descritos más arriba.
- Capítulo 5: recopilación de las conclusiones

2 CONCEPTOS DE TELEDETECCIÓN

Tradicionalmente los estudios sobre la vegetación en la superficie terrestre han sido, y son, una de las aplicaciones más importantes de los satélites dedicados a la observación de la Tierra. Desde que comenzara esta actividad, en 1972 con la puesta en órbita del primer satélite **Landsat**, hasta los más recientes satélites de la constelación europea **Sentinel**, y pasando por los de muy alta resolución puestos en órbita a lo largo de estas dos últimas décadas, los satélites de Observación de la Tierra han llevado a bordo instrumentos diseñados para, entre otras aplicaciones, el análisis de la cubierta vegetal a diferentes escalas.

A través de las imágenes que proporcionan es posible calcular una multitud de parámetros biofísicos que nos revelan tanto el estado como la dinámica de la cobertura vegetal. Así, la repetitividad temporal necesaria para caracterizar esta dinámica es asegurada por los sensores espaciales que observan la superficie terrestre a baja, media o alta resolución espacial.

En este capítulo se revisarán los principios físicos en los que se basa la teledetección como técnica de observación de la Tierra desde el espacio. Se detallarán las características de los satélites y sensores utilizados para el desarrollo de los trabajos que se expondrán en la presente Tesis. Y, finalmente, se describirán los parámetros biofísicos cuyas medidas a partir de las imágenes de satélite permite caracterizar la cobertura vegetal.

2.1 Principios físicos de la Teledetección desde satélites

La Observación de la Tierra desde satélite, también denominada **teledetección espacial**, consiste en una serie de tecnologías cuyo objeto es la adquisición de información de un sistema dinámico terrestre, sin entrar en contacto material con él, mediante sensores instalados en plataformas espaciales (satélites), y el posterior análisis de dicha información por medio de procesamiento digital e interpretación de imágenes, todo ello en el contexto de una determinada aplicación (figura 2.1).

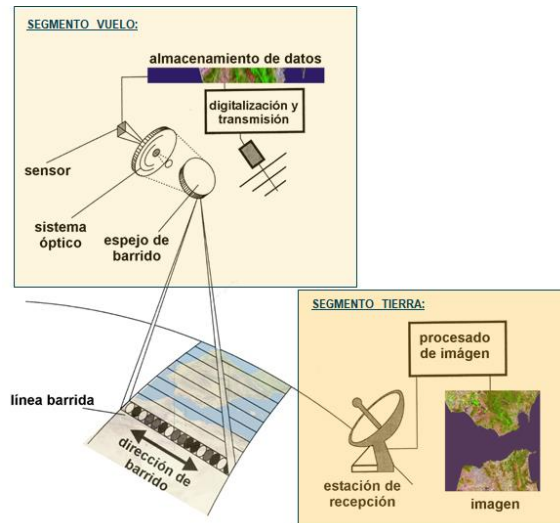


Figura 2.1 Esquema que muestra el conjunto de tecnologías que constituyen el marco conceptual de la teledetección espacial. Este marco se divide esencialmente en dos componentes: el segmento vuelo, formado por el satélite y los sistemas embarcados en él, y el segmento tierra, formado por la estación de control y la antena para la recepción de los datos.

De esta manera, la teledetección permite obtener información "a distancia" de la superficie terrestre. Este intercambio de información, entre sistema terrestre y sensor, se realiza a través de un flujo de energía electromagnética, que puede tener un carácter unidireccional (sistema → sensor), constituyendo lo que se conoce como **teledetección pasiva**, o bidireccional (sensor → sistema → sensor), denominándose entonces **teledetección activa** (Alonso y Moreno, 2002).

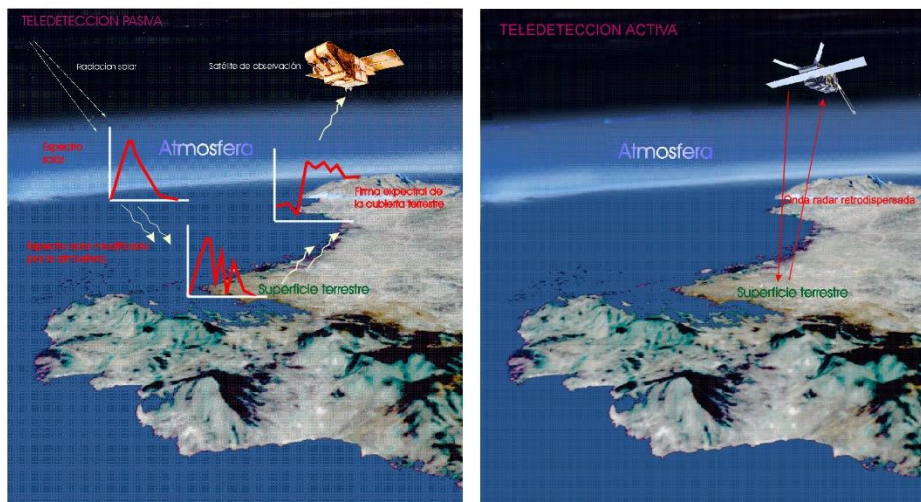


Figura 2.2 Según el carácter unidireccional o bidireccional del flujo de radiación entre la superficie terrestre y el sensor tenemos, respectivamente, la teledetección pasiva (izquierda) frente a la teledetección activa (derecha). Fuente: Alonso y Moreno (2002).

En la teledetección pasiva (figura 2.2, izquierda) las fuentes primarias de radiación son el Sol o la propia Tierra. Se trata de fuentes incoherentes en las que la energía se encuentra distribuida a lo largo del espectro electromagnético. En este esquema, los sensores trabajan en las regiones del visible y diversas partes del infrarrojo (midiendo la radiación solar reflejada), incluido el térmico (midiendo la radiación emitida por la propia Tierra), con longitudes de onda del orden de micrómetros. En la atmósfera, previamente a su interacción con la superficie terrestre, esta energía se ve sometida a modificaciones de intensidad y distribución espectral. Tras la interacción con la superficie, la energía reflejada vuelve a través de la atmósfera siendo, de nuevo, modificada antes de alcanzar el sensor, donde finalmente es recogida. La información así obtenida es posteriormente enviada a las estaciones receptoras en Tierra para su procesamiento posterior.

En la teledetección activa (figura 2.2, derecha), el sistema terrestre que se pretende observar se irradia con una fuente de radiación coherente instalada en el propio satélite. Esto supone la independencia respecto de la iluminación externa, por lo que tenemos la posibilidad de controlar la radiación electromagnética emitida (potencia, longitud de onda, polarización, ángulo de iluminación, fase), registrando el sensor la radiación dispersada por la superficie terrestre hacia el mismo, tanto de día como de noche. Esta es la forma habitual de funcionamiento de los radares de apertura sintética. En este caso, los sensores trabajan en la región del espectro correspondiente a las microondas. Esto es lo que les proporciona su gran ventaja como sistema de observación de la Tierra, porque la radiación no se ve alterada por la presencia de la atmósfera o lo hace débilmente de manera que su funcionamiento es independiente de la cobertura nubosa. Se dice que este tipo de sensores pueden “ver” a través de las nubes.

2.1.1 El espectro electromagnético

Como se ha mencionado, el intercambio de información entre superficie terrestre y sensores se realiza gracias a la **radiación electromagnética** cuya energía se distribuye en el **espectro electromagnético**, abarcando desde los muy energéticos rayos gamma hasta las débiles ondas de radio.

De este amplio espectro, los sensores espaciales dedicados a la Observación de la Tierra utilizan un rango reducido de longitudes de onda que van desde el **espectro visible**, comprendido entre $0.4 \mu\text{m}$ y $0.7 \mu\text{m}$, hasta el rango de las **microondas**, con valores de longitud de onda de pocos centímetros a varias decenas, pasando por el ámbito intermedio de la **radiación infrarroja**, próximo (NIR), medio (SWIR y MIR) y térmico (TIR). La figura 2.3 muestra el espectro electromagnético con su distribución en función de las longitudes de onda, así como el rango utilizado por los sensores de teledetección.

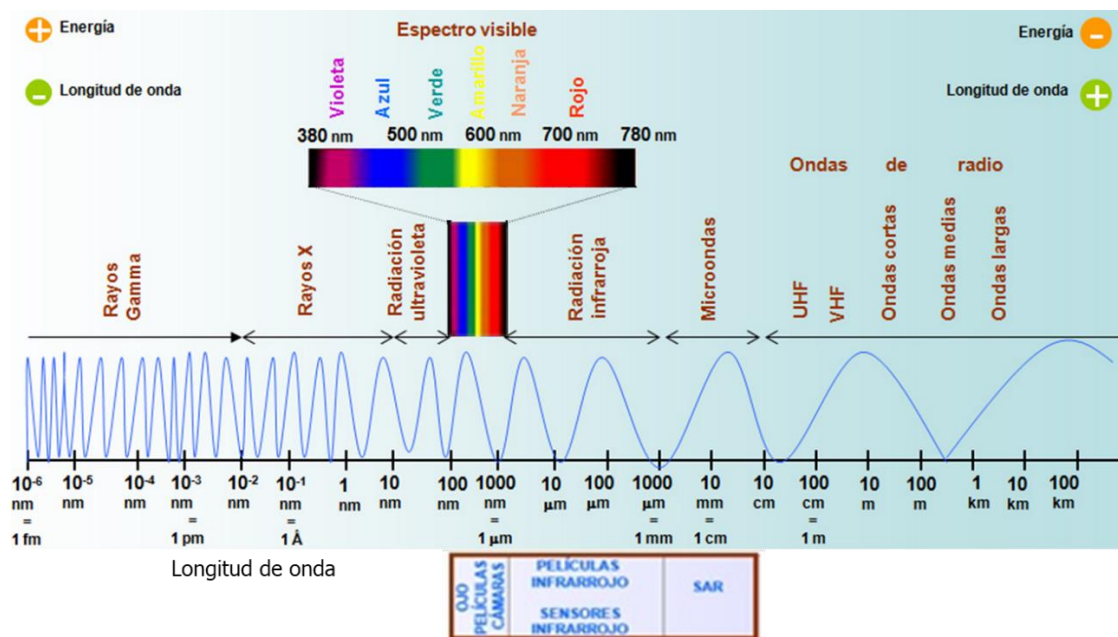


Figura 2.3 Distribución de los distintos tipos de radiación en el espectro electromagnético, según su longitud de onda. La radiación más energética se corresponde con las longitudes de onda más pequeñas, las menos energéticas lo hacen con las longitudes más largas. En el recuadro rojo se destaca el rango de longitudes de onda utilizados por distintos sensores en teledetección, tanto ópticos como radares (SAR).

Por otro lado, en el rango del espectro utilizado por los sensores de teledetección la adquisición de información procedente de la Tierra se ve mermada por la acción de ciertos gases atmosféricos. Esta acción convierte a la atmósfera en un filtro selectivo a distintas longitudes de onda, de tal forma que en algunas regiones del espectro se hace prácticamente imposible la observación.

Como consecuencia, no tiene ningún sentido construir dispositivos que detecten en aquellas longitudes de onda para las que la atmósfera es absorbente. Las principales

ventanas atmosféricas (figura 2.4), nombre con el que se conoce a las regiones del espectro para las que la atmósfera es transparente, son: en el visible e infrarrojo cercano entre 0.4 y 1.35 μm ; en el infrarrojo medio entre 1.5 y 1.8 μm , entre 2 y 2.4 μm , entre 2.9 y 4.2 μm y entre 4.5 y 5.5 μm ; en el infrarrojo térmico entre 8 y 14 μm ; y las microondas por encima de 2 cm.

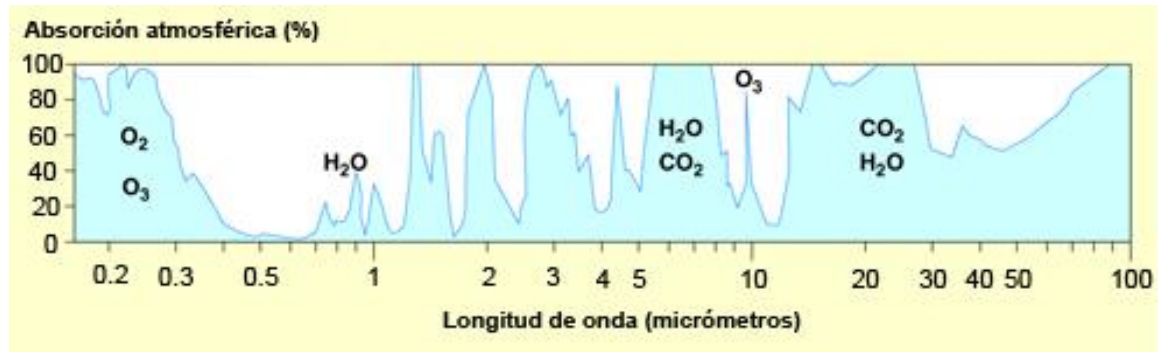


Figura 2.4 Curva que muestra el porcentaje de radiación absorbida por los diferentes componentes de la atmósfera en función de la longitud de onda. El oxígeno y el ozono son responsables de la fuerte absorción por debajo de los 0.3 μm . El vapor de agua y el dióxido de carbono lo son para la fuerte absorción entre 6 y 8 μm y por encima de 14 μm . Las regiones con porcentajes de absorción muy bajos se conocen como "ventanas atmosféricas". Fuente: adaptada de Eduspace, ESA.

En el apartado siguiente se expondrán brevemente las definiciones de las principales magnitudes físicas que se utilizan para caracterizar la radiación electromagnética y su interacción con la materia en el campo de la Observación de la Tierra.

2.1.2 Magnitudes radiométricas

Comenzamos las definiciones de las magnitudes radiométricas por la propia energía asociada con la onda electromagnética, a la que denominaremos como **energía radiante**. Denotaremos esta magnitud mediante el símbolo Q , siendo su unidad en el SI el *Julio* [J]. La cantidad de energía radiante por unidad de volumen es lo que denominamos **densidad de energía radiante**.

Definiremos el **flujo radiante** como la energía radiante que es emitida, transportada o recibida en un punto por unidad de tiempo. Denotamos el flujo radiante con el símbolo Φ , siendo su unidad en el SI el *vatio* [W] y la expresión que lo define

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (2.1)$$

Otra importante magnitud radiométrica es la **densidad del flujo radiante**, que corresponde al flujo radiante que es interceptado por un elemento de superficie dA . Se mide en unidades de $W \cdot m^{-2}$, en el SI, y la expresión matemática que la define es la siguiente

$$E = \frac{d\Phi}{dA} \quad (2.2)$$

Esta magnitud se denomina **irradiancia**, E , cuando la superficie recibe la radiación y **emitancia radiante**, M , cuando la radiación es emitida por la superficie. Ésta última es la principal magnitud cuando se trabaja con sensores térmicos, con los que es posible estimar la temperatura de la superficie terrestre.

Un aspecto importante que debe considerarse en el ámbito de la teledetección es la atenuación que sufre la radiación con la distancia que separa la fuente del sensor. La intensidad de la radiación disminuye siguiendo una ley inversa con el cuadrado de la distancia a la fuente de emisión. Es decir, el flujo radiante se dispersa en una superficie esférica centrada en la fuente que va aumentando con el cuadrado del radio R . De tal modo que a la distancia R la irradiancia disminuye según la expresión

$$E = \frac{\Phi}{4\pi R^2} \quad (2.3)$$

Esta disminución obliga a que los sensores embarcados en los satélites trabajen con una gran sensibilidad, en especial los sensores que trabajan en la parte nocturna de la órbita captando la información en el rango del espectro visible.

Por otro lado, la emisión de energía por fuentes como el Sol depende de la longitud de onda, por lo cual se utiliza el término **irradiancia espectral**, E_λ , para describir cuanta densidad de flujo radiante hay disponible incrementando el rango de longitudes de onda. Esta irradiancia espectral se mide en unidades de $W m^{-2} \mu m^{-1}$ en el SI.

La irradiancia, al alcanzar una superficie, es en parte reflejada (constituyendo el **albedo** de la superficie), en parte absorbida y en parte transmitida por la porción de superficie en cuestión. La fracción reflejada del flujo incidente se conoce como **reflectividad**, ρ . La fracción absorbida por la superficie se conoce como **absortividad**, α . Y la fracción transmitida a través de la superficie se denomina **transmisividad**, τ . El principio de conservación de la energía exige que la suma de estas tres cantidades sea la unidad

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (2.4)$$

En teledetección pasiva, la superficie terrestre es considerada opaca y, por tanto, de nula transmisividad, por lo que las fracciones reflejada y absorbida son complementarias.

$$\rho + \alpha = 1 \quad (2.5)$$

Parte de la fracción absorbida de la energía es posteriormente emitida por la superficie, constituyendo su **emisividad**, ϵ . Todas estas magnitudes son adimensionales.

Mientras que la reflexión se centra en la banda del espectro electromagnético con longitudes de onda comprendidas entre 0.3 y 3 μm , la emisión lo hace en la banda del infrarrojo térmico, entre 7 y 18 μm (esta banda es utilizada por los sensores pasivos para determinar la temperatura de la superficie terrestre a partir de su relación con la cuarta potencia de la temperatura, conocida como ley de Stefan-Boltzmann). Es en estos dos fenómenos físicos, la reflexión y la emisión de energía, en los que se fundamentan las medidas de teledetección pasiva.

Por último, la magnitud radiométrica por excelencia en teledetección es la **radiancia**, ya que esta magnitud constituye la señal de entrada en el sensor. La radiancia se define como el flujo radiante en un determinado ángulo sólido $d\Omega$ que atraviesa una superficie perpendicular, $dA \cdot \cos\theta$, a la dirección de propagación θ de la radiación. Su unidad de medida en el SI es $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}$ y la expresión matemática que la define es

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\Omega \cdot dA \cdot \cos\theta} = \frac{dE}{d\Omega \cdot \cos\theta} \quad (2.6)$$

Cuando la radiancia procedente de una superficie es independiente de la dirección de emisión, esto es, se produce la reflexión difusa en cualquier dirección (figura 2.5), la superficie se denomina **lambertiana**. En este caso, la radiación reflejada es a la vez independiente del ángulo reflejado e independiente del ángulo en el que se ilumina el objeto. En el caso de una distribución isótropa de la radiación (para todo el hemisferio superior), la ecuación 3.6 puede integrarse relacionando la irradiancia de entrada con la radiancia de salida

$$E = \int L \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \quad (2.7)$$

Donde $d\Omega$ son los incrementos de ángulo sólido cubriendo el hemisferio superior. Si la radiancia es independiente del ángulo cenital, la integral se convierte en

$$E = L \cdot \int \cos\theta \cdot d\Omega = \pi \cdot L \quad (2.8)$$

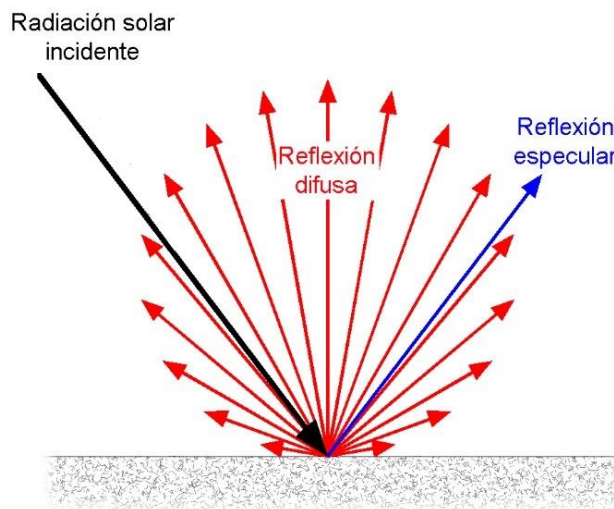


Figura 2.5. Representación del comportamiento de una superficie respecto a la irradiación incidente, representada por la flecha de color negro. La flecha de color azul representa la reflexión especular producida por un espejo. Las flechas de color rojo representan la reflexión difusa producida por una superficie lambertiana ideal (Fuente: adaptada de Wikipedia).

Si tenemos en cuenta la dependencia espectral tanto de la irradiancia como de la radiancia, la ecuación 2.8 quedaría como

$$E_{\lambda} = \pi \cdot L_{\lambda} \quad (2.9)$$

Para mostrar cómo se utilizan estas magnitudes en el campo de lo que hemos denominado teledetección pasiva, consideremos, en ausencia de atmósfera, que la irradiancia espectral solar sobre la Tierra viene dada por E_{λ} . Si esta magnitud se mide en la posición del satélite, esto es en el techo de la atmósfera, se denomina **irradiancia espectral solar exoatmosférica** y la denotaremos por E_{λ}^0 .

Según la ecuación 2.3, la irradiancia solar que alcanza la Tierra cambia ligeramente con la época del año debido a que la órbita terrestre es ligeramente elíptica, siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la Tierra y el Sol, que denotaremos como d_{T-S} y que estará medida en UA (unidades astronómicas).

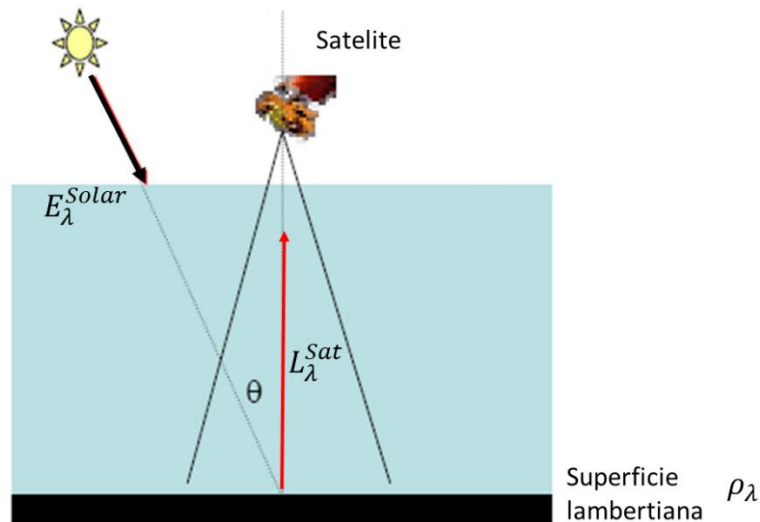


Figura 2.6 Relación geométrica entre la irradiancia espectral solar (flecha negra) sobre la superficie terrestre horizontal y la radiancia espectral (flecha roja) recibida por el satélite. La primera varía a lo largo del año según la elevación del Sol sobre la superficie y la excentricidad de la órbita terrestre. La segunda depende de la primera y la reflectividad de la propia superficie, ρ_{λ} .

Por otro lado, la iluminación de una superficie terrestre horizontal varía con el ángulo cenital solar, θ , que es el ángulo entre la normal a la superficie y la radiación solar incidente (figura 2.6). Por tanto, la irradiancia solar sobre la superficie de la Tierra, como hemos dicho sin contar con la atmósfera, sería entonces

$$E_{\lambda}^{solar} = \frac{E_{\lambda}^0 \cdot \cos\theta}{(d_{T-S})^2} \quad (2.10)$$

Esto es, la irradiancia espectral solar exoatmosférica a lo largo del año se corrige mediante dos parámetros: uno que determina la iluminación de la escena (θ) y el otro la variación de la distancia entre el Sol y la Tierra a lo largo del año (d_{T-S}).

Supongamos que la superficie tiene una reflectividad ρ_λ . Como hemos visto, ésta indica qué proporción de la energía incidente es reflejada por la superficie. Por lo tanto, si la superficie es difusa entonces la ecuación 2.9 quedaría como

$$\rho_\lambda \cdot E_\lambda^{Solar} = \pi \cdot L_\lambda^{Sat} \quad (2.11)$$

Si sustituimos aquí la ecuación 3.10 se obtiene

$$\rho_\lambda = \frac{\pi \cdot L_\lambda^{Sat}}{E_\lambda^{Solar}} = \frac{\pi \cdot L_\lambda^{Sat} \cdot (d_{T-S})^2}{E_\lambda^0 \cdot \cos\theta} \quad (2.12)$$

En el marco de la teledetección pasiva que estamos describiendo, esta ecuación 2.12 es la ecuación radiométrica fundamental. El objetivo es, por tanto, calcular la reflectividad espectral de la superficie a partir de los datos adquiridos por el satélite y relacionar este parámetro con magnitudes biofísicas del paisaje.

En el siguiente apartado veremos cómo los sensores embarcados en un satélite de observación de la Tierra transforman la radiancia espectral que reciben en una imagen y cómo a partir de la imagen se puede obtener la radiancia espectral, L_λ^{Sat} .

2.1.3 Detección de la radiación electromagnética: sensores

Los sensores pasivos embarcados en los satélites son los encargados de detectar la radiancia procedente de la superficie terrestre. Aunque no vamos a detallar los tipos de sensores, es necesario mencionar que hoy existen dos tipos de tecnologías utilizadas para la fabricación de estos sensores electro-ópticos: los CCD (*Charge Coupled Device*) y los CMOS (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*). Ambos tipos de sensores están formados básicamente por semiconductores de metal-óxido (MOS) y están distribuidos en forma de matriz (figura 2.7).

Básicamente, su funcionamiento se basa en la acumulación de una carga eléctrica en cada una de las celdas que componen dicha matriz. Estas celdas son los llamados

píxeles. La carga eléctrica que está almacenada en cada píxel, depende de la cantidad de radiación electromagnética que incide sobre el mismo. Cuanto mayor sea la cantidad de radiación que incide sobre un píxel, tanto mayor será la carga que este adquiera. De esta manera, el sensor recibe un flujo de energía que transforma en una señal eléctrica. Esta señal será, finalmente, digitalizada y codificada en un número entero, que denominaremos **valor digital**, VD (o nivel de gris).

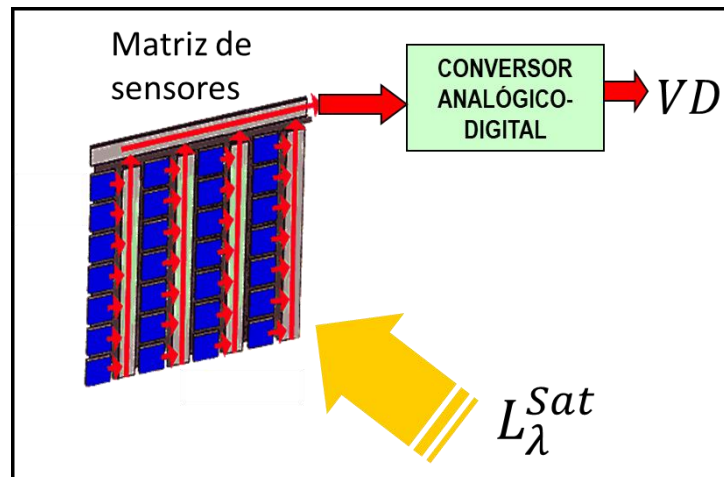


Figura 2.7 Esquema general de funcionamiento de un sensor electro-óptico. Un sistema óptico se encarga de dirigir la radiancia L_{λ}^{Sat} procedente de la Tierra hacia su plano focal donde se sitúa la matriz de sensores. Estos se encargan de convertir la radiancia en una señal eléctrica que, finalmente es transformada en un número entero o valor digital, VD, gracias a un convertidor analógico-digital. El conjunto de los VD de cada uno de los píxeles que componen la matriz del sensor constituyen la imagen digital que el satélite envía a Tierra para su análisis.

En general, la señal eléctrica en que un sensor transforma la energía que recibe no será la misma para todas las longitudes de onda que conforman la radiación incidente. Motivo por el cual cada sensor viene caracterizado por su llamada **función de respuesta espectral**, $S(\lambda)$. En la figura 2.8 se representan a modo de ejemplo las funciones de respuesta espectral de los diferentes sensores que contiene el instrumento MSI (*MultiSpectral Instrument*) embarcado en los satélites Sentinel-2.

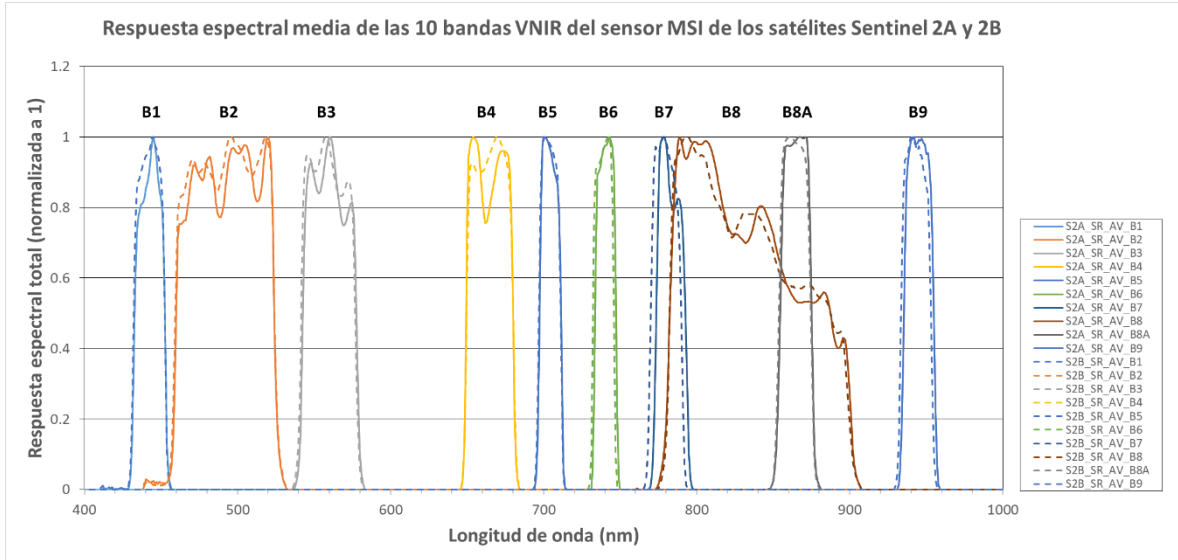


Figura 2.8 Funciones de respuesta espectral para los sensores VNIR de los dos satélites europeos Sentinel-2A (líneas continuas) y Sentinel-2B (líneas discontinuas). Estas funciones caracterizan cada uno de los sensores que forman cada una de las bandas espectrales que registran (indicadas en la parte superior de las funciones). En particular determinan el rango espectral en el que cada sensor es operativo y que se corresponde con la anchura de la correspondiente banda.

La respuesta espectral es, por tanto, una función que filtra la radiancia entrante en el sensor proporcionando la señal de salida del mismo. De esta manera, la señal de salida del sensor, V , es una función de la radiancia espectral, L_{λ} , y de la respuesta espectral del sensor, $S(\lambda)$. Esta función es lineal dentro de un rango determinado de longitudes de onda en, prácticamente, la mayoría de los sensores. De esta manera, la señal de salida del sensor vendrá dada por

$$V(\lambda) = a_{\lambda} \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_{\lambda} \cdot S(\lambda) \cdot d\lambda + b_{\lambda} \quad (2.13)$$

Donde a_{λ} es un factor de proporcionalidad de la respuesta del sensor y b_{λ} una constante aditiva propia del sensor. Si definimos la media ponderada de la radiancia a partir de la función de respuesta espectral como

$$\langle L_{\lambda} \rangle = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_{\lambda} \cdot S(\lambda) \cdot d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} S(\lambda) \cdot d\lambda} \quad (2.14)$$

Con esta definición, la ecuación 2.13 puede reescribirse, reordenando los términos, como

$$\langle L_\lambda \rangle = G_\lambda \cdot V(\lambda) + O_\lambda \quad (2.15)$$

Donde G_λ y O_λ son constantes características del sensor dentro del rango de longitudes de onda de operación. Para determinar estos parámetros, normalmente, los sensores se calibran exponiéndolos al menos a dos valores conocidos de radiancia espectral.

Por lo tanto, los sensores electro-ópticos embarcados en los satélites transforman la radiancia que reciben en el valor digital de salida, que forma parte de la imagen adquirida por el sensor. Esta transformación sigue la relación lineal dada por la ecuación 2.15. Si denominamos el valor digital (entre 0 y 255, por ejemplo, si el sensor codifica los datos en 8 bit) como VD , entonces la ecuación 2.15 puede escribirse como

$$L = k \cdot VD + L_{min} \quad (2.16)$$

Donde el parámetro multiplicativo de la relación lineal viene dado por

$$k = \frac{L_{max} - L_{min}}{VD_{max}} \quad (2.17)$$

Siendo L_{max} y L_{min} los valores máximo y mínimo de la radiancia medida por el sensor, los dos valores extremos para los que el sensor es calibrado. Y VD_{max} corresponde al valor digital que corresponde a la radiancia máxima. En este caso, el sensor se ha calibrado para que el valor mínimo de radiancia corresponda al valor digital: $VD_{min} = 0$.

El proceso matemático que representan las ecuaciones 2.16 y 2.17 constituye lo que en el campo de la teledetección pasiva se conoce como **calibración radiométrica**. Este proceso permite abordar uno de los principales retos con que se enfrentan quienes trabajan con imágenes de satélite: la transformación de los datos registrados por el sensor y representados por los VD de dichas imágenes en magnitudes físicas representadas por la radiancia o la reflectividad.

2.1.4 Efecto de la atmósfera. Corrección atmosférica

Las ecuaciones que hemos visto en los apartados anteriores se refieren al caso ideal en el que no existe atmósfera. Si tenemos en consideración la capa gaseosa de la Tierra que denominamos atmósfera, existen algunos procesos que es necesario tener en cuenta y que tienen como consecuencia la modificación de las ecuaciones vistas anteriormente. Estos procesos son el resultado de la dispersión y absorción de la radiación producida por las partículas sólidas y las moléculas de los gases presentes en la atmósfera y tienen como consecuencia la reducción de la radiación que alcanza el sensor.

Como vimos en la figura 2.4, uno de los efectos de los gases que componen la atmósfera sobre el espectro solar es la absorción selectiva total o parcial de la radiación electromagnética que llega a la Tierra.

Otro de los efectos provocados por los gases y, especialmente, los aerosoles atmosféricos en el espectro solar que alcanza la superficie es la dispersión de la radiación electromagnética. Los principales mecanismos que producen esta dispersión son:

- La **dispersión Rayleigh**, que se produce cuando la longitud de onda de la radiación es mucho menor que el tamaño de las partículas o moléculas responsables de la dispersión. Su intensidad es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda, por lo que la radiación con menor longitud de onda del espectro visible se verá más afectada.
- La **dispersión de Mie**, que se produce cuando la longitud de onda de la radiación es del mismo orden de magnitud que el tamaño de las partículas o moléculas responsables de la dispersión.

El resultado conjunto de estos fenómenos es la reducción de la irradiancia solar que alcanza la superficie de la Tierra mediante la transmisividad espectral, τ_λ , de la atmósfera. Matemáticamente significa que la ecuación 2.10 debe corregirse con este parámetro de manera que la parte de irradiancia espectral solar, E_λ^{Solar} , que alcanza la superficie vendrá dada por el producto

$$E_{\lambda}^{suelo} = \tau_{\lambda}^{\downarrow} \cdot E_{\lambda}^{Solar} \quad (2.18)$$

Donde $\tau_{\lambda}^{\downarrow}$ representa la transmisividad espectral atmosférica en la dirección de la radiación solar incidente, del techo de la atmósfera al suelo, y E_{λ}^{Solar} , la irradiancia solar que alcanza la Tierra dada por la ecuación 2.10. La ecuación 2.18 es la definición de la transmisividad espectral atmosférica en la dirección de la radiación solar incidente (figura 2.9).

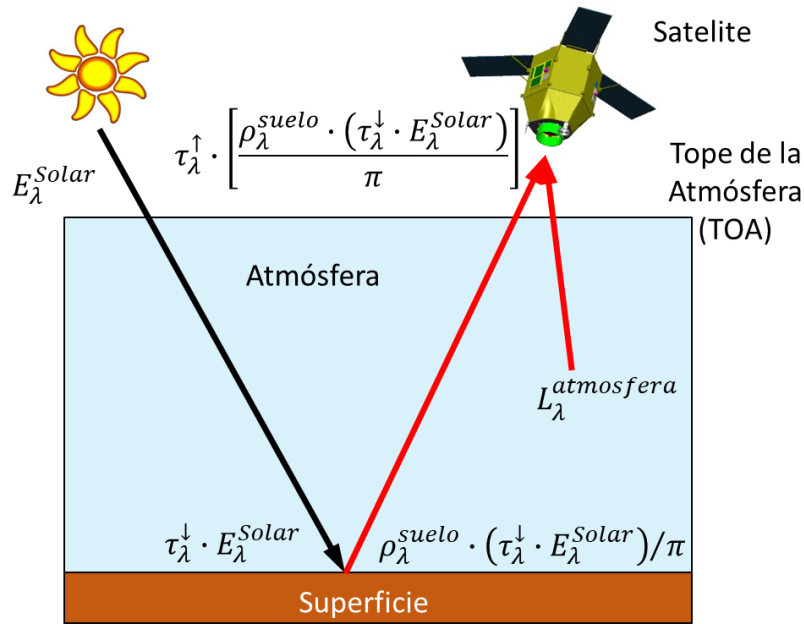


Figura 2.9 Relación geométrica entre la irradiancia espectral solar (flecha negra) sobre la superficie terrestre horizontal y la radiancia espectral (flechas rojas) recibida por el satélite considerando los efectos de la atmósfera. La primera se ve atenuada por la transmisividad espectral atmosférica, $\tau_{\lambda}^{\downarrow}$, en la dirección de la radiación solar incidente. La segunda se ve atenuada por la transmisividad espectral atmosférica, $\tau_{\lambda}^{\uparrow}$, en la dirección del satélite. Junto a esta radiancia procedente del suelo, al sensor también le llega la componente procedente de la propia atmósfera.

Si consideramos la superficie terrestre como una superficie lambertiana, la transferencia de energía devuelta por la superficie hacia el sensor, o radiancia espectral del suelo, dependerá de su reflectividad espectral. En este caso la ecuación 2.11 se transformará en

$$\pi \cdot L_{\lambda}^{suelo} = \rho_{\lambda}^{suelo} \cdot (\tau_{\lambda}^{\downarrow} \cdot E_{\lambda}^{Solar}) \quad (2.19)$$

Esto es, la radiancia saliente de la superficie hacia el sensor viene dada por

$$L_{\lambda}^{suelo} = \frac{\rho_{\lambda}^{suelo} \cdot (\tau_{\lambda}^{\downarrow} \cdot E_{\lambda}^{Solar})}{\pi} \quad (2.20)$$

Esta ecuación es el resultado de considerar el modelo más simple de interacción entre la radiación y el suelo, esto es el caso ideal en que éste se comporta como una superficie lambertiana. Los modelos más complejos de superficies no lambertianas, que consideran un comportamiento más realista del suelo en su interacción con la radiación, expresan dicha interacción mediante una función denominada Función de Distribución de Reflectancia Bidireccional (BRDF). En este caso, la cantidad $\rho_{\lambda}^{suelo} / \pi$ en la ecuación 2.20 se sustituye por la BRDF.

La radiancia L_{λ}^{suelo} , en su camino hacia el satélite, sufrirá los procesos de dispersión y absorción que hemos visto. Por lo que ahora, para estimar la radiancia que alcanza el sensor en la posición del satélite tendremos que considerar la transmisividad espectral atmosférica en la dirección del satélite, $\tau_{\lambda}^{\uparrow}$. Por otro lado, al sensor también le llega parte de la radiación electromagnética dispersada por la propia atmósfera que denotaremos por $L_{\lambda}^{atmosfera}$ (figura 2.9). Por tanto, la radiancia que finalmente llega al sensor en la posición del satélite, en el tope de la atmósfera (TOA), viene dada por

$$L_{\lambda}^{sensor} = \tau_{\lambda}^{\uparrow} \cdot L_{\lambda}^{suelo} + L_{\lambda}^{atmosfera} \quad (2.21)$$

Que es la versión más sencilla de la **ecuación de transferencia radiativa**. Si sustituimos la ecuación 2.20 en 2.21 obtenemos

$$L_{\lambda}^{sensor} = \frac{\rho_{\lambda}^{suelo} \cdot \tau_{\lambda} \cdot E_{\lambda}^{Solar}}{\pi} + L_{\lambda}^{atmosfera} \quad (2.22)$$

siendo $\tau_{\lambda} = \tau_{\lambda}^{\uparrow} \cdot \tau_{\lambda}^{\downarrow}$ la transmisividad espectral atmosférica total.

Si normalizamos la ecuación 2.22 dividimos ambos miembros de la ecuación por la irradiancia solar, E_{λ}^{Solar} , obtenemos

$$\rho_{\lambda}^{sensor} = \tau_{\lambda} \cdot \frac{\rho_{\lambda}^{suelo}}{\pi} + \rho_{\lambda}^{atmosfera} \quad (2.23)$$

Donde se ha definido el cociente $L_{\lambda}^{sensor} / E_{\lambda}^{Solar}$ como una reflectividad espectral medida en el sensor y el cociente $L_{\lambda}^{atmosfera} / E_{\lambda}^{Solar}$ como una reflectividad espectral atmosférica. Si reordenamos la ecuación 3.23 se obtiene

$$\frac{\rho_{\lambda}^{suelo}}{\pi} = \frac{\rho_{\lambda}^{sensor} - \rho_{\lambda}^{atmosfera}}{\tau_{\lambda}} \quad (2.24)$$

Esto es, la ecuación de transferencia radiativa permite obtener la reflectividad en superficie en función de la reflectividad medida en el sensor y una serie de parámetros atmosféricos, $\rho_{\lambda}^{atmosfera}$ y τ_{λ} .

La ecuación 2.24 nos permite definir la **corrección atmosférica** como el proceso mediante el cual eliminamos de la señal detectada por el sensor la perturbación producida por la atmósfera. Así, en el rango visible del espectro solar, la corrección atmosférica nos permite transformar las reflectividades medidas por el sensor en el tope de la atmósfera (TOA) en reflectividades medidas en la superficie terrestre.

2.1.5 Resoluciones de un sensor

Hemos visto en las secciones anteriores que el resultado final que produce un sensor, embarcado en un satélite de observación de la Tierra, es una imagen digital de la superficie de la misma. La capacidad de discriminar información a partir de estas imágenes depende de cuatro parámetros, denominados globalmente como **resoluciones**. Estas son: **espacial**, **espectral**, **radiométrica** y **temporal**. Las tres primeras dependen de las características de los detectores CCD, la óptica y la electrónica. La cuarta depende de las características orbitales y la maniobrabilidad de la plataforma.

Las resoluciones de un sensor constituyen, por tanto, un conjunto de parámetros que permiten caracterizarlo y definir las aplicaciones de la información que proporciona. Sin pretender ser exhaustivos, en esta sección analizaremos cada una de las cuatro resoluciones.

Resolución espacial de un sensor

De los cuatro parámetros, la resolución espacial es uno de los más importantes. Se entiende por ésta la capacidad del sensor para separar dos objetos próximos sobre la superficie.

Como vimos en la sección 2.1.3, los sensores electro-ópticos almacenan la información en una matriz bidimensional de píxeles que tienen un determinado tamaño. Además, hay que tener en cuenta que un sistema óptico es el encargado de dirigir la radiancia recibida hacia su plano focal donde se sitúan los sensores. Por tanto, esta resolución es el resultado de la sinergia entre dos conceptos físicos: la proyección del tamaño del píxel que sobre el terreno produce el sistema óptico, por un lado, y los efectos que la difracción resultante de la apertura del sistema óptico produce sobre la matriz de píxeles, por el otro.

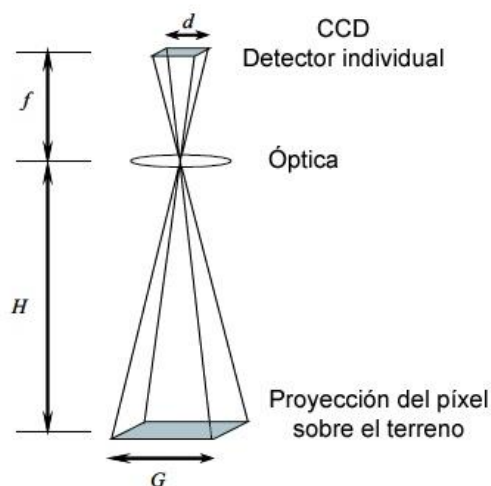


Figura 2.10 Proyección geométrica sobre la Tierra de un elemento detector individual situado en el plano focal del sistema óptico del que forma parte el sensor. En la figura se han exagerado la dimensión del detector, d , y la focal, f , comparadas con la altura orbital del satélite, H . La proyección perpendicular al suelo (nadir) del elemento detector depende de esos tres parámetros. Esta constituye la definición más intuitiva de resolución espacial de un sensor.

Con respecto a la proyección del tamaño del píxel sobre el terreno (figura 2.10), también denominado Campo de Visión Instantáneo proyectado al Terreno (*Ground-projected Instantaneous Field of View* o GIFOV), G , éste viene determinado por la altura a la que se encuentra el sensor H , esto es, la altitud de la órbita del satélite; la longitud focal, f , del sistema óptico (telescopio) del que forma parte el sensor en

su plano focal y el tamaño del detector, d , en la matriz de píxeles del sensor. Esta relación en el nadir viene dada por la ecuación

$$G = \frac{H}{f} \cdot d \quad (2.25)$$

Pero éste es un concepto estático, que no tiene en cuenta el hecho de que el satélite se mueve a lo largo de su órbita. Una variación dinámica del concepto de GIFOV es el de Distancia de Muestreo en el Suelo (*Ground Sampling Distance* o GSD), que es una medida de la distancia a la que son grabados dos píxeles consecutivos sobre el terreno. Aunque conceptualmente son distintos suelen considerarse como sinónimos de la resolución espacial.

La otra componente que caracteriza la resolución espacial de un sensor de teledetección se debe a la naturaleza ondulatoria de la radiación electromagnética. Concretamente a la limitación debida a la difracción producida por el sistema óptico encargado de conducir la radiancia recibida hacia el sensor. El efecto de esta difracción sobre el GIFOV en el sistema óptico es producir manchas degradadas sobre el sensor con la consiguiente reducción del contraste.

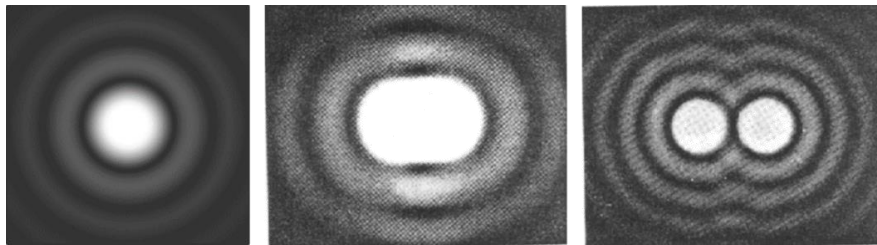


Figura 2.11 Patrón de difracción producido por una radiancia entrante uniforme, procedente de una fuente puntual, sobre una apertura circular (izquierda). Este patrón se conoce como patrón de Airy. Lo ideal es que el tamaño de la mancha central, o disco de Airy, sea inferior al tamaño de un píxel detector del sensor. Fuente: Wikipedia.

Si consideramos una radiancia entrante uniforme sobre una apertura circular, el patrón de difracción que alcanzará a un detector tiene una región central brillante denominada disco de Airy (figura 2.11 izquierda) rodeada de una serie de anillos concéntricos. El tamaño del disco central está relacionado con la longitud de onda de la radiación electromagnética y el diámetro de la apertura circular, de manera que su diámetro viene dado por la siguiente expresión

$$d_{Airy} = 2.44 \cdot \frac{\lambda \cdot f}{D} \quad (2.26)$$

El criterio que permite determinar si un sistema óptico tiene la capacidad de "resolver" dos focos próximos es que el centro del disco de Airy correspondiente al primer foco esté, como mínimo, a la distancia del primer mínimo del patrón de difracción del segundo foco (figura 2.11 centro y derecha).

A modo de ejemplo vamos a aplicar las ecuaciones anteriores para estimar la resolución espacial del sensor MSI embarcado en los satélites europeos Sentinel-2A y 2B. Su altura orbital es de 786 km, la distancia focal del telescopio que forma parte del instrumento MSI es de 59.8 cm y su apertura de 15 cm. En cuanto al tamaño de los detectores que conforman la matriz del sensor, tenemos una configuración con diferentes dimensiones [Gascon et al. 2017]. Los píxeles que proporcionan mayor resolución tienen un tamaño de $7.5 \times 7.5 \mu\text{m}^2$ mientras que los de resolución media tienen un tamaño de $15 \times 15 \mu\text{m}^2$. Aplicando estos parámetros en la ecuación 3.25 obtenemos:

$$G_{10} = \frac{0.0075 \text{ mm} \cdot 786000 \text{ m}}{598 \text{ mm}} = 9.86 \text{ m}$$

$$G_{20} = \frac{0.015 \text{ mm} \cdot 786000 \text{ m}}{598 \text{ mm}} = 19.72 \text{ m}$$

El primer resultado corresponde a la resolución de 10 m para las bandas B02, B03, B04 y B08. El segundo corresponde a la resolución de 20 m para las bandas B05, B06, B07, B08A, B11 y B12.

Por otro lado, aplicando los parámetros anteriores de focal y apertura del telescopio a las bandas del visible, que se registran en los píxeles de mayor resolución, utilizando la ecuación 2.26 obtenemos el tamaño del disco central de Airy. Para la longitud de onda tomamos el valor medio de $0.6 \mu\text{m}$.

$$d_{Airy} = 2.44 \cdot 0.6 \mu\text{m} \cdot \frac{598 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} = 5.84 \mu\text{m}$$

Que es un valor inferior al tamaño del píxel de estas bandas, de $7.5 \mu\text{m}$.

Resolución espectral de un sensor

La resolución espectral concierne al número y anchura de los intervalos de longitud de onda en el espectro electromagnético que un sensor es capaz de detectar. En el caso de los sensores pasivos de teledetección se refiere a las características de las diferentes bandas que constituyen la información multispectral.

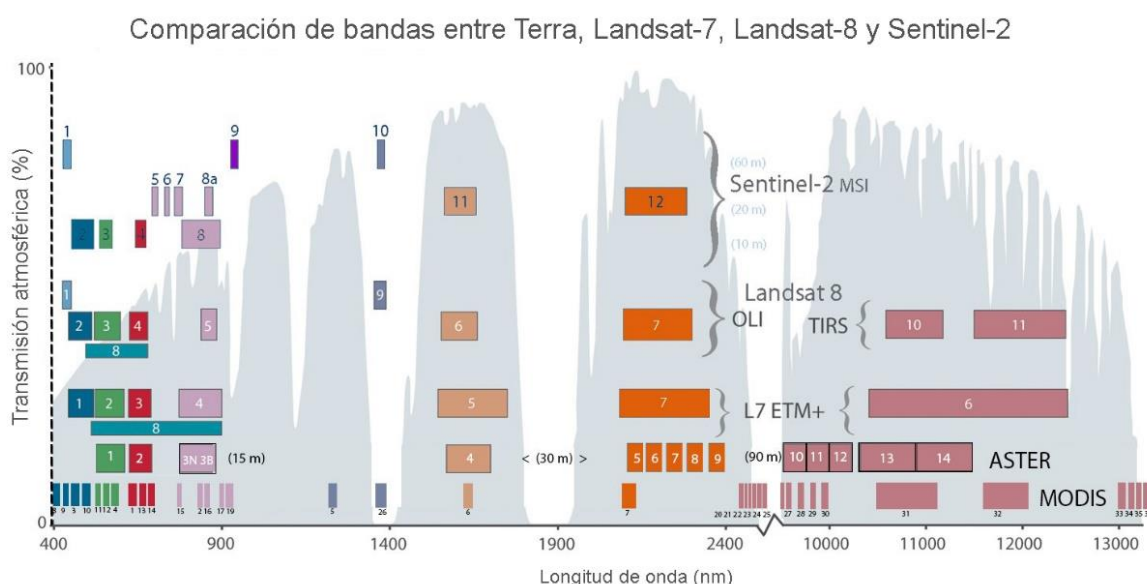


Figura 2.12 Comparación de la resolución espectral de los sensores MODIS, ASTER, ETM+, OLI, TIRS y MSI embarcados en los satélites Terra, Landsat-7, Landsat-8 y Sentinel-2. Se han representado las bandas, rectángulos de diferentes colores y tamaños, sobre la curva de transmisividad atmosférica (en gris). Adaptada de @USGSLandsat.

En la sección 2.1.1 vimos que entre los efectos que producen ciertos gases atmosféricos sobre la irradiancia solar que alcanza la Tierra es la absorción selectiva de ciertas longitudes de onda, creando lo que se llaman “ventanas atmosféricas”. Dijimos entonces que los sensores de teledetección pasiva se diseñan para recoger información en dichas ventanas. Esto se ve claramente en la figura 2.12, en la que se comparan las bandas espectrales registradas por seis sensores embarcados en 4 satélites. La gráfica representada en color gris corresponde a la transmisividad atmosférica en función de la longitud de onda. Sobre ella se han dibujado rectángulos que indican la distribución y ancho de las bandas correspondientes a cada uno de los sensores. Como puede verse en la figura, salvo alguna excepción, estas bandas se distribuyen en las regiones donde la transmisividad no es nula.

De los seis sensores representados en la figura 2.12, el MODIS (*Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer*), embarcado en los satélites Terra y Aqua, es el que cuenta con un mayor número de bandas espectrales: 36 bandas en total, distribuidas a lo largo del espectro visible, infrarrojo cercano y medio e infrarrojo térmico. El ASTER (*Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer*), embarcado también en el satélite Terra, cuenta con un total de 14 bandas espectrales, distribuidas también a lo largo del espectro visible, infrarrojo cercano y medio e infrarrojo térmico. El sensor ETM+ (*Enhanced Thematic Mapper plus*), embarcado en el satélite Landsat-7, cuenta con un total de 8 bandas. Los sensores OLI (*Operational Land Imager*) y TIRS (*Thermal InfraRed Sensor*), embarcados en el satélite Landsat-8, cuentan entre los dos con 11 bandas. Finalmente, el sensor MSI (*MultiSpectral Instrument*), embarcado en los satélites europeos Sentinel-2, cuenta con un total de 13 bandas, distribuidas en el visible, infrarrojo cercano y medio.

Resolución radiométrica de un sensor

La resolución radiométrica caracteriza la capacidad de un determinado sensor para discriminar variaciones en la radiancia recibida. En general se asocia con la profundidad de bits que éste utiliza para cuantificar la medida física de la radiancia. En la sección 2.1.3 denominamos a esta cantidad como Valor Digital.

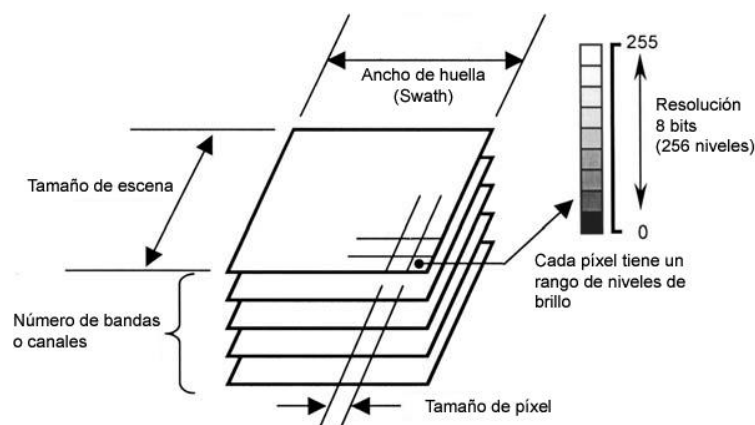


Figura 2.13 En los sensores electro-ópticos que hemos visto la radiancia incidente en el sensor se registra en forma de matriz, donde a cada una de las celdas o píxeles que la componen se le asigna un Valor Digital proporcional a la radiancia recibida. El Valor Digital asignado depende de la profundidad de bits en que el sensor codifica la información, corresponde al nivel de gris asignado a un píxel en una imagen digital.

Resolución temporal de un sensor

La resolución temporal o ciclo de repetición de un determinado sensor define el número de días u horas que transcurren entre dos observaciones consecutivas de la misma porción de la superficie terrestre. Caracteriza, por tanto, la capacidad del sensor para discriminar las variaciones en el tiempo sufridas por la superficie terrestre.

La resolución temporal depende de tres factores característicos del satélite en el que va embarcado el sensor. A saber: la altura orbital, de la que depende la velocidad del satélite, la abertura del sistema óptico, de la que depende el ancho de barrido sobre la superficie y la maniobrabilidad de la plataforma, de la que depende el apuntamiento del sistema óptico sobre la superficie terrestre.

2.1.6 Firmas espectrales

Los distintos tipos de coberturas terrestres (bosques, suelos cultivados, láminas de agua, suelos con escasa vegetación, nieve, hielo, etc) se distinguen por la energía que reflejan y emiten. Por ello, la distribución de esta energía permite caracterizar dichas coberturas de igual manera que los espectros atómicos o moleculares permiten caracterizar los componentes químicos de una determinada sustancia. Estos "espectros" que caracterizan el tipo de cubierta observada constituyen lo que se denomina su **firma espectral**. Este tipo de curvas presenta el aspecto que se muestra en la figura 2.14, para tres tipos de cubierta vegetal: pastos (círculos), coníferas (rombos) y caducifolias (triángulos).

En el rango del espectro correspondiente al visible-infrarrojo cercano, la radiación reflejada, por ejemplo, por la vegetación presenta un máximo relativo alrededor de $0.55 \mu\text{m}$, un aumento brusco hacia los $0.75 \mu\text{m}$ que se mantiene constante hasta los $1.3 \mu\text{m}$, y otro máximo se presenta hacia $1.7 \mu\text{m}$ (figura 2.14). La absorción de la radiación incidente producida por la clorofila es la responsable de la baja reflectividad en la región visible y el pico en $0.55 \mu\text{m}$, mientras que la estructura interna de las hojas es la responsable de la intensa reflectividad por encima de los $0.75 \mu\text{m}$. Dicha estructura y, por tanto, la reflectividad en esta banda difiere de una

familia vegetal a otra, variando también con el tiempo y con la presencia de agua o de enfermedades.

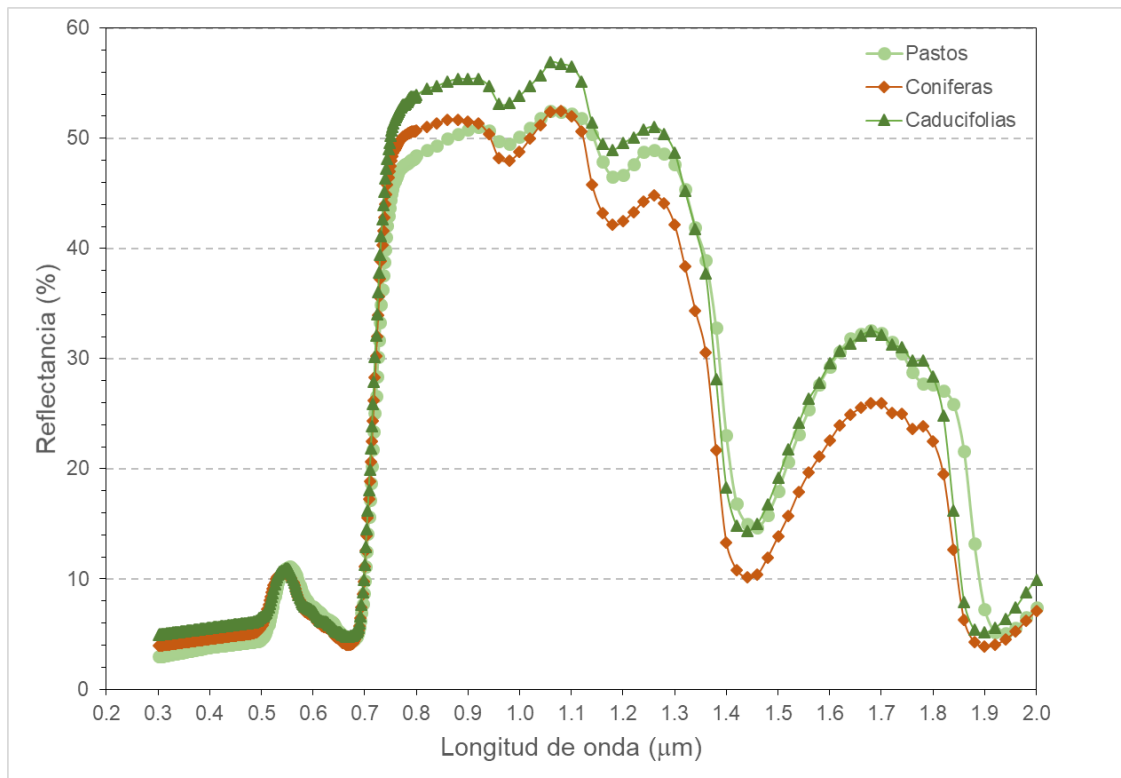


Figura 2.14 Firma espectral correspondiente a tres tipos de cubierta vegetal obtenida con un radiómetro de campo. Con círculos verde claro se representa la firma espectral correspondiente al pasto, con rombos marrones se representa la correspondiente a coníferas y con triángulos verdes la correspondiente a caducifolias. Este tipo de curvas caracteriza las distintas coberturas (agua, cultivos, bosques, nieve...) que se encuentran sobre la superficie terrestre y permite distinguirlas en una imagen de satélite. Adaptada de ASTER Spectral Library.

En el infrarrojo térmico, el espectro de emisión de la cubierta vegetal depende de la transpiración. Durante el día las hojas a plena luz abren sus estomas para evitar secarse demasiado. Durante la noche se cierran y la temperatura de las hojas se hace igual o un poco inferior a la del ambiente exterior. El análisis del comportamiento de los vegetales en el infrarrojo térmico nos permite realizar una discriminación entre diferentes familias e incluso entre la vegetación sana y la afectada por alguna enfermedad.

2.2 Satélites y sensores de observación de la Tierra

Aunque las técnicas de teledetección pueden aplicarse a las imágenes obtenidas desde diferentes plataformas de observación, drones, avión o satélites artificiales,

son estos últimos las plataformas más adecuadas para obtener una visión de regiones de gran extensión. Además, los satélites presentan la gran ventaja de poder permanecer durante varios años en una órbita específica, lo que permite una observación continua de la Tierra.

Entre los satélites de observación de la Tierra de uso civil tenemos, por un lado, los satélites meteorológicos. Éstos son geosíncronos, es decir, su período orbital coincide con el de rotación de la Tierra. Para ello se mantienen en órbitas sobre el ecuador a una altura de unos 36.000 km, siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre, proporcionando una visión instantánea global cada 15 minutos. Un satélite de este tipo es el europeo METEOSAT o el norteamericano GOES.

Por otro lado, están los llamados satélites de recursos naturales, que son heliosíncronos. Es decir, el paso del satélite sobre un punto de la superficie terrestre ocurre siempre a la misma hora, estando sincronizados con el Sol. Es por esto que la relación angular entre éste y el plano orbital del satélite se mantiene constante de manera que la trayectoria del satélite casi pasa por los polos, por ello la órbita se denomina "casi-polar". Estos satélites están situados entre 500 y 1500 km de altura y su período de revolución es del orden de 90 minutos. Satélites de este tipo son, por ejemplo, los franceses SPOT-6 y 7, situados a 694 km de altura, el americano LANDSAT, localizado en una órbita a 705 km o el europeo SENTINEL-2, orbitando a una altura de 786 km.

En los siguientes apartados se resumen las principales características de los satélites y sensores cuyas imágenes han sido utilizadas en los estudios

2.2.1 Los satélites Landsat

Los satélites del programa Landsat son ya un clásico en los satélites de observación de la Tierra con sus 48 años de observación continua de la superficie terrestre.

El primero de los satélites, denominado en un principio como ERTS-1¹ y renombrado posteriormente como Landsat-1, se puso en órbita el 23 de julio de 1972. Fue desarrollado por la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (NASA) como un sistema experimental para la investigación de la observación de la Tierra desde el espacio. Como sistema experimental, su principal valor residía en los datos de imágenes digitales adquiridos por el sensor *Multi-Spectral Scanner* (MSS). Este sensor se basaba en un dispositivo desarrollado 3 años antes en los Laboratorios Bell por G. Smith y W. Boyle: el dispositivo de carga acoplada (CCD) que vimos en el apartado 2.1.3. Se iniciaba así la "era digital" en el campo de la observación de la Tierra.

El programa Landsat evolucionó de un programa experimental a uno operativo a medida que la NASA desarrolló los sensores MSS y puso en órbita los siguientes satélites: el Landsat-2 en enero de 1975 y el Landsat-3 en marzo de 1978, ambos también con el sensor MSS, entre otros. Estos primeros satélites Landsat orbitaban la Tierra a una altitud de alrededor de 910 km, con un período de revisita de 18 días.

El sensor MSS proporcionaba imágenes de la superficie terrestre con una resolución espacial de 80 m, una resolución espectral de 4 bandas distribuidas en el visible e infrarrojo cercano y con una resolución radiométrica de 6 bit, con lo que la radiancia que recibía el sensor se codificaba en 64 niveles de gris.

La siguiente generación de satélites Landsat llegó en la década de los 80 con el Landsat-4 y el Landsat-5. El primero de ellos puesto en órbita el 16 de julio de 1982 y el segundo el 1 de marzo de 1984. Esta segunda generación se caracterizó por órbitas más bajas, situadas a una altitud de 705 km, lo que permitía reducir el período de revisita a 16 días y mejorar la resolución espacial.

Como instrumentos, además del MSS que garantizaba la continuidad de datos con los anteriores, estos satélites iban equipados con una nueva generación de sensores

¹ Earth Resources Technology Satellite

para la observación de la Tierra: el *Thematic Mapper* (TM). Este nuevo instrumento tenía la capacidad de producir imágenes digitales de la superficie terrestre con una resolución espacial de 30 m y una mayor resolución espectral: 7 bandas distribuidas en el visible, infrarrojo cercano e infrarrojo medio. Además contaba con una banda en el infrarrojo térmico que permitía registrar la temperatura de la superficie terrestre con una resolución de 120 m (ver Tabla 2-1). Todas ellas codificadas con una resolución radiométrica de 8 bit transformando, por tanto, en 256 niveles de gris la radiancia recibida en el sensor y en cada una de las bandas.

Tras el lanzamiento fallido del Landsat-6 en octubre de 1993, el programa encaró el acceso al siglo XXI con la tercera generación de satélites. Con sensores más desarrollados, con mejores resoluciones y, lo que resultó más trascendental, un cambio de paradigma en la distribución de los datos a los usuarios desde 2008: una distribución libre, abierta y gratuita de los mismos.

Tabla 2-1 Características de las bandas espectrales de los instrumentos TM y ETM+ embarcados en los satélites Landsat-5 y 7 respectivamente (Fuente USGS).

Banda	Landsat-5 TM		Landsat-7 ETM+	
	Longitud de onda (nm)	Resolución espacial (m)	Longitud de onda (nm)	Resolución espacial (m)
1	450 – 520	30	450 – 520	30
2	520 – 600	30	520 – 600	30
3	630 – 690	30	630 – 690	30
4	760 – 900	30	770 – 900	30
5	1550 – 1750	30	1550 – 1750	30
6	10400 – 12500	120	10400 – 12500	60
7	2080 – 2350	30	2090 – 2350	30
8			520 – 900	15

El Landsat-7, similar en su diseño al fallido Landsat-6, se puso en órbita en abril de 1999 manteniendo los mismos parámetros orbitales que el Landsat-5: altitud de la órbita de 705 km con una inclinación de 98.2º y un período de revisita de 16 días.

Este satélite, a diferencia de sus predecesores, ya no llevará embarcado el sensor MSS. El nuevo sensor embarcado era un TM mejorado, el *Enhanced Thematic Mapper Plus* (ETM+). Con este sensor, el Landsat-7 recoge imágenes con 8 bandas espectrales: una pancromática que cubre todas las longitudes de onda del visible e infrarrojo cercano y con 15 m de resolución, 6 bandas distribuidas en el visible, infrarrojo cercano e infrarrojo medio y con 30 m de resolución y, finalmente, una banda en el infrarrojo térmico y con 60 m de resolución (ver Tabla 2-1). Todas ellas codificadas con una resolución radiométrica de 8 bits y con un ancho de imagen de unos 180 km (Mika, 1997).

El satélite Landsat-8, puesto en órbita en febrero de 2013, es el más reciente de la serie con los sensores OLI (*Operational Land Imager*) y TIRS (*Thermal InfraRed Sensor*). Entre estos dos sensores se reparten las 11 bandas que componen las imágenes que, de la superficie terrestre, captura este satélite. Sus características espectrales y resolución espacial se muestran en la Tabla 2-2. A diferencia de sus predecesores, estas bandas espectrales están codificadas con una resolución radiométrica de 12 bits.

Tabla 2-2 Características de las bandas espectrales de los instrumentos OLI y TIRS embarcados en el satélite Landsat-8 (Fuente USGS).

Sensor	Banda	Longitud de onda (nm)	Resolución (m)
OLI	B1 - <i>Coastal aerosol</i>	430 – 450	30
	B2 - <i>Blue</i>	450 – 510	30
	B3 - <i>Green</i>	530 – 590	30
	B4 - <i>Red</i>	640 – 670	30
	B5 - <i>Near Infrared (NIR)</i>	850 – 880	30
	B6 - <i>SWIR 1</i>	1570 – 1650	30
	B7 - <i>SWIR 2</i>	2110 – 2290	30
	B8 - <i>Panchromatic</i>	500 – 680	15
	B9 - <i>Cirrus</i>	1360 – 1380	30
TIRS	B10 - <i>Thermal Infrared 1</i>	10600 – 11190	100
	B11 - <i>Thermal Infrared 2</i>	11500 – 12510	100

El catálogo de las imágenes globales del programa Landsat usa una rejilla mundial de referencia conocida como *Worldwide Reference System* (WRS). En este "sistema de referencia" cada escena se denota por un par de números, que son específicos

para la columna y la fila, denominados **Path** y **Row**. La combinación de ambos números identifica de forma única un centro de escena nominal. El número *Path* siempre se indica en primer lugar, seguido del número *Row*. Estas imágenes adquiridas por los satélites Landsat se pueden descargar gratuitamente del servidor del Servicio Geológico de los Estados Unidos, en la dirección web: <http://earthexplorer.usgs.gov/>.

2.2.2 El instrumento MODIS

MODIS, acrónimo de *Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer*, es uno de los instrumentos embarcados en los satélites americanos Terra y Aqua. En el primero, fue puesto en órbita en diciembre de 1999 y, en el segundo, en mayo de 2002. Ambos situados en una órbita heliosíncrona a 705 km de altura.

La órbita de ambos satélites, Terra y Aqua, con un ángulo de inclinación de 98.2º, está diseñada para que el paso sobre el ecuador del Terra se realice, en el sentido de norte a sur (nodo descendente), a las 10:30; mientras que el satélite Aqua lo hace, en el sentido de sur a norte (nodo ascendente), a las 13:30.

Cada uno de estos instrumentos MODIS toma, al menos, dos imágenes diarias de cualquier punto de la superficie terrestre: una diurna y otra nocturna. Las imágenes MODIS, con un ancho que cubre aproximadamente 2330 km sobre el terreno, tienen 36 bandas espectrales con longitudes de onda distribuidas entre 0,4 µm y 14.4 µm y resoluciones espaciales variables: 2 bandas con 250 m, 5 bandas con 500 m y 29 bandas con 1 km de tamaño de píxel (ver Tabla 2-3). La resolución radiométrica de estas imágenes es de 12 bits.

Por tanto, aunque MODIS no tiene una alta resolución espacial, como el Landsat, sí que tiene una elevada resolución temporal y espectral. Estas características han hecho de los datos MODIS los más importantes, para estudios globales y regionales, en las últimas dos décadas, tanto del suelo como del océano o la atmósfera.

Los datos MODIS también se pueden descargar gratuitamente del servidor del USGS: <http://earthexplorer.usgs.gov/>.

Tabla 2-3 Características de las bandas espectrales del instrumento MODIS de los satélites Terra y Aqua (Fuente NASA).

Banda	Longitud de onda (nm)	Resolución (m)	Uso
1	620 – 670	250	Suelo (vegetación) / Nubes Límites
2	841 – 876	250	
3	459 – 479	500	Suelo/Nubes/Aerosoles Propiedades
4	545 – 565	500	
5	1230 – 1250	500	
6	1628 – 1652	500	
7	2105 – 2155	500	
8	405 – 420	1000	Color del océano / Fitoplancton / Biogeoquímica
9	438 – 448	1000	
10	483 – 493	1000	
11	526 – 536	1000	
12	546 – 556	1000	
13	662 – 672	1000	
14	673 – 683	1000	
15	743 – 753	1000	
16	862 – 877	1000	
17	890 – 920	1000	Atmósfera / Vapor de agua
18	931 – 941	1000	
19	915 – 965	1000	
20	3660 – 3840	1000	Temperatura Superficie/Nubes
21	3929 – 3989	1000	
22	3929 – 3989	1000	
23	4020 – 4080	1000	
24	4433 – 4498	1000	Temperatura atmósfera
25	4482 – 4549	1000	
26	1360 – 1390	1000	Nubes cirrus Vapor de agua
27	6535 – 6895	1000	
28	7175 – 7475	1000	
29	8400 – 8700	1000	Propiedades de nubes
30	9580 – 9880	1000	Ozono
31	10780 – 11280	1000	Temperatura Superficie/Nubes
32	11770 – 12270	1000	
33	13185 – 13485	1000	Tope de nubes Altitud
34	13485 – 13785	1000	
35	13785 – 14085	1000	
36	14085 – 14385	1000	

2.2.3 La muy alta resolución: Ikonos

Con la entrada en el siglo XXI, la tecnología de la Observación de la Tierra también entró en una nueva era con la puesta en órbita del satélite Ikonos en septiembre de 1999. Este es el primer satélite de muy alta resolución, comercial (fabricado y gestionado por una empresa privada, *Space Imaging*) y de uso civil. La puesta en órbita de este satélite por parte de una empresa privada fue posible gracias a la aprobación y publicación, en octubre de 1992, de la Ley de Política de Percepción Remota Terrestre ² (*Land Remote Sensing Policy Act*) por el Congreso norteamericano, acabando así con los más de 20 años de dominio gubernamental sobre los datos de observación de la Tierra.

Situado en una órbita heliosíncrona, con una inclinación de 98.1°, a unos 681 km de altura su resolución temporal depende de su apuntamiento. Para puntos situados en latitudes medias, de unos 40°, con un apuntamiento nadiral, es decir con un ángulo del orden de 1° respecto a la vertical, la revisita es de 141 días. Para ángulos de apuntamiento del orden de 10°, el tiempo de revisita es de unos 11 días. Mientras que para ángulos del orden de 26° el tiempo de revisita llega a alcanzar los 3 días (Dial et al., 2003).

El sensor, diseñado y construido por Kodak, le permitía adquirir imágenes de 0.82 m de resolución en modo pancromático y 3.28 m en modo multiespectral con 4 bandas en el rango de longitudes de onda del visible y el infrarrojo cercano. Estas imágenes, con un ancho de unos 11 km, tienen una resolución radiométrica de 11 bit. Esto es, los valores digitales de los píxeles de cada banda son representados con un rango dinámico de 2048 niveles de gris.

Después de 15 años en órbita y de algunos problemas técnicos, el satélite Ikonos se desactivó en marzo de 2015.

² US Congress, 1992. Public Law 102 – 555: Land Remote Sensing Policy Act of 1992, 102nd Congress, October 28, 1992, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

Tabla 2-4 Características de las bandas espectrales del sensor del satélite Ikonos (Fuente eoPortal Directory).

Banda	Longitud de onda (nm)	Resolución (m)
Pancromática	450 – 900	0.8
MS 1 - <i>Blue</i>	450 – 530	3.2
MS 2 - <i>Green</i>	520 – 610	3.2
MS 3 - <i>Red</i>	640 – 720	3.2
MS 4 - <i>Near Infrared (NIR)</i>	760 – 860	3.2

2.2.4 El programa europeo Copernicus y los satélites Sentinel

Copernicus es uno de los dos grandes programas espaciales de la Unión Europea: Galileo, que es el programa de posicionamiento global, y Copernicus, que es el programa de Observación de la Tierra. Se trata de un ambicioso programa que se apoya en una filosofía de distribución completa, abierta y gratuita de los datos de observación de la Tierra.

Los servicios proporcionados por el programa Copernicus se nutren de las observaciones realizadas por la familia de satélites Sentinel. Una prolífica familia de satélites de Observación de la Tierra que adquiere información de la superficie terrestre utilizando un amplio rango de longitudes de onda (desde el visible a las microondas) y resoluciones. Esta información geoespacial se agrupa en seis áreas temáticas: suelo, océanos, atmósfera, cambio climático, gestión de emergencias y seguridad.

Sentinel-2 es la constelación de alta resolución que proporciona imágenes ópticas de la superficie. Está formada por dos satélites gemelos: el **Sentinel-2A**, en órbita desde el 23 de junio de 2015, y el **Sentinel-2B**, puesto en órbita el 7 de marzo de 2017. Ambos satélites se encuentran sobre la misma órbita heliosíncrona a unos 786 km de altura, con una inclinación de 98.62° y desfasados entre sí 180°. Es decir, cada satélite se ubica en puntos opuestos de la órbita.

El único instrumento embarcado en estos satélites, el MSI (*Multi-Spectral Instrument*), proporciona imágenes de la superficie terrestre cubriendo un ancho de unos 295 km. Estas imágenes contienen un total de 13 bandas espectrales en el rango de longitudes de onda del visible, el infrarrojo cercano y el infrarrojo medio y con diferentes resoluciones espaciales: cuatro de ellas tienen 10 m, seis presenta 20 m y, finalmente, tres de ellas tienen 60 m. La Tabla 2 – 5 muestra las principales características de estas 13 bandas.

Tabla 2-5 Características de las bandas espectrales del instrumento MSI de los satélites Sentinel-2 (Fuente ESA).

Banda	Sentinel-2A		Sentinel-2B		Resolución espacial (m)
	Longitud de onda central (nm)	Ancho de banda (nm)	Longitud de onda central (nm)	Ancho de banda (nm)	
1	442.7	21	442.3	21	60
2	492.4	66	492.1	66	10
3	559.8	36	559.0	36	10
4	664.6	31	665.0	31	10
5	704.1	15	703.8	16	20
6	740.5	15	739.1	15	20
7	782.8	20	779.7	20	20
8	832.8	106	833.0	106	10
8A	864.7	21	864.0	22	20
9	945.1	20	943.2	21	60
10	1373.5	31	1376.9	30	60
11	1613.7	91	1610.4	94	20
12	2202.4	175	2185.7	185	20

Estas imágenes tienen una resolución radiométrica de 12 bit, lo que significa que la radiancia recibida por el sensor se transforma en valores digitales con un rango dinámico de 4096 niveles de gris.

Por la órbita en la que se encuentran, cada satélite independiente tiene un tiempo de revisita de 10 días sobre un punto situado en el ecuador terrestre. Pero actuando conjuntamente, reducen dicho ciclo a solo 5 días.

2.3 Índices biofísicos obtenidos con teledetección

Entre los métodos más sencillos para obtener información de las imágenes multispectrales adquiridas por los satélites están los denominados **índices biofísicos**. Mediante sencillas operaciones algebraicas entre bandas, estos índices permiten extraer diferentes elementos del paisaje como la vegetación, la nieve o el agua, para su análisis o seguimiento.

No vamos a definir todos los posibles índices biofísicos que pueden elaborarse con los datos de observación de la Tierra adquiridos desde satélite. Nos centraremos en definir a continuación aquellos índices que han sido utilizados: índices de vegetación y de humedad del suelo.

2.3.1 Índices de vegetación

Los índices biofísicos más comunes y los primeros en ser definidos son los **índices de vegetación**. La mayoría de los índices de vegetación combinan una banda espectral en la que la clorofila presenta una fuerte absorción, en las longitudes de onda del rojo, con una banda en la que la vegetación presenta una fuerte reflectividad, en las longitudes de onda del infrarrojo cercano (NIR). Otros índices combinan la banda del infrarrojo cercano con bandas en las que la vegetación presenta una fuerte absorción por su contenido de humedad, en las longitudes de onda del infrarrojo de onda corta (SWIR). Los primeros proporcionan información sobre el verdor o la actividad fotosintética de la vegetación, mientras que los segundos constituyen medidas relacionadas con el estrés hídrico de la vegetación.

Desde un punto de vista teórico, el fundamento de los índices de vegetación se encuentra en las curvas que representan la firma espectral de la cubierta vegetal (ver figura 2.14). El porcentaje de reflectancia procedente de las hojas verdes es muy baja en la parte visible del espectro debido a la fuerte absorción de la radiación

fotosintéticamente activa (PAR) por parte de los pigmentos de las hojas, principalmente en el azul (entre los 0.4 y 0.5 μm) y el rojo (entre los 0.6 y 0.7 μm), mientras que gran parte de la radiación NIR se dispersa (refleja y transmite) en mayor o menor medida dependiendo del tipo de hoja, su morfología y su estructura celular.

Por lo tanto, la diferencia resultante entre las reflectancias de la vegetación en el rojo y el infrarrojo cercano es un indicador sensible a las variaciones en la fisiología y estructura de las hojas. A nivel de cobertura, las máximas diferencias se producen en una cobertura densamente foliada que contiene hojas vigorosas, mientras que las menores diferencias se producen en una cobertura vegetal dispersa o desprovista de hojas.

Desde principios de la década de los 70, con los primeros satélites Landsat y los sensores multiespectrales, se viene monitoreando la dinámica de la vegetación sobre la superficie de la Tierra gracias a los índices de vegetación. A lo largo de estas cinco décadas se han desarrollado una gran cantidad de estos índices, la mayoría funcionalmente equivalentes, que han permitido obtener medidas de importantes parámetros de la vegetación como el índice de área foliar (LAI), el porcentaje de cobertura vegetal, la biomasa o la radiación fotosintéticamente activa absorbida (APAR), entre otros.

El índice más sencillo y que primero se definió es la Razón Simple (SR), calculado como el cociente de reflectancias en el NIR y el rojo es la medida del vigor vegetativo más fundamental en un píxel (Rouse et al., 1973). La expresión que define este índice viene dada por

$$SR = \frac{\rho_{NIR}}{\rho_{rojo}} \quad (2.27)$$

Donde ρ_{NIR} corresponde a la reflectividad en la banda del infrarrojo cercano y ρ_{rojo} a la reflectividad en la banda del rojo. Los valores de este índice son positivos y están comprendidos en el intervalo $0 \leq SR < \infty$.

Uno de los índices de vegetación más utilizados es la versión "normalizada" del cociente anterior. Introducido también en la década de los 70 (Tucker, 1979) y funcionalmente equivalente al SR, el Índice de Vegetación de Diferencia Normalizado (NDVI) viene definido por la siguiente expresión,

$$NDVI = \frac{\rho_{NIR} - \rho_{rojo}}{\rho_{NIR} + \rho_{rojo}} \quad (2.28)$$

Los valores de este índice se encuentran limitados en el rango $-1 \leq NDVI \leq +1$. Los valores positivos de este índice, por encima de un determinado umbral, corresponden a los píxeles con presencia de vegetación. Estos valores presentan una fuerte correlación con la proporción de vegetación dentro del píxel (Carlson y Ripley, 1997). Esto es, la Fracción de Cobertura Vegetal (FVC) es una función del NDVI

$$FVC = \left[\frac{NDVI - NDVI_0}{NDVI_\infty - NDVI_0} \right]^2 \quad (2.29)$$

Donde $NDVI_0$ y $NDVI_\infty$ corresponden a los valores umbrales del $NDVI$ para un píxel de suelo sin vegetación y uno cubierto al 100% de vegetación, respectivamente. Para estos umbrales hemos los valores propuestos por algunos autores para la estimación de emisividades en el cálculo de la temperatura del suelo (Raissouni and Sobrino, 2000). Esto es:

- $NDVI \leq 0.2$, el píxel se considera sin vegetación, suelo desnudo y otros. Por tanto, $NDVI_0 = 0.2$.
- $0.2 < NDVI < 0.5$, el píxel se considera compuesto por una mezcla de suelo y vegetación. En este caso, el porcentaje de vegetación viene dado por la ecuación 3.29.
- $NDVI \geq 0.5$, el píxel se considera completamente cubierto por vegetación. La Fracción de Cobertura Vegetal es 100% para el píxel. En este caso, $NDVI_\infty = 0.5$.

Otros índices fueron desarrollados con el fin de optimizar la interacción suelo-vegetación-atmósfera. De ellos cabe destacar tres: SAVI, ARVI y EVI.

El Índice de Vegetación Ajustado al Suelo o SAVI (*Soil-Adjusted Vegetation Index*) es un índice que intenta minimizar la radiancia del suelo mediante un factor de corrección (Huete, 1988). Suele utilizarse en zonas con reducida cobertura vegetal y la expresión que define este índice de vegetación viene dada por

$$SAVI = \frac{(1+L)(\rho_{NIR}-\rho_{rojo})}{\rho_{NIR}+\rho_{rojo}+L} \quad (2.30)$$

Donde L es el factor de corrección, cuyo valor se encuentra en el rango $0 \leq L \leq 1$. El valor $L = 0$ corresponde a una cobertura vegetal elevada y, en este caso, este índice coincide con el NDVI definido por la ecuación 2.28. Por el contrario, el valor $L = 1$ corresponde a vegetación muy dispersa, es decir, píxeles con una cobertura vegetal casi nula.

El Índice de Vegetación Atmosféricamente Resistente o ARVI (*Atmospherically Resistant Vegetation Index*) es un índice de vegetación mejorado con el que se intenta corregir los efectos de la atmósfera, por lo que resulta muy útil en regiones con alto contenido de aerosoles en la atmósfera (Kaufman and Tanre, 1992).

A parte de las bandas del rojo y el NIR, este índice utiliza también la banda del azul. La expresión que define este índice viene dada por

$$ARVI = \frac{\rho_{NIR}-(2*\rho_{rojo}-\rho_{azul})}{\rho_{NIR}+(2*\rho_{rojo}-\rho_{azul})} \quad (2.31)$$

Por último, el Índice de Vegetación Mejorado o EVI (*Enhanced Vegetation Index*) es un índice optimizado, diseñado para mejorar la respuesta de la vegetación en regiones de alta biomasa y reduciendo el efecto de la atmósfera. El EVI se puede calcular utilizando la siguiente ecuación,

$$EVI = G \frac{\rho_{NIR}-\rho_{rojo}}{L+\rho_{NIR}+C_1\rho_{rojo}-C_2\rho_{azul}} \quad (2.32)$$

Donde $G = 2.5$, $L = 1$, $C_1 = 6$ y $C_2 = 7.5$ (Huete et al., 2002) son coeficientes válidos para los sensores ETM+ y MODIS.

2.3.2 Índice de humedad del suelo

La humedad del suelo es una condición crítica que afecta la interacción entre la superficie terrestre y la atmósfera. Tiene importantes implicaciones en agricultura e hidrología. Con las imágenes que obtienen los satélites de la superficie terrestre se puede obtener, tanto directa como indirectamente, la humedad del suelo proporcionando una valiosa información sobre su distribución en el espacio y el tiempo.

La medida de la humedad del suelo a partir de los datos de observación de la Tierra recogidos por sensores espaciales fue analizada en la década de los 80 por Musik y Pelletier (1986). Su trabajo se basó en las bandas Thematic Mapper de Landsat-5 y como resultado establecieron la correlación entre el cociente de bandas SWIR (TM5 / TM7) del sensor Thematic Mapper y el contenido de humedad del suelo.

En la tabla 2-1 podemos ver que la banda 5 del sensor TM de Landsat corresponde al infrarrojo de onda corta (SWIR) de 1600 nm y la banda 7 corresponde al SWIR de 2200 nm. De la misma manera que en la sección anterior definimos el NDVI, podemos definir ahora un Índice Normalizado de Humedad del Suelo o NSMI (*Normalized Soil Moisture Index*). Para ello denotamos como ρ_{1600} la reflectividad medida en la banda SWIR de 1600 nm y como ρ_{2200} la reflectividad medida en la banda SWIR de 2200 nm. Con esto, el NSMI quedará como

$$NSMI = \frac{\rho_{1600} - \rho_{2200}}{\rho_{1600} + \rho_{2200}} \quad (2.33)$$

El NSMI así definido representa un parámetro adimensional que se puede utilizar para cuantificar la humedad gravimétrica del suelo (Haubrock et al. 2008).

3 FRACTALES Y ALGORITMOS MULTIESCALA

Desde que Mandelbrot publicó, en 1977, su popular libro *The Fractal Geometry of Nature*, la geometría fractal ha despertado un considerable interés en la comunidad dedicada a la Observación de la Tierra. A lo largo de estas décadas, los modelos fractales se han utilizado en una gran variedad de aplicaciones en teledetección que abarcan desde el reconocimiento de patrones a la segmentación y clasificación de texturas.

El objetivo de este capítulo es establecer el marco conceptual y metodológico para caracterizar y cuantificar la heterogeneidad espacial de la vegetación a distintas escalas a partir de las imágenes de satélite. Con este objetivo, introduciremos los conceptos de fractal, entropía y multifractales, así como los métodos de cálculo (algoritmos multiescala) aplicados al tratamiento de las imágenes.

3.1 Fractales

3.1.1 Definición de fractal. Dimensión fractal

El término de **fractal** fue introducido por Benoît Mandelbrot en 1975 [Mandelbrot, 1975] a partir del término latino *fractus*, que tiene el significado de “irregular, fragmentado”, para denotar un conjunto de objetos matemáticos caracterizados por su enorme irregularidad. De esta manera, los objetos fractales surgieron como elementos geométricos que daban cabida a conjuntos con características geométricas particulares. Estudiados desde finales del siglo XIX, eran conocidos hasta entonces como “monstruos geométricos” y entre estos conjuntos se encontraban, por ejemplo, los conjuntos de Cantor, Sierpinski y Julia o las curvas de Weierstrass, de Koch y de Peano.

El propio Mandelbrot sacó a estos objetos fractales del ámbito puramente matemático, sirviendo como modelos en diversos ámbitos de la ciencia. Así, en un artículo publicado en Science en 1967 [Mandelbrot, 1967], Mandelbrot utiliza las características de estos objetos fractales para analizar la dependencia de la longitud de la costa británica en función de la escala, siguiendo una ley potencial. Un

problema, en el ámbito de la geografía, que había sido analizado años antes por el matemático Lewis F. Richardson [Richardson, 1961] tratando de responder a la pregunta de si hay más guerras entre países que comparten una frontera común más larga. Para poder responder a esta pregunta necesitaba medir la longitud de dichas fronteras. Richardson utilizó un ingenioso método para medir dicha longitud. Utilizó un compás de puntas afiladas en los extremos de ambos brazos, colocándolos con una apertura predefinida, r , y moviendo el compás a lo largo de la frontera entre dos países en un atlas de la época. Richardson midió así también la longitud de la línea costera de Gran Bretaña (figura 3.1).

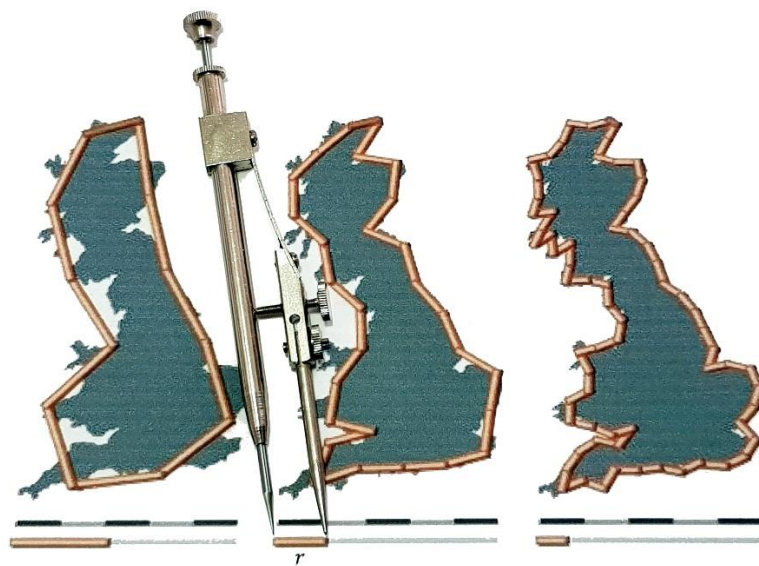


Figura 3.1 Método experimental utilizado por Richardson para medir la longitud de fronteras entre países y líneas de costa. Utilizando un compás de puntas afiladas en los extremos de ambos brazos, estimó el número de pasos, N , necesarios para cubrir la frontera o la costa en función de la apertura, r , del compás. La longitud es el producto $N r$. Fuente: modificada de Wikipedia.

Debido a la irregularidad de la línea de costa o de una frontera, Richardson observó que a medida que la apertura del compás se hacía más pequeña, la longitud $L(r)$ aumentaba de manera asintótica. Las gráficas mostradas en el artículo de Richardson y comentadas por Mandelbrot, le llevaron a la conclusión de que la longitud aproximada de una frontera puede ajustarse mediante una función, dependiente de dos parámetros F y D , del tipo

$$L(r) = F r^{1-D} \quad (3.1)$$

Si $N(r)$ es el número de saltos dados con el compás para cubrir la frontera, su longitud será

$$L(r) = N(r) r \quad (3.2)$$

donde $N(r)$ vendrá dada por

$$N(r) = F r^{-D} \quad (3.3)$$

Para Richardson, D era un simple exponente de ajuste sin otro significado particular. Sin embargo, Mandelbrot interpretó este exponente como un parámetro que caracteriza la auto-semejanza de las curvas geográficas y que posee propiedades de una dimensión, pero es fraccionaria. Según sus palabras: "*the degree of complication can be described by a quantity D that has many properties of a "dimension," though it is fractional; that is, it exceeds the value unity associated with the ordinary, rectifiable, curves*" [Mandelbrot, 1967].

En este nuevo marco, como objeto geométrico, tenemos que el concepto de fractal se encuentra, por tanto, muy ligado al de dimensión. No vamos a entrar en el análisis detallado del concepto matemático de dimensión de un objeto geométrico, un concepto que está asociado con el proceso de medida del objeto [Guzmán et al., 1993]. Pero, pensemos en el método experimental de Richardson para medir la longitud de una línea recta. Para ello tomamos nuestro compás de la figura 3.1 con una cierta apertura de tamaño r , que será nuestra unidad de medida. Nos desplazamos con el compás a lo largo de la línea, desde el principio hasta el final. Anotamos el número de veces, $N(r)$, que necesitamos trasladar el compás para cubrir toda la línea. Realizamos la misma medida con aperturas diferentes del compás. La longitud obtenida vendrá dada por la ecuación 3.2, siendo $N(r)$ tanto mayor cuanto menor sea la apertura del compás utilizada. En este caso, la ecuación 3.3 quedará como

$$N(r) = F r^{-1} \quad (3.4)$$

El mismo razonamiento es aplicable a superficies y volúmenes, aunque ya no nos servirá nuestro compás de medida. Si sustituimos la unidad de medida por

cuadrados y cubos de lado r , obtenemos la ecuación 3.3 con los valores 2 y 3 respectivamente para el parámetro D . En general, el exponente de la escala de longitud unidad utilizada corresponde a la dimensión del objeto analizado. Esta dimensión, que es un número entero y que coincide con la dimensión del espacio de soporte del objeto analizado, es la definida como **dimensión topológica**, D_T .

Volviendo al artículo de Mandelbrot, aplicando esta metodología a la frontera entre España y Portugal obtiene una dimensión $D = 1.14$. Para la costa australiana obtiene una dimensión $D = 1.13$, mientras que para la costa oeste de Gran Bretaña obtiene el valor $D = 1.25$ [Mandelbrot, 1967]. Esta dimensión fraccionaria es el parámetro que permite caracterizar los objetos fractales.

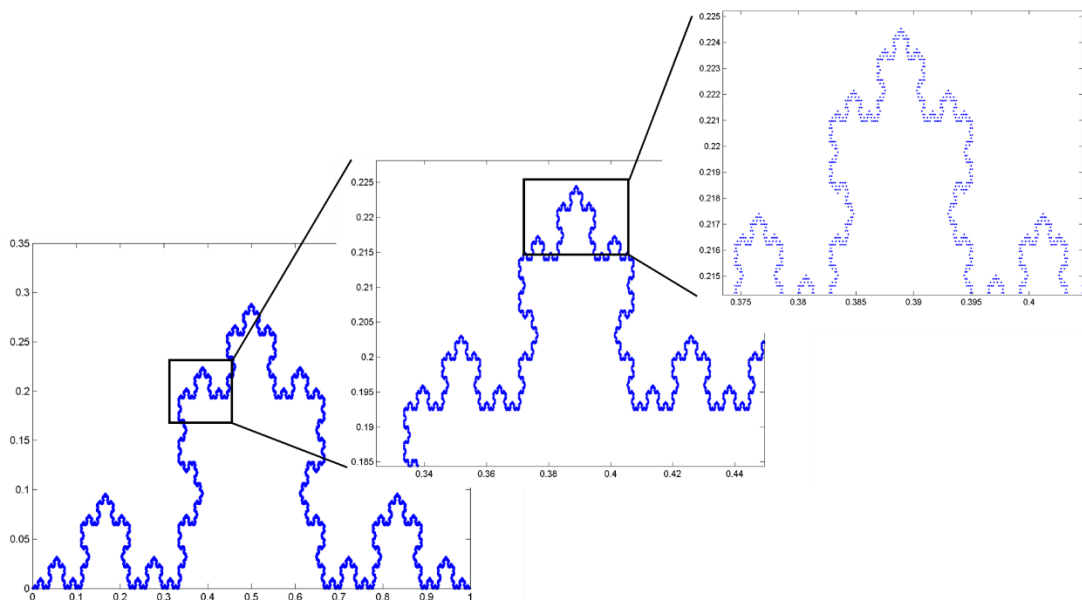


Figura 3.2 La curva de Koch, estudiada a principios del siglo XX por la matemática sueca Helge von Koch, es un ejemplo de curva no diferenciable en ningún punto. Su construcción iterativa sigue una regla muy sencilla: el segmento $[0, 1]$ se divide en tres partes iguales, a continuación se elimina el tercio central y se sustituye por dos segmentos iguales al eliminado y orientados hacia arriba formando un ángulo de 60° . Esta regla se aplica sobre cada uno de los segmentos lineales en iteraciones sucesivas. La propiedad de auto-semejanza se observa ampliando zonas de la curva.

Como objetos geométricos, una de sus características fundamentales es la propiedad denominada **auto-semejanza**. Esta significa que a cualquier escala a la que podamos observar el objeto fractal, presenta la misma estructura (figura 3.2). Se suele decir que “la parte es semejante al todo”. Es decir, los objetos o conjuntos fractales aparecen iguales a cualquier escala que se observen. Son, por tanto,

invariantes bajo transformaciones de escala según una razón de semejanza o factor de escala dado.

El grado de auto-semejanza viene determinado por un parámetro denominado "dimensión de semejanza" o "**dimensión de medida**" o de Hausdorff, que denotaremos como D_m y será igual a la "**dimensión fractal**" del objeto. Esta dimensión cuantifica cómo cambia el "tamaño" del objeto en cuestión cuando decrece la escala de observación y se define a partir de la ecuación 3.3 como,

$$D_m = -\frac{\log N}{\log r} \quad (3.5)$$

O bien,

$$D_m = \frac{\log(N)}{\log(1/r)} \quad (3.6)$$

donde N es el número de copias distintas del objeto que ha sido escalada por una relación $r < 1$ en todas sus coordenadas.

Se denomina **fractal** a todo objeto que posea una dimensión topológica de valor estrictamente inferior a su dimensión de medida [Mandelbrot, 1983]

$$D_T < D_m \quad (3.7)$$

Para los objetos no fractales, siempre se verifica la relación $D_T = D_m$. La dimensión D_m proporciona, como hemos visto, un valor numérico que describe la estructura del fractal estudiado. Para curvas fractales contenidas en el plano, $1 < D_m \leq 2$, con cualquier valor posible entre estos dos extremos. El valor de la dimensión de medida cuantifica el grado en que una distribución de puntos llena el plano. El caso límite, en el que $D_T = 1$ y $D_m = 2$, le corresponde a la curva de Peano. En este sentido, la dimensión fractal puede entenderse como una medida del grado de dispersión de un conjunto infinito de puntos *incrustado* en un espacio euclídeo.

3.1.2 Algoritmos multiescala para el cálculo de la dimensión fractal

El método de Richardson para medir la longitud de una frontera nos permite extrapolar un método operativo de cálculo de la dimensión fractal para un objeto lineal en el plano. Éste se basa en desplazar el compás, con una apertura de longitud r por el contorno de la línea, contando el número de veces, $N(r)$, que es necesario desplazar el compás para recorrer completamente la línea. Como hemos visto, este número es una función de la apertura del compás con la forma de la ecuación 3.3, donde el exponente define su dimensión fractal cuando reducimos la apertura del compás tanto como podamos. Con este método, la manera que tenemos para calcular la dimensión fractal es por medio de la pendiente de la gráfica de $N(r)$ en una representación doblemente logarítmica ya que la dimensión fractal viene dada por la ecuación 3.5 o 3.6.

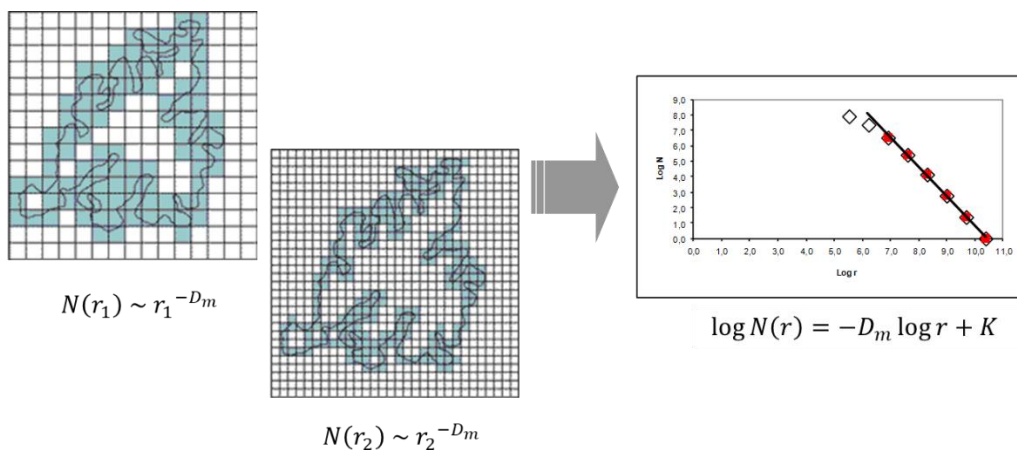


Figura 3.3 En el método de recuento de cajas o de “box-counting” para medir la dimensión fractal de una curva, el plano se divide en cuadrículas o cajas de lado r_1, r_2, \dots en cada paso. Se cuenta el número de cajas (marcadas en color azul), $N(r_1), N(r_2), \dots$. Este número es una función potencial del tamaño de la caja y la dimensión fractal se calcula entonces como la pendiente de la gráfica de $N(r)$ en una representación doblemente logarítmica. Este método es directamente aplicable al análisis fractal de imágenes gracias a su estructura de píxeles.

La extrapolación del método de Richardson a espacios de dimensión topológica arbitraria nos lleva a la técnica más habitual para calcular la dimensión fractal, el método de recuento de cajas o de “**box-counting**”. Este método, que se esquematiza en la figura 3.3 para el caso del plano, se basa en dividir el espacio en una cuadrícula de lado r y contar el número de cuadrados o cajas, $N(r)$, que contiene alguna parte del objeto cuya dimensión se desea medir. Como hemos visto

en la ecuación 3.3, $N(r)$ es una función potencial del tamaño de las cajas, donde el exponente define la dimensión fractal del objeto, D_m .

3.2 Entropía. Dimensión de entropía

La entropía, H , es una medida del desorden espacial en un sistema, también representa la incertidumbre asociada con el contenido de información en cualquier dato. Este último concepto fue introducido por Claude Shannon [Shannon, 1948] en el marco de la teoría de la información.

Shannon estudió cómo afecta el ruido a un mensaje que es transmitido entre un emisor y un receptor. En cualquier sistema de comunicación, el ruido degrada la señal emitida provocando una suerte de "desorden" en el mensaje transmitido por la señal. En su trabajo relacionó la incertidumbre de una fuente de información con la probabilidad de ocurrencia de todos los n símbolos de la fuente, p_i , mediante la expresión

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad (3.7)$$

Donde $p_i \in [0, 1]$ y cumplen la condición $\sum p_i = 1$.

En general, la expresión 3.7 puede aplicarse sobre cualquier sistema en el que podamos definir una magnitud, que nos permita contar el número de elementos que tienen cada uno de sus n valores. Esta distribución de frecuencias constituyen las probabilidades de tener cualquier elemento del sistema en un estado dado. Así, los símbolos o elementos del sistema pueden ser las letras de un texto, los números 0 y 1 en un mensaje binario, los números de una matriz bidimensional o imagen o las especies que habitan en un ecosistema.

La entropía de Shannon fue generalizada en los años 60 del pasado siglo por el matemático húngaro Alfréd Rényi. Éste introdujo un continuo de entropías dependientes de un parámetro α [Rényi, 1960] dadas por la expresión

$$H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha) \quad (3.8)$$

Donde $\alpha > 0$ y $\alpha \neq 1$.

3.3 Multifractales. Dimensiones generalizadas

El concepto de fractal analizado en la sección 3.1 ha sido el soporte para la descripción de muchos patrones y procesos en diversos campos de la ciencia y la tecnología. Así, a parte de la geografía, otras disciplinas como la hidrología [Hubert, 2001], la geofísica [Turcotte, 1989], la astronomía [Mandelbrot, 1975], la economía [Mandelbrot, 1997] e incluso la historia [Rodríguez Alcalde et al. 1995] han sido pioneras en la aplicación de los objetos fractales.

Sin embargo, los fractales son objetos homogéneos inadecuados para modelizar algunos de los complejos procesos que ocurren sobre la superficie terrestre. Un primer intento de resolver este problema se produjo utilizando los conceptos de fractales aleatorios y auto-afines.

Los fractales aleatorios, en general, no poseen la propiedad de auto-semejanza determinista definida en la sección 3.1. Por el contrario, estos conjuntos están compuestos de N subconjuntos distintos, cada uno de los cuales están escalados por una relación $r < 1$ del original y es idéntico en "sentido estadístico". En este caso, la estructura fina que cada aumento revela es estadísticamente semejante al todo.

Ciertos conjuntos fractales están compuestos por la unión de N subconjuntos distintos, cada uno de los cuales se escala por un parámetro $r_i < 1$, con $1 \leq i \leq N$, del original en todas las coordenadas. La dimensión de semejanza viene entonces dada por la generalización

$$\sum_{i=1}^N r_i^D = 1 \quad (3.9)$$

Una mayor generalización que los anteriores presentan los conjuntos fractales auto-afines, que se caracterizan por estar escalados con diferentes relaciones en las diferentes coordenadas. La ecuación

$$f(\lambda x) = \lambda^H f(x) \quad \forall \lambda > 0 \quad (3.10)$$

donde λ es un factor de escala y H es el exponente de escalado, implica que un escalado en la coordenada x con el factor λ proporciona un escalado de la coordenada f por un factor λ^H . Un caso especial de esta ecuación ocurre cuando $H = 1$. En este caso, tenemos que un escalado de x por λ produce un escalado de f por λ también. Es decir tenemos la auto-semejanza, en la que tanto x como f escalan simultáneamente con el mismo coeficiente de dilatación o reducción.

Este concepto de auto-afinidad caracteriza a los conjuntos que son invariantes bajo la acción de transformaciones afines. Si f es una función que describe un objeto auto-afin, entonces tiene la propiedad siguiente

$$f(x_0 + \lambda h) - f(x_0) = \lambda^H [f(x_0 + h) - f(x_0)] \quad (3.11)$$

donde H se conoce como *exponente de rugosidad* o de *Hurst*.

Los clásicos monofractales que presentan esta propiedad son los llamados *movimientos brownianos*, y más generalmente los *movimientos brownianos fraccionarios* (mBf). Con estos últimos, aplicados a una señal bidimensional, se ha podido modelizar el relieve terrestre dando lugar a las llamadas *superficies de Mandelbrot*.

La generalización más compleja e inhomogénea de los monofractales que permite la modelización de sistemas muy irregulares son los denominados **multifractales**.

Al igual que los fractales, Mandelbrot introdujo el concepto de multifractal para incluir el fenómeno de la turbulencia [Mandelbrot, 1975] [Rosenblatt and Atta 1972]. En esta sección se exponen los principios del análisis multifractal a través del estudio del caso más simple: la *medida binomial* sobre el intervalo unidad como un modelo de distribución en cascada del fenómeno de la turbulencia [Meneveau et al., 1987]. Como veremos, estos objetos en lugar de caracterizarse por un solo parámetro como la dimensión fractal o el exponente de Hurst, lo son por un conjunto continuo de parámetros que constituye lo que se denomina **espectro multifractal**.

3.3.1 La medida binomial, el paradigma multifractal

La medida binomial es una distribución de probabilidad que se define a través de un proceso iterativo según los siguientes pasos:

- Partimos del segmento unidad, $I = [0, 1]$, sobre el que suponemos distribuida uniformemente una medida de magnitud también unidad, $M = 1$.
- En la primera iteración dividimos el segmento en dos partes iguales, I_0 e I_1 , y distribuimos la medida unidad depositando m_0 sobre I_0 y $m_1 = 1 - m_0$ sobre el subintervalo I_1 .
- En la segunda iteración realizamos la misma operación sobre cada uno de los subintervalos anteriores; esto es, dividimos cada subintervalo por la mitad, resultando cuatro segmentos iguales, de longitud $1/4$ cada uno, y que denotaremos como: I_{00}, I_{01}, I_{10} e I_{11} . A continuación distribuimos la medida unidad depositando $m_0m_0 = m_0^2$, m_0m_1 , m_1m_0 y $m_1m_1 = m_1^2$ respectivamente sobre los nuevos subintervalos. La medida unidad total tendrá una distribución binomial sobre los intervalos resultantes:

$$M = m_0^2 + 2m_0m_1 + m_1^2 = (m_0 + m_1)^2 = 1 \quad (3.12)$$

- En la tercera iteración continuamos con el mismo procedimiento, dividimos cada uno de los cuatro intervalos anteriores por la mitad, resultando ocho subintervalos de longitud $1/8$, y que denotaremos como $I_{000}, I_{001}, I_{010}, I_{011}, I_{100}, I_{101}, I_{110}$ e I_{111} . Distribuimos la medida siguiendo el mismo procedimiento que en el paso anterior. En este caso, la medida total seguirá la distribución binomial cúbica

$$M = m_0^3 + 3m_0^2m_1 + 3m_0m_1^2 + m_1^3 = (m_0 + m_1)^3 = 1 \quad (3.13)$$

Continuando el proceso iterativo, del que hemos descrito los tres primeros pasos en los párrafos anteriores, en la n -ésima iteración tendremos 2^n segmentos, de longitud $\delta = 2^{-n}$, que denotaremos como

$$\left\{ I_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} \quad \text{con } \sigma_k = \{0, 1\} \right\} \quad (3.14)$$

Cada uno de estos segmentos lleva asociada una medida que viene determinada por el producto

$$\mu(I_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}) = m_{\sigma_1} m_{\sigma_2} \cdots m_{\sigma_n} \quad (3.15)$$

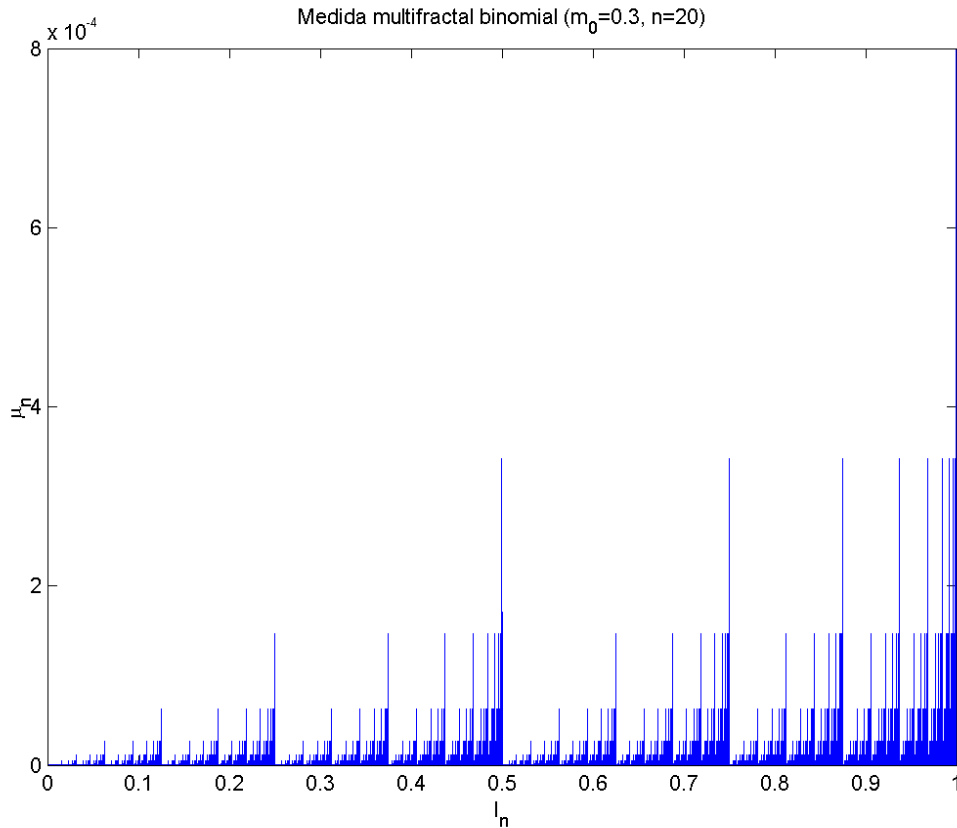


Figura 3.4 Distribución de la medida binomial elaborada siguiendo el proceso iterativo descrito en el texto. El resultado corresponde a 20 iteraciones, con $m_0 = 0.3$.

En esta iteración, el i -ésimo subintervalo caracterizado por la secuencia $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ en la que existen k ceros y $n - k$ unos, tiene una medida

$$\mu_i(I_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}) = m_0^k m_1^{n-k} \quad (3.16)$$

donde $k = 0, \dots, n$. Por tanto, la medida toma $n + 1$ posibles valores distribuidos en los 2^n intervalos. El procedimiento descrito define una sucesión $\{\mu_i\}$ de medidas sobre los subintervalos de I que es auto-semejante por construcción. En la figura 3.4 se ha representado dicha sucesión para un total de $n = 20$ iteraciones, en el caso particular de $m_0 = 0.3$.

El número de intervalos, $I_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$, que tenemos con k ceros en la n -ésima iteración viene dado por el coeficiente binomial

$$N(k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.17)$$

Y, teniendo en cuenta las ecuaciones 3.16 y 3.17, la medida total depositada en el conjunto de los subintervalos con la secuencia $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ que contiene k ceros viene dada por

$$\mu_k = N(k) \mu_i(I_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} m_0^k m_1^{n-k} \quad (3.18)$$

Ahora que tenemos construida la distribución de medida, vamos a estudiar el comportamiento geométrico del subconjunto formado por los subintervalos de $I_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$ que contienen k ceros en la secuencia de subíndices en el límite $n \rightarrow \infty$.

Denotamos por $S_n(k)$ al conjunto de intervalos de la n -ésima iteración cuya medida viene dada por la ecuación 3.16. En el límite $S_n(k)$ es un fractal, pero un fractal muy peculiar para el que la correspondiente dimensión fractal no es constante sino una función que podrá tomar un continuo de valores dentro de un rango.

Hemos visto que el número de elementos de cada subconjunto $S_n(k)$ viene dado por la expresión 3.17. Cuando $n \rightarrow \infty$, esto es para un número muy grande de iteraciones, el número de subintervalos que habrá con k ceros en la distribución de la medida vendrá dado por

$$N(k) \approx \frac{n^{n+(1/2)}}{\sqrt{2\pi} \cdot k^{k+(1/2)} \cdot (n-k)^{n-k+(1/2)}} \quad (3.19)$$

Donde se ha aplicado la aproximación de Stirling en la ecuación 3.17. Si hacemos en la ecuación 3.19 el cambio de variable $\xi = k/n$, para el que $\xi \in [0, 1]$ y el límite $n \rightarrow \infty$ equivale a $\xi \rightarrow 0$, se transforma en

$$N(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \xi (1-\xi)}} e^{[-(\xi \log(\xi) + (1-\xi) \log(1-\xi))]n} \quad (3.20)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $x = e^{\log x}$.

Por otro lado, vimos que en la n -ésima iteración los intervalos tienen una longitud $\delta = 2^{-n}$, por lo que podemos escribir

$$n = -\frac{\log \delta}{\log 2} \quad (3.21)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 3.20 tenemos

$$N(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \xi(1-\xi)}} \left[e^{\log \delta} \right]^{\frac{\xi \log(\xi) + (1-\xi) \log(1-\xi)}{\log 2}} \quad (3.22)$$

Así, el número de subintervalos que hay en $S_n(k)$, con k ceros, cuando $n \rightarrow \infty$ sigue una ley potencial con la escala δ , que podemos rescribir de la forma

$$N(\xi) \propto \delta^{-f(\xi)} \quad (3.23)$$

donde la función $f(\xi)$ está definida como

$$f(\xi) = -\frac{\xi \log(\xi) + (1-\xi) \log(1-\xi)}{\log 2} \quad (3.24)$$

La ecuación 3.23 es del mismo tipo que la ecuación 3.3 para los fractales. Pero ahora tenemos también la distribución de la medida en los intervalos. Nos preguntamos, por tanto, por la relación existente entre la medida y la longitud de cada subintervalo. Si aplicamos el cambio de variable que introdujimos en la ecuación 3.20 en la 3.16 que nos da la medida del conjunto $S_n(k)$, tenemos

$$\mu(S_n(k)) = \left[e^{\log \delta} \right]^{\frac{\xi \log m_0 + (1-\xi) \log m_1}{\log 2}} \quad (3.25)$$

Por tanto, la relación entre la medida depositada en cada subintervalo y su longitud sigue también una ley potencial de la forma $\mu(S_n) \propto \delta^\alpha$, donde α es una función continua de $\xi \in [0, 1]$, que está definida por la siguiente expresión

$$\alpha(\xi) = -\frac{\xi \log m_0 + (1-\xi) \log(1-m_0)}{\log 2} \quad (3.26)$$

A este exponente, $\alpha(\xi)$, que relaciona la medida y la longitud del intervalo en el que se ha depositado, se le conoce como *exponente de Hölder*.

Estas dos funciones que acabamos de obtener, $f(\xi)$ y $\alpha(\xi)$, no son independientes. La relación entre ellas, $f(\alpha)$, se conoce como *espectro multifractal* y caracteriza a los objetos multifractales de la misma manera que la dimensión fractal a los objetos fractales.

El espectro multifractal es una función cóncava que presenta un máximo, cuyo valor corresponde a la dimensión del espacio soporte en el que está representada la medida, y está definida entre dos valores de α , α_{min} y α_{max} , que corresponden a los valores extremos de ξ . Para estos valores extremos, la función $f(\xi)$ se anula

$$f(\xi = 0) = 0 = f(\alpha_{min}) \text{ y } f(\xi = 1) = 0 = f(\alpha_{max})$$

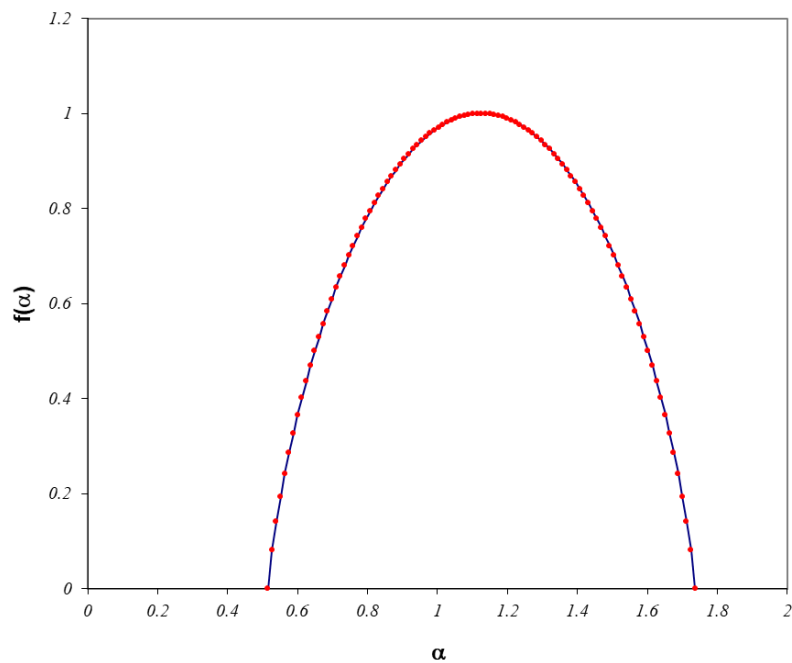


Figura 3.5 Representación del espectro multifractal, $f(\alpha)$, para la medida binomial con $m_0 = 0.3$, representada en la figura 3.4. Se trata de una función cóncava que presenta un máximo de valor igual a la dimensión topológica del soporte de la medida, que en este caso es 1, para $\alpha^* = 1.126$. La función está definida entre los valores $\alpha_{min} = 0.51$ y $\alpha_{max} = 1.74$, para los que se anula.

Podemos aplicar todo visto hasta ahora al ejemplo representado en la figura 3.4, esto es la medida binomial sobre el intervalo unidad con $m_0 = 0.3$. Si calculamos los valores de α_{min} y α_{max} utilizando la ecuación 3.26 obtenemos

$$\alpha_{min} = -\frac{\log 0.7}{\log 2} \approx 0.5146 \text{ y } \alpha_{max} = -\frac{\log 0.3}{\log 2} \approx 1.737$$

Si representamos la función $f(\alpha)$ obtenida a partir de sustituir el valor de m_0 en la expresión de $\alpha(\xi)$, despejar ξ y sustituir en la de $f(\xi)$ tendremos el resultado de la figura 3.5. La función presenta un máximo en

$$\alpha^* = -\frac{\log 0.3 + \log 0.7}{2 \log 2} \approx 1.1258$$

siendo 1 el valor de dicho máximo.

Desde el punto de vista matemático, el espectro multifractal $f(\alpha)$ presenta unas características interesantes. Por ejemplo, está siempre por debajo de la bisectriz $y = \alpha$, presentando un punto de tangencia en α_1 , donde se cumple que $f(\alpha_1) = \alpha_1$. En este punto se cumple que $\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1$, esto es

$$-\frac{\log \xi_1 - \log(1-\xi_1)}{\log(1-m_0) - \log m_0} = 1 \quad (3.27)$$

De donde podemos extraer el valor de ξ_1 : $\xi_1 = m_0$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones 3.24 y 3.26 tenemos

$$f(\alpha_1) = -\frac{m_0 \log m_0 + (1-m_0) \log(1-m_0)}{\log 2} = \alpha_1 \quad (3.28)$$

Este valor de $f(\alpha_1)$ en el que el espectro multifractal es tangente a la recta bisectriz, se conoce como **dimensión de información** ya que en el numerador de la ecuación 3.28 aparecen los términos $-m_0 \log m_0$ y $-(1-m_0) \log(1-m_0)$, que corresponden a la entropía de Shannon, ecuación 3.7 (Andraud et al., 1994; Gouyet 1996).

3.3.2 Dimensiones generalizadas:

Vamos a introducir en esta sección una representación equivalente al espectro multifractal para analizar los conjuntos multifractales que nos permitirá definir el concepto de *dimensión generalizada*.

Si aplicamos el método de recuento de cajas (box-counting) sobre nuestra distribución de medida, podemos calcular el número de cajas que contiene el fractal mediante la siguiente expresión

$$N(\delta) = \sum_{i=1}^n \mu_i^0 \quad (3.29)$$

con el convenio de que $0^0 = 1$. Esto significa que para aquellas cajas de tamaño δ que contengan la medida $\mu_i \neq 0$ el valor del sumando será 1 mientras que para aquellas que no contengan la medida, es decir que $\mu_i = 0$, el valor del sumando será 0. El sumatorio extendido a toda la distribución nos dará el número de cajas de tamaño δ que contienen la medida.

Podemos generalizar la expresión anterior introduciendo un parámetro $q \in \mathbb{R}$ que nos permite definir la función de partición (Feder, 1988) como

$$\chi(q, \delta) \equiv N(q, \delta) = \sum_{i=1}^n \mu_i^q \quad (3.30)$$

De esta manera, cuando el nuevo parámetro tome el valor $q = 0$ obtendremos el resultado del método de recuento de cajas. También ahora esperamos que el comportamiento de la función de partición $\chi(q, \delta)$ siga una ley potencial con la escala δ , de la forma

$$\langle \chi(q, \delta) \rangle \approx \delta^{\tau(q)} \quad (3.31)$$

donde $\langle \ \rangle$ representa el momento estadístico de la medida $\mu_i(\delta)$ definido en un grupo de cajas no superpuestas del mismo tamaño que dividen el área estudiada. De esta expresión extraemos la definición del nuevo exponente $\tau(q)$

$$\tau(q) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \langle \chi(q, \delta) \rangle}{\log \delta} \quad (3.32)$$

Un valor particularmente interesante de esta función es aquel para el que $q = 0$ ya que $\tau(0)$ corresponde a la dimensión de *box-counting*, D_m , del soporte de la medida, es decir la dimensión fractal del soporte de la medida. Otro valor que se puede estimar fácilmente corresponde a $q = 1$, para el que se cumple que $N(1, \delta) = \sum_{i=1}^n \mu_i = 1$, con lo que tenemos que $\tau(1) = 0$.

Para el caso de la distribución de la medida binomial representada en la figura 3.4, la ecuación 3.32 queda de la forma

$$\tau(q) = \frac{\log[m_0^q + (1-m_0)^q]}{\log 2} \quad (3.33)$$

En la figura 3.6 se ha representado esta función para la distribución de medida binomial con $m_0 = 0.3$, variando el parámetro q entre -5 y +5

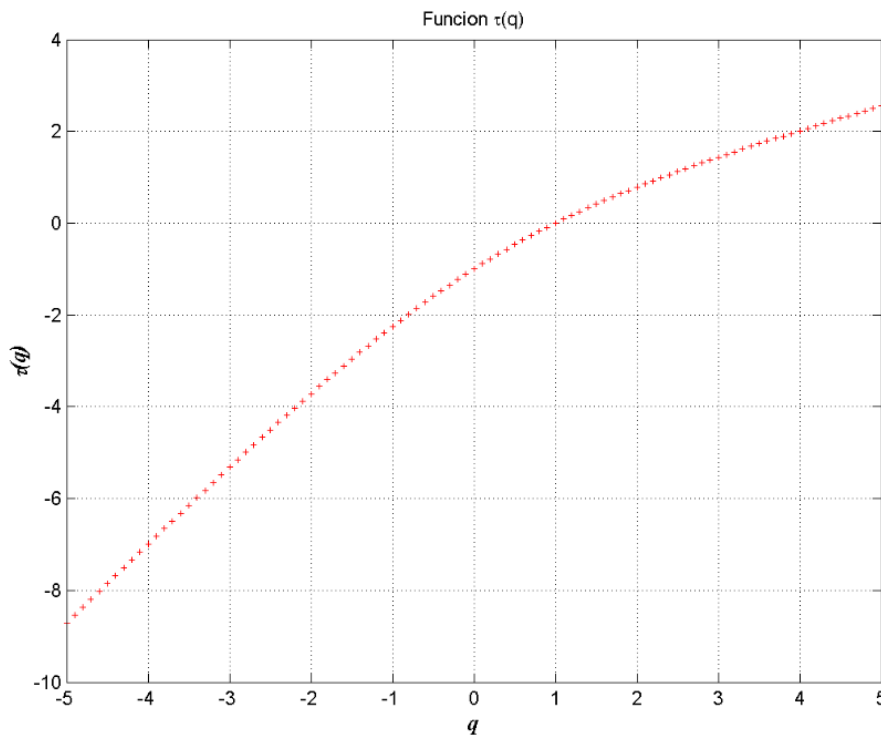


Figura 3.6 Representación de la función $\tau(q)$, para la distribución de medida binomial con $m_0 = 0.3$ para $-5 \leq q \leq +5$. Se observa que $\tau(0) = -1$ y $\tau(1) = 0$. Para los valores de q negativos la función tiene por asíntota la recta de pendiente α_{max} , mientras que para los valores positivos la función tiene por asíntota la recta de pendiente α_{min} .

La función $\tau(q)$ que hemos definido en la ecuación 3.32 y el espectro multifractal, $f(\alpha)$, no son independientes. Se demuestra [Halsey, 1986] que $f(\alpha)$ es la transformada de Legendre de $\tau(q)$

$$f(\alpha) = q \frac{d\tau(q)}{dq} - \tau(q) \quad (3.34)$$

Por lo tanto, tenemos dos representaciones que permiten caracterizar un objeto multifractal: una de ellas determinada por el espectro multifractal $(\alpha, f(\alpha))$ y la otra

determinada por $(q, \tau(q))$. Ambas representaciones son equivalentes y están relacionadas a través de la transformación de Legendre.

Para introducir ahora el concepto de dimensión generalizada, vamos a considerar la medida uniforme distribuida sobre un soporte n -dimensional. En este caso, la ley potencial que sigue la distribución de la medida es de la forma $\mu_i \approx \delta^n$, y si la aplicamos a la ecuación 3.30 tenemos

$$N(q, \delta) \approx \delta^{n(q-1)} \quad (3.35)$$

Por otro lado, también vimos que $N(q, \delta)$ sigue una ley potencial dada por la ecuación 3.31. Comparando ambas ecuaciones obtenemos que

$$\tau(q) \cong n(1 - q) \quad (3.36)$$

Esta expresión nos permite generalizar el concepto de dimensión. Así definimos por *Dimensión Generalizada*, D_q , la siguiente expresión

$$D_q \equiv \frac{\tau(q)}{1-q} \quad (3.37)$$

Para el caso que venimos estudiando de la medida binomial, teniendo en cuenta la expresión 3.33 para $\tau(q)$ obtenemos

$$D_q = \frac{\log(m_0^q + (1-m_0)^q)}{(1-q) \log 2} \quad (3.38)$$

La figura 3.7 representa la gráfica de las dimensiones generalizadas para la distribución de la medida binomial con $m_0 = 0.3$, variando el parámetro q entre -5 y +5.

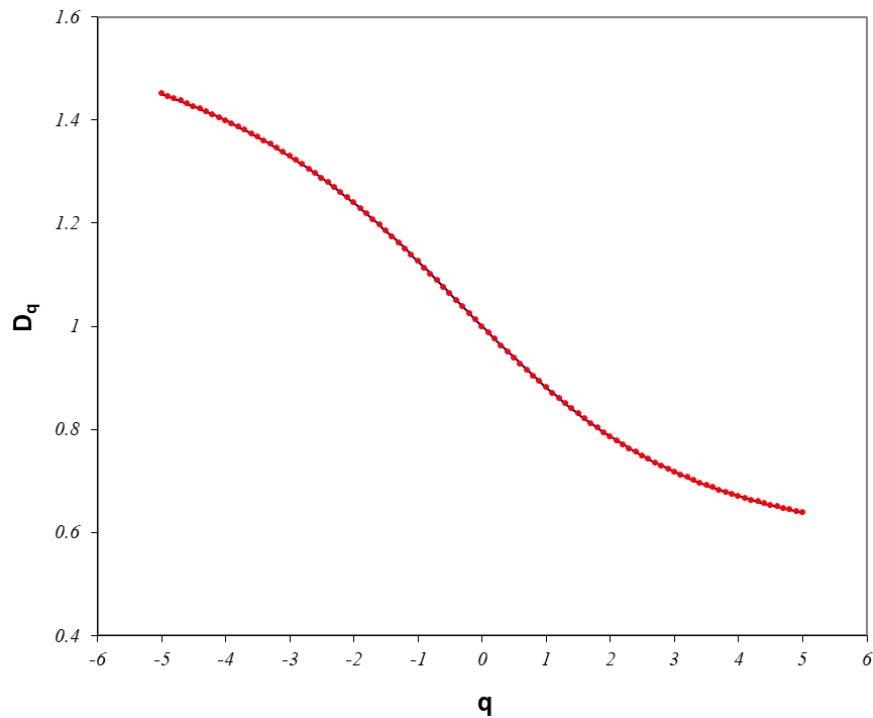


Figura 3.7 Representación de las Dimensiones Generalizadas D_q , para la distribución de medida binomial con $m_0 = 0.3$ para $-5 \leq q \leq +5$.

3.3.3 Algoritmos multiescala para el cálculo del espectro multifractal

En las secciones anteriores hemos visto que si distribuimos una probabilidad o "medida" sobre un espacio "soporte", que puede ser uni, bi, tri-dimensional o un objeto fractal, y cubrimos dicho espacio con cajas de tamaño δ , podemos definir una "medida integrada" para la i -ésima caja, que denotaremos como $P_i(\delta)$. Entonces podemos definir un exponente de singularidad, α_i , de manera que la distribución de la medida integrada siga una ley potencial con la escala, de la forma

$$P_i(\delta) \propto \delta^{\alpha_i} \quad (3.39)$$

Si contamos el número de cajas $N(\alpha)$, donde la medida P_i tiene un exponente de singularidad entre α y $\alpha + d\alpha$, entonces $f(\alpha)$ define la dimensión fractal del conjunto de cajas con exponente de singularidad α . Esto es, se cumple que

$$N(\alpha) \propto \delta^{-f(\alpha)} \quad (3.40)$$

Para una clase especial de medidas, que surgen de procesos multiplicativos, y en las que dichas medidas son valores de probabilidad, sabemos que la entropía de tales procesos viene dada por la entropía de Shannon,

$$H = - \sum_{i=1}^N P_i \log P_i \quad (3.41)$$

Donde N es el número de cajas. En este caso, la dimensión de medida del conjunto soporte, D_m , puede relacionarse con la entropía mediante la ecuación [Billingsley, 1965]

$$D_m = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N P_i \log P_i}{\log N} \quad (3.42)$$

Se puede utilizar este resultado para obtener directamente el espectro multifractal, $f(\alpha)$, para una medida, $P(x)$, como la representada en la figura 3.4. Para ello se construye en primer lugar una familia de medidas normalizadas dependientes de un parámetro $q \in \mathbb{R}$, $\mu(q)$, donde las probabilidades en las cajas de tamaño δ vengán determinadas por

$$\mu_i(q, \delta) = \frac{(P_i(\delta))^q}{\sum_j (P_j(\delta))^q} \quad (3.43)$$

donde q puede variar entre $-\infty$ y $+\infty$. El parámetro q actúa como una especie de lupa para el análisis de las diferentes regiones de la distribución de medida. Así, para los valores $q > 1$, $\mu_i(q, \delta)$ potencian las regiones más singulares de P_i , mientras que para los valores $q < 1$ se ven potenciadas las regiones menos singulares [Chhabra and Jensen, 1989].

La dimensión de medida del soporte de $\mu_i(q, \delta)$ viene dada por

$$f(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^N \mu_i(q, \delta) \log(\mu_i(q, \delta)))}{\log \delta} \quad (3.44)$$

Por otro lado, si calculamos el valor medio del exponente de singularidad $\alpha_i = \log P_i / \log \delta$ con respecto a $\mu_i(q, \delta)$ tenemos

$$\alpha(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^N \mu_i(q, \delta) \log(P_i(\delta)))}{\log \delta} \quad (3.45)$$

Estas dos expresiones proporcionan un método directo para el cálculo del espectro de singularidades, $f(\alpha)$, del conjunto que hemos definido con la distribución de medida definida por la ecuación 3.43, sin necesidad de la transformada de Legendre.

Este método de cálculo directo del espectro multifractal, caracterizado por las ecuaciones 3.44 y 3.45, lo utilizaremos en el capítulo siguiente aplicado a las imágenes de satélite. En esta sección lo utilizaremos para estimar el espectro multifractal de una "imagen" sintética que generaremos extendiendo la medida binomial definida en la sección 3.3.1 a dos dimensiones.

Partimos del cuadrado unidad, $I^2 = [0,1] \times [0,1]$, sobre el que distribuimos de manera uniforme una medida de magnitud también unidad. De la misma manera que hicimos para el caso bidimensional, iniciamos un proceso iterativo en el que vamos a ir dividiendo el cuadrado unidad en otros cada vez más pequeños y distribuyendo la medida unidad en cada uno de estos cuadrados más pequeños.

En la primera iteración dividimos en cuatro partes iguales dicho cuadrado unidad y distribuimos la medida unidad depositando en cada uno de los nuevos cuadrados las siguientes cantidades dadas por la matriz 2 x 2

$$\begin{pmatrix} \frac{m_0}{2} & \frac{1-m_0}{2} \\ \frac{1-m_0}{2} & \frac{m_0}{2} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Con $0 < m_0 \leq 0.5$. Tenemos, por tanto, en esta primera iteración 4 cuadrados, que en adelante denominaremos píxeles, cuyos lados tienen una longitud de $\delta = 1/2$ siendo su valor el determinado por la matriz 3.46.

Si continuamos el proceso iterativo, en la n -ésima iteración tendremos 2^{2n} píxeles de tamaño $\delta = 2^{-n}$. El valor que podrá tomar la medida en cada uno de los píxeles será de la forma

$$\frac{m_0^k (1-m_0)^{n-k}}{2^n} \quad (3.47)$$

donde $k = \{0, \dots, n\}$. Tendremos entonces la distribución bidimensional de una medida multinomial con la que puede calcularse exactamente el espectro multifractal con ecuaciones similares a 3.24 y 3.26. Esto es, para la función $f(\xi)$ obtenemos

$$f(\xi) = -\frac{\xi \log(\xi) + (1-\xi) \log(1-\xi) - \log 2}{\log 2} \quad (3.48)$$

Y para el exponente de Hölder, $\alpha(\xi)$, obtenemos

$$\alpha(\xi) = -\frac{\xi \log m_0 + (1-\xi) \log(1-m_0) - \log 2}{\log 2} \quad (3.49)$$

Donde $\xi \in [0, 1]$.

Para producir la imagen sintética, a la distribución de medida generada con este proceso iterativo iniciado con la matriz 3.46 le asociamos unos valores de gris, de manera que al valor más pequeño de la medida le corresponda el color negro, al valor más alto le corresponda el blanco y a los valores intermedios un nivel de gris proporcional. El resultado será una imagen sintética cuyo tamaño dependerá del límite que pongamos a las iteraciones. Si establecemos como límite la novena iteración ($n = 9$), obtendremos una imagen de 512 x 512 píxeles. Así, por ejemplo, si en la matriz 3.46 tomamos el valor $m_0 = 0.3$ se convierte en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0.15 & 0.35 \\ 0.35 & 0.15 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Tras 9 iteraciones obtendremos como resultado la imagen de 512 x 512 píxeles representada en la figura 3.8. Esta figura es la que utilizaremos para ilustrar la aplicación del análisis multifractal mediante el algoritmo de Chhabra-Jensen, descrito más arriba.

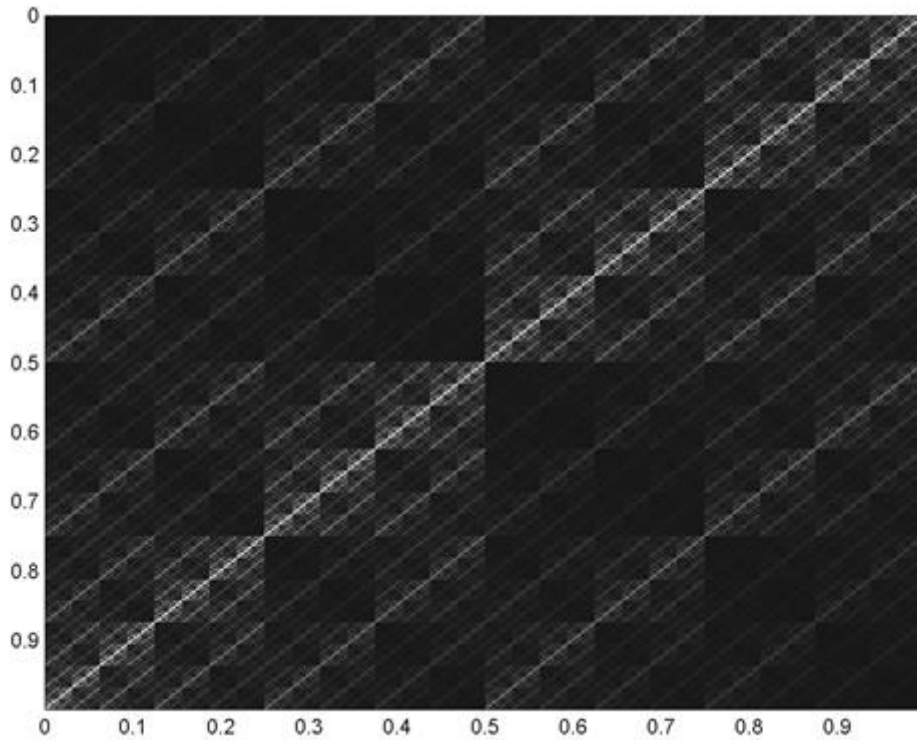


Figura 3.8 Imagen sintética que representa la medida multinomial obtenida a partir de la matriz 3.47 tomando el valor $m_0 = 0.3$. La imagen se ha generado mediante un proceso iterativo de 9 iteraciones, por lo que la imagen está compuesta de 512 x 512 píxeles. El valor de los píxeles, VD , viene dado por la ecuación 3.47, $VD = \frac{0.3^k \cdot 0.7^{9-k}}{512}$ con $k = \{0, 1, \dots, 9\}$.

Básicamente el algoritmo de Chhabra-Jensen aplicado al análisis de imagen consiste en recubrir ésta con cajas de longitudes variables, $\delta = 2^{-n}$ por ejemplo, para cada una de las cuales se calcula la cantidad $P_i(\delta)$ como la suma de los valores de los píxeles que se encuentran en su interior. A partir de esta nueva matriz, $P_i(\delta)$, se construye una familia de medidas normalizadas según la ecuación 3.43. Para cada valor de q calculamos entonces las expresiones siguientes

$$F_q = \sum_i \mu_i(q, \delta) \log(\mu_i(q, \delta)) \quad (3.50)$$

$$A_q = \sum_i \mu_i(q, \delta) \log(P_i(\delta)) \quad (3.51)$$

Estas expresiones se calculan también para los diferentes tamaños de las cajas, δ . Así, por ejemplo, si tenemos una imagen de 512 x 512 píxeles, podemos variar el tamaño de las cajas con las que recubrimos la imagen en el rango de 1 a 256 píxeles. Esto es, $\delta = 512/2^n$ con $n = \{1, 2, \dots, 9\}$. Finalmente se obtienen los valores de f_q y

α_q a partir de los ajustes lineales de las gráficas F_q versus $\log(\delta)$ y A_q versus $\log(\delta)$. Para el caso de la imagen de 512 x 512 píxeles tendremos 9 puntos para cada una de las gráficas anteriores. En la figura 3.9 se muestran algunos resultados, para distintos valores de q .

El ajuste lineal de estos puntos se realiza por el método de mínimos cuadrados. En cada gráfica de la figura 3.9 se muestra la función correspondiente al ajuste lineal, en la que se ha marcado en negrita el valor que corresponde a la pendiente. Este ajuste es, por tanto, de la forma [Cantrell, 2008] $y = m \cdot x + b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada en el origen. Estos dos parámetros se obtienen a partir de sumas de los valores (x_i, y_i) de los N puntos que forman parte del ajuste. Los valores de la pendiente, m , permiten obtener los pares de valores de f_q y α_q del espectro multifractal.

En todos los ajuste se muestra también el valor de R^2 , a partir del cual podemos calcular el error estándar de la pendiente, tanto para f_q como para α_q , mediante la expresión

$$\sigma_m = \frac{m}{\sqrt{N-2}} \sqrt{\left(\frac{1}{R^2} - 1\right)} \quad (3.52)$$

donde m es el valor de la pendiente y N el número de puntos utilizados para el ajuste.

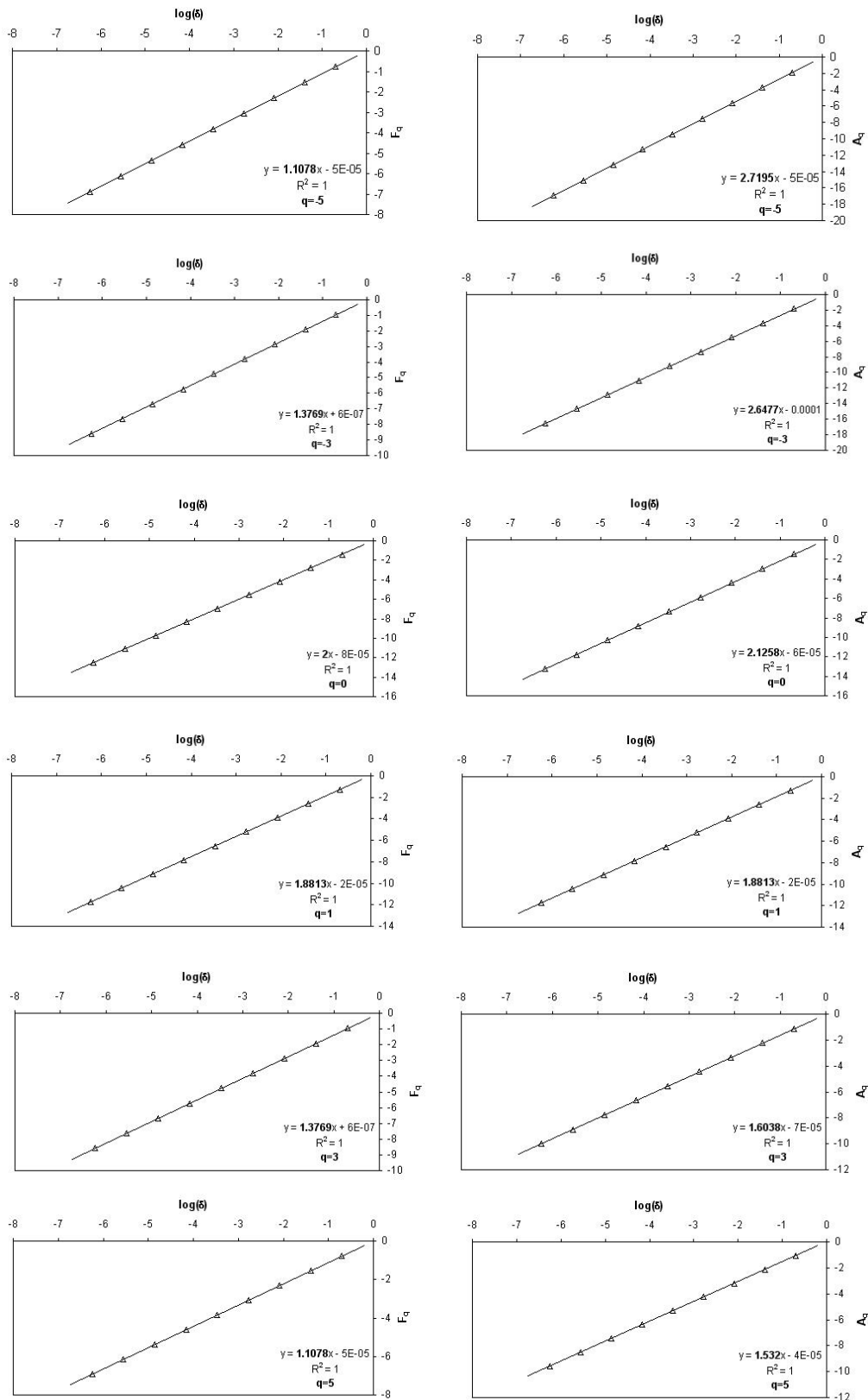


Figura 3.9 Gráficas de las funciones F_q y A_q para los valores de $q = \{-5, -3, 0, 1, 3, 5\}$. Los 9 puntos se obtienen variando $\delta = 512/2^n$ con $n = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Para las rectas de los ajustes se ha empleado la técnica de mínimos cuadrados. Las pendientes de las rectas para F_q y A_q proporcionan, respectivamente, los pares de valores f_q y α_q del espectro multifractal.

La pendiente de estas rectas proporciona los valores de los puntos del espectro multifractal, $f(\alpha)$. En el caso de la gráfica F_q versus $\log(\delta)$ la pendiente $m \equiv f_q$, mientras que para el caso de A_q versus $\log(\delta)$ la pendiente $m \equiv \alpha_q$. En la gráfica de la figura 3.10 se han representado estos valores. Se muestran con rombos los resultados de los ajustes anteriores obtenidos variando el parámetro q entre -30 y +20, siendo el salto de 0.5 entre -5 y +5.

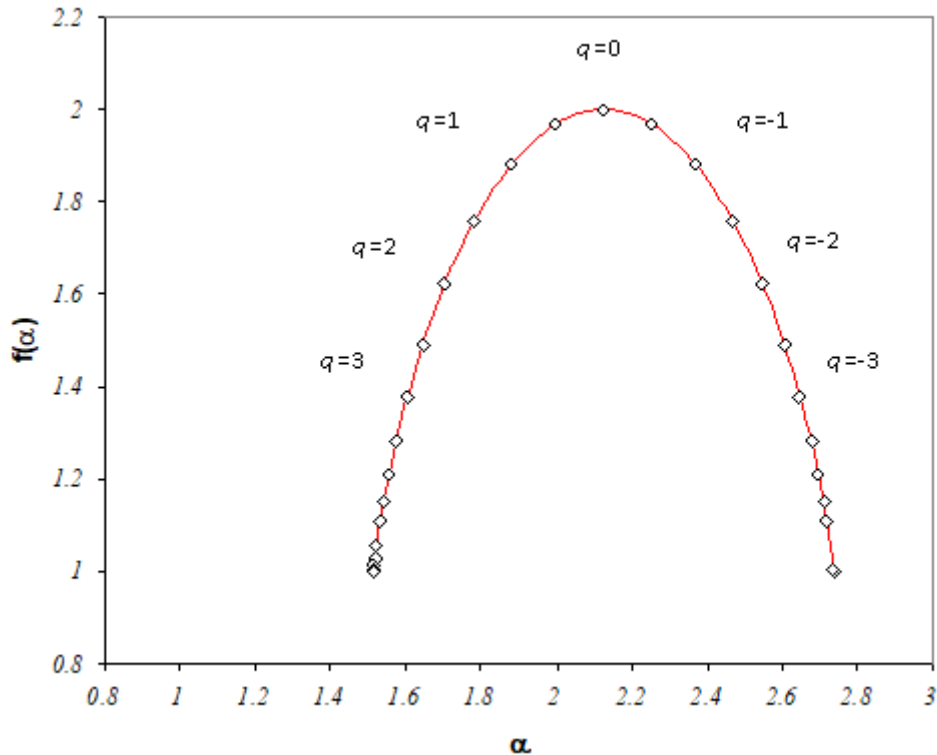


Figura 3.10 Representación del espectro multifractal, $f(\alpha)$, para la medida multinomial bidimensional representada en la figura 3.8. En la gráfica se han indicado algunos valores del parámetro q . La función presenta un máximo de valor igual a la dimensión topológica del soporte de la medida, que en este caso es 2, para $\alpha^* = 2.1258$. La función está definida entre los valores $\alpha_{min} = 1.5146$ y $\alpha_{max} = 2.737$, para los que toma el valor 1.

A partir del espectro multifractal podemos obtener los valores de $\tau(q)$ y las dimensiones generalizadas, D_q .

El valor de $\tau(q)$ está relacionado con q , $\alpha(q)$ y $f(\alpha(q))$ mediante la siguiente ecuación [Falconer, 2002]

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q \cdot \alpha(q) \quad (3.53)$$

La curva de $\tau(q)$ para la medida multinomial bidimensional, representada en la figura 3.8, se muestra en la siguiente figura.

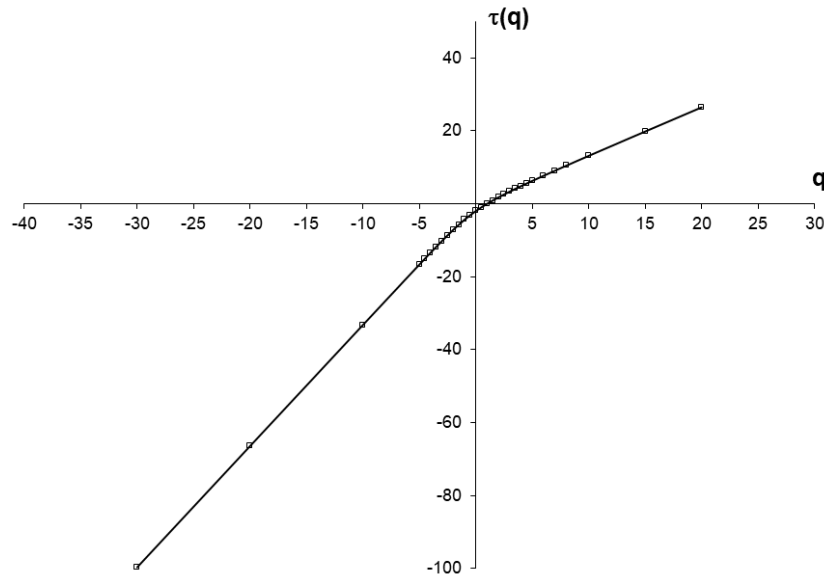


Figura 3.11 Representación de la función $\tau(q)$, para la distribución de medida multinomial bidimensional representada en la figura 3.8 para $-30 \leq q \leq +20$. Para este caso tenemos que $\tau(0) = -2$. Para los valores de q negativos la función tiene por asíntota la recta de pendiente $\alpha_{max} = 2.737$, mientras que para los valores positivos la función tiene por asíntota la recta de pendiente $\alpha_{min} = 1.5146$.

Una vez calculada la función $\tau(q)$ podemos también calcular los valores de las dimensiones generalizadas, D_q , a partir de la ecuación 3.37. La gráfica de las dimensiones generalizadas D_q respecto a q se muestra en la figura 3.12.

Esta curva es equivalente al espectro multifractal de la figura 3.10, conteniendo la misma información. La curva presenta dos asíntotas horizontales de las cuales la superior se corresponde con $D_q = \alpha_{max} \approx 2.737$, mientras que la inferior se corresponde con $D_q = \alpha_{min} \approx 1.515$. Estos valores se alcanzarán cuando $q = -\infty$ o $q = +\infty$, respectivamente. La curva presenta un punto de inflexión para $q = 1$, para el que $D_1 = \alpha_1 = f(\alpha_1) \approx 1.881$, coincidiendo con lo que hemos denominado *dimensión de información*. Para $q = 0$ obtenemos la dimensión del soporte de la medida que, en este caso, es 2.

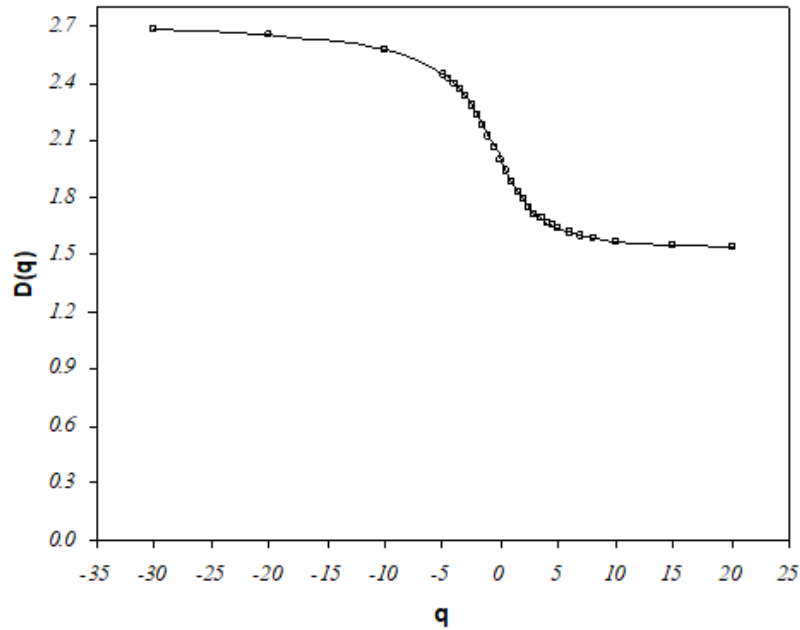


Figura 3.12 Representación de las Dimensiones Generalizadas, D_q , de la medida multinomial bidimensional representada en la figura 3.8 para $-30 \leq q \leq +20$.

3.4 Multifractales Universales

El modelo de multifractal universal es una caracterización estocástica de los procesos de cascadas multiplicativas ligados a los fenómenos de turbulencia. Con este modelo se busca englobar un conjunto de diferentes procesos que presentan un mismo comportamiento dinámico y que se describen mediante un número infinito de parámetros. En este sentido, el concepto de "universalidad" corresponde al hecho de que, entre los muchos parámetros de un modelo teórico, es posible que sólo unos pocos sean relevantes en el sentido de captar la esencia del proceso.

Vamos a considerar el caso de una cascada multiplicativa unidimensional similar a la medida binomial descrita en la sección 3.3.1. Ahora tendremos como escala mayor la definida por el segmento de longitud L , a la que se le atribuirá inicialmente una medida uniforme μ_L , normalizada para que su promedio sea la unidad. Este segmento inicial se divide en segmentos iguales de longitud l , en cada paso de la cascada. Se define la razón de escala como $\lambda = L/l$, donde $\lambda \geq 1$.

Sobre este soporte, la medida μ_λ a la escala λ es transferida multiplicativamente a la escala inferior siguiendo un proceso multiplicativo binomial conservativo, de tal forma que se conserve el promedio. Esto es, $\langle \mu_\lambda \rangle = 1, \forall \lambda$.

De esta manera la escala superior modula, en forma multiplicativa, la transferencia de la medida a la escala inferior a través de generadores estocásticos

$$\mu_\lambda = \mu_L \cdot \lambda^\gamma = \lambda^\gamma \quad (3.54)$$

Donde γ es el generador u orden de singularidad del proceso. Los valores de γ caracterizan las singularidades y son invariantes con la escala. De la ecuación anterior, el orden de singularidad viene dado por

$$\gamma = \frac{\log(\mu_\lambda)}{\log \lambda} \quad (3.55)$$

El proceso de cascada que hemos descrito se conoce como **modelo alfa** [Schertzer y Lovejoy, 1991] y se caracteriza por que en el límite de la cascada, esto es cuando el número de pasos tiende a infinito, la probabilidad de que $\mu_\lambda \geq \lambda^\gamma$ sigue una ley potencial con la razón de escala del tipo

$$Pr\{\mu_\lambda \geq \lambda^\gamma\} \approx \lambda^{-c(\gamma)} \quad (3.56)$$

La función $c(\gamma) \geq 0$ se conoce como la **codimensión** del proceso y es equivalente al espectro de singularidades $f(\alpha)$ que hemos estudiado más arriba, en este sentido el orden de singularidad, γ , sería el equivalente a α .

Esta función está relacionada con la dimensión topológica del soporte de la cascada, d , y la dimensión fractal asociada al orden de singularidad γ , $D(\gamma)$, mediante la siguiente ecuación

$$c(\gamma) = d - D(\gamma) \quad (3.57)$$

Por otro lado, si consideramos el parámetro de orden $q \in \mathbb{R}$ que define los momentos estadísticos de la medida en cada escala, $\langle \mu_\lambda^q \rangle$, es posible determinar que

dichos momentos de orden q siguen una ley potencial con la razón de escala, en la que el exponente es una función del parámetro de orden,

$$\langle \mu_\lambda^q \rangle \propto \lambda^{K(q)} \quad (3.58)$$

En esta ecuación, el exponente, $K(q)$, es conocido como función de escalado de los momentos estadísticos. Entre sus propiedades más importantes está el hecho de que es una función convexa para la que $K(q) < 0$ con $0 < q < 1$ y $K(q) > 0$ con $q > 1$.

La relación entre las funciones $c(\gamma)$ y $K(q)$ se reduce a la transformada de Legendre [Parisi y Frisch, 1985] para razones de escala grandes ($\lambda \gg 1$),

$$c(\gamma) = \max_q [q \cdot \gamma - K(q)] \quad (3.59)$$

$$K(q) = \max_\gamma [q \cdot \gamma - c(\gamma)] \quad (3.60)$$

Según el modelo de cascada que se utilice, la función de escalado, $K(q)$, puede tomar formas diversas. Por ejemplo, para el caso particular de un proceso de cascada conservativo se obtiene [Schertzer y Lovejoy, 1987]

$$K(q) = \begin{cases} \frac{C_1(q^{\alpha_L} - q)}{\alpha_L - 1} & \text{if } \alpha_L \neq 1 \\ C_1 q \log(q) & \text{if } \alpha_L = 1 \end{cases} \quad (3.61)$$

donde C_1 es la codimensión asociada al campo medio de la cascada y α_L es el conocido como índice de Levy o grado de multifractalidad de la cascada. Estos parámetros se conocen como los parámetros del Multifractal Universal.

El índice de Levy expresa la rapidez con la que evoluciona la codimensión fractal en función de la singularidad, mientras que el parámetro C_1 es un indicador de la heterogeneidad o dispersión de la medida, variando desde 0 para una medida homogénea, hasta el valor de la dimensión D del espacio en el caso de una medida fuertemente intermitente.

Así, el modelo de Multifractal Universal permite caracterizar todas las propiedades multifractales de los procesos intermitentes gracias a un número muy reducido de parámetros (dos o tres según los casos).

Existen varios trabajos que relacionan el modelo Multifractal Universal y el formalismo multifractal basado en $\tau(q)$ (Gagnon et al., 2003; Aguado et al., 2014; Morató et al., 2017 entre otros) a través de las ecuaciones:

$$f(\alpha) = E - c(\gamma); \alpha = E - \gamma \quad (3.62)$$

$$\tau(q) = E(q - 1) - K(q) \quad (3.63)$$

donde E es la dimensión euclidiana en la que se incrusta la medida, que para el caso de las imágenes será $E = 2$, $c(\gamma)$ es la codimensión y γ es el orden de singularidad de la medida multifractal.

3.5 Multifractales conjuntos

Una extensión del análisis multifractal para más de una variable fue desarrollada por Charles Meneveau y sus colaboradores al final de la década de los 80 del pasado siglo y es conocida como Análisis Multifractal Conjunto (*Joint Multifractal Analysis*, JMA). Esta teoría se utiliza para el análisis simultáneo de varias medidas multifractales correlacionadas y que están definidas sobre el mismo soporte geométrico [Meneveau et al. 1990].

Consideremos el caso de dos medidas multifractales. Tendremos entonces, dos familias de medidas normalizadas, o probabilidades, dependientes de la dupla de parámetros $q, p \in \mathbb{R}$, que denotaremos como $\mu(q)$ y $\mu^*(p)$, donde las probabilidades en las cajas de tamaño δ están determinadas por la ecuación 3.43 cada una. Esto es

$$\mu_i(q, \delta) = \frac{(P_i(\delta))^q}{\sum_j (P_j(\delta))^q} \quad (3.54)$$

$$\mu_i^*(p, \delta) = \frac{(P_i^*(\delta))^p}{\sum_j (P_j^*(\delta))^p} \quad (3.55)$$

donde los parámetros q y p pueden variar entre $-\infty$ y $+\infty$. Las funciones de probabilidad de ambas medidas escalan siguiendo ecuaciones del tipo 3.39, con los exponentes de singularidad α_i y α_i^* .

Si cubrimos las medidas con cajas de tamaño δ , el número de cajas, $N(\alpha, \alpha^*)$, donde las medidas P_i y P_i^* tienen un exponente de singularidad entre α y $\alpha + d\alpha$, para la primera, y α^* y $\alpha^* + d\alpha^*$, para la segunda, escala con el tamaño de cajas según una ecuación similar a 3.40. Esto es,

$$N(\alpha, \alpha^*) \propto \delta^{-f(\alpha, \alpha^*)} \quad (3.56)$$

donde $f(\alpha, \alpha^*)$ define el espectro multifractal conjunto de las cajas con exponentes de singularidad α y α^* . El máximo valor del espectro multifractal conjunto, $f(\alpha, \alpha^*)$, es igual a la dimensión de *box-counting* del soporte geométrico de las medidas y se alcanza cuando $q = p = 0$.

La aplicación de la generalización al caso de multifractales conjuntos permite definir la función conjunta $\tau(q, p)$ a través de una ley de escala equivalente a la representada por la ecuación 3.31. Esta función se relaciona con el espectro multifractal conjunto $f(\alpha, \alpha^*)$ a través de una transformación de Legendre doble de manera que

$$\tau(q, p) = q \cdot \alpha + p \cdot \alpha^* - f(\alpha, \alpha^*) \quad (3.57)$$

Donde $\alpha(q, p) = \frac{d\tau(q, p)}{dq}$ y $\alpha^*(q, p) = \frac{d\tau(q, p)}{dp}$.

Para calcular el espectro multifractal conjunto podemos utilizar el algoritmo de Chhabra-Jensen, que vimos en la sección 3.3.3, adaptado. Así, las ecuaciones equivalentes a las 3.44 y 3.45 quedarían como

$$f(q, p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^N \mu_i(q, p, \delta) \log(\mu_i(q, p, \delta)))}{\log \delta} \quad (3.58)$$

para la dimensión de la medida del soporte de $\mu_i(q, p, \delta)$, mientras que para los exponentes de singularidad, α y α^* , tendríamos

$$\alpha(q, p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^N \mu_i(q, p, \delta) \log(P_i(\delta)))}{\log \delta} \quad (3.59)$$

$$\alpha^*(q, p) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^N \mu_i(q, p, \delta) \log(P_i^*(\delta)))}{\log \delta} \quad (3.60)$$

Estas tres expresiones proporcionan un método directo para el cálculo del espectro conjunto de singularidades, $f(\alpha, \alpha^*)$, de dos multifractales correlacionados.

Como ya vimos en la sección 3.3.3, la operativa del cálculo de las tres ecuaciones anteriores pasa por la generación de las siguientes

$$F_{q,p} = \sum_i \mu_i(q, p, \delta) \log(\mu_i(q, p, \delta)) \quad (3.61)$$

$$A_{q,p} = \sum_i \mu_i(q, p, \delta) \log(P_i(\delta)) \quad (3.62)$$

$$A_{q,p}^* = \sum_i \mu_i(q, p, \delta) \log(P_i^*(\delta)) \quad (3.63)$$

Los valores de $f_{q,p}$, $\alpha_{q,p}$ y $\alpha_{q,p}^*$ se obtienen entonces a partir de los ajustes lineales de las gráficas $F_{q,p}$ versus $\log(\delta)$, $A_{q,p}$ versus $\log(\delta)$ y $A_{q,p}^*$ versus $\log(\delta)$, respectivamente (Kravchenko et al., 2000).

4 SEGUIMIENTO MULTIESCALA DE LA VEGETACIÓN

En este capítulo aplicamos lo visto, desde el punto de vista teórico, en los dos capítulos anteriores al estudio del comportamiento espacial y temporal de la vegetación a diferentes escalas, vista por los satélites de Observación de la Tierra.

En relación con el comportamiento espacial, la heterogeneidad de la distribución de la vegetación, que puede ser importante a media y alta resolución, constituye una fuente de incertidumbre significativa cuando las relaciones entre las variables biofísicas y las variables radiométricas no son lineales. Estas relaciones hacen que los algoritmos multiescala, basados en fractales y multifractales, sean una potente herramienta para el análisis de dichas variables en las imágenes satelitales.

En relación con el comportamiento temporal, los algoritmos multiescala basados en multifractales permiten analizar la correlación entre distintas variables biofísicas como son el índice de vegetación y el índice de humedad del suelo. Estas dos variables son el objeto de estudio en este capítulo.

4.1 Análisis fractal de imágenes de distinta resolución espacial

Vimos en el capítulo 2 que desde hace poco más de 40 años, los datos que obtienen los satélites de Observación de la Tierra son una importante fuente de información para la cartografía y el seguimiento de la cobertura vegetal. Estos datos permiten estimar las variables biofísicas reveladoras tanto del estado como de la dinámica de dicha cobertura vegetal (Escribano et al., 2013).

A una escala global, la cobertura vegetal es un elemento clave del sistema climático terrestre, regulando el balance del dióxido de carbono en la atmósfera. A su vez, el sistema climático, junto a otros factores, interacciona de manera compleja (no lineal) con la vegetación modificando los patrones de su distribución no solo temporal sino también espacialmente.

En este apartado se aborda el análisis de la distribución espacial de la vegetación observada por dos sensores espaciales con distintas resoluciones (Alonso et al.,

2013): el sensor TM del satélite Landsat-5, descrito en detalle en el apartado 2.2.1, y el sensor MODIS del satélite Terra, descrito en el apartado 2.2.2.

El primero permite obtener las variables biofísicas relativas a la vegetación con una resolución espacial de 30 m, mientras que con el segundo se obtienen con 250 m de resolución. La comparación de los patrones espaciales de la vegetación obtenidos con ambos sensores se ha tratado mediante las técnicas fractales descritas en el capítulo 3.

4.1.1 Material y métodos

En este apartado se describen las imágenes utilizadas en el análisis. El objetivo de este primer análisis es el de comparar la distribución espacial de la vegetación observada con los sensores de dos satélites distintos, Landsat-5 por un lado y Terra por el otro, mediante algoritmos multiescala. Como ya se vio en el capítulo 2, las imágenes adquiridas por ambos satélites permiten la obtención del índice de vegetación de diferencia normalizada o NDVI mediante la ecuación 2.28 aplicada a cada uno de los sensores.

La imagen Landsat-5 TM utilizada es la escena 202-32, en la notación WRS de Landsat, y adquirida el día 13/07/2003. Esta imagen se descargó del servidor del USGS, *Global Visualization Viewer* (<http://glovis.usgs.gov>).

La imagen Terra-MODIS de la península fue adquirida justo el día anterior, esto es el 12/07/2003, y se descargó del servidor de la NASA, *Level 1 and Atmosphere Archive and Distribution System* (<http://ladsweb.nascom.nasa.gov>).

El pre-procesado de las imágenes consistió en dos pasos:

- Por un lado, la calibración radiométrica de ambas imágenes, para transformar sus valores digitales en reflectividad en el tope de la atmósfera, para cada una de sus bandas.
- Y por otro lado el ajuste geométrico entre las retículas de los píxeles de ambas imágenes

Una vez concluido el pre-procesado, se obtuvieron los índices de vegetación de diferencia normalizada o NDVI a partir de las reflectividades TOA de las correspondientes bandas, con 30 m de tamaño de píxel para la imagen del TM y 250 m para la imagen del MODIS.

De cada una de las imágenes se recortó el área de interés (figura 4.1), cubriendo aproximadamente la misma zona geográfica, de 1024 x 1024 píxeles para el NDVI de la imagen TM y de 128 x 128 píxeles para la imagen MODIS. La zona cubierta por los recortes está limitada por las coordenadas UTM (zona 30) y elipsoide WGS84:

ULX: 206430; ULY: 4487250; LRX: 237120 y LRY: 4456560

Esta zona se localiza entre las provincias de Cáceres y Salamanca, con una extensión aproximada de 32 x 32 km². La altitud en la zona varía entre los 1560 m y los 320 m, que comprende vegetación natural en la zona de montaña (bosques, matorrales y pastos) y cultivos agrícolas en los valles.

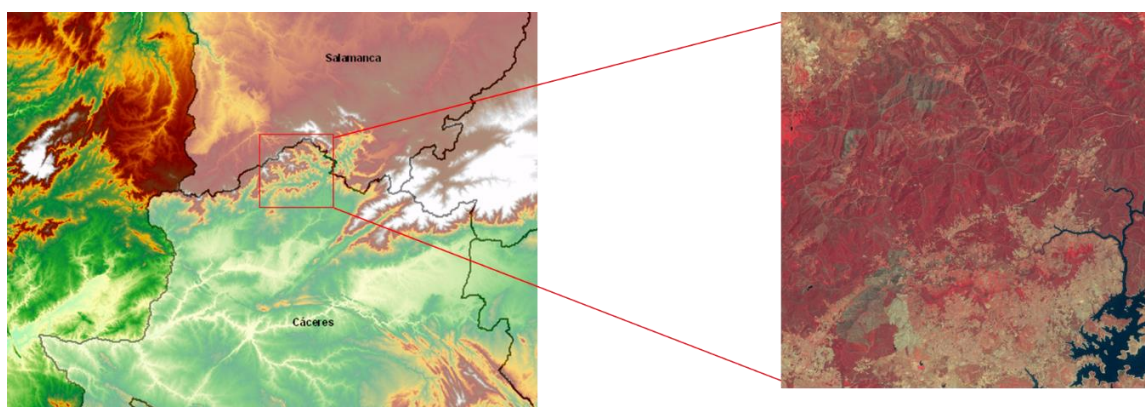


Figura 4.1 La zona de estudio se localiza entre las provincias de Cáceres y Salamanca (imagen de la izquierda), con una extensión aproximada de 32 x 32 km². La altitud en la zona varía entre los más de 1500 m, en la zona montañosa, y los 320 m, en la zona del valle. Con un paisaje de bosques, matorrales y pastos en la primera zona y de cultivos agrícolas en la segunda, junto con el embalse de Gabriel y Galán (imagen de la derecha).

Los valores de los índices de vegetación se segmentaron siguiendo los siguientes criterios [Sobrino et al, 2004]:

- los píxeles con $NDVI < 0.2$ se han considerado como suelo desnudo,

- los píxeles con $0.2 \leq NDVI \leq 0.5$ se han considerado como mezcla no lineal entre suelo y vegetación,
- finalmente, los píxeles con $NDVI > 0.5$ se han considerado como completamente cubiertos de vegetación en el 100% de su superficie

Según estos criterios, se han analizado los valores del NDVI superiores a 0.2, segmentándolos en 7 intervalos con incrementos de 0.05.

Las imágenes del NDVI segmentadas con los criterios anteriores se transformaron a binarias con valores 0 y 1. Las figuras 4.2, para landsat-5 TM, y 4.3, para Terra-MODIS, muestran el resultado de esta transformación para cada una de las segmentaciones del NDVI (Alonso et al., 2012 y 2013).

4.1.2 Resultados y discusión

Estas imágenes binarias (figuras 4.2 y 4.3) fueron las que se utilizaron para la estimación de la dimensión fractal mediante la aplicación del algoritmo de recuento de cajas o de *box counting* descrito en la sección 3.1.2.

Para las imágenes TM, el tamaño δ de las cajas se varió en el rango equivalente desde los 30 m, el tamaño correspondiente a un píxel, hasta los 30.72 km, que corresponde a una caja de 1024 píxeles de lado, duplicando en cada paso el tamaño de la caja.

De esta forma se obtuvieron un total de 11 puntos para realizar el ajuste lineal en la gráfica log-log. Estas gráficas se muestran en la figura 4.4 para cada uno de los rangos en los que se ha segmentado el NDVI. Los resultados del cálculo en cada paso de escala se muestran en la tabla 4.1, para cada rango de segmentación del NDVI.

Igualmente para el caso de las imágenes MODIS. El tamaño δ de las cajas se hizo variar entre los 250 m, que corresponde a la caja de un píxel, y los 32 km, que es el tamaño de una caja de 128 píxeles, duplicando en cada paso el tamaño de la caja.

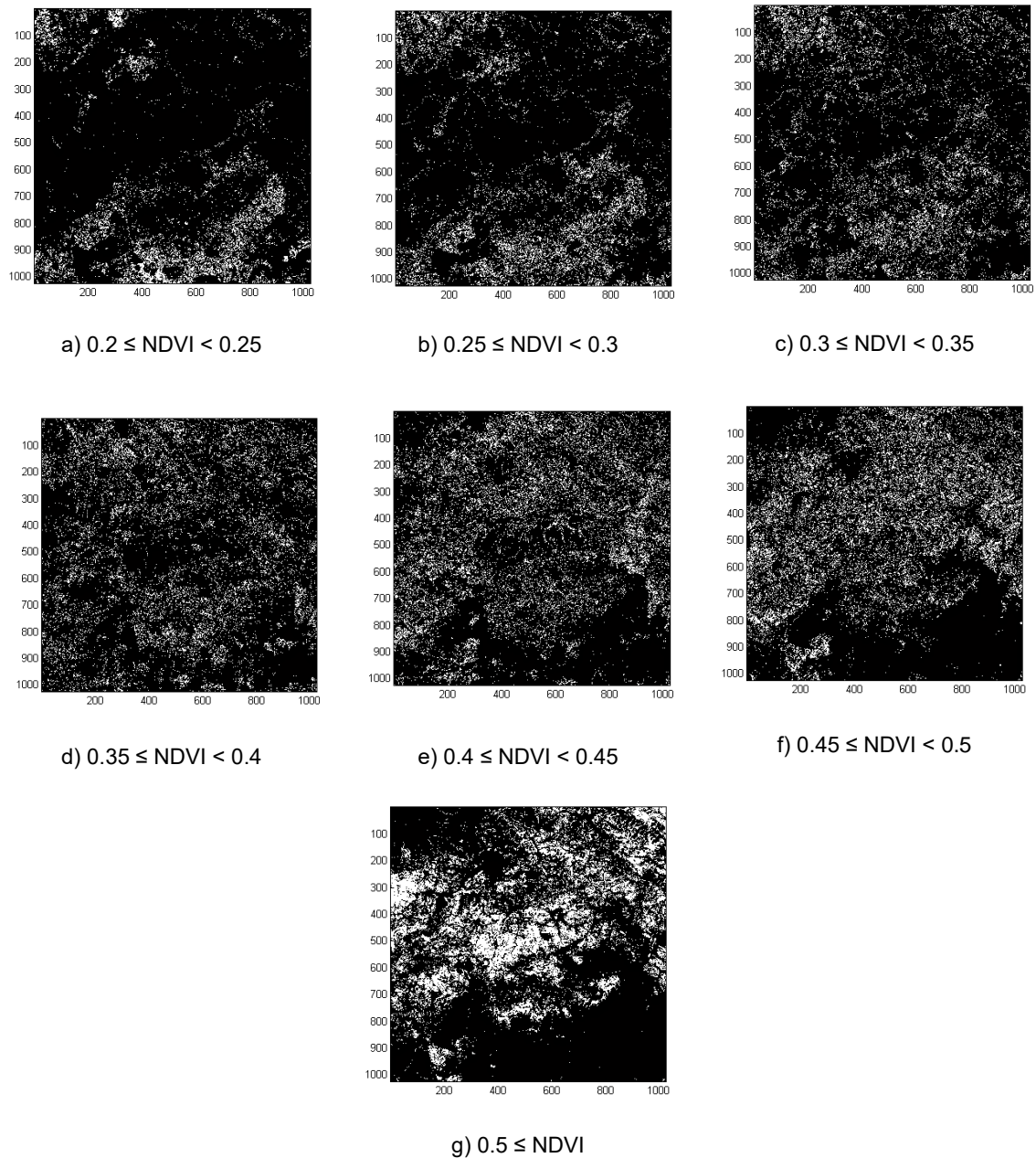


Figura 4.2 Segmentación de los valores positivos del NDVI obtenido de la imagen Landsat-5 TM. Los valores del NDVI superiores a 0.2 se segmentaron según 7 rangos que fueron posteriormente transformados en las imágenes binarias que se muestran para su análisis. Los píxeles blancos tienen valor 1, según el rango de segmentación, el resto tienen valor 0 que corresponde a los píxeles negros.

De esta forma se obtuvieron un total de 8 puntos para realizar el ajuste lineal en la gráfica log-log. Estas gráficas son las que se muestran en la figura 4.5 para cada uno de los rangos en los que se ha segmentado el NDVI. En este caso, los resultados del cálculo en cada paso de escala se muestran en la tabla 4.2, para cada rango de segmentación del NDVI.

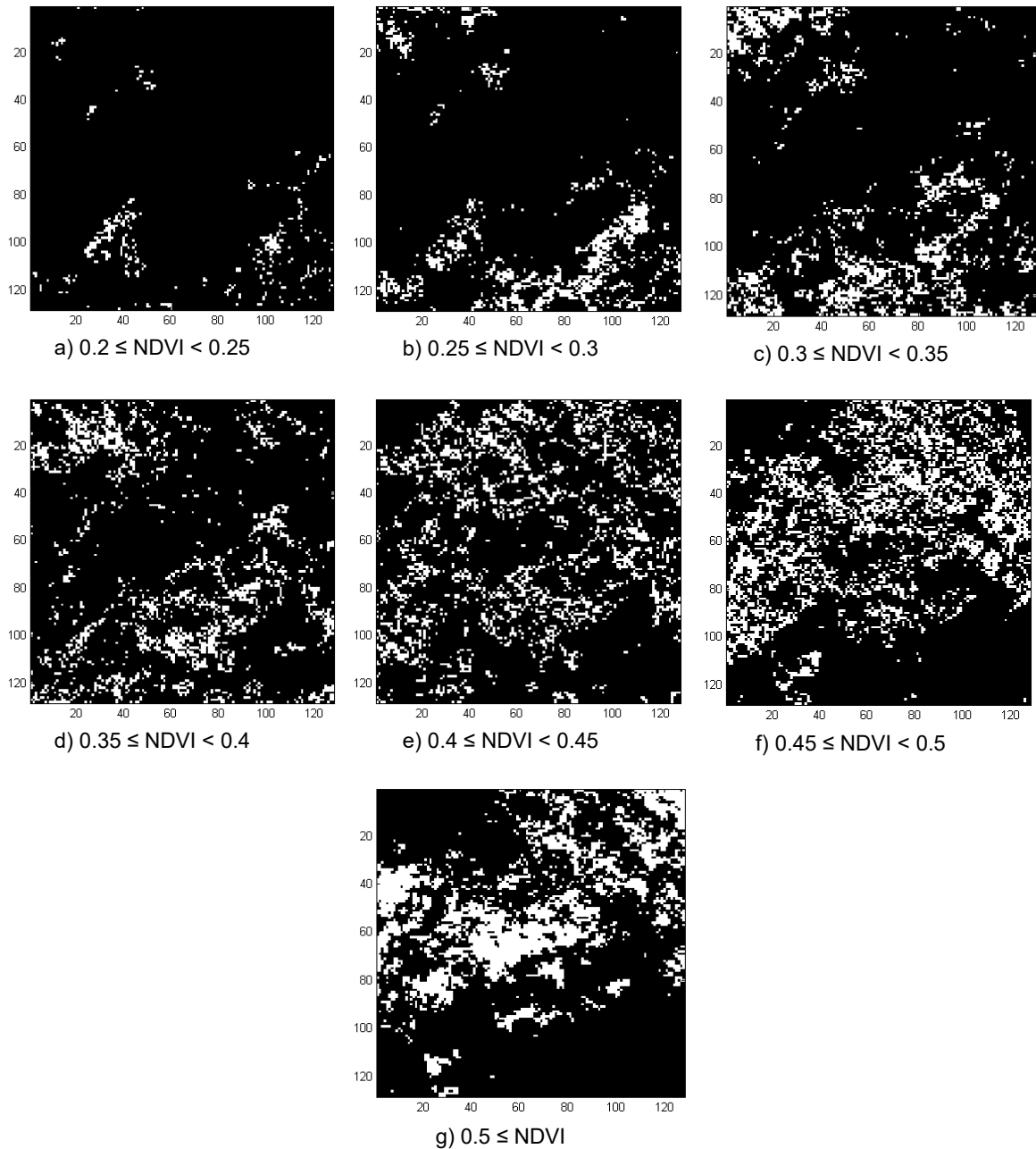


Figura 4.3 Segmentación de los valores positivos del NDVI obtenido de la imagen Terra-MODIS. Al igual que para la imagen Landsat, los valores del NDVI superiores a 0.2 se segmentaron según 7 rangos que fueron posteriormente transformados en las imágenes binarias que se muestran para su análisis. Los píxeles blancos tienen valor 1, según el rango de segmentación, el resto tienen valor 0 que corresponde a los píxeles negros.

No es raro que algunos sistemas puedan presentar diferentes comportamientos en distintos rangos de escala (Seuront, 2010), que se manifiestan en diferentes dimensiones para los distintos rangos de escala. Esto unido a la comparación entre sensores objeto de este trabajo justifica que prescindamos de algunos puntos para el ajuste de las gráficas.

Con el objeto de que los resultados entre las imágenes TM y MODIS puedan ser comparables, ya que hemos visto que los primeros puntos en las gráficas log-log no deben tenerse en cuenta, se escalaron ambas entre 960 m y 16 km. Con ello se obtienen 5 puntos equivalentes para cada una de las imágenes, con los que se puede realizar el ajuste a partir del cual obtener los valores de la dimensión fractal de cada una de ellas.

En las gráficas de las figuras 4.4 y 4.5 se han representado los cinco puntos equivalentes en color rojo. Estos puntos se corresponden también con los datos destacados en color rojo en las tablas 4.1 y 4.2. Como puede verse en las tablas, no se han considerado los puntos correspondientes a las cajas de tamaño más pequeño ya que con esos datos empeora el ajuste lineal con el resto de puntos. Tampoco se ha considerado la caja de tamaño máximo por su carácter extremo. De esta manera, el rango de escalas estudiado para ambos sensores está, como ya se dijo, entre los 960 m y los 16 km.

Tabla 4-1 Resultados de aplicar el algoritmo de recuento de cajas sobre las imágenes de la figura 4.2.

Rango NDVI	Porcentaje píxeles blancos (%)	N	δ	$\delta * 30$ (m)	log N	log ($\delta * 30$)	Dimensión fractal (pendiente del ajuste lineal)	R ²	Error
a) 0.2 ≤ NDVI < 0.25	7.46	78227	1	30	11.2674	3.4012	1.9496	0.9996	0.0493
		39252	2	60	10.5778	4.0943			
		17410	4	120	9.7648	4.7875			
		6893	8	240	8.8383	5.4806			
		2531	16	480	7.8364	6.1738			
		872	32	960	6.7708	6.8669			
		249	64	1920	5.5175	7.5601			
		64	128	3840	4.1589	8.2532			
		16	256	7680	2.7726	8.9464			
		4	512	15360	1.3863	9.6395			
1	1024	30720	0.0000	10.3327					
b) 0.25 ≤ NDVI < 0.3	9.12	95667	1	30	11.4686	3.4012	1.9873	1.0000	0.0160
		52863	2	60	10.8755	4.0943			
		24268	4	120	10.0969	4.7875			
		9299	8	240	9.1377	5.4806			
		3194	16	480	8.0690	6.1738			
		980	32	960	6.8876	6.8669			
		256	64	1920	5.5452	7.5601			
		64	128	3840	4.1589	8.2532			
		16	256	7680	2.7726	8.9464			
		4	512	15360	1.3863	9.6395			
1	1024	30720	0.0000	10.3327					
c) 0.3 ≤ NDVI < 0.35	10.17	106635	1	30	11.5772	3.4012	1.9957	1.0000	0.0054
		62888	2	60	11.0491	4.0943			
		29943	4	120	10.3071	4.7875			
		11452	8	240	9.3459	5.4806			
		3674	16	480	8.2090	6.1738			
		1009	32	960	6.9167	6.8669			
		256	64	1920	5.5452	7.5601			
		64	128	3840	4.1589	8.2532			
		16	256	7680	2.7726	8.9464			
		4	512	15360	1.3863	9.6395			
1	1024	30720	0.0000	10.3327					
d) 0.35 ≤ NDVI < 0.4	11.82	123928	1	30	11.7275	3.4012	1.9975	1.0000	0.0032
		73944	2	60	11.2111	4.0943			
		34887	4	120	10.4599	4.7875			
		12820	8	240	9.4588	5.4806			
		3857	16	480	8.2576	6.1738			
		1015	32	960	6.9226	6.8669			
		256	64	1920	5.5452	7.5601			
		64	128	3840	4.1589	8.2532			
		16	256	7680	2.7726	8.9464			
		4	512	15360	1.3863	9.6395			
1	1024	30720	0.0000	10.3327					
e) 0.4 ≤ NDVI < 0.45	14.43	151357	1	30	11.9274	3.4012	1.9906	1.0000	0.0099
		86304	2	60	11.3656	4.0943			
		38317	4	120	10.5536	4.7875			
		12953	8	240	9.4691	5.4806			
		3733	16	480	8.2250	6.1738			
		993	32	960	6.9007	6.8669			
		255	64	1920	5.5413	7.5601			
		64	128	3840	4.1589	8.2532			
		16	256	7680	2.7726	8.9464			
		4	512	15360	1.3863	9.6395			
1	1024	30720	0.0000	10.3327					
f) 0.45 ≤ NDVI < 0.5	16.01	167923	1	30	12.0313	3.4012	1.9761	0.9999	0.0204
		90608	2	60	11.4143	4.0943			
		37852	4	120	10.5414	4.7875			
		12224	8	240	9.4112	5.4806			
		3468	16	480	8.1513	6.1738			
		952	32	960	6.8586	6.8669			
		251	64	1920	5.5255	7.5601			
		64	128	3840	4.1589	8.2532			
		16	256	7680	2.7726	8.9464			
		4	512	15360	1.3863	9.6395			
1	1024	30720	0.0000	10.3327					
g) 0.5 ≤ NDVI	22.37	234558	1	30	12.3655	3.4012	1.9478	0.9998	0.0344
		86578	2	60	11.3688	4.0943			
		31837	4	120	10.3684	4.7875			
		10605	8	240	9.2691	5.4806			
		3159	16	480	8.0580	6.1738			
		879	32	960	6.7788	6.8669			
		242	64	1920	5.4889	7.5601			
		63	128	3840	4.1431	8.2532			
		16	256	7680	2.7726	8.9464			
		4	512	15360	1.3863	9.6395			
1	1024	30720	0.0000	10.3327					

Tabla 4-2 Resultados de aplicar el algoritmo de recuento de cajas sobre las imágenes de la figura 4.3.

Rango NDVI	Porcentaje píxeles blancos (%)	N	δ	$\delta * 250$ (m)	log N	log ($\delta * 250$)	Dimensión fractal (pendiente del ajuste lineal)	R ²	Error
a) $0.2 \leq NDVI < 0.25$	2.31	379	1	250	5.9375	5.5215	1.2667	0.9899	0.1620
		252	2	500	5.5294	6.2146			
		140	4	1000	4.9416	6.9078			
		69	8	2000	4.2341	7.6009			
		31	16	4000	3.4340	8.2940			
		13	32	8000	2.5649	8.9872			
4	64	16000	1.3863	9.6803					
1	128	32000	0.0000	10.3735					
b) $0.25 \leq NDVI < 0.3$	7.7	1261	1	250	7.1397	5.5215	1.5242	0.9927	0.1655
		660	2	500	6.4922	6.2146			
		295	4	1000	5.6870	6.9078			
		114	8	2000	4.7362	7.6009			
		45	16	4000	3.8067	8.2940			
		16	32	8000	2.7726	8.9872			
4	64	16000	1.3863	9.6803					
1	128	32000	0.0000	10.3735					
c) $0.3 \leq NDVI < 0.35$	11.4	1867	1	250	7.5321	5.5215	1.6748	0.9951	0.1488
		985	2	500	6.8926	6.2146			
		421	4	1000	6.0426	6.9078			
		159	8	2000	5.0689	7.6009			
		54	16	4000	3.9890	8.2940			
		16	32	8000	2.7726	8.9872			
4	64	16000	1.3863	9.6803					
1	128	32000	0.0000	10.3735					
d) $0.35 \leq NDVI < 0.4$	12.64	2071	1	250	7.6358	5.5215	1.7877	0.9947	0.1651
		1168	2	500	7.0630	6.2146			
		543	4	1000	6.2971	6.9078			
		209	8	2000	5.3423	7.6009			
		63	16	4000	4.1431	8.2940			
		16	32	8000	2.7726	8.9872			
4	64	16000	1.3863	9.6803					
1	128	32000	0.0000	10.3735					
e) $0.4 \leq NDVI < 0.45$	16.76	2746	1	250	7.9179	5.5215	1.8677	0.9981	0.1018
		1584	2	500	7.3677	6.2146			
		689	4	1000	6.5352	6.9078			
		226	8	2000	5.4205	7.6009			
		63	16	4000	4.1431	8.2940			
		16	32	8000	2.7726	8.9872			
4	64	16000	1.3863	9.6803					
1	128	32000	0.0000	10.3735					
f) $0.45 \leq NDVI < 0.5$	23.13	3789	1	250	8.2399	5.5215	1.8500	0.9993	0.0610
		1871	2	500	7.5342	6.2146			
		682	4	1000	6.5250	6.9078			
		204	8	2000	5.3181	7.6009			
		58	16	4000	4.0604	8.2940			
		16	32	8000	2.7726	8.9872			
4	64	16000	1.3863	9.6803					
1	128	32000	0.0000	10.3735					
g) $0.5 \leq NDVI$	22.08	3618	1	250	8.1937	5.5215	1.7939	0.9986	0.0843
		1504	2	500	7.3159	6.2146			
		568	4	1000	6.3421	6.9078			
		187	8	2000	5.2311	7.6009			
		56	16	4000	4.0254	8.2940			
		15	32	8000	2.7081	8.9872			
4	64	16000	1.3863	9.6803					
1	128	32000	0.0000	10.3735					

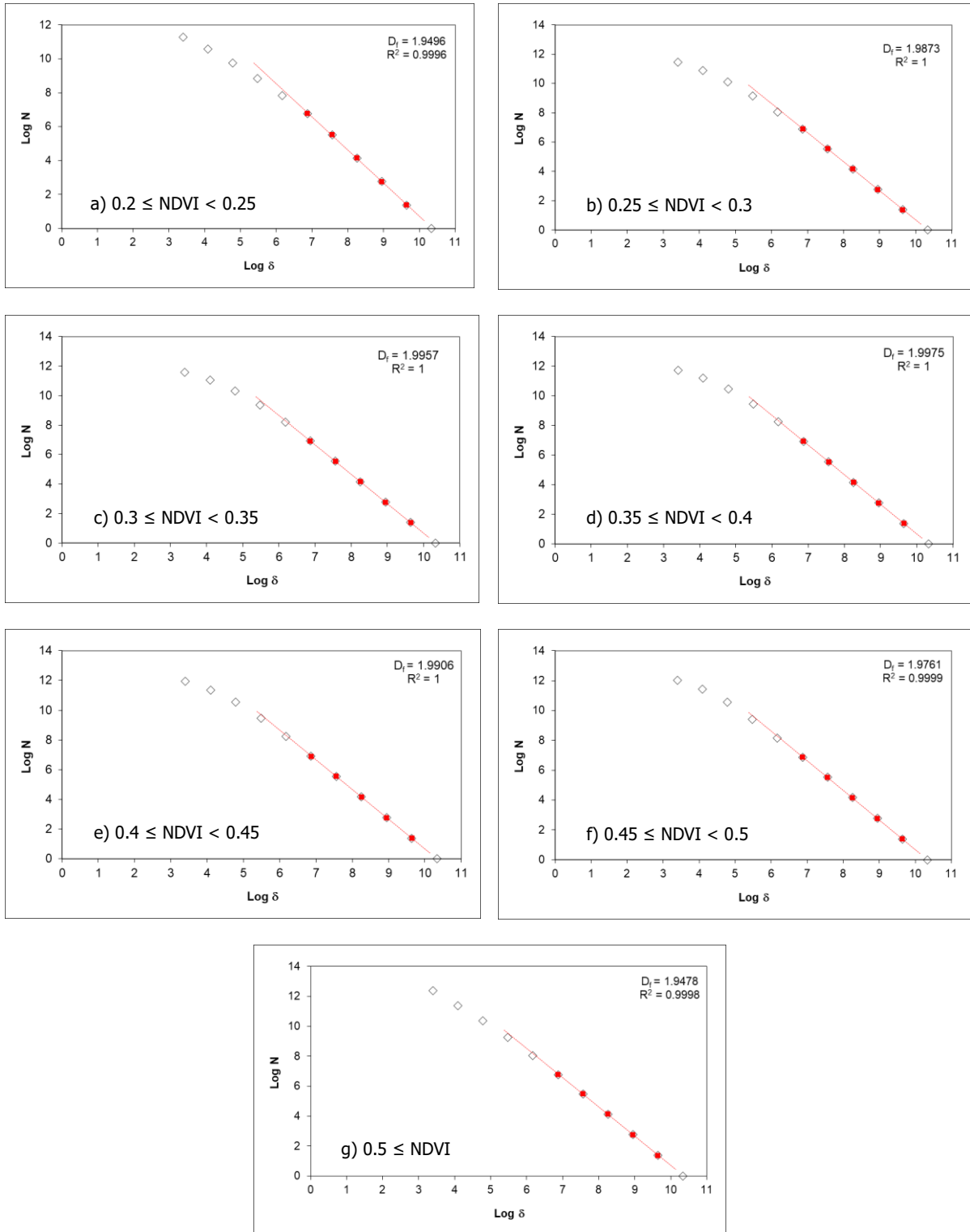


Figura 4.4 Gráficas log-log resultantes del recuento de cajas sobre las imágenes binarias del NDVI de Landsat-5 TM. Estas gráficas se han elaborado con los datos de la tabla 4.1. Los rombos corresponden a los 11 puntos que proporciona el recuento de cajas.

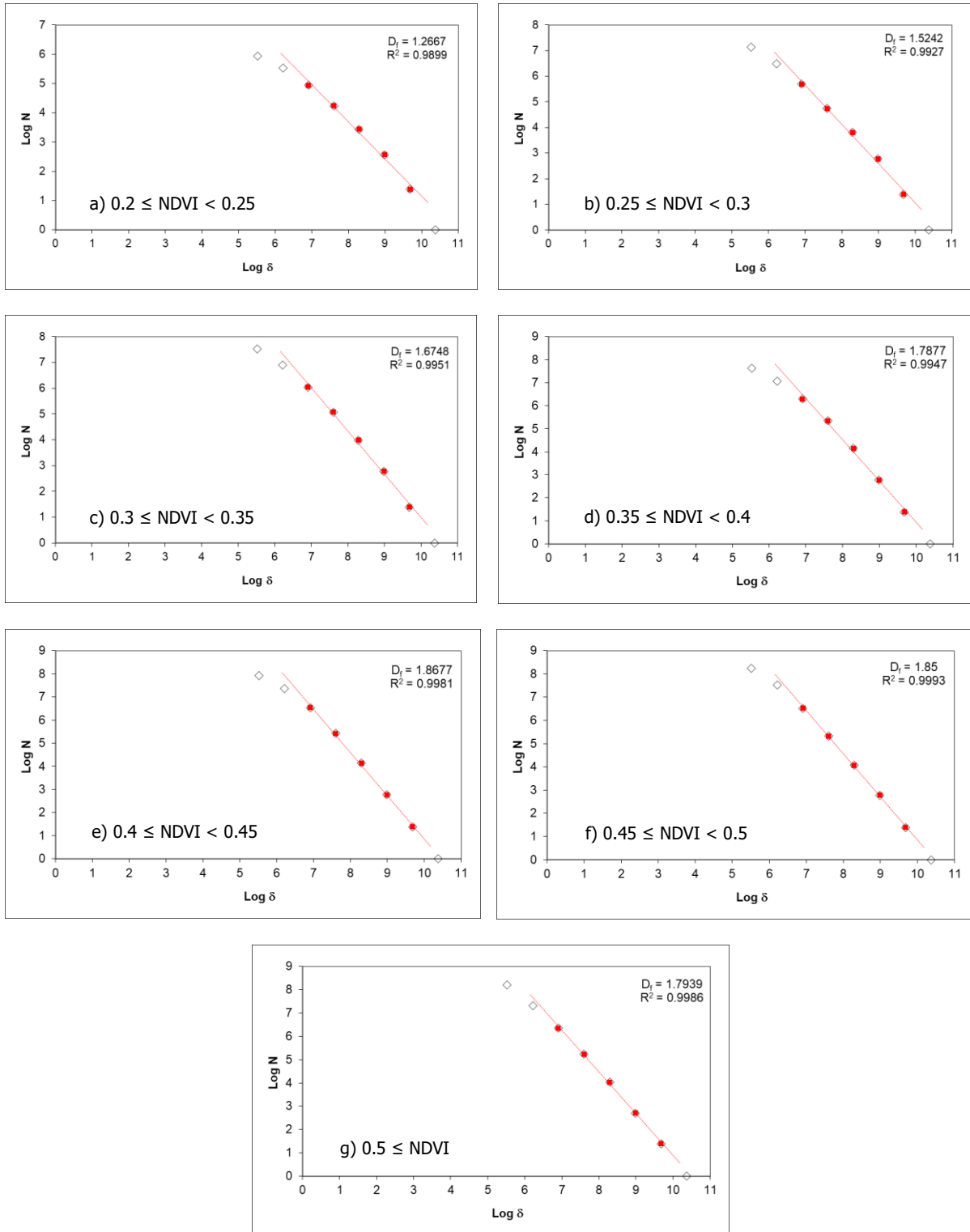


Figura 4.5 Gráficas log-log resultantes del recuento de cajas sobre las imágenes binarias del NDVI de Terra MODIS. Estas gráficas se han elaborado con los datos de la tabla 4.2. Los rombos corresponden a los 11 puntos que proporciona el recuento de cajas.

Así para el primer rango de segmentación del NDVI, que corresponde a los valores comprendidos entre 0.2 y 0.25 ($0.2 \leq \text{NDVI} < 0.25$), las imágenes binarias resultantes en las figuras 4.2 y 4.3 representan con valor 1 (píxeles de color blanco) aquellos cuyo valor del NDVI está comprendido entre 0.2 y 0.25, mientras que los píxeles negros, con valor 0, representan el resto. Para el sensor TM, en la figura 4.2 a, estos píxeles con valor 1 representan el 7.46% de los píxeles de la imagen. Para el sensor MODIS, en la figura 4.3 a, representan el 2.31%. Los 5 puntos rojos que se han ajustado en la gráfica log-log 4.4 a, con tamaños de cajas que escalan entre 0.96 km y 15.36 km, proporcionan un valor de la dimensión fractal por recuento de cajas de 1.9496 para el sensor TM. Mientras que los que se han ajustado en la gráfica 4.5 a para el mismo rango de segmentación del NDVI, con tamaños de cajas que escalan entre 1 km y 16 km, proporcionan un valor de la dimensión fractal por recuento de cajas de 1.2667 para el sensor MODIS. Este mismo cálculo se realizó para cada uno del resto de rangos de segmentación del NDVI descritos más arriba.

Los resultados se muestran en la gráfica de la figura 4.6, donde se han representado las dimensiones fractales obtenidas para el sensor TM, con triángulos de color rojo, y para el sensor MODIS, con cuadrados de color azul, escalando las imágenes entre 0.96 km y 16 km. Esta gráfica es la caracterización del patrón que la distribución espacial de la vegetación presenta en las imágenes de ambos sensores (Alonso et al. 2013).

El primer resultado interesante, que para las imágenes MODIS resulta más evidente, es que para caracterizar la información de textura del índice de vegetación no basta con una sola dimensión fractal. Por el contrario, es necesario un continuo de dimensiones. En el marco matemático de los objetos fractales que vimos en el capítulo 3, aquellos para los que es necesario un continuo de dimensiones en su caracterización son los denominados "multifractales" (Alonso et al. 2005; Alonso et al. 2007; Lovejoy et al. 2008).

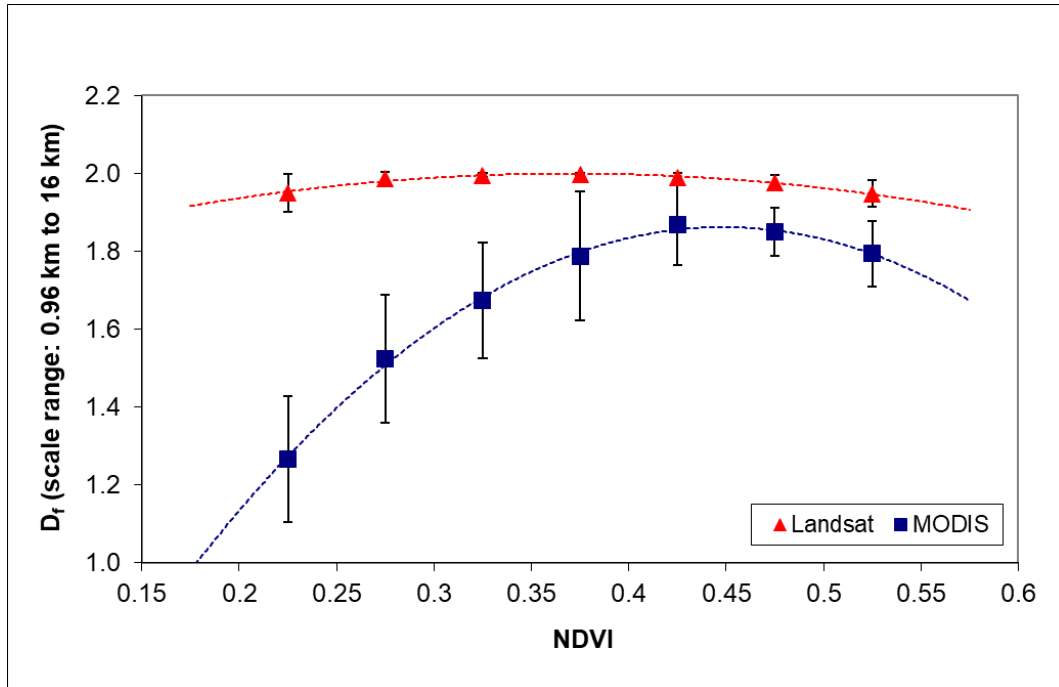


Figura 4.6 Comparación de los valores de dimensión fractal obtenidos con los sensores TM (triángulos) y MODIS (cuadrados). Estos valores se han obtenido para los patrones de la distribución espacial de la vegetación extraídos de las imágenes de cada uno de los sensores a partir del NDVI. Esta caracterización fractal muestra la similitud de patrones para valores altos del NDVI entre ambos sensores.

También se observa que para los datos del Landsat-5 TM el rango de variación de la dimensión fractal es muy pequeño, comprendido entre 1.9478 y 1.9975. Mientras que para los datos del Terra MODIS es mucho más amplio, entre 1.2667 y 1.8677. Los errores para éstos últimos son también mayores.

Un dato interesante que se observa también en la figura es que la similitud entre los patrones de la vegetación, para ambos sensores, es mayor para los valores del NDVI comprendidos entre 0.4 y 0.5. Es decir, para píxeles cubiertos en más de un 40% por la vegetación (Alonso et al. 2013).

4.1.3 Conclusiones

Se ha visto que la dimensión fractal es un parámetro que permite caracterizar los patrones de la distribución espacial de la vegetación. Este parámetro se calcula fácilmente para imágenes bidimensionales mediante el algoritmo de recuento de cajas a diferentes escalas.

Para la completa caracterización de la complejidad de estos patrones es necesario un continuo de dimensiones fractales, lo que indica que se trata de multifractales. Por tanto, este es el marco para el estudio de la dinámica de los mismos.

Comparando estos patrones obtenidos a partir de imágenes de diferentes sensores, concretamente entre el TM del Landsat-5 y el MODIS del Terra, se observan diferencias que van disminuyendo a medida que el porcentaje de recubrimiento del píxel por la vegetación es mayor. De tal manera que cuando el porcentaje de cobertura supera el 40%, hasta el 100%, dichas diferencias son mínimas.

4.2 Estructura multifractal en distintas bandas de imágenes

En la sección 2.3.2 vimos cómo los datos registrados de forma remota, desde el espacio, son una fuente importante de información acerca de la humedad del suelo, proporcionando tanto su variabilidad espacial como temporal. Sin embargo, la señal solo penetra los pocos centímetros superiores, no permitiendo estimar la humedad del suelo en las capas más profundas.

Un método para estimar esta humedad del suelo en las capas más profundas es a través de los índices de vegetación. Así, varios autores han investigado el potencial de estos índices para la estimación de la humedad del suelo en la zona radicular (Wang et al., 2007; Ben-Ze'ev et al., 2006; Deng et al., 2007). Estos autores han utilizado el Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (NDVI) y el Índice de Vegetación Mejorado (EVI) bajo diferentes condiciones buscando relaciones significativas con la humedad del suelo en la zona radicular. Para la estimación de estos índices a partir de los datos de teledetección, se utilizan las longitudes de onda del azul, el rojo y el infrarrojo cercano (Huete et al., 2014).

En el capítulo 2 vimos que las imágenes proporcionadas por los satélites muestran la superficie terrestre en una amplia gama de longitudes de onda (desde el visible hasta el infrarrojo térmico o las microondas) y también con una gran variedad de resoluciones espaciales, que van desde unos pocos kilómetros hasta decenas de centímetros. El análisis de estas imágenes diversas y sus posibilidades de sinergia

constituyen hoy un reto desafiante, especialmente con los nuevos sensores, que tienen una resolución espacial pequeña y un amplio rango de cuantificación radiométrica (Alonso et al., 2005 y 2008).

El análisis fractal ofrece un potencial significativo para mejorar la medición y el análisis de datos de teledetección complejos tanto espacial como radiométricamente. Este análisis también proporciona información cuantitativa sobre la complejidad espacial en la información que, sobre el paisaje, contienen las imágenes.

En esta sección vamos a utilizar las técnicas de análisis multifractal, que se desarrollaron en el capítulo 3, para caracterizar los patrones de la reflectividad en las imágenes correspondientes a las bandas comunes de los satélites utilizados y que son la base para producir los índices de vegetación tales como el NDVI o el EVI. El objetivo es investigar cómo la información de la imagen se ve afectada por el muestreo con diferentes resoluciones espaciales y radiométricas. Para ello se han analizado imágenes del mismo lugar adquiridas por dos satélites diferentes: Landsat-7 (ver sección 2.2.1) e Ikonos-2 (ver sección 2.2.3).

Se presenta un análisis comparativo de algoritmos multifractales aplicados a las imágenes multispectrales tanto del Ikonos-2 como del LANDSAT-7 (Alonso et al., 2017). Ambos satélites tienen varias bandas en común dentro de la región espectral que abarca desde el visible al infrarrojo cercano, que se utilizan para la estimación de los índices de vegetación. Como vimos en el capítulo 2, estas bandas tienen una resolución espacial diferente (4m para Ikonos-2 y 30m para LANDSAT-7) y también una resolución radiométrica distinta (11 bits para Ikonos-2 y 8 bits para LANDSAT-7).

Las bandas que se han analizado son cuatro: azul, verde, rojo e infrarrojo cercano. Para cada una de estas bandas, se ha calculado directamente el espectro MF a partir de los exponentes de Hölder, α , y el espectro de singularidad $f(\alpha)$. Los mismos cálculos se aplicaron para NDVI y EVI estimados en bandas rojas, azules y de infrarrojo cercano para cada imagen.

4.2.1 Material y métodos

En el desarrollo de este trabajo se han utilizado dos imágenes adquiridas por los satélites Landsat-7 e Ikonos-2, cuyas principales características se presentaron en la sección 2.2.

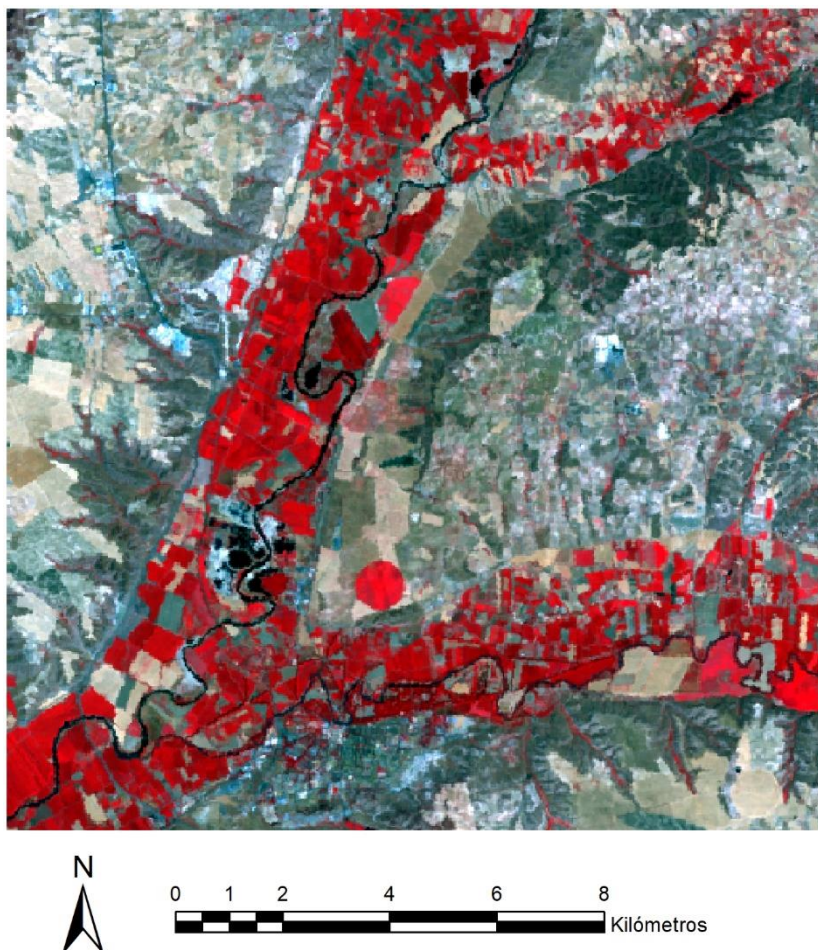


Figura 4.7 Imagen Landsat-7 tomada el 6/08/2000, representada en una combinación de falso color, esto es, con las bandas 4, 3, 2 en RGB. La imagen tiene un tamaño de 512x512 píxeles, con un tamaño de 30x30 m. Las coordenadas UTM (zona 30) del píxel superior izquierdo y del inferior derecho de la imagen son: ULX = 442185 m, ULY = 4445568 m, LRX = 457545 m y LRY = 4430208 m.

La imagen Landsat-7 fue tomada el 6 de agosto de 2000 a las 10:46 hora local y corresponde a la escena con coordenadas WRS 201 – 32 de Path y Row. Esta escena está situada en la región central de España y cubre una superficie cuadrada de aproximadamente 180 km de lado, centrada en Madrid. Los ángulos de acimut y elevación solar para esta escena son 132.44 y 58.62 grados respectivamente.

La imagen Ikonos-2 fue tomada dos días después, esto es, el 8 de agosto de 2000 a las 11:03 hora local. Esta escena cubre una superficie cuadrada de 11 km de lado situada cerca de Aranjuez, al sur de la Comunidad de Madrid. Los ángulos de acimut y elevación solar para esta escena son: 139.5 y 60.79 grados respectivamente.

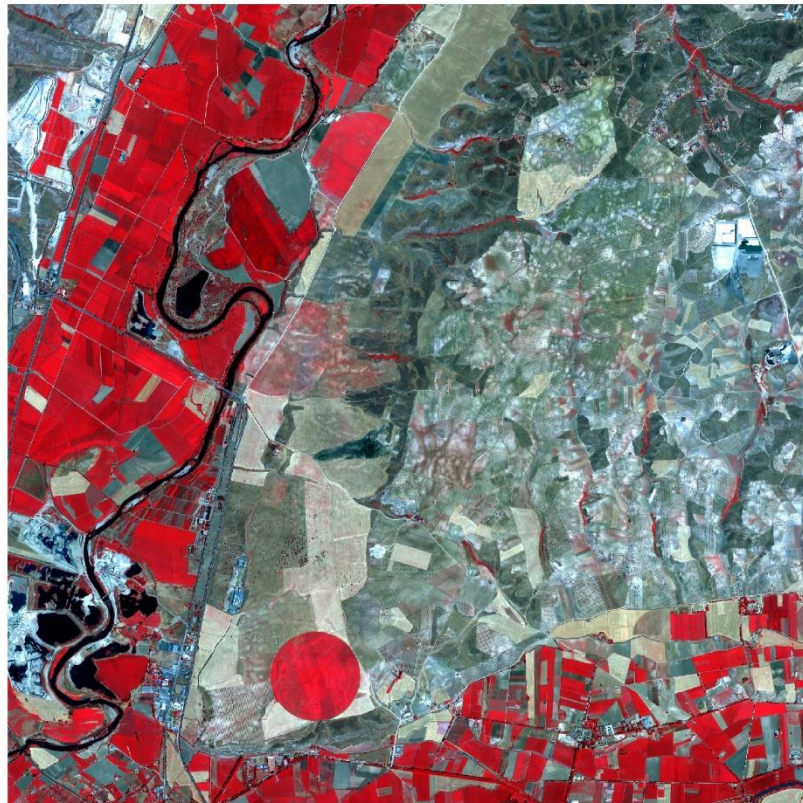


Figura 4.8 Imagen Ikonos-2 tomada el 8/08/2000, representada en una combinación de falso color, esto es, con las bandas 4, 3, 2 en RGB. La imagen tiene un tamaño de 2048 x 2048 píxeles, con un tamaño de 4x4 m. Las coordenadas UTM (zona 30) del píxel superior izquierdo y del inferior derecho de la imagen son: ULX = 446037 m, ULY = 4441684 m, LRX = 454229 m y LRY = 4433492 m.

Ambas imágenes fueron corregidas geoméricamente a la misma proyección cartográfica: UTM, zona 30 N, usando como elipsoide de referencia WGS84. Se utilizó un proceso de co-registro para garantizar el ajuste geométrico entre ellas. Una vez corregidas se recortaron para cubrir aproximadamente la misma superficie sobre una región situada al norte del municipio de Aranjuez. Los elementos

representativos del paisaje en la zona seleccionada son, principalmente, cultivos de regadío, pastos, brezales, cultivos de secano y olivares.

El recorte de la imagen Landsat-7 es un cuadrado de 512 x 512 píxeles con un tamaño de 30 m que cubre una superficie de unos 236 km² (figura 4.7). El recorte de la imagen Ikonos-2 consiste en cuadrado de 2048 x 2048 píxeles y 4 m de resolución, que cubre una superficie de unos 67.1 km² (figura 4.8).

Con las bandas del visible e infrarrojo cercano de estas imágenes, también se obtuvieron los índices de vegetación: NDVI y EVI. Estos índices se describieron ampliamente en la sección 2.3.1, siendo las ecuaciones 2.28 y 2.32 las utilizadas para su cálculo respectivamente.

Para el análisis de todas las imágenes se han utilizado las técnicas desarrolladas en la sección 3.3, en particular las relacionadas con el cálculo y representación del espectro multifractal, $f(\alpha)$. Vimos en esta sección que es una función cóncava, su amplitud, que denotaremos con el símbolo Δ , nos indica su variabilidad global (Tarquis et al., 2001; 2014). Hemos dividido esta amplitud en dos secciones:

- la sección I, correspondiente a los valores $\alpha(q) < \alpha(0)$ o $q > 0$,
- la sección II, a los valores con $\alpha(q) > \alpha(0)$ o $q < 0$.

En la sección I la amplitud, o semiancho, se ha calculado a partir de las diferencias $\Delta^+ = \alpha(0) - \alpha(+5)$, y la sección II con $\Delta^- = \alpha(-5) - \alpha(0)$. Para estudiar la asimetría del espectro multifractal, en cada caso, hemos elegido el índice de asimetría (AI) estimado como (Xie et al., 2010):

$$AI = \frac{\Delta\alpha_L - \Delta\alpha_R}{\Delta\alpha_L + \Delta\alpha_R} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \Delta\alpha_L = \alpha_0 - \alpha_{min} \\ \Delta\alpha_R = \alpha_{max} - \alpha_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

En nuestro caso, α_0 es la singularidad para $q = 0$ o $\alpha(0)$, α_{min} es $\alpha(+5)$ y α_{max} es $\alpha(-5)$. Por lo tanto, podemos reescribir el índice AI como

$$AI = \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{\Delta^+ + \Delta^-} \quad (4.2)$$

Expresando el índice de asimetría con la ecuación (4.2), podemos ver que es un índice normalizado, basado en las amplitudes Δ^+ y Δ^- (Alonso et al., 2017).

4.2.2 Resultados y discusión

4.2.2.1 Influencia de la radiometría sobre el espectro multifractal

Para estudiar la influencia de la resolución radiométrica en la complejidad de la información de la imagen Ikonos-2, se ha transformado la profundidad original de los píxeles (11 bits) a 8 bits mediante un escalado lineal basado en los valores mínimo y máximo de las imágenes transformados entre 0 y 255, con el objetivo de preservar la forma inicial del histograma.

En primer lugar, comentamos los resultados obtenidos para la imagen Ikonos-2 de 2048 x 2048 píxeles que se muestra en la figura 4.8, en combinación de bandas de falso color (combinación de bandas IK#4, IK#3, IK#2 en visualización RGB). En la figura 4.9 se muestran los histogramas de las bandas IK#1, IK#2, IK#3, IK#4. En la columna de la derecha están los histogramas con la resolución radiométrica original y en la columna de la izquierda los correspondientes histogramas re-escalados a 8 bits. Los histogramas presentan una estructura bimodal con un pico estrecho de píxeles de bajo valor que muestra un máximo agudo y un pico más amplio alrededor de un segundo máximo inferior. Para las bandas IK#1, IK#2, IK#3 el pico máximo estrecho corresponde a la vegetación, principalmente a los cultivos de regadío, que muestran una fuerte absorción de agua. Este efecto es especialmente importante en la banda IK#3. Los píxeles de alto valor corresponden a zonas del suelo con menor contenido de vegetación. Sin embargo, como la vegetación muestra una alta reflectividad en el infrarrojo cercano, el histograma de la banda IK#4 muestra un predominio de píxeles de alto valor que corresponden a partes de vegetación densa. Para ambas resoluciones radiométricas las formas de los histogramas son muy similares, como era nuestra intención.

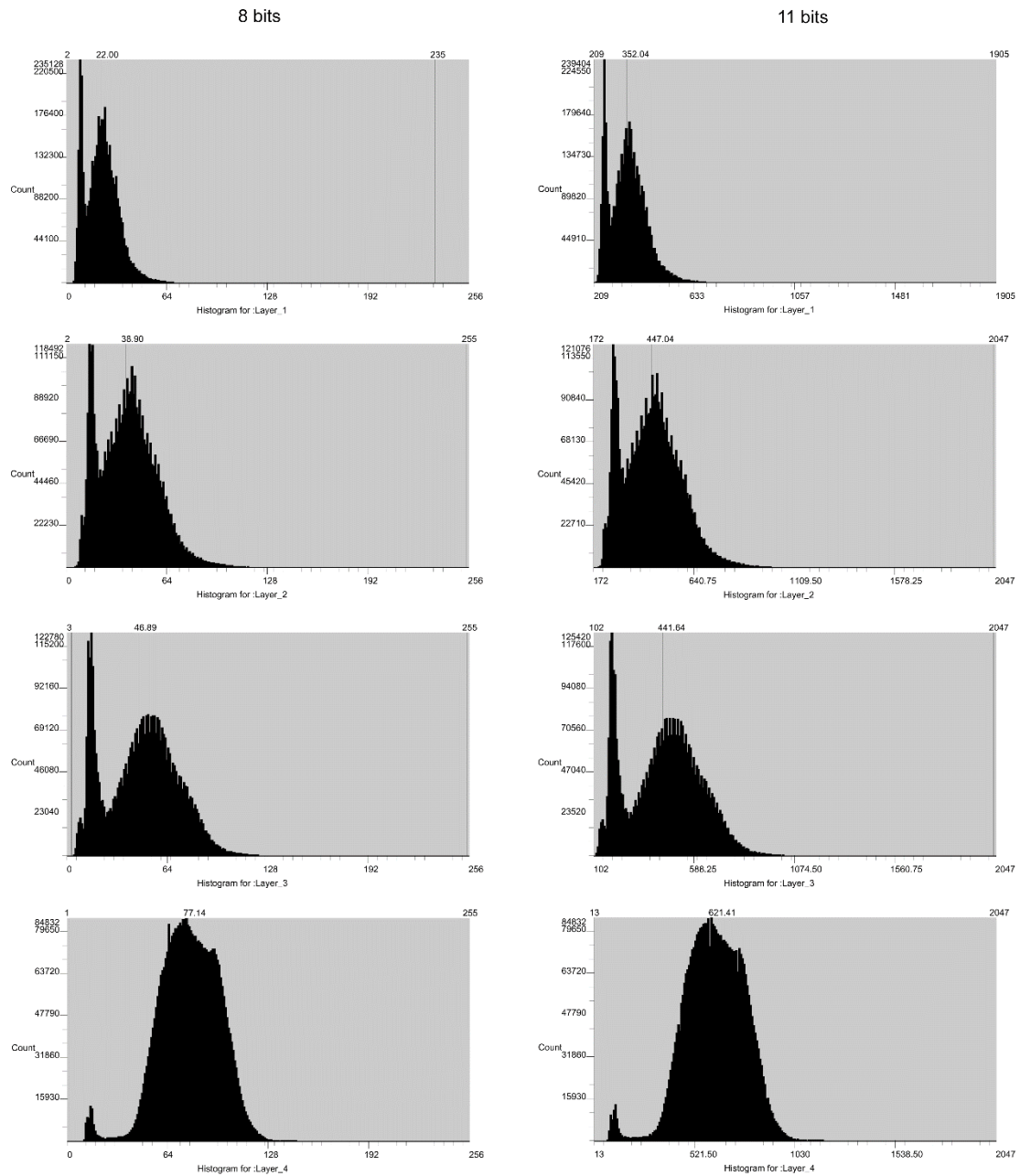


Figura 4.9 Histogramas de las cuatro bandas de la imagen Ikonos-2 para la resolución radiométrica original, 11 bits (derecha), y la resolución radiométrica mínima-máxima re-escalada de 8 bits (izquierda). En el eje de abscisas se muestran los valores de los píxeles, entre 0 y 255 para 8 bits y entre 0 y 2047 para 11 bits. En el eje de ordenadas se muestra el número de píxeles. De arriba hacia abajo corresponden a las bandas IK#1, IK#2, IK#3 e IK#4.

Cubrimos la imagen con cajas de tamaño $\delta = 2^{-n}$ y cambiamos el tamaño de la caja de 2048 a 2 píxeles, es decir, $\delta = 2048/2^n$ con $n = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Para cada valor del parámetro q , de -5 a +5 con incrementos de 0,5, se calcula la función de partición (ecuación 3.30) y se representa el $\log \chi(q, \delta)$ vs $\log \delta$ en la figura 4.10.

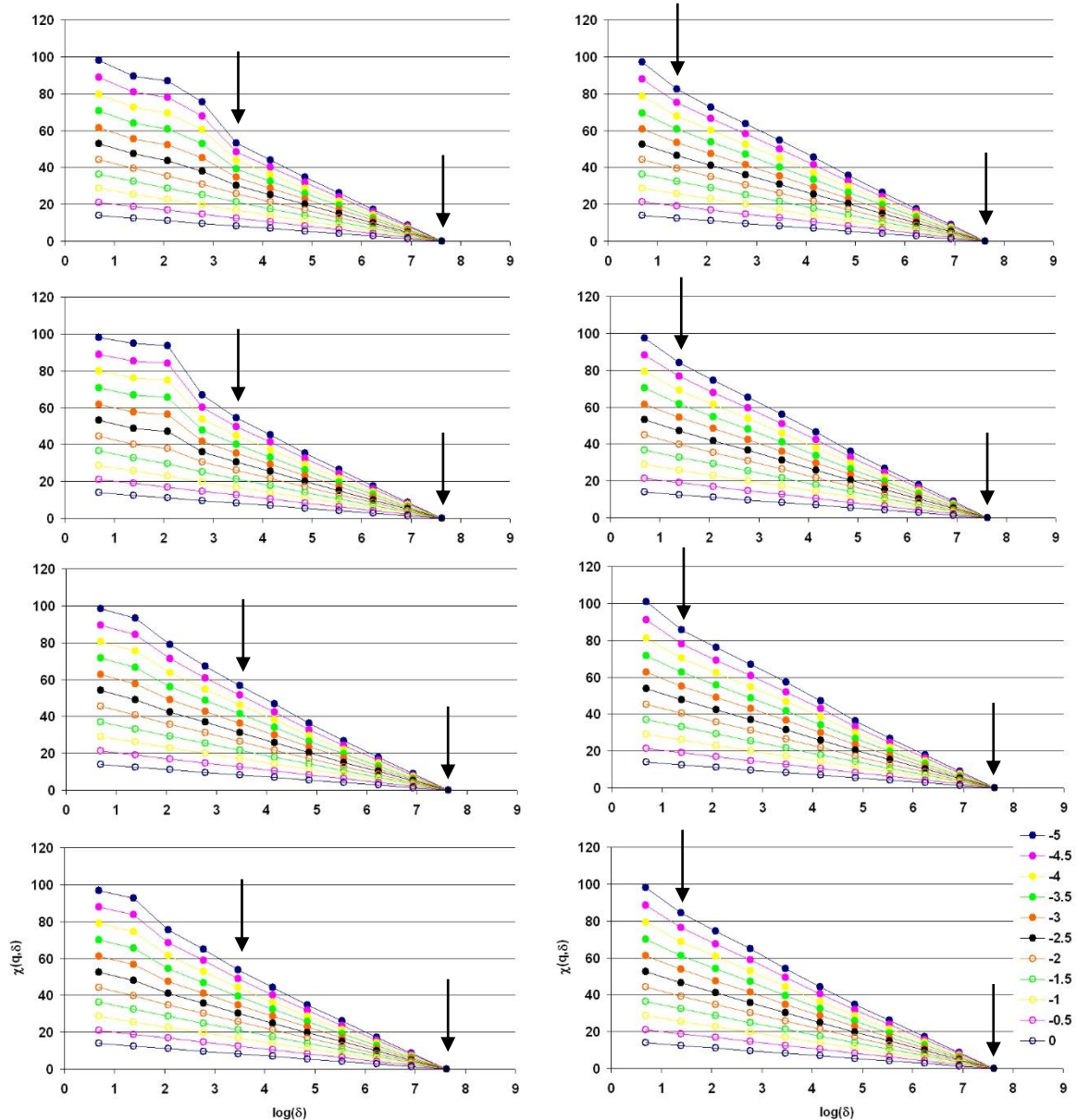


Figura 4.10 Gráficos bi-log de la función de partición $\chi(q, \delta)$ versus δ para las cuatro bandas del satélite Ikonos-2 y para los valores $q < 0$. De arriba hacia abajo mostramos los resultados para IK#1, IK#2, IK#3 e IK#4. La columna de la izquierda corresponde a la imagen de 8 bits y la columna de la derecha a la imagen de 11 bits. Las flechas negras marcan el rango de escalas utilizadas para el ajuste y para calcular la pendiente para diferentes valores de q (7 puntos en la columna de la izquierda y 10 puntos en la columna de la derecha).

Cada gráfico contiene 11 puntos y, a partir de ellos, se selecciona un rango de escalas para el ajuste lineal de mínimos cuadrados que alcanza las máximas escalas posibles y con un error estándar en la pendiente, los valores estimados de $\tau(q)$, inferior a 0,01. A continuación, utilizando las ecuaciones 3.32 y 3.34, se obtienen $\alpha(q)$ y $f(\alpha)$. Comparando el rango de escalas utilizado en ambas resoluciones

radiométricas, las bandas que utilizan los datos originales (11 bits) mostraron un mayor rango de escalas para el ajuste lineal, hasta 4 píxeles, mientras que en la resolución radiométrica de 8 bits se requirieron hasta 32 píxeles (ver flechas en la figura 4.10).

Los espectros multifractales, $f(\alpha)$, correspondientes a las cuatro bandas espectrales de la imagen Ikonos se muestran en la figura 4.11. Las diferencias que se observan en el comportamiento multiescala de cada una de las bandas concuerdan con trabajos previos (Cheng, 2004; Lovejoy et al., 2008). Visualmente es notable la diferencia en las bandas IK#3 e IK#4, rojo e infrarrojo cercano respectivamente, entre 8 y 11 bits. Una resolución radiométrica más alta proporciona un rango más elevado de posibles niveles de gris por píxel. Se debe considerar que este efecto de resolución radiométrica se manifiesta en ambas secciones de los espectros multifractales (para $q > 0$ y para $q < 0$).

Algunos parámetros característicos obtenidos de estos espectros multifractales se muestran en las tablas 4.3 y 4.4. Como era de esperar, para ambas resoluciones radiométricas y para cada una de las cuatro bandas, $\alpha(0)$ es prácticamente 2, ya que la medida está definida en el plano y tiene, por tanto, una dimensión topológica $D_T = 2$. Respecto al valor de $\alpha(1)$, se encuentran ciertas diferencias. Comparando las bandas en 8 bits con las mismas en 11 bits, siempre la dimensión de entropía resulta ser mayor. Sin embargo, considerando los errores estándar, solo las bandas IK#1 e IK#2 fueron significativamente diferentes, mostrando la mayor diferencia en la banda IK#1. Mientras tanto, las bandas IK#3 e IK#4 no presentan diferencias significativas. Esto indica una distribución más uniforme en el espacio para las bandas de Ikonos-2 en 8bits que en 11bits. El mismo comportamiento se observa para $\alpha(2)$.

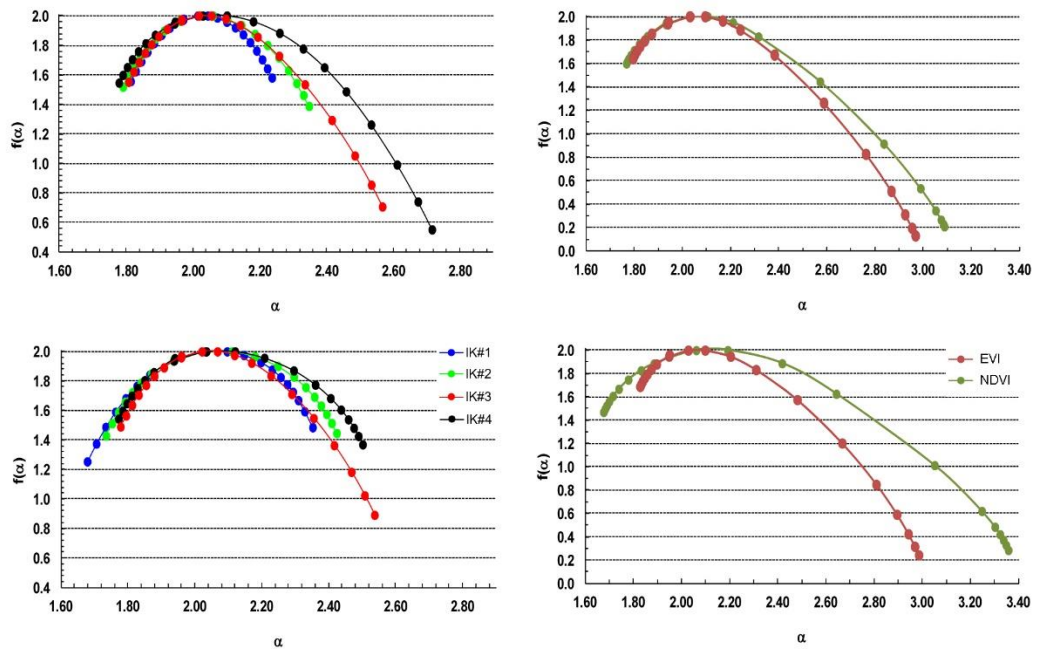


Figura 4.11 Espectros multifractales de las 4 bandas de la imagen Ikonos-2 y los índices de vegetación. Las gráficas de la izquierda corresponden a cada banda analizada: banda IK#1 en color azul, IK#2 en color verde, IK#3 en color rojo e IK#4 en color negro, para los valores de píxeles originales codificados en 11 bits (inferior) y para los escalados linealmente, según mínimo-máximo, a 8 bits (superior). Las gráficas de la derecha corresponde a los índices de vegetación obtenidos con las bandas anteriores: NDVI en color verde y EVI en marrón. En aras de la claridad de las gráficas, se han omitido las barras de error.

Las amplitudes calculadas (Δ^+ y Δ^-) para las bandas de Ikonos-2 de 11 bits presentan tendencias opuestas (tabla 4.3). Se observa que la amplitud Δ^+ disminuye a medida que aumenta la longitud de onda de las bandas, mientras que la otra amplitud, Δ^- , aumenta.

Al observar estos parámetros en las bandas escaladas a 8 bits (tabla 4.4) se encuentra una tendencia y comportamiento diferente. En este caso, tanto Δ^+ como Δ^- aumentan a medida que aumenta la longitud de onda para las tres bandas visibles, pero disminuyen para la banda del infrarrojo cercano (IK#4).

El parámetro AI estimado para las amplitudes de los espectros multifractales y para cada una de las resoluciones radiométricas utilizadas, se muestran en la última columna de las tablas 4.3 y 4.4. Comparando las bandas en 8 bits con las mismas en 11 bits, el comportamiento es similar: hay una tendencia decreciente de IK#1 a IK#4, aunque el rango de valores es diferente. Para la resolución radiométrica de

11 bits, de un AI positivo, con $AI = 0.24$, en la banda azul, pasa a un valor negativo, con $AI = -0.237$ para la banda del infrarrojo cercano. Por otro lado, para la resolución de 8 bits, un $AI = 0.092$ pasa a un valor negativo de $AI = -0.347$. Los espectros multifractales más simétricos se encuentran en las bandas del verde y del rojo, para la resolución radiométrica de 11 bits, y en las bandas del azul y del verde para la resolución de 8 bits.

Tabla 4-3 Parámetros obtenidos del espectro multifractal de cada banda de la imagen Ikonos-2, y los índices de vegetación (VI) estimados, con un tamaño de píxel de 4 m y una resolución radiométrica de 11 bits. Las amplitudes de los valores de α se representan como Δ^+ y Δ^- , correspondientes a $\alpha(0) - \alpha(5)$ y $\alpha(-5) - \alpha(0)$ respectivamente. El índice de asimetría (AI) corresponde a $(\Delta^+ - \Delta^-) / (\Delta^+ + \Delta^-)$.

Banda	q	$\alpha(q)$	Δ^+	Δ^-	AI
IK#1	0	2.001±0.001	0.418	0.256	0.240
	1	1.938±0.005			
	2	1.865±0.009			
IK#2	0	2.001±0.001	0.377	0.313	0.093
	1	1.936±0.005			
	2	1.871±0.007			
IK#3	0	2.001±0.001	0.348	0.382	-0.047
	1	1.937±0.005			
	2	1.878±0.006			
IK#4	0	2.001±0.001	0.290	0.470	-0.237
	1	1.959±0.005			
	2	1.908±0.009			

VI	q	$\alpha(q)$	Δ^+	Δ^-	AI
NDVI	0	2.000±0.001	0.516	1.166	-0.386
	1	1.886±0.008			
	2	1.779±0.010			
EVI	0	2.000±0.001	0.270	0.877	-0.533
	1	1.948±0.002			
	2	1.897±0.004			

Tabla 4-4 Parámetros obtenidos del espectro multifractal de cada banda de la imagen Ikonos-2, y los índices de vegetación (VI) estimados, con un tamaño de píxel de 4 m y una resolución radiométrica de 8 bits. Las amplitudes de los valores de α se representan como Δ^+ y Δ^- , correspondientes a $\alpha(0) - \alpha(5)$ y $\alpha(-5) - \alpha(0)$ respectivamente. El índice de asimetría (AI) corresponde a $(\Delta^+ - \Delta^-) / (\Delta^+ + \Delta^-)$.

Banda	q	$\alpha(q)$	Δ^+	Δ^-	AI
IK#1	0	2.000±0.001	0.231	0.192	0.092
	1	1.971±0.003			
	2	1.930±0.006			
IK#2	0	2.000±0.001	0.270	0.287	-0.031
	1	1.963±0.004			
	2	1.914±0.006			
IK#3	0	2.000±0.001	0.323	0.614	-0.311
	1	1.945±0.005			
	2	1.887±0.006			
IK#4	0	2.000±0.001	0.248	0.512	-0.347
	1	1.966±0.004			
	2	1.923±0.008			

VI	q	$\alpha(q)$	Δ^+	Δ^-	AI
NDVI	0	2.000±0.002	0.337	0.984	-0.490
	1	1.932±0.005			
	2	1.855±0.008			
EVI	0	2.000±0.002	0.300	0.874	-0.488
	1	1.940±0.004			
	2	1.873±0.006			

Hacemos ahora el mismo análisis para los índices de vegetación. Las gráficas bi-logarítmicas de la función de partición ($\chi(q, \delta)$) respecto a δ las hemos representado en la figura 4.12, para los dos índices de vegetación estudiados y con las dos resoluciones radiométricas. Cada gráfica contiene 11 puntos, como las bandas con las que se estimaron. El ajuste lineal se realizó con la misma metodología que para las cuatro bandas. En este caso, solo EVI a 8 bits (gráfica

inferior izquierda) muestra una mejor tendencia lineal en una gama más amplia de escalas. Sin embargo, para comparar mejor ambos índices de vegetación, para las dos resoluciones radiométricas, se seleccionó un rango que alcanzaba 32 píxeles (128 m) como muestran las flechas en la figura 4.12.

Los espectros multifractales de los índices de vegetación, EVI y NDVI, estimados para ambas resoluciones radiométricas de las imágenes Ikonos se muestran en la figura 4.11. Ambos índices muestran diferencias debido a la transformación de escalado entre los 11 y los 8 bits. Sin embargo, el NDVI muestra mayores diferencias en el espectro, principalmente en la parte correspondiente a valores negativos de q (lado derecho del espectro). El otro índice, el EVI, también presenta cambios; su espectro multifractal está más cerca en ambas resoluciones radiométricas. Comparando el rango de valores de los dos índices con el rango obtenido para las cuatro bandas (gráficas del lado izquierdo de la figura 4.11) hay un contraste notable. Mientras la banda IK#4 de 8 bits alcanza, para $f(\alpha)$, un valor cercano a 0.5, tanto el EVI como el NDVI alcanzan valores cercanos a 0.2.

Estas diferencias son mayores con las imágenes de 11 bits. La banda IK#3 alcanza un valor cercano a 0.9 mientras que los índices alcanzan, nuevamente, valores en torno a 0.2. Los mismos parámetros característicos obtenidos de los espectros multifractales para las diferentes bandas, se calcularon para los índices de vegetación y se muestran en las tablas 4.3 y 4.4.

Con respecto a los valores de $\alpha(1)$, se encuentran ciertas diferencias entre ambos índices de vegetación. Comparando el NDVI calculado con 8 bits con el mismo calculado con 11 bits, siempre la dimensión de entropía fue mayor que la que se encontró para las bandas. Sin embargo, el EVI muestra lo contrario, los valores de la dimensión de entropía para 11 bits son mayores que para 8 bits, aunque las diferencias no son significativas.

Por tanto, la resolución radiométrica está afectando más al NDVI que al EVI. El primero presenta una distribución espacial más uniforme con las imágenes de 8 bits que con las de 11 bits. El mismo comportamiento se observa en $\alpha(2)$.

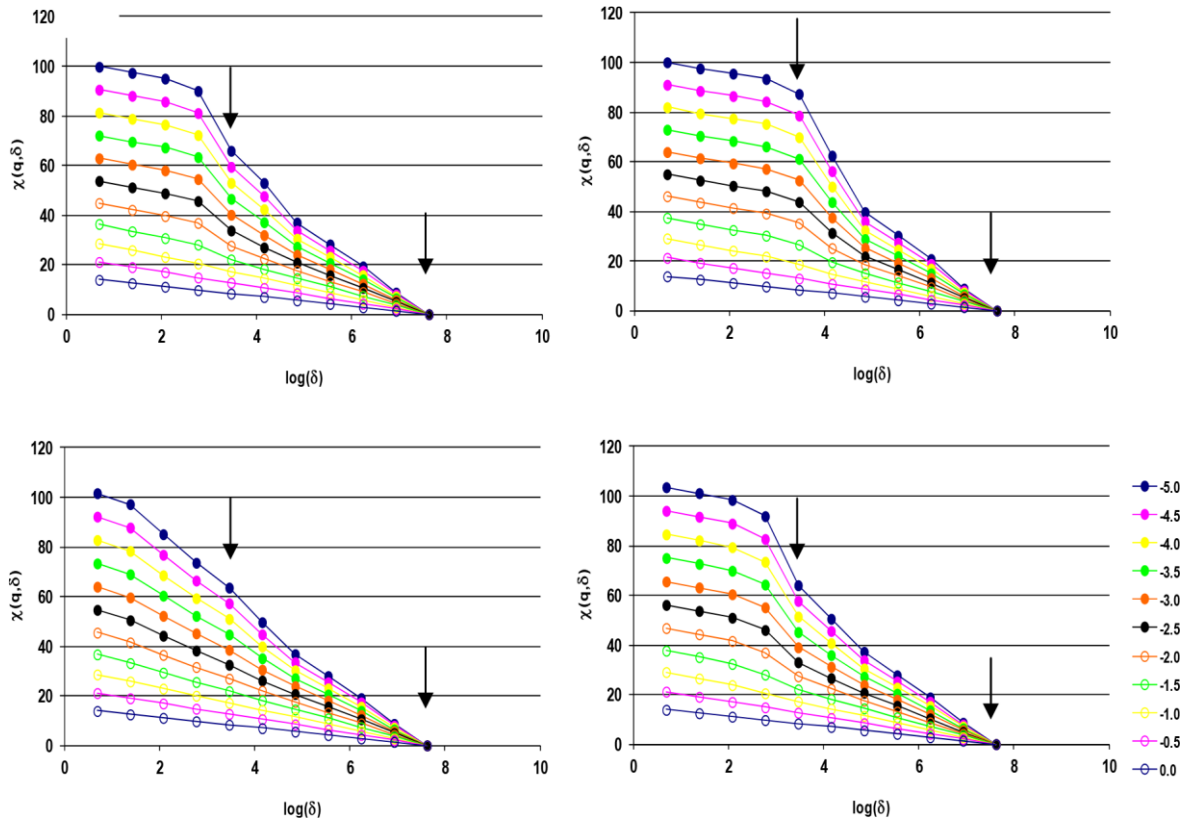


Figura 4.12 Gráficos bi-log de la función de partición $\chi(q, \delta)$ versus δ para los índices de vegetación estimados a partir de las bandas IK#1, IK#3 e IK#4 del satélite Ikonos-2 y para los valores $q < 0$. De arriba hacia abajo mostramos NDVI y EVI respectivamente. La columna de la izquierda corresponde a los cálculos con las imágenes de 8 bits y la columna de la derecha a los realizados con las imágenes de 11 bits. Las flechas destacan el rango de escalas utilizado para el ajuste y el cálculo de la pendiente para diferentes valores de q (7 puntos).

Las amplitudes calculadas (Δ^+ y Δ^-) para los índices de vegetación obtenidos a partir de las bandas de 11bits presentan una situación similar (tabla 4.3). La amplitud Δ^+ es menor que la amplitud Δ^- y, por lo tanto, el AI estimada es negativa. Esto se percibe visualmente en la figura 4.11, en las gráficas de la derecha. Observando estos parámetros para los índices de vegetación obtenidos a partir de las bandas de 8bits (tabla 4.4), se encuentran situaciones similares pero con valores inferiores. Para ambas resoluciones radiométricas (11 bits y 8 bits), el NDVI arroja valores más altos para ambas amplitudes, Δ^+ y Δ^- .

Todos los índices de asimetría, AI, estimados para ambos índices de vegetación y para cada resolución radiométrica, son negativos (tablas 4.3 y 4.4) indicando una alta asimetría en la parte derecha de los espectros multifractales, como se puede

apreciar en las gráficas de la figura 4.11. Comparando los valores de los parámetros AI para 8 bits con los mismos en 11 bits, son similares señalando que la forma del espectro multifractal es similar ya que este índice es un índice normalizado. Sin embargo, los valores de las amplitudes marcan un cambio mayor para el NDVI que para el EVI.

4.2.2.2 Influencia de la resolución espacial sobre el espectro multifractal

En esta sección comparamos los resultados obtenidos del análisis multifractal de la imagen Ikonos-2, con los valores de los píxeles escalados a 8 bits, con los obtenidos de la imagen Landsat-7 de 512 x 512 píxeles descrita en la sección 4.3.1 (ver figura 4.7), cuya resolución radiométrica original es de 8 bits.

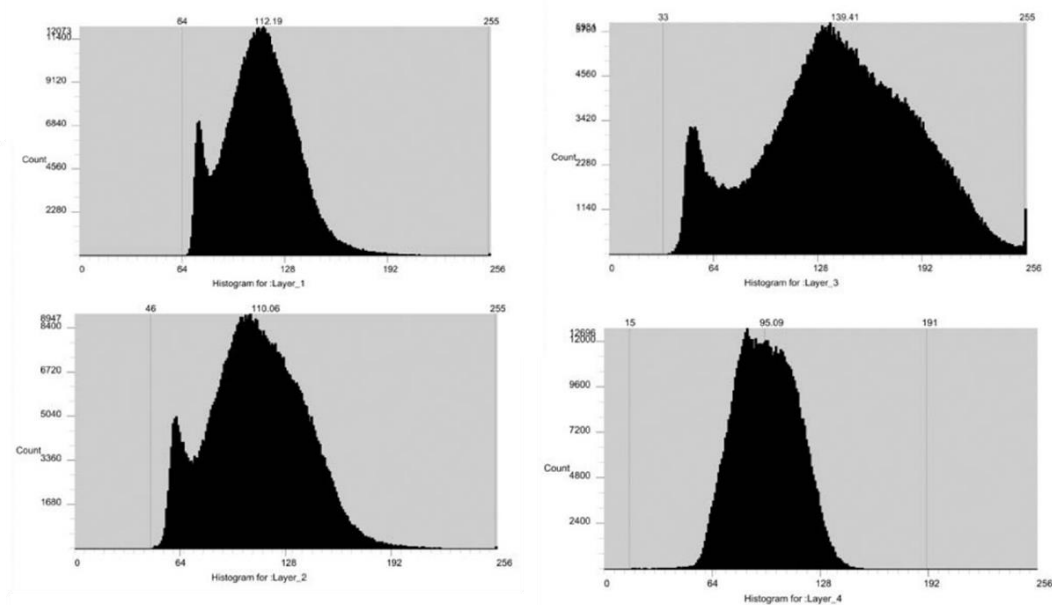


Figura 4.13 Histogramas de las cuatro primeras bandas de la imagen Landsat-7 para la resolución radiométrica original de 8 bits. En el eje de abscisas se muestran los valores de los píxeles, entre 0 y 255. En el eje de ordenadas se muestra el número de píxeles. Arriba-izquierda corresponde a la banda ETM+#1, abajo-izquierda corresponde a ETM+#2, arriba-derecha corresponde a ETM+#3 y abajo-derecha corresponde a ETM+#4.

En la figura 4.13 se muestran los histogramas de las cuatro primeras bandas de la imagen Landsat-7 utilizada. Como puede observarse, estos histogramas presentan una estructura bimodal, con dos máximos, excepto para la banda del infrarrojo

cercano (ETM+#4) que solo presenta un pico. Si comparamos estos histogramas con los obtenidos para la imagen de Ikonos-2 en 8bits (parte izquierda de la figura 4.9), los picos no son tan abruptos y estrechos.

Al mismo tiempo, las bandas ETM+#1, ETM+#2 y ETM+#3 muestran el máximo absoluto en los píxeles con valores altos (gris claro) y un segundo máximo, de valor inferior, en los píxeles con valores más bajos (gris oscuro). Estas bandas están más centradas y no muestran un desplazamiento hacia la izquierda como sí lo hacen las bandas equivalentes de Ikonos-2 (IK#1, IK#2 e IK#3). En el caso de la banda en el infrarrojo cercano, ambas imágenes, Landsat-7 e Ikonos-2 con 8bits, son bastante similares excepto por la ausencia de un segundo pico.

En los cálculos por el método de "box-counting", los tamaños de las cajas oscilan entre los 512 y 2 píxeles, es decir, $\delta = 512/2^n$ con $n = \{0,1, \dots, 8\}$. Para cada valor de los parámetros q , desde -5 hasta +5 con incrementos de 0.5, se ha calculado la función de partición. Las gráficas bi-log $\chi(q, \delta)$ vs δ resultantes para cada una de las cuatro bandas se representan en la figura 4.14. En este caso, cada ajuste lineal contiene 9 puntos debido a que el tamaño de la imagen es de 512 x 512 píxeles. Se aplicó el mismo método para seleccionar el rango de escalas utilizadas en el ajuste lineal, logrando una escala de 4 píxeles. Al transformar los píxeles a metros, la escala lograda con la imagen Landsat-7 en el análisis multifractal, fue de ~ 120 m. Para el caso de la imagen Ikonos-2 con 8bits, la escala fue de 32 píxeles o 128 m, muy próxima a la de Landsat-7. Los espectros multifractales correspondientes a las primeras cuatro bandas de la imagen Landsat-7 están representados en la figura 4.15.

Comparando los espectros multifractales de las imágenes Ikonos-2 y Landsat-7, figuras 4.11 y 4.15 respectivamente, vemos que los de la imagen Landsat-7 siempre están situados dentro de los correspondientes de la imagen Ikonos-2. Esto significa que, para un valor dado del exponente de Hölder, α , la relación $f_{Landsat}(\alpha) \leq f_{Ikonos}(\alpha)$ siempre se satisface. Este resultado indica que las imágenes Landsat-7 muestran una complejidad menor que las imágenes Ikonos-2 de 8 bits. Como se indicó en la sección 4.3.1, los datos originales del satélite Ikonos-2 están codificados

en 11 bits en contraste con los datos originales de Landsat-7 que lo están en 8 bits. Para comparar ambos sensores, con diferente resolución espacial, pasamos la imagen Ikonos-2 de 11bits a 8bits observando que el último presenta más complejidad que Landsat.

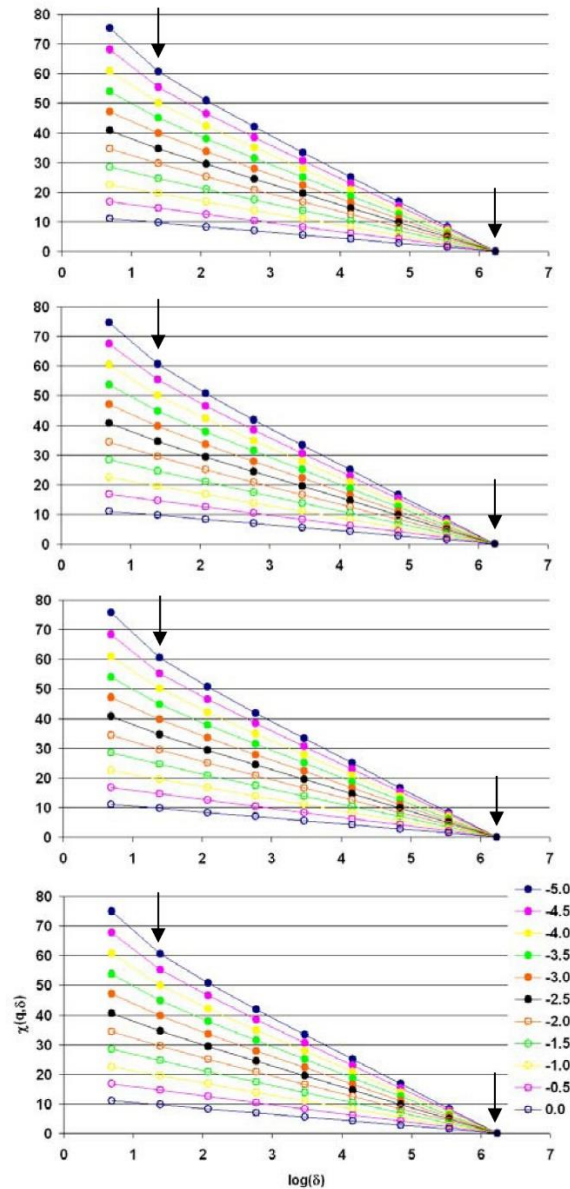


Figura 4.14 Gráficos bi-log de la función de partición $\chi(q, \delta)$ versus δ para las cuatro primeras bandas del satélite Landsat-7 y para los valores $q < 0$. De arriba hacia abajo se muestran los resultados para ETM+#1, ETM+#2, ETM+#3 y ETM+#4. Las flechas marcan el rango de escalas utilizadas para el ajuste y para calcular la pendiente para diferentes valores de q (8 puntos).

Los parámetros de los espectros multifractales para la imagen Landsat-7 se muestran en la tabla 4-5. Los comparamos aquí con los de la imagen Ikonos-2 escalada a

8bits (tabla 4-4). Los valores de $\alpha(1)$ para las cuatro bandas de Landsat-7 son más altos que los presentados por las de la imagen Ikonos-2, lo que indica una distribución espacial uniforme más elevada. Comparando entre las bandas, no existen diferencias significativas contrarias a la tendencia que observamos entre ellas en las bandas de Ikonos-2. El parámetro $\alpha(2)$ muestra el mismo comportamiento.

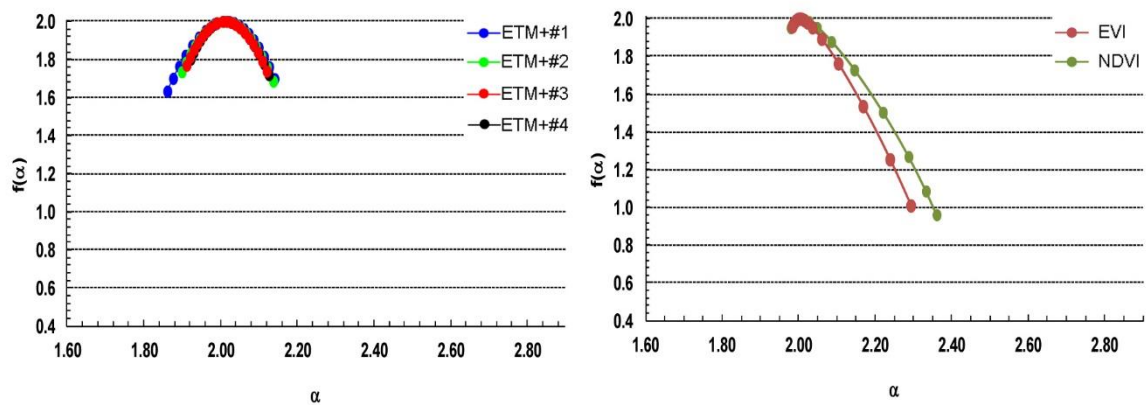


Figura 4.15 Espectros multifractales de las cuatro bandas utilizadas de la imagen Landsat-7, con resolución radiométrica de 8 bits, y de los índices de vegetación generados con ellas. El gráfico de la izquierda corresponde a los de cada banda analizada: ETM+#1 en color azul, ETM+#2 en color verde, ETM+#3 en color rojo y ETM+#4 en color negro. El gráfico de la derecha corresponde a los índices de vegetación: NDVI en color verde y EVI en marrón. En aras de la claridad de las gráficas, se han omitido las barras de error.

Las amplitudes calculadas (Δ^+ y Δ^-) para las bandas de Landsat-7 presentan pocas variaciones (tabla 4-5). La amplitud Δ^+ disminuye de ETM+#1 a ETM+#3 y luego presenta un aumento en ETM+#4, mientras que la otra amplitud Δ^- permanece prácticamente constante. Observando estos parámetros en las bandas de Ikonos-2 a 8bits (tabla 4-4) existen variaciones de valor y comportamiento para las cuatro bandas. En este caso, tanto Δ^+ como Δ^- aumentan a medida que aumenta la longitud de onda para las tres bandas visibles, pero disminuyen para la banda del infrarrojo cercano (IK#4).

El índice de asimetría, IA , estimado con las amplitudes anteriores de los espectros multifractales de cada banda de Landsat-7 es positivo excepto para ETM+#3. Para

la banda ETM+#2 la simetría del espectro es completa. La banda que muestra la mayor asimetría es la ETM+#1.

Tabla 4-5 Parámetros obtenidos del espectro multifractal de cada banda de la imagen Landsat-7, y los índices de vegetación (VI) estimados, con un tamaño de píxel de 30 m y una resolución radiométrica de 8 bits. Las amplitudes de los valores de α se representan como Δ^+ y Δ^- , correspondientes a $\alpha(0) - \alpha(5)$ y $\alpha(-5) - \alpha(0)$ respectivamente. El índice de asimetría (AI) corresponde a $(\Delta^+ - \Delta^-) / (\Delta^+ + \Delta^-)$.

Banda	q	$\alpha(q)$	Δ^+	Δ^-	AI
ETM+#1	0	2.001±0.001	0.160	0.119	0.147
	1	1.985±0.005			
	2	1.960±0.010			
ETM+#2	0	2.003±0.001	0.119	0.119	0.000
	1	1.988±0.004			
	2	1.970±0.008			
ETM+#3	0	2.001±0.001	0.095	0.110	-0.073
	1	1.989±0.004			
	2	1.974±0.007			
ETM+#4	0	2.017±0.001	0.106	0.104	0.010
	1	1.989±0.004			
	2	1.973±0.008			

VI	q	$\alpha(q)$	Δ^+	Δ^-	AI
NDVI	0	2.001±0.001	0.028	0.353	-0.852
	1	1.996±0.001			
	2	1.992±0.001			
EVI	0	2.001±0.001	0.022	0.288	-0.859
	1	1.997±0.001			
	2	1.994±0.001			

En cuanto a los índices de vegetación, calculados con las bandas de Landsat-7, las gráficas bi-log de la función de partición ($\chi(q, \delta)$) frente a δ , para ambos índices, se representan en la figura 4.16. Cada gráfica contiene 9 puntos y el ajuste lineal se realizó con la misma metodología que para las cuatro bandas. Ambos índices,

EVI y NDVI, muestran el mismo comportamiento en el rango de escalas seleccionado, alcanzando los 8 píxeles como muestran las flechas en la figura 4.16.

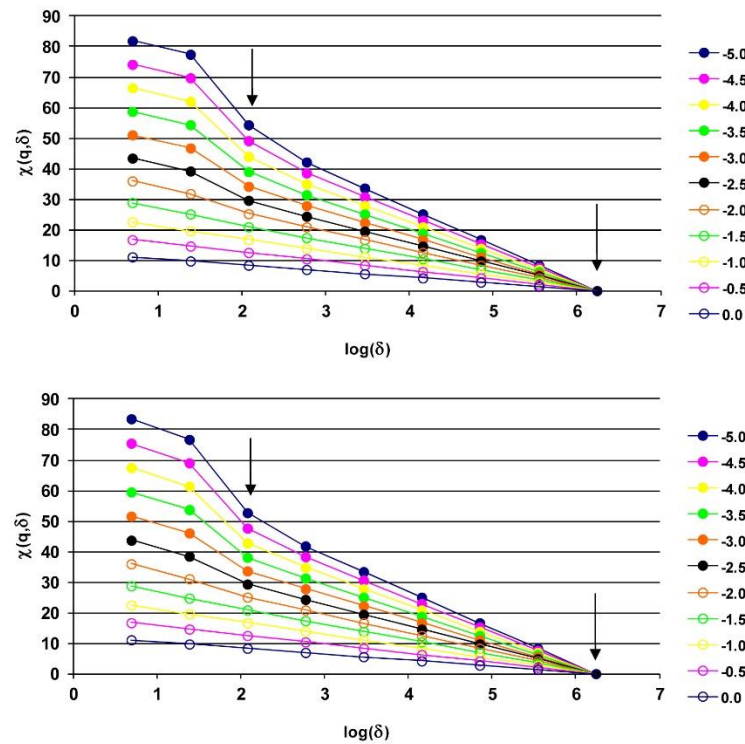


Figura 4.16 Gráficos bi-log de la función de partición $\chi(q, \delta)$ versus δ para los índices de vegetación obtenidos con las bandas del satélite Landsat-7 y para los valores $q < 0$. De arriba hacia abajo se muestran los resultados para NDVI y EVI. Las flechas marcan el rango de escalas utilizadas para el ajuste y para calcular la pendiente para diferentes valores de q (7 puntos).

Los espectros multifractales del EVI y el NDVI, calculados a partir de las bandas de la imagen Landsat-7 se muestran en la gráfica de la derecha en la figura 4.15. Ambos índices muestran diferencias principalmente en el lado derecho del espectro multifractal (para valores de $q < 0$). Comparando el rango de valores en los índices con el rango obtenido en las cuatro bandas (gráfica izquierda de la figura 4.15) hay un contraste notable. Mientras que para la banda del infrarrojo cercano el espectro alcanza un valor cercano a 1.6, para los índices llega a alcanzar valores más próximos a 1. Un comportamiento similar se encontró para los espectros de los índices obtenidos de la imagen Ikonos-2, llegando a alcanzar, en este caso, valores próximos a 0.1.

En cuanto a los parámetros obtenidos a partir de los espectros multifractales de los índices de vegetación (tabla 4-5), los resultados son bastante similares a los ya comentados sobre las bandas de Landsat-7, mostrando valores aún más altos. Así, por ejemplo, los valores de $\alpha(1)$ son de 1.996 para el NDVI y de 1.997 para el EVI.

La amplitud Δ^+ es bastante baja en comparación con la de las bandas y los índices de vegetación del Ikonos-2 con 8bits. Por otro lado, la amplitud Δ^- es más alta que la de las bandas de Landsat-7 pero solo un tercio del valor mostrado por los índices de vegetación de Ikonos-2 con 8bits (tabla 4-4). El índice de asimetría estimado para ambos índices de vegetación es negativo, lo que indica una alta asimetría en la parte derecha del espectro multifractal, como se observa en la figura 4.15. Comparando los valores del índice de asimetría para los índices de vegetación procedentes de la imagen Landsat-7 con los procedentes de ambas imágenes Ikonos-2, son los más elevados indicando un mayor desequilibrio en el espectro multifractal, desplazado totalmente hacia el lado derecho del espectro.

4.2.3 Conclusiones

En esta sección hemos utilizado el espectro multifractal como herramienta para analizar la información común contenida en las imágenes multiespectrales de la superficie terrestre adquiridas por dos satélites, el Landsat-7 y el Ikonos-2. Estas imágenes tienen cuatro bandas comunes, tres en el visible (azul, verde y roja) y una en el infrarrojo cercano, que son utilizadas para la producción de varios índices de vegetación.

En primer lugar se ha estudiado el efecto de la resolución radiométrica con la imagen adquirida por el Ikonos-2. Se ha comparado el espectro multifractal de cada una de las bandas de la imagen original, codificadas en 11 bits, con las bandas transformadas a 8 bits. Los resultados obtenidos tras la transformación radiométrica en las bandas azul y verde corresponden a lo que cabría esperar por la simplificación que supone pasar de los 2048 posibles valores para los píxeles originales a los 256. Por el contrario, las bandas roja e infrarroja no mostraron sensibilidad alguna a esta transformación, manteniendo espectros multifractales similares. Hasta donde

sabemos, esta es la primera vez que se informa de este comportamiento entre las bandas.

Para estudiar el efecto de la resolución espacial, se comparan las cuatro bandas de la imagen Ikonos-2 y 8 bits, con 4 m de tamaño de píxel, con las cuatro bandas equivalentes de Landsat-7, con 30 m de tamaño de píxel. Obviamente, cuanto mayor es la resolución espacial, mayor es la amplitud del espectro multifractal en las bandas verde y azul. De hecho, observando los gráficos de los tres casos estudiados (Ikonos-2 de 11 bits, Ikonos-2 de 8 bits y Landsat-7 de 8 bits) ambas bandas reducen gradualmente su amplitud $\alpha(q)$, tanto en la parte negativa de los valores de q como en la positiva. Sin embargo, este no es el caso de las bandas del rojo y el infrarrojo cercano, que presentan una diferencia mucho mayor entre los espectros multifractales para Ikonos-2 de 8bits y Landsat-7 que para Ikonos-2 de 11 y 8 bits.

En la región de $q > 0$ en los espectros multifractales, para las bandas azul y verde la sensibilidad a ambos factores es muy similar, siendo la relación de la banda azul ligeramente superior. En las bandas del rojo y el infrarrojo cercano, para la misma región, presentan especial sensibilidad a la resolución espacial, mostrando una tasa similar a las bandas azul y verde. En cambio, en la región de $q < 0$ las bandas del azul y del verde presentan un comportamiento similar al de la región positiva pero con una relación menor (entre 1 y 2) y, una vez más, las bandas roja e infrarroja muestran una leve sensibilidad con la resolución radiométrica. Sin embargo, con la resolución espacial la banda del rojo presenta una relación similar a la azul y verde. El infrarrojo cercano muestra la relación más alta (alrededor de 8) señalando la influencia extrema de los valores más bajos de los píxeles.

También se han estudiado las implicaciones de estas variaciones en las bandas azul, rojo e infrarrojo cercano en el comportamiento multiescala de dos índices de vegetación, el clásico NDVI y el EVI. La resolución radiométrica mostró una mayor influencia en el espectro multifractal del NDVI. Lo que implica que el uso de la banda azul en el EVI tiene un efecto constante en el comportamiento de escala. Al igual

que en las bandas, la resolución espacial resulta tener un gran impacto en ambos índices de vegetación.

4.3 Correlación entre vegetación y humedad del suelo

La humedad del suelo es una importante variable en los procesos hidrológicos, fundamental para los modelos climáticos y ambientales. En estos últimos, la humedad del suelo es uno de los parámetros del que depende la distribución de la vegetación sobre la superficie terrestre. En la sección 2.3 vimos cómo tanto la humedad del suelo como la vegetación pueden estudiarse a partir de las imágenes que obtienen los satélites de Observación de la Tierra. A través del NSMI, definido en la ecuación 2.33, para la primera y del NDVI, definido por la ecuación 2.28, para la segunda. Ambos son productos estándar descritos por Rouse et al. (1973) y por Lampkin y Yool (2004) y estudiados en el marco del análisis multifractal por Lovejoy et al. (2008).

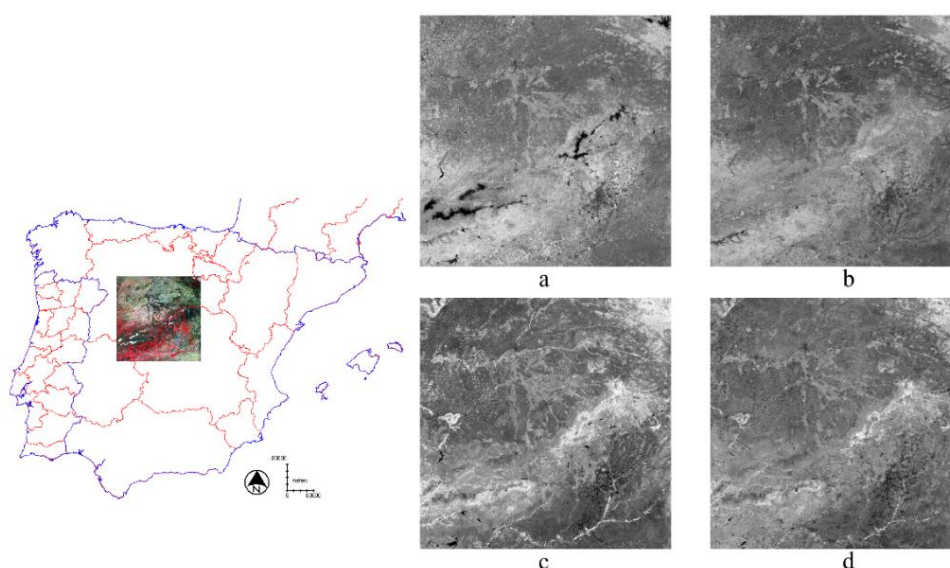


Figura 4.17 El área de estudio, representada en el mapa de la izquierda, cubre una extensión de 256 x 256 km en el centro de la península, entre las Comunidades de Castilla y León, Madrid y Castilla La Mancha. Las 4 imágenes representadas a la derecha corresponden a los índices utilizados: a y b corresponde al NDVI para las fechas 14/03/2006 y 29/07/2006 respectivamente; c y d corresponde al NSMI para esas mismas fechas. Los valores de estos índices están comprendidos entre -1 y +1. Los tonos más oscuros corresponden a los valores próximos a -1 (ausencia de vegetación o de humedad), mientras que los más claros corresponden a los próximos a +1 (presencia de vegetación o humedad en el suelo).

4.3.1 Imágenes utilizadas

En esta sección abordamos el estudio de la correlación entre ambos parámetros en el marco del análisis multifractal, a través del concepto de multifractales conjuntos (*joint multifractals*) que vimos en la sección 3.5. Para ello utilizamos los índices de humedad del suelo y de vegetación obtenidos a partir de dos imágenes de la Península Ibérica adquiridas por el sensor MODIS, embarcado en el satélite Terra (Alonso et al., 2007).

Las principales características de este sensor se presentaron en la sección 2.2.2. En la tabla 2-3 de dicha sección vemos que las bandas con las que pueden generarse los índices de humedad del suelo y de vegetación son la 6 y la 7, para el primero, y la 1 y 2, para el segundo. Con ellas las ecuaciones genéricas 2.28 y 2.33, quedan para el sensor MODIS en la forma

$$NDVI = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (4.3)$$

$$NSMI = \frac{\rho_6 - \rho_7}{\rho_6 + \rho_7} \quad (4.4)$$

Donde ρ_1 , ρ_2 , ρ_6 y ρ_7 corresponden a la reflectancia medida por el sensor en la banda indicada por el subíndice. Las dos primeras tienen una resolución de 250 m, mientras que para la 6 y 7 la resolución es de 500 m. Las ecuaciones 4.3 y 4.4 generalmente se establecen sin referencia a ninguna escala particular.

El tipo de producto utilizado es el *Calibrated Radiances Daily L1B*, concretamente los denominados MOD02QKM, para las bandas 1 y 2 de 250 m, y MOD02HKM, para las bandas 6 y 7 de 500m, que corresponden a datos adquiridos por el satélite Terra. Las fechas de las imágenes utilizadas fueron: 14/03/2006 y 29/07/2006. Con la información contenida en los metadatos de las imágenes, la radiancia calibrada se transformó a reflectancia TOA. Finalmente, ambos productos se homogeneizaron a 500 m de tamaño de píxel. Para ello las bandas 1 y 2 se promediaron cada 2 x 2 píxeles.

De las imágenes se recortó un área cuadrada de 256 km de lado, situada en la región central de la Península Ibérica, entre las comunidades de Castilla y León, Madrid, Extremadura y Castilla La Mancha (figura 4.17). Con las bandas correspondientes se calcularon los índices de vegetación y de humedad del suelo mediante las ecuaciones 4.3 y 4.4, respectivamente. En la figura 4.17 a – d se muestra el resultado obtenido para cada una de las fechas. Estas imágenes son, por tanto, matrices de 512 x 512 píxeles.

Las dos fechas seleccionadas se caracterizan por la ausencia de nubes en el área de interés. La primera de ellas, tomada a mediados de marzo, corresponde al final de la estación invernal en la que las precipitaciones tanto en forma de nieve como de lluvia cargan el suelo de humedad. La segunda, tomada a finales de julio, corresponde a la mitad de la estación estival en la que la falta de precipitaciones y las altas temperaturas reducen considerablemente el contenido de humedad del suelo.

4.3.2 Metodología y resultados

4.3.2.1 Cálculo del espectro multifractal

En primer lugar calculamos el espectro multifractal de cada una de las imágenes, consideradas como medidas normalizadas uniparamétricas $\mu_i(q)$. Para calcular este espectro se ha utilizado el algoritmo directo de Chhabra-Jensen descrito en la sección 3.3.3, según el cual las expresiones 3.44 y 3.45 proporcionan la función $f(\alpha)$ del espectro multifractal en función del parámetro q (Alonso et al., 2009).

Al ser las imágenes matrices cuadradas de 512 píxeles de lado, hemos aplicado la misma metodología descrita en dicha sección para analizar la imagen sintética de la figura 3.8. Así, se ha variado el tamaño de las cajas con las que recubrimos la imagen en el rango de 1 a 256 píxeles. Esto es, $\delta = 512/2^n$ con $n = \{1, 2, \dots, 9\}$. Los valores de f_q y α_q se han obtenido a partir de ajustes lineales por mínimos cuadrados de las gráficas F_q versus $\log(\delta)$ y A_q versus $\log(\delta)$. Donde F_q y A_q están definidas por las ecuaciones 3.50 y 3.51 (ver figura 3.9). Los resultados de estos

cálculos se muestran en las siguientes tablas. En los cálculos el parámetro q se ha variado entre -10 y +10. Los errores, tanto para α como para $f(\alpha)$, se han estimado a partir de los ajuste, mediante la expresión 3.52. Los resultados de estos cálculos se muestran en las tablas 7-1, 7-2, 7-3 y 7-4 del Anexo.

Los espectros multifractales de las imágenes analizadas se representan en la figura 4.18.

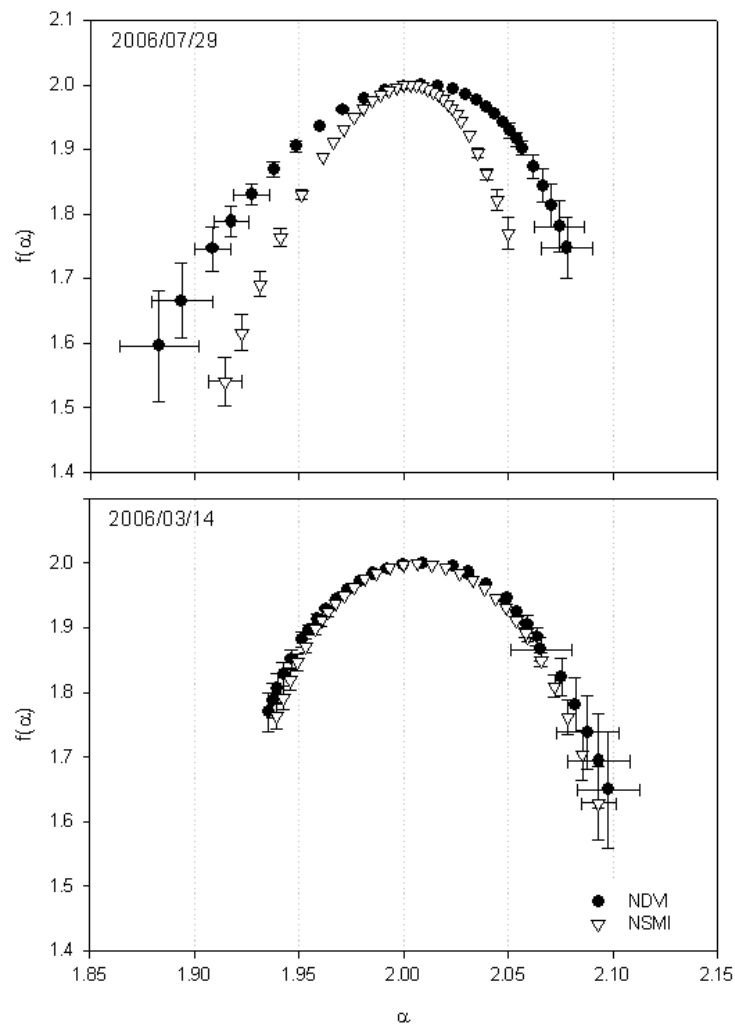


Figura 4.18 Espectros multifractales calculados para cada uno de los índices representados en la figura 4.17 a - d. Estos espectros se han obtenido aplicando el algoritmo de Chhabra-Jensen, que proporciona un método directo para obtener los valores de α y de $f(\alpha)$ en función del parámetro q .

De los espectros multifractales de los índices para la imagen de marzo se observa que ambos superponen perfectamente, presentando una curva casi simétrica, en la

que la parte correspondiente a los valores $q < 0$ (parte derecha de la curva) alcanza los valores más bajos de $f(\alpha)$.

Ambas curvas presentan, como era de esperar, el valor máximo en $f(\alpha^*) = 2$ para los valores de α^* de 2.0089 para el NDVI y de 2.0067 para el NSMI. Otros valores interesantes en el espectro son los que corresponden a la dimensión de información. Para estos valores $q = 1$ y, como ya vimos, se cumple que $\alpha = f(\alpha)$. Para el NDVI este valor es 1.9922, mientras que para el NSMI es de 1.9934, muy similares.

La perfecta superposición de los espectros multifractales de ambos índices para la imagen de marzo revela una gran semejanza en su patrón geométrico, considerados como una distribución de medida, que se mantiene en un amplio rango de escalas.

Esta superposición y simetría de los espectros multifractales se pierde en la imagen de julio, en la estación seca. Ambas curvas se han desacoplado mostrando diferentes patrones geométricos para la distribución de medida que representa cada uno de los índices.

El valor máximo de los espectros multifractales se alcanza para $\alpha^* = 2.0083$, para el caso del NDVI, y para $\alpha^* = 2.0032$, para el NSMI. Para la dimensión de información tenemos los valores de 1.9912 en el caso del NDVI y de 1.9966 en el caso del NSMI.

En la estación seca los espectros multifractales de ambos índices resultan asimétricos, siendo la parte de la curva correspondiente a los valores $q > 0$ la que alcanza los valores más bajos de $f(\alpha)$.

En la sección 4.2 utilizamos el índice de asimetría, definido mediante la ecuación 4.2, y las amplitudes Δ^+ y Δ^- para caracterizar el comportamiento asimétrico de los espectros multifractales de las bandas espectrales en función de sus resoluciones. Aplicando estos cálculos en los espectros de los índices de la imagen de julio obtenemos las siguientes amplitudes:

- para el índice de vegetación, $\Delta_{NDVI}^+ = 0.0997$ y $\Delta_{NDVI}^- = 0.0487$

- para el índice de humedad, $\Delta_{NSMI}^+ = 0.0416$ y $\Delta_{NSMI}^- = 0.0241$

Estas amplitudes reflejan el hecho de que, para ambos espectros multifractales, la sección I ($q > 0$) presenta una anchura superior a la sección II ($q < 0$). Con estos valores de amplitud, el índice de asimetría del espectro multifractal para el NDVI es mayor que para el NSMI, con un valor de $AI_{NDVI} = 0.3437$ para el primero y de $AI_{NSMI} = 0.2664$ para el segundo. Aplicando estos mismos cálculos en los espectros de los índices de la imagen de marzo, queda patente la simetría en las correspondientes amplitudes:

- para el índice de vegetación, $\Delta_{NDVI}^+ = 0.0573$ y $\Delta_{NDVI}^- = 0.0566$
- para el índice de humedad, $\Delta_{NSMI}^+ = 0.0487$ y $\Delta_{NSMI}^- = 0.0527$

En este caso, los índices de asimetría resultantes son $AI_{NDVI} = 0.0061$ para el índice de vegetación y de $AI_{NSMI} = -0.0394$ para el de humedad.

4.3.2.2 Cálculo del espectro multifractal conjunto

Una exploración más en profundidad de la correlación entre el índice de humedad del suelo y el de vegetación, se ha abordado a través del análisis multifractal conjunto (*joint multifractal analysis*) entre ambos índices y ambas fechas. La caracterización teórica del análisis multifractal conjunto se describió en la sección 3.5. En este marco, las imágenes de los índices son consideradas medidas normalizadas caracterizadas por las expresiones 3.54 y 3.55, para cada uno de ellos. La correlación entre ambas medidas queda reflejada en el espectro conjunto de singularidades que, en este caso, es una función tridimensional definida por la triada de números $(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI}, f(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI}))$, en la que cada uno de ellos viene dado por las ecuaciones 3.58, 3.59 y 3.60, en función de los parámetros q y p . Estas ecuaciones permiten, además, aplicar directamente el algoritmo de Chhabra-Jensen utilizado en la sección anterior. En este caso, las ecuaciones mencionadas anteriormente se transforman en las 3.61 a 3.63, que son las que hemos utilizado en este análisis (Alonso et al., 2007).

Los resultados de estos cálculos sobre las imágenes de los índices de humedad del suelo y de vegetación se muestran en las tablas 7-5 y 7-6 del Anexo. Los espectros multifractales conjuntos obtenidos se representan en las figuras 4.19 y 4.20, que muestran los resultados de las tablas del anexo.

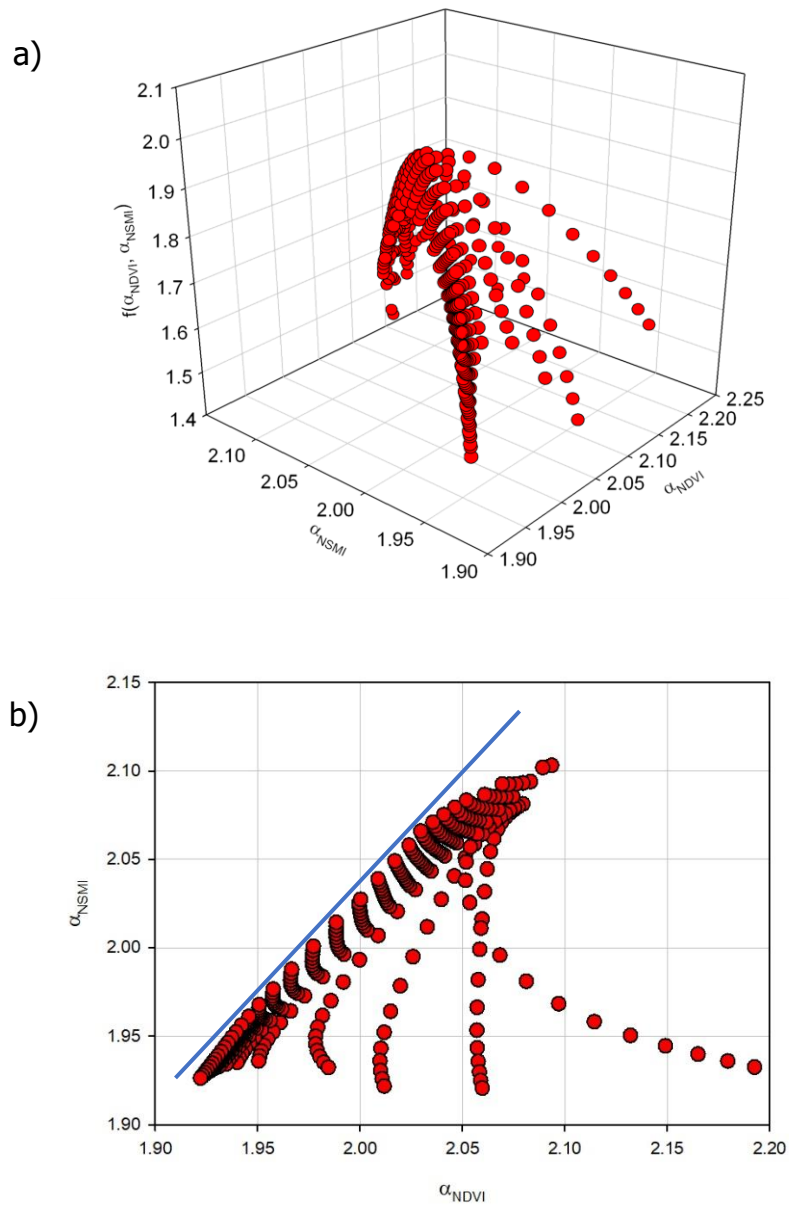


Figura 4.19 Representación de los datos de la tabla 7-1. a) Espectro multifractal conjunto entre los índices NDVI y NSMI obtenidos de la imagen MODIS del 14/03/2006 y representados en la figura 4.17 a y c. Estos espectros se han obtenido aplicando el algoritmo de Chhabra-Jensen, que proporciona un método directo para obtener los valores de α_{NDVI} , α_{NSMI} y de $f(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI})$ en función de los parámetros q y p (ver sección 3.5). b) Proyección de los puntos sobre el plano $(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI})$. La línea azul representa una línea imaginaria que acota el espectro multifractal conjunto de ambos índices.

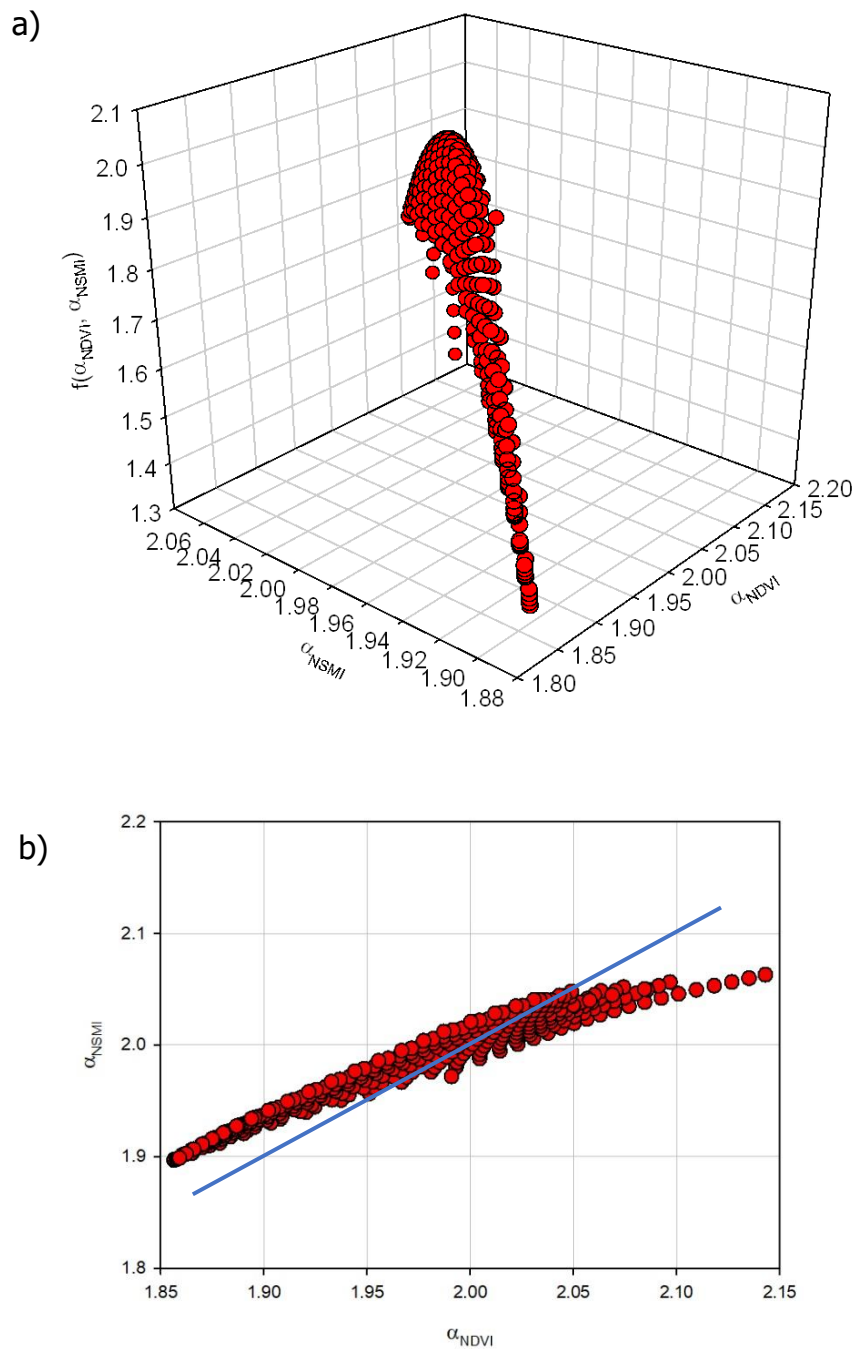


Figura 4.20 Representación de los datos de la tabla 4-11. a) Espectro multifractal conjunto entre los índices NDVI y NSMI obtenidos de la imagen MODIS del 29/07/2006 y representados en la figura 4.17 b y d respectivamente. Estos espectros se han obtenido aplicando el algoritmo de Chhabra-Jensen, que proporciona un método directo para obtener los valores de α_{NDVI} , α_{NSMI} y de $f(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI})$ en función de los parámetros q y p (ver sección 3.5). b) Proyección de los puntos sobre el plano $(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI})$. Se ha representado en azul la bisectriz del plano.

En el análisis multifractal conjunto la dimensión del soporte de la medida se alcanza para los valores de $p = 0$ y $q = 0$, siendo $f(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI}) = 2$. Para las dos fechas analizadas este valor máximo del espectro multifractal conjunto corresponde a valores muy similares para los exponentes de Hölder, α_{NDVI} y α_{NSMI} :

- 14/03/2006: $\alpha_{NDVI} = 2.0089$ y $\alpha_{NSMI} = 2.0069$
- 29/07/2006: $\alpha_{NDVI} = 2.0083$ y $\alpha_{NSMI} = 2.0032$

Para cualquier otra combinación de valores de p y q se cumple que $f(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI}) < 2$.

Para los índices del mes de marzo, el espectro multifractal conjunto presenta una compleja distribución asimétrica que puede verse en la figura 4.19 a. La distribución asimétrica se pone más de relieve proyectando los puntos sobre el plano α_{NSMI} vs. α_{NDVI} (figura 4.19 b). Sobre este plano, los puntos del espectro multifractal conjunto se distribuyen en tres cuadrantes quedando vacío el superior izquierdo. Así podemos representar una línea imaginaria en el plano $(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI})$ que muestra una cota al espectro multifractal conjunto de ambos índices (línea azul de la figura 4.19 b). El máximo valor del exponente de Hölder para el NDVI, 2.1926, se observa para la dupla de parámetros $q = -1$ y $p = 9$. Para el mismo valor del parámetro q ($q = -1$) se observa también el máximo valor del exponente de Hölder para el NSMI, 2.1032, pero en esta ocasión para el extremo contrario del parámetro p , $p = -10$.

Para los índices del mes de julio, la distribución de puntos que corresponde al espectro multifractal conjunto presenta una forma más compacta y simétrica representada en la figura 4.20 a. También en este caso se pone más de relieve proyectando los puntos sobre el plano α_{NSMI} vs. α_{NDVI} (figura 4.20 b). Sobre este plano, los puntos del espectro multifractal conjunto se distribuyen sobre la bisectriz (línea azul de la figura 4.20 b). Ahora, los valores máximos de los exponentes de Hölder para el NDVI y el NSMI, 2.143 y 2.063 respectivamente, se observan para la misma dupla de parámetros $q = -4$ y $p = -10$.

4.3.3 Conclusiones

En esta sección hemos analizado la correlación entre vegetación y humedad del suelo mediante dos índices normalizados, el NDVI y el NSMI, en el marco del análisis multifractal. Para ello se han utilizado dos imágenes obtenidas por el sensor MODIS del satélite Terra, una de ellas adquirida durante la estación húmeda, en el mes de marzo, y la otra durante la estación seca, en el mes de julio.

Los espectros multifractales de ambos índices y para las dos fechas analizadas muestran la correlación entre la vegetación y la humedad del suelo. Para la estación húmeda indican que los patrones que presentan se mantienen a múltiples escalas.

Un reflejo de la correlación entre ambos índices, especialmente en la estación húmeda, lo proporciona la semejanza de sus espectros multifractales. Pero es el Análisis Multifractal Conjunto el que realmente proporciona el comportamiento de escala de la correlación entre ambos índices. Este escalado es más evidente durante la estación húmeda (marzo) que en la estación seca (julio).

4.4 Análisis de la dinámica de la vegetación natural

La dinámica de la vegetación natural sobre la superficie de la Tierra es el resultado de la interacción de la vegetación con otros elementos del paisaje como el suelo, el clima o la propia actividad humana (Tarquis et al., 2018). Una aproximación para comprender esta dinámica es caracterizar los patrones espaciales de los pastos a lo largo de las estaciones y su relación con el contenido de humedad del suelo. En el sur de Europa la sequía altera esta dinámica con graves consecuencias (López et al., 2018).

En este apartado, se analiza el comportamiento con la escala de la correlación entre dos de dichos elementos (Alonso et al., 2018): la vegetación, a través de un índice de vegetación, y el suelo, a través de uno de sus parámetros característicos, un índice de humedad del suelo. Para ello, se ha utilizado una serie temporal de imágenes adquiridas por los satélites Sentinel-2A y Landsat-8, entre Julio de 2015

y Agosto de 2016, que fueron procesadas para extraer el índice de vegetación de diferencia normalizada (NDVI) y el índice normalizado de humedad del suelo (NSMI).

El área de estudio ha sido una zona de pastos naturales, situada al norte de la Comunidad de Madrid. Como hemos visto en secciones anteriores, los valores del NDVI están relacionados con la proporción de vegetación en el píxel, por lo que los píxeles fueron clasificados en tres categorías: suelo desnudo, completamente cubierto por vegetación y una mezcla de ambos. Las mayores correlaciones se encontraron, como era de esperar, con el suelo desnudo, no resultando significativas con las otras clases. Cuando los datos se agregaron a nivel mensual y estacional, el coeficiente de correlación aumentó significativamente.

4.4.1 Material y métodos

La zona de estudio comprende una superficie aproximada de 6.55 km², un cuadrado de 2.56 km de lado, que se encuentra situada en un paisaje de pastos naturales al norte de la Comunidad de Madrid, entre los municipios de Soto del Real y Colmenar Viejo (figura 4.21). Dicha zona se ubica entre las coordenadas geográficas determinadas por los meridianos -3° 46 '40 "y -3° 44' 44" y los paralelos 40° 43 '12 "y 40° 42' 36".

Los rangos de temperatura anual promedio durante el período de estudio estuvieron entre 13,8 y 12,7 °C, y la precipitación media entre 360 y 781 mm. Las estaciones estudiadas fueron identificadas como semiáridas según el índice de aridez global desarrollado por la Convención de las Naciones Unidas de Lucha contra la Desertificación (UNEP, 1997). La relación anual de precipitación y evapotranspiración (P / ETo) en la zona de estudio presenta valores entre 0.2 y 0.5.

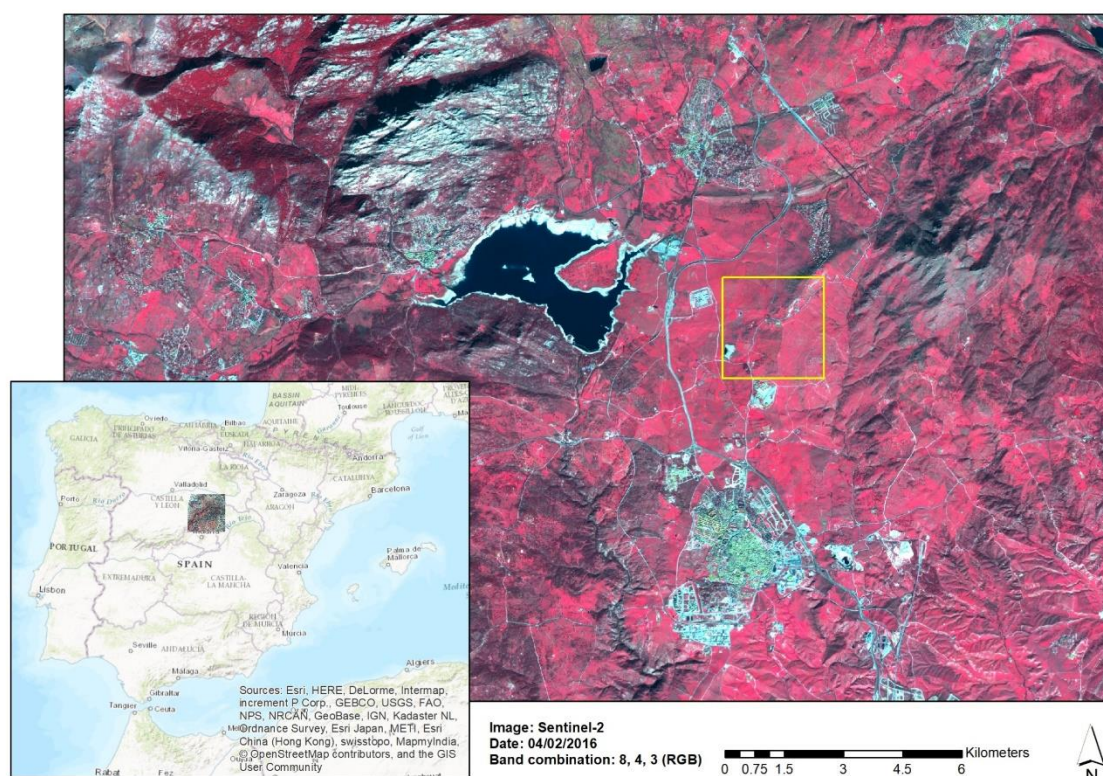


Figura 4.21 El área de estudio es un cuadrado (en amarillo) que cubre una extensión de 6.55 km² en el norte de la Comunidad de Madrid, entre los municipios de Soto del Real, al norte, y Colmenar Viejo, al sur, y al este del embalse de Santillana.

Como ya se ha dicho antes, para este trabajo se han utilizado imágenes del satélite europeo Sentinel-2A cuyas características técnicas se describen en la sección 2.2.4 y Landsat-8 cuyas características se describen en la sección 2.2.1.

El nivel de procesamiento de las imágenes Sentinel-2A que se han utilizado es L1C (Gascon et al. 2017), que proporciona directamente la reflectancia captada por el sensor en la parte superior de la atmósfera (TOA) y en geometría cartográfica para cada banda espectral. Es decir, las imágenes están proyectadas en Universal Transverse Mercator (UTM). Se han descargado directamente del Copernicus Open Access Hub (<https://scihub.copernicus.eu/dhus/#/home>) de la ESA. Las imágenes Landsat-8 se descargaron del servidor EarthExplorer del USGS norteamericano (<http://earthexplorer.usgs.gov/>). Estas imágenes se utilizaron para completar la serie temporal en las fechas en que las Sentinel estaban cubiertas de nubes en el área de estudio. Las imágenes Landsat-8 se calibraron, utilizando los parámetros de

los metadatos, y se transformaron a reflectancia TOA. Todas las imágenes utilizadas se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 4-6 Serie temporal de imágenes utilizadas en el estudio.

Fecha imagen	Satélite	Resolución	Procedencia
29/07/2015	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA
28/08/2015	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA
25/09/2015	Landsat-8	30 m	USGS
27/10/2015	Landsat-8	30 m	USGS
16/11/2015	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA
6/12/2015	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA
31/01/2016	Landsat-8	30 m	USGS
4/02/2016	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA
3/03/2016	Landsat-8	30 m	USGS
7/04/2016	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA
22/05/2016	Landsat-8	30 m	USGS
23/06/2016	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA
16/07/2016	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA
22/08/2016	Sentinel-2 A	10 y 20 m	ESA

Se procesaron las imágenes mensuales de Sentinel-2A y Landsat-8, desde julio de 2015 hasta agosto de 2016, para extraer el Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (NDVI), descrito en la sección 2.3.1, y el Índice de Humedad del Suelo Normalizado (NSMI), descrito en la sección 2.3.2.

Para cada uno de los satélites se han utilizado las reflectancias de las correspondientes bandas, según las tablas 2-2 y 2-5, en las ecuaciones 2.28 y 2.33 para obtener el NDVI y el NSMI respectivamente. Debido a que las bandas presentan resoluciones diferentes, un paso adicional en el pre-procesado es la homogeneización de la resolución de todas las matrices, tanto del NDVI como del NSMI, a un tamaño de píxel de 20 m x 20 m. En el caso del Sentinel-2, la matriz NDVI original se transformó a la resolución final calculando un promedio de cada 2x2 valores. En el caso del Landsat-8, tanto la matriz NDVI como la NSMI originales se transformaron mediante un remuestreo de los píxeles al tamaño final mediante

el vecino más próximo. En el análisis se utilizaron, por tanto, matrices de 128 x 128 píxeles con un tamaño del píxel de 20 m.

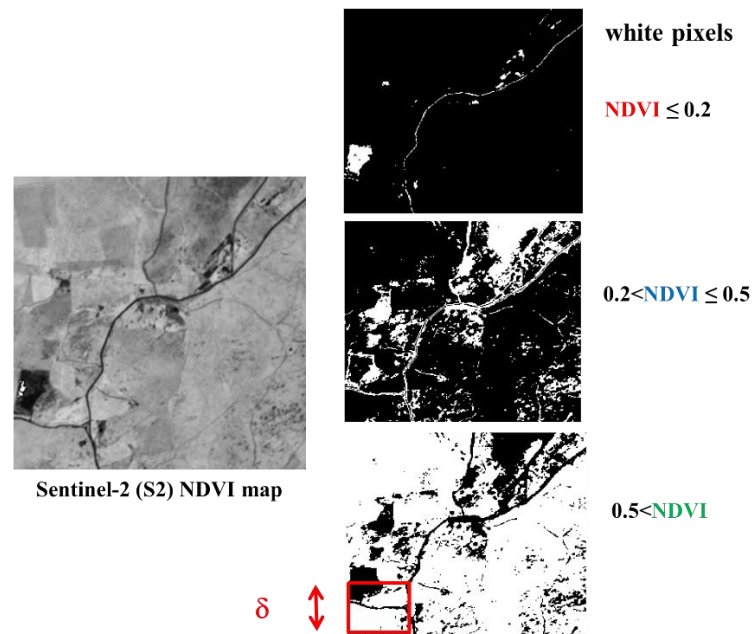


Figura 4.22 El NDVI puede segmentarse en tres categorías en función de dos umbrales: $NDVI_0 = 0.2$, por debajo del cual el píxel se considera como suelo sin vegetación, y $NDVI_\infty = 0.5$, por encima del cual el píxel se considera completamente cubierto por vegetación. Entre ambos valores el píxel se considera compuesto por una mezcla de suelo y de vegetación.

Como vimos en la sección 2.3.1, los valores del NDVI presentan una fuerte correlación con la FVC a través de la ecuación 2.29. En este trabajo se han utilizado los mismos umbrales indicados en la citada sección, segmentando el NDVI en las tres regiones que se muestran en la figura 4.22.

Con el fin de estudiar su variación temporal y caracterizar la distribución de sus valores, se calcularon los cuatro primeros momentos de ambos índices, NDVI y NSMI, para cada una de las imágenes: valor medio, varianza, curtosis y asimetría (Alonso et al., 2019). Por otro lado, se calculó también un valor medio de ambos índices por temporada (estación) y año para comprobar la existencia de una correlación significativa entre ellos.

4.4.2 Resultados y discusión

Los valores del NDVI obtenidos de cada una de las imágenes se describen estadísticamente en la Tabla 4-7. Como era de esperar, la mediana y el promedio del NDVI muestran un patrón estacional. La mayor variación se logra de noviembre a abril. La curtosis es especialmente alta durante el verano reduciendo su valor en noviembre y diciembre. La asimetría es mínima en octubre y noviembre mostrando valores absolutos superiores a uno en el resto de meses. Ambos momentos estadísticos señalan que la distribución de los valores del NDVI no sigue una forma gaussiana de acuerdo con trabajos anteriores de Martin-Sotoca et al. (2019) en pastos.

Tabla 4-7 Valores de la mediana y los primeros cuatro momentos estadísticos para los NDVI de cada fecha: promedio, varianza, curtosis, asimetría.

Fecha imagen	Mediana	Promedio	Varianza	Curtosis	Asimetría
29/07/2015	0.1770	0.1838	0.0015	15.70	2.35
28/08/2015	0.1677	0.1740	0.0013	17.18	2.47
25/09/2015	0.2356	0.2100	0.0029	16.20	1.38
27/10/2015	0.3710	0.3600	0.0069	8.89	0.20
16/11/2015	0.5065	0.4870	0.0108	1.59	-0.98
6/12/2015	0.4889	0.4718	0.0102	2.00	-1.07
31/01/2016	0.5100	0.5300	0.0103	3.75	-1.38
4/02/2016	0.5728	0.5512	0.0107	4.37	-1.74
3/03/2016	0.5848	0.5900	0.0110	4.58	-1.75
7/04/2016	0.6291	0.6037	0.0113	4.70	-1.84
22/05/2016	0.5800	0.6000	0.0081	5.94	-1.61
23/06/2016	0.3062	0.3197	0.0062	4.47	1.26
16/07/2016	0.2157	0.2277	0.0033	8.79	1.89
22/08/2016	0.1755	0.1826	0.0017	12.12	1.58

Los valores medios del NDVI inferiores a 0,2 se encuentran en julio y agosto. En septiembre y octubre este valor se sitúa entre 0,2 y 0,5 siendo el resto de meses superior a 0,5 en general.

Las estadísticas de los valores del NSMI obtenidos en cada imagen se muestran en la Tabla 4-8. Al igual que para el NDVI, el NSMI muestra un patrón estacional para la mediana y el promedio, alcanzando el valor máximo durante la primavera. En

consecuencia, la varianza más alta se logra en la misma temporada. La curtosis y la asimetría muestran valores más bajos si los comparamos con las estadísticas del NDVI. La curtosis es alta entre mayo y agosto, mientras que la asimetría es menor que la unidad entre septiembre y diciembre. Nuevamente, ambos momentos estadísticos señalan que la distribución de los valores del NSMI no sigue una forma gaussiana. Sin embargo, las colas de estas distribuciones, en cada fecha, son más cortas ya que los valores de curtosis son más bajos en comparación con las distribuciones del NDVI (Alonso et al. 2019).

Tabla 4-8 Valores de la mediana y los primeros cuatro momentos estadísticos para los NSMI de cada fecha: promedio, varianza, curtosis, asimetría.

Fecha imagen	Mediana	Promedio	Varianza	Curtosis	Asimetría
29/07/2015	0.2242	0.2220	0.0006	6.70	-1.36
28/08/2015	0.2265	0.2251	0.0006	4.74	-1.12
25/09/2015	0.2356	0.2370	0.0009	3.11	-0.98
27/10/2015	0.2410	0.2430	0.0010	2.75	-0.85
16/11/2015	0.2554	0.2517	0.0014	2.11	-0.75
6/12/2015	0.2586	0.2550	0.0012	2.54	-0.82
31/01/2016	0.2500	0.2520	0.0130	2.76	-0.90
4/02/2016	0.2534	0.2496	0.0013	2.82	-0.97
3/03/2016	0.2700	0.2800	0.0017	3.55	-1.20
7/04/2016	0.3013	0.2950	0.0019	3.44	-1.33
22/05/2016	0.2750	0.2700	0.0017	6.23	-1.31
23/06/2016	0.2641	0.2614	0.0011	4.63	-1.09
16/07/2016	0.2476	0.2463	0.0010	6.74	-1.58
22/08/2016	0.2388	0.2377	0.0008	6.67	-1.22

En general, los valores medios del NSMI inferiores a 0.23 se encuentran en julio y agosto. En septiembre y octubre este valor se sitúa entre 0.23 y 0.25 siendo el resto de meses superior a 0.25. Una vez que se han segmentado los píxeles en función del valor del NDVI (figura 4.22), se extraen los valores del NSMI para estudiar su comportamiento y correlación. En la figura 4.23 se muestra la evolución de ambos índices en general y de los tres conjuntos segmentados.

El rango de variación para NDVI_1 es pequeño, de 0.2 a 0.1. Sin embargo, para NSMI_1 la variación es mayor al ser de 0.22 a 0.14, excepto a fines del verano de

2016 que el valor alcanza 0.24 debido principalmente a un evento de lluvia en julio. En el caso de NDVI_2, la variación es mayor que NDVI_1, moviéndose en un rango de 0.23 - 0.40. Por el contrario, NSMI_2 muestra una evolución casi plana con valores entre 0.22 y 0.26. Desde julio hasta diciembre de 2015, el valor NSMI_2 es casi constante.

Finalmente, NDVI_3 muestra una variación de 0.52 a 0.62 y NSMI_3 varía de 0.26 a 0.32. Observando el número de píxeles en cada uno de los conjuntos (figura 4.23 C) el promedio de todos los valores en NDVI y NSMI refleja la clase dominante en cada mes.

Las correlaciones se realizaron para diferentes niveles de agregación. En primer lugar, para cada conjunto de segmentación se analizó la correlación entre los valores del NDVI y del NSMI. El siguiente nivel fue para cada fecha y, por último, fue la agregación de los valores en cada temporada. La figura 4.24 muestra los resultados obtenidos en los tres niveles.

Cuando solo se utilizan los píxeles con $NDVI \leq 0.2$ (suelo desnudo) el coeficiente de correlación obtenido con NSMI es 0.95 y el valor NSMI es menor que 0.24. En el caso de que $NDVI \geq 0.5$, cobertura vegetal completa, no hay correlación y los valores de NSMI están por encima de 0.27. En el tercer caso, para la mezcla de suelo y vegetación, la correlación no es significativa y los NSMI muestran una dispersión con valores que van desde 0.21 hasta 0.26.

La correlación obtenida por fecha utilizando todos los valores del NDVI es significativa con un $R^2 = 0.66$. Este resultado se obtiene gracias a la alta correlación de píxeles del suelo desnudo. Cuando agregamos los valores según la estación del año (ver figura 4.24 B), el coeficiente de correlación aumenta a 0.76.

Cuando un píxel contiene una cierta cobertura de vegetación, la correlación entre el NDVI y el NSMI se pierde para una resolución de 20 m x 20 m.

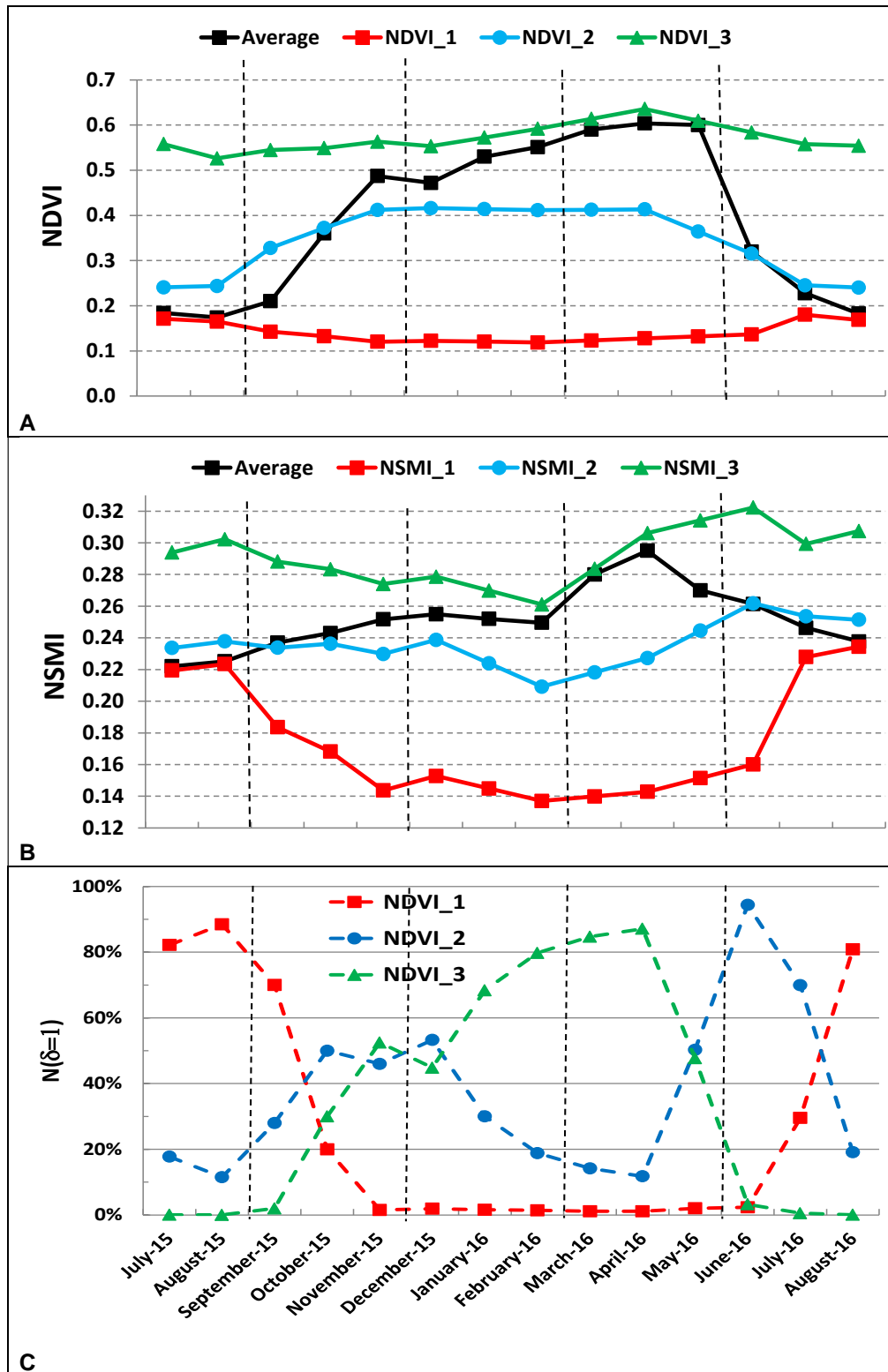
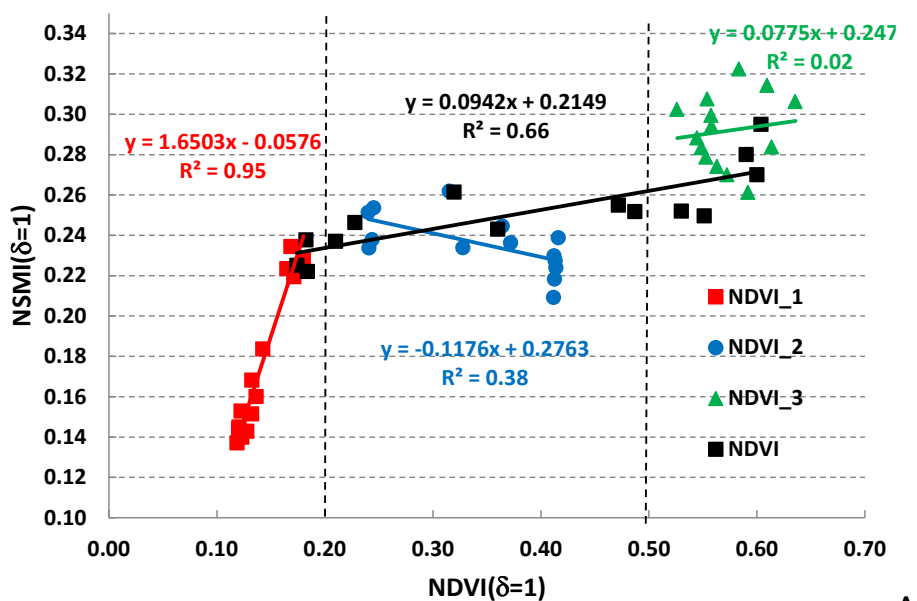
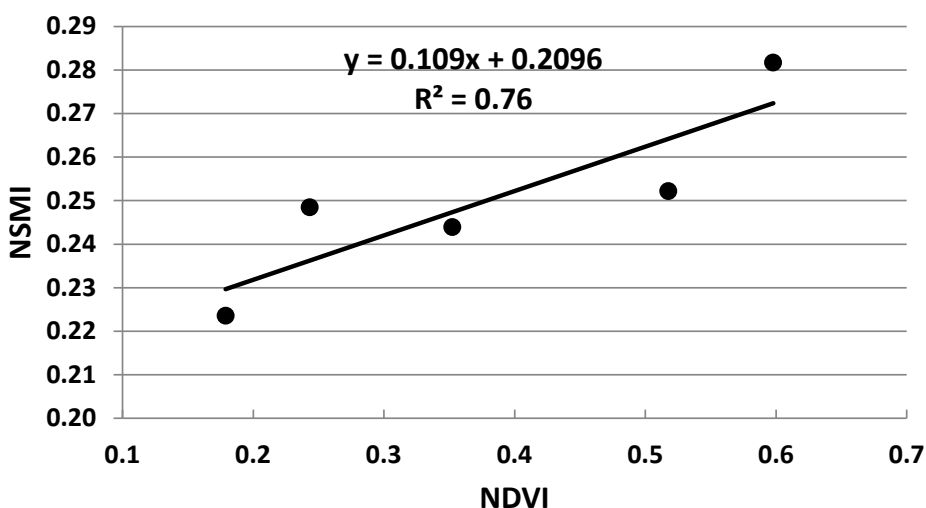


Figura 4.23 Evolución en el tiempo de la media de los valores del NDVI y del NSMI (gráficas A y B respectivamente). En negro el promedio de todos los valores, en colores los píxeles seleccionados en función de los valores segmentados del NDVI: $NDVI < 0.2$ (NDVI_1), $0.2 \leq NDVI \leq 0.5$ (NDVI_2) y $0.5 < NDVI$ (NDVI_3). Porcentaje de píxeles pertenecientes a cada clasificación NDVI (gráfica C).



A



B

Figura 4.24 Gráfico de la media de NSMI frente a la media de NDVI. A) Para cada fecha, a escala de píxeles ($\delta = 1$), en negro el promedio de todos los valores, en colores los píxeles seleccionados en función de los valores segmentados del NDVI: NDVI < 0.2 (NDVI_1), $0.2 \leq \text{NDVI} \leq 0.5$ (NDVI_2) y $0.5 < \text{NDVI}$ (NDVI_3). (B) Promedio NSMI y NDVI de todos los valores y por temporada.

4.4.3 Conclusiones

El término sequía se utiliza normalmente para referirse a la deficiencia en las precipitaciones, la humedad del suelo, el verdor de la vegetación o las condiciones ecológicas. Calcular el impacto de una sequía es crucial para determinar las consecuencias ambientales y agrícolas. Sin embargo, la intensidad de la sequía varía

espacial y temporalmente, lo que indica la complejidad a la hora de analizar sus consecuencias. Debido a esto, el uso de datos de Observación de la Tierra desde satélite se ha utilizado cada vez más, ya que proporciona información más continua en el tiempo y el espacio que otros enfoques.

El NDVI se ha utilizado en el seguimiento y la evaluación de sequías durante la última década (Kogan, 1995; Yang et al., 1998; McVicar and Bierwirth, 2001; Ji and Peters, 2003; Wan et al., 2004; Gu et al., 2007). Sin embargo, varios autores han encontrado que existe un lapso de tiempo entre el déficit de lluvia y la respuesta del NDVI (Reed et al., 1994; Di et al., 1994; Rundquist and Harrington, 2000; Wang et al., 2004 y 2007). Algunos de ellos, incluso, cuestionan la correlación entre el NDVI y el contenido de humedad del suelo medido con el NSMI.

Para establecer estas comparaciones, se procesaron imágenes Sentinel-2A y Landsat-8 mensuales, desde julio de 2015 hasta agosto de 2016, para extraer NDVI y NSMI. Se seleccionó una superficie de aproximadamente 6.55 km² (2.56 km x 2.56 km), y ubicada en un paisaje de pastos al norte de la Comunidad de Madrid, entre los términos municipales de Soto del Real y Colmenar Viejo.

Los píxeles del NDVI se segmentaron en tres categorías: suelo desnudo (NDVI <0.2), mezcla de suelo y vegetación y completamente cubiertos de vegetación (NDVI >0.5). Las correlaciones para cada conjunto de valores del NDVI y el NSMI se calcularon con una resolución de 20 m x 20 m. Solo se encontró una correlación significativa en píxeles de suelo desnudo. Cuando se agregaron los datos por fecha y estación, utilizando todos los píxeles, el coeficiente de correlación volvió a ser significativo obteniendo 0.66 y 0.72 respectivamente.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE TRABAJO FUTURO

5.1 Conclusiones

En esta sección se resumen las conclusiones alcanzadas según los objetivos planteados en el capítulo de introducción y en base a los estudios realizados y los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

- Objetivo: *Definir en qué medida es comparable la información que, sobre la vegetación, proporcionan imágenes de diferente tamaño de píxel, tomadas por distintos satélites, utilizando el análisis fractal.*

Este objetivo es el abordado en la sección 4.1. En ella se ha probado que la dimensión fractal, como parámetro que permite caracterizar los patrones geoespaciales de la vegetación, no es suficiente para la completa caracterización de la complejidad de dichos patrones. Para ello es necesario un continuo de dimensiones fractales, un marco que proporciona el análisis multifractal.

Comparando la dimensión fractal de los patrones del NDVI obtenidos por diferentes sensores, que proporcionan imágenes de diferente tamaño de píxel (el TM del Landsat-5 y MODIS del Terra), se ha observado que se minimizan las diferencias cuando el porcentaje de recubrimiento de la vegetación en el píxel está por encima del 40%.

- Objetivo: *Estudiar, mediante el análisis multifractal, los patrones de reflectividad en las bandas espectrales de distintos satélites y que son utilizadas para calcular los índices de vegetación. Estas bandas espectrales, no solo pueden tener diferente resolución espacial, también radiométrica.*

Este objetivo se ha tratado en la sección 4.2, donde se ha utilizado el análisis multifractal para analizar las cuatro bandas comunes de dos satélites con diferentes resoluciones espaciales y radiométricas, el Landsat-7 y el Ikonos-2. En primer lugar, el análisis realizado con las imágenes del Ikonos-2, entre

las cuatro bandas con la radiometría original de 11 bits y las transformadas a 8 bits, reveló un comportamiento totalmente novedoso y del que no había ninguna referencia anterior. Mientras que las dos primeras bandas (azul y verde) presentaban diferentes espectros multifractales, esperable por la simplificación radiométrica, las dos últimas bandas (rojo e infrarrojo cercano) presentan espectros multifractales similares.

El análisis de las imágenes de ambos satélites, ha permitido estudiar también el efecto de la resolución espacial en los espectros multifractales. Este análisis ha revelado que a mayor resolución espacial mayor amplitud del espectro multifractal en las bandas azul y verde, las de menor longitud de onda.

Se ha aplicado también el análisis multifractal sobre dos índices de vegetación, NDVI y EVI, obtenidos con las bandas estudiadas de ambos satélites. Lo más relevante de este análisis es que la resolución radiométrica de las bandas produce una mayor influencia en el espectro multifractal del NDVI, mientras que la resolución espacial tiene un gran impacto en ambos índices de vegetación.

- *Objetivo: Investigar la correlación entre la cobertura vegetal y la humedad del suelo en el marco del análisis multifractal, en imágenes de satélite.*

Este objetivo se aborda en el estudio desarrollado en la sección 4.3, donde se ha analizado la correlación entre el NDVI y el NSMI, obtenidos a partir de imágenes MODIS del satélite Terra, utilizando el análisis multifractal.

Este análisis reveló que la semejanza o superposición entre los espectros multifractales de ambos índices es un indicador de la correlación entre ellos, ya que se evidencia fuertemente en la estación húmeda.

Pero lo más novedoso de este estudio es presentar el Análisis Multifractal Conjunto como el marco que mejor refleja el comportamiento de escala de la correlación de ambos índices, escalado que resulta más evidente en la estación húmeda que en la seca.

- Objetivo: *Analizar la dinámica de la vegetación natural a través del comportamiento con la escala de la correlación entre la cobertura vegetación y la humedad del suelo.*

Finalmente, este último objetivo es el que se afronta en la sección 4.4, donde se ha estudiado la dinámica de la vegetación centrándonos en un paisaje de pastos. Utilizando datos mensuales de los satélites Landsat-8 y Sentinel-2 se ha analizado la evolución, a lo largo de un año, tanto del NDVI como del NSMI.

Los parámetros estadísticos de curtosis y asimetría, para la distribución de los valores del NDVI, han corroborado uno de los resultados del trabajo de otros investigadores anteriores (Martín-Sotoca et al. 2019), según el cual dicha distribución en pastos no sigue una forma gaussiana.

La segmentación del NDVI ha permitido determinar, como era de esperar, que la correlación con la humedad del suelo resulta significativa solo en el caso de bajos valores del NDVI, que corresponden al suelo desnudo o con escasa vegetación.

La agregación de los datos, tanto por fecha como por estación climática, utilizando todos los píxeles, reveló valores significativos del coeficiente de correlación para ambos índices.

5.2 Líneas de trabajo futuro

Dos son las líneas de trabajo que se proponen para profundizar en los aspectos más relevantes de la investigación desarrollada hasta ahora:

1. La aplicación del Análisis Multifractal Conjunto a datos más actuales y de mejor resolución como los proporcionados por los satélites europeos del programa Copernicus de observación de la Tierra, los Sentinel.

Como ha quedado reflejado en la Tesis, este tipo de análisis es una potente herramienta para el estudio del comportamiento con la escala de la correlación entre indicadores ambientales y climáticos.

2. Extender el estudio de la dinámica de la vegetación y el índice de humedad del suelo con una serie temporal más larga, de varios años, y que permita caracterizar estadísticamente procesos de sequía a partir de los datos del satélite europeo Sentinel-2.

6 REFERENCIAS

Adepoju K., Adelabu S. and Fashae O. 2019. *Vegetation Response to Recent Trends in Climate and Landuse Dynamics in a Typical Humid and Dry Tropical Region under Global Change*. Advances in Meteorology, vol. 2019, Article ID 4946127, 15 pages. DOI: 10.1155/2019/4946127.

Aguado, P.L., Del Monte, J.P., Moratiel, R., Tarquis, A.M. 2014. *Spatial Characterization of Landscapes through Multifractal Analysis of DEM*. The Scientific World Journal. Vol 2014. Article ID 563038, 9p. DOI: 10.1155/2014/563038.

Alados C. L., Pueyo Y., Navas D., Cabezudo B., Gonzalez A. and Freeman D. C. 2005. *Fractal analysis of plant spatial patterns: a monitoring tool for vegetation transition shifts*. Biodivers Conserv 14, 1453–1468. DOI: 10.1007/s10531-004-9669-3.

Alonso C. y Moreno V. 2002. *Satélites, clima y glaciares*. Investigación y Ciencia nº 308, 76 - 83.

Alonso C., Tarquis A. M. and Benito R. M. 2005. *Multifractal Characterization of Multispectrum Satellite Images*. Geophysical Research Abstracts, Vol. 7, EGU05-A-05413.

Alonso C., Tarquis A. M., Benito R. M. and Zúñiga I. 2007. *Scaling properties of vegetation and soil moisture indices: multifractal and joint multifractal analysis*. Geophysical Research Abstracts, Vol. 9, EGU2007-A-11643.

Alonso C., Tarquis A.M., Benito R.M. and Zúñiga I. 2008. *Influence of spatial and radiometric resolution of satellite images in scaling/multiscaling behavior*. Geophysical Research Abstracts Vol. 10, EGU2008-A-06184.

Alonso C., Tarquis A. M. and Benito R. M. 2009. *Correlation scaling properties between soil moisture and vegetation indices*. Geophysical Research Abstracts Vol. 11, EGU2009-13932.

Alonso C., Benito R. M. and Tarquis, A. M. 2012. *Comparison of fractal dimensions based on segmented NDVI fields obtained from different remote sensors*. Geophysical Research Abstracts Vol. 14, EGU2012-14342.

Alonso C., Tarquis A. M. y Benito R. M. 2013. *Comparación textural del NDVI obtenido con imágenes Landsat-TM y Terra-MODIS mediante análisis fractal*, XV Congreso Nacional de Teledetección Abstracts. INTA, Torrejón de Ardoz, Madrid.

Alonso C., Tarquis A. M., Zúñiga I. and Benito, R. M. 2017. *Spatial and radiometric characterization of multi-spectrum satellite images through multi-fractal analysis*. Nonlin. Processes Geophys., 24, 141-155. DOI:10.5194/npg-24-141-2017.

Alonso C., López P., Benito R. M. and Tarquis A. M. 2018. *Analyses of Vegetation and Soil Moisture correlations during a cycle*. Geophysical Research Abstracts Vol. 20, EGU2018-18332-2.

Alonso C., López P., Benito R. M. and Tarquis A. M. 2019. *Correlations between vegetation index and soil moisture index using Sentinel-2*. XIV Jornadas de Investigación en la Zona No Saturada del Suelo, Book of Abstracts, pag. 75. Edited by: J. L. Gabriel Pérez, D. Martín-Lammerding and M. Quesada Sáenz-Badillos.

Andraud C., Beghdadi A. and Lafait J. 1994. *Entropic analysis of morphologies*. Physica A 207, 208–212.

Beaulieu A. and Gaonac'h H. 2002. *Scaling of differentially eroded surfaces in the drainage network of the Ethiopian plateau*. Rem. Sens. Environ., 82, 111–122.

Ben-Ze'ev E., Karnieli A., Agam N., Kaufman Y. and Holben, B. 2006. *Assessing vegetation condition in the presence of biomass burning smoke by applying the Aerosol-Free Vegetation Index (AFRI) on MODIS images*. International Journal of Remote Sensing, 27, 3203-3221.

Bian L. and Butler R. 1999. *Comparing Effects of Aggregation Methods on Statistical and Spatial Properties of Simulated Spatial Data*. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 65, 73-84.

- Billingsley P. 1965. *Ergodic Theory and Information*. John Wiley and Sons, New York.
- Bojinski S., Verstraete M., Peterson T. C., Richter C., Simmons A. and Zemp M. 2014. *The Concept of Essential Climate Variables in Support of Climate Research, Applications, and Policy*. Bull. Amer. Meteor. Soc., 95, 1431–1443. DOI: 10.1175/BAMS-D-13-00047.1.
- Cantrell C. A. 2008. *Technical Note: Review of methods for linear least-squares fitting of data and application to atmospheric chemistry problems*. Atmos. Chem. Phys., 8, 5477–5487.
- Carlson T. N. and Ripley D. A. 1997. *On the relation between NDVI, Fractional Vegetation Cover, and Leaf Area Index*. Remote Sensing of Environment, 62: 241–252.
- Chhabra A. and Jensen R. V. 1989. *Direct Determination of the $f(a)$ Singularity Spectrum*. Physical Review Letters, vol. 62, n° 12, pp 1327 – 1330.
- Cheng Q. and Agterberg F.P. 1996. *Multifractal modelling and spatial statistics*. Mathematical Geology, 28(1), 1-16.
- Cheng Q. 1999. *Multifractality and spatial statistics*. Computer & Geoscience, 255, 949-961.
- Cheng Q. 2004. *A new model for quantifying anisotropic scale invariance and for decomposition of mixing patterns*, Mathematical Geology, 36, 345–360.
- Cornacchia L., Wharton G., Davies G., Grabowski R. C., Temmerman S., van der Wal D., Bouma T. J. and van de Koppel J. 2020. *Self-organization of river vegetation leads to emergent buffering of river flows and water levels*. Proc. R. Soc. B.2872020114720201147. DOI: 10.1098/rspb.2020.1147.
- Dadashpoor H., Azizi P. and Moghadasi M. 2019. *Land use change, urbanization, and change in landscape pattern in a metropolitan area*. Science of The Total Environment, Volume 655, pages 707-719.

- De Cola L. 1989. *Fractal analysis of a classified Landsat-7 scene*. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing 55(5).
- Deng F. P., Su G. L. and Liu, C. 2007. *Seasonal Variation Of MODIS Vegetation Indexes And Their Statistical Relationship With Climate Over The Subtropic Evergreen Forest In Zhejiang, China*, IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 4, 236-240.
- Di L., Rundquist D. C. and Han L. 1994. *Modelling relationships between NDVI and precipitation during vegetative growth cycles*. Int. J. Remote Sens., 15, 2121-2136.
- Dial G., Bowen H., Gerlach F., Grodecki J. and Oleszczuk R. 2003. *IKONOS satellite, imagery and products*. Remote Sensing of Environment 88, 23-36.
- Du G. and Yeo T. S. 2002. *A novel multifractal estimation method and its application to remote image segmentation*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 40(4), 980-982.
- Duveiller G., Hooker J. and Cescatti A. 2018. *The mark of vegetation change on Earth's surface energy balance*. Nat Commun 9, 679. DOI: 10.1038/s41467-017-02810-8.
- Escribano J., Alonso C., Tarquis A. M., Benito R. M., Hernandez C. 2013. *Comparison of NDVI fields obtained from different remote sensors*. Geophysical Research Abstracts Vol. 15, EGU2013-14153.
- Falconer K. 2002. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, New York.
- Feder J. 1988. *Fractals*. Plenum Press, New York, 283 pp.
- Fioravanti S. 1994. *Multifractals: theory and application to image texture recognition*. In "Fractals in Geosciences and Remote Sensing", Proceedings of a joint JRC/EARSel Expert meeting. Ispra. Italy, 14 – 15 April.

Gagnon J. S., Lovejoy S. and Schertzer D. 2003. *Multifractal surfaces and terrestrial topography*. Europhys. Lett. 62, 801-807.

Galidaki G., Zianis D., Gitas I., Radoglou K., Karathanassi V., Tsakiri–Strati M., Woodhouse I. and Mallinis G. 2017. *Vegetation biomass estimation with remote sensing: focus on forest and other wooded land over the Mediterranean ecosystem*. Int. J. of Remote Sens., 38:7, 1940-1966. DOI: 10.1080/01431161.2016.1266113.

Gaonac'h H., Lovejoy S. and Schertzer, D. 2003. *Resolution dependence of infrared imagery of active thermal features at Kilauea volcano*. Int. J. Rem. Sens., 24, 2323-2324.

Gascon F., Bouzinac C., Thépaut O., Jung M., Francesconi B., Louis J., Lonjou V., Lafrance B., Massera S., Gaudel-Vacaresse A., Languille F., Alhammoud B., Viallefont F., Pflug B., Bieniarz J., Clerc S., Pessiot L., Trémas T., Cadau E., De Bonis R., Isola C., Martimort P. and Fernandez V. 2017. *Copernicus Sentinel-2A Calibration and Products Validation Status*. Remote Sens., 9, 584. DOI:10.3390/rs9060584.

Gouyet J. F. 1996. *Physics and fractal structures*. Springer-Verlag: New York.

Gu Y., Brown J. F., Verdin J. P. and Wardlow B. 2007. *A five-year analysis of MODIS NDVI and NDWI for grassland drought assessment over the central Great Plains of the United States*. Geophys. Res. Lett., 34, L06407.

Guzmán M., Martín M. A., Morán M. y Reyes M. 1993. *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Ed. Labor.

Halsey T. C., Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I. and Shraiman B. I. 1986. *Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets*. Phys. Rev. A 33, 1141-1151.

Harvey D. C., Gaonac'h H., Lovejoy S. and Schertzer D. 2002. *Multifractal characterization of remotely sensed volcanic features: a case study from Kilauea volcano, Hawaii*. Fractals, 10, 265-274.

- Haubrock S. N., Chabrillat S., Lemnitz C. and Kaufmann H. 2008. *Surface soil moisture quantification and validation based on hyperspectral data and field measurements*. J. of Applied Remote Sens., 2, 023552.
- Hirata T. and Imoto M. 1991. *Multifractal analysis of spatial distribution of micro-earthquakes in the Kanto region*, Geophys. J. Int. 107.
- Hu X., Næss J. S., Jordan C. M., Huang B., Zhao W. and Cherubini F. 2021. *Recent global land cover dynamics and implications for soil erosion and carbon losses from deforestation*. Anthropocene Volume 34, 100291.
- Huete A. 1988. *A soil-adjusted vegetation index (SAVI)*. Remote Sens. Environ. 25 (3), 295–309.
- Huete A., Didan K., Miura T., Rodriguez E. P., Gao X. and Ferreira L. G. 2002. *Overview of the radiometric and biophysical performance of the MODIS vegetation indices*. Remote Sens Environ 83(1–2):195–213.
- Huete A., Miura T., Yoshioka H., Ratana P. and Broich M. 2014. *Indices of Vegetation Activity* in “Biophysical Applications of Satellite Remote Sensing”. Jonathan M. Hanes Editor, Springer.
- Hubert P. 2001. *Multifractals as a tool to overcome scale problems in hydrology*. Hydrological Sciences Journal, 46(6), 897-905. DOI: 10.1080/02626660109492884.
- Ji L. and Peters A.J. 2003. *Assessing vegetation response to drought in the northern Great Plains using vegetation and drought indices*. Remote Sens. Environ., 87(1), 85-98.
- Kaufman Y. J. and Tanre D. 1992. *Atmospherically resistant vegetation index (ARVI) for EOS-MODIS*. IEEE Trans Geosci Remote Sens 30(2):261–270
- Kogan F. N. 1995. *Droughts of the late 1980s in the United States as derived from NOAA polar-orbiting satellite data*. Bull. Amer. Meteor. Soc., 76, 655-668.

Kravchenko A. N., Boast C. W. and Bullock D. G. 1999. *Multifractal analysis of soil spatial variability*. Agron. J. 91.

Kravchenko A. N., Bullock D. G. and Boast C. W. 2000. *Joint Multifractal Analysis of Crop Yield and Terrain Slope*. Agron. J. 92.

Laferrière A. and Gaonac'h H. 1999. *Multifractal properties of visible reflectance fields from basaltic volcanoes*. J. Geophys. Res., 104(B3), 5115-5126.

Lam N. S. and De Cola L. 1993. *Fractals in Geography*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Lam N. S. 1990. *Description and measurement of Landsat TM images using fractals*. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing 56(2).

López P., Alonso C., Benito R. M. and Tarquis A. M. 2018. *Pasture Spatial Distribution and Correlation with Soil Moisture during a cycle*. Geophysical Research Abstracts Vol. 20, EGU2018-19312-1.

Lovejoy S., Pecknold S. and Schertzer, D. 2001a. *Stratified multifractal magnetization and surface geomagnetic fields-I. Spectral analysis and modelling*. Geophys. J. Int., 145, 112–126.

Lovejoy S., Schertzer D., Tessier Y. and Gaonac'h H. 2001b. *Multifractals and resolution-independent remote sensing algorithms: the example of ocean colour*. Int. J. Remote Sensing, 22(7), 119-1234.

Lovejoy S., Tarquis A. M., Gaonac'h H. and Schertzer D. 2008. *Single and multiscale remote sensing techniques, multifractals and MODIS derived vegetation and soil moisture*. Vadose Zone J., 7, 533-546. DOI: 10.2136/vzj2007.0173.

Maître H. and Pinciroli M. 1999. *Fractal characterization of a hydrological basin using SAR satellite images*. IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens., 37, 175–181.

Mandelbrot B. 1967. *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*. Science, 156, pp. 636–638.

- Mandelbrot B. 1975. *Les Objets Fractals. Forme, hazard et dimension*. Flammarion.
- Mandelbrot B. 1983. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco.
- Mandelbrot B. 1997. *Fractals and Scaling in Finance*. Springer-Verlag, New York.
- Manor A. and Shnerb N. M. 2008. *Facilitation, competition and vegetation patchiness: from scale free distribution to patterns*. J. Theor. Biol. 253, 838–842. DOI: 10.1016/j.jtbi.2008.04.012.
- Martín-Sotoca J. J., Saa-Requejo A., Moratiel R., Dalezios N., Faraslis I. and Tarquis A. M. 2019. *Statistical analysis for satellite-index-based insurance to define damaged pasture thresholds*. Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 19, 1685–1702.
- McVicar T. R. and Bierwirth P.N. 2001. *Rapidly assessing the 1997 drought in Papua New Guinea using composite AVHRR imagery*. Int. J. Remote Sens., 22(11), 2109-2128.
- Meneveau C. and Sreenivasan K. R. 1987. *Simple multifractal cascade model for fully developed turbulence*. Phys. Rev. Lett. 59, 1424 – 1427.
- Meneveau C., Sreenivasan K. R., Kailasnath P. and Fan M. S. 1990. *Joint multifractal measures: Theory and applications to turbulence*. Phys. Rev. A, 41 (2): 894 – 913.
- Mika A.M. 1997. *Three decades of Landsat instruments*. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing 63, 839-852.
- Morató M. C., Castellanos M. T., Bird N. R., Tarquis A. M. 2017. *Multifractal analysis in soil properties: Spatial signal versus mass distribution*. Geoderma, 287, 54-65. DOI: 10.1016/j.geoderma.2016.08.004.
- Musick H. B. and Pelletier R.E. 1986. *Response of Some Thematic Mapper Band Ratios to Variation in Soil Water Content*. Photogramm. Eng. Remote Sens. 52, 1661–1668.

Newbold T. 2018. *Future effects of climate and land-use change on terrestrial vertebrate community diversity under different scenarios*. Proc. R. Soc. B 285: 20180792. DOI:10.1098/rspb.2018.0792.

Newman E. A., Kennedy M. C., Falk D. A. and McKenzie D. 2019. Scaling and Complexity in Landscape Ecology. Front. Ecol. Evol. 7:293. DOI: 10.3389/fevo.2019.00293.

Parrinello T. and Vaughan R. A. 2002. *Multifractal Analysis and feature extraction in satellite imagery*. Int. J. of Remote Sensing 23(9), 1799-1825.

Qiu H., Lam N. S., Quattrochi D. A. and Gamon J. A. 1999. *Fractal characterization of hyperspectral imagery*, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing 65(1).

Raissouni N. and Sobrino J. A. 2000. *Toward Remote Sensing Methods for Land Cover Dynamic Monitoring: Application to Morocco*. Int. J. Remote Sens., 21, 353-366.

Reed B. C., Brown J. F., VanderZee D., Loveland T. R., Merchant J. W. and Ohlen D.O. 1994. *Measuring phenological variability from satellite imagery*. J. of Vegetation Science, 5, 703-714.

Renosh P. R., Schmitt F. G., and Loisel H. 2015. *Scaling analysis of ocean surface turbulent heterogeneities from satellite remote sensing: use of 2D structure functions*. PLoS ONE, 10, e0126975. DOI:10.1371/journal.pone.0126975.

Rényi A. 1960. *On measures of information and entropy*. Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability, pp. 547-561.

Richardson L. F. 1961. *The Problem of Contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels*. General System Yearbook, 6, 139-187.

Rodríguez Alcalde A. L., Alonso Jiménez C. and Velázquez Cano, J. 1995. *Fractales para la Arqueología: Un Nuevo Lenguaje*. Trabajos de Prehistoria 52(1): 13–24.

Rosenblatt M. and Atta C. 1972. *Statistical Models and Turbulence*. 10.1007/3-540-05716-1.

Rouse J. W., Haas R. H., Schell J. A. and Deering D. W. 1973. *Monitoring vegetation systems in the Great Plains with ERTS*. In: 3rd ERTS symposium, NASA SP-351, pp 309–317.

Rundquist B. C. and Harrington J. A. 2000. *The effects of climatic factors on vegetation dynamics of tallgrass and shortgrass cover*. *GeoCarto International*, 15, 33-38.

Sánchez A., Serna R., Catalina F. and Afonso C. N. 1992. *Multifractal patterns formed by laser irradiation in GeAl thin multilayer films*. *Physical Review B*, 46(1).

Shannon C.E. 1948. *A mathematical theory of communication*. The Bell System Technical Journal 27.

Schertzer D. and Lovejoy S. 1987. *Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes*. *J. Geophys. Res.* 92, 9693–9714.

Schertzer D. and Lovejoy S. 1991. *Non-linear variability in Geophysics*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, The Netherlands, 318 p.

Schmitt F., Schertzer D., Lovejoy S. and Marchal P. 1997. *Multifractal analysis of satellite images: towards an automatic segmentation*. In *Fractals in Engineering (Arcachon: Jules)*, 103-109.

Seuront L. 2010. *Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science*. CRC Press.

Sobrino J. A., Jiménez-Muñoz J. C. and Paolini L. 2004. *Land surface temperature retrieval from LANDSAT TM 5*. *Remote Sensing of Environment* 90, 434 – 440.

Tarquis A. M., Losada J. C. Benito R. M. and Borondo F. 2001. *Multifractal analysis of the Tori destruction in a molecular Hamiltonian System*. *Phys. Rev. E.* 65, 0126213(9).

- Tarquis A. M., Giménez D., Saa A., Díaz M. C. and Gascó J. M. 2003. *Scaling and multiscaling of soil pore systems determined by image analysis*, in "Scaling methods in soil physics". Ed. Y. Pachepsky, D.E. Radcliffe and H. Magdi Selim. CRC Press.
- Tarquis A. M., Platonov A., Matulka A., Grau J., Sekula E., Diez M. and Redondo J. M. 2014. *Application of multifractal analysis to the study of SAR features and oil spills on the ocean surface*. *Nonlin. Processes Geophys.*, 21, 439-450.
- Tarquis A. M., Alonso C., Martin-Sotoca J. J. and Benito R.M. 2018. *Correlations between vegetation index and soil moisture index in pasture areas*. XXII Congreso de Física Estadística (FisEs'18). Book of Abstracts, pag. 171. Edited by: F. J. Arranz.
- Tessier Y., Lovejoy S., Schertzer D., Lavallo'e D. and Kerman B. 1993. *Universal multifractal indices for the ocean surface at far red wavelengths*. *Geophysical Research Letters*, 20, 1167-1170.
- Tietjen B. and Jeltsch F. 2007. *Semi-arid grazing systems and climate change: a survey of present modelling potential and future needs*. *J. Appl. Ecol.* 44, 425–434. DOI: 10.1111/j.1365-2664.2007.01280.x.
- Turiel A., Isern-Fontanet J., García-Ladona E. and Font J. 2005. *Multifractal Method for the Instantaneous Evaluation of the Stream Function in Geophysics Flows*. *Phys. Rev. Lett.* 95, 104502.
- Tucker C. J. 1979. *Red and photographic infrared linear combinations for monitoring vegetation*. *Remote Sens Environ.*, 8, 127–150.
- Turcotte D. L. 1989. *Fractals in geology and geophysics*. *Pageoph*, 131, 171–196.
- UNEP. 1997. *Word Atlas of Desertification*. Second Ed. United Nations Environment Programme, Nairobi, 182 p.
- Vincenot C. E., Carteni F., Mazzoleni S., Rietkerk M. and Giannino F. 2016. *Spatial Self-Organization of Vegetation Subject to Climatic Stress — Insights from a System*

Dynamics — Individual-Based Hybrid Model. Front. Plant. Sci. 7: 636. DOI: 10.3389/fpls.2016.00636

Wan Z., Wang P. and Li X. 2004. *Using MODIS land surface temperature and normalized difference vegetation index products for monitoring drought in the southern Great Plains, USA*. Int. J. Remote Sens., 25, 61-72.

Wang Q. and Tenhunen J.D. 2004. *Vegetation mapping with multi temporal NDVI in North Eastern China transect (NECT)*. Int. J. Appl. Earth Obs., 6, 17-31.

Wang X., Xie H., Guan H. and Xiaobing Z. 2007. *Different responses of MODIS-derived NDVI to root-zone soil moisture in semi-arid and humid regions*. Journal of Hydrology, 340, 12– 24.

Wijitkosum S. 2016. *The impact of land use and spatial changes on desertification risk in degraded areas in Thailand*. Sustainable Environment Research 26(2). DOI: 10.1016/j.serj.2015.11.004

Xie S., Cheng Q., Xing X., Bao Z. and Chen Z. 2010. *Geochemical multifractal distribution patterns in sediments from ordered streams*. Geoderma, 160, 36-46.

Yang L., Wylie B.K., Tieszen L.L. and Reed B.C. 1998. *An analysis of relationships among climate forcing and time-integrated NDVI of grasslands over the US northern and central Great Plains*. Remote Sens Environ., 65, 25-37.

Zheng G. and Moskal L. M. 2009. *Retrieving Leaf Area Index (LAI) Using Remote Sensing: Theories, Methods and Sensors*. Sensors (Basel), 9(4): 2719-2745. DOI: 10.3390/s90402719.

7 ANEXO

Este anexo contiene las tablas con los resultados de los cálculos del análisis multifractal y del análisis multifractal conjunto de la sección 4.3. Las cuatro primeras tablas, esto es 7-1, 7-2, 7-3 y 7-4, corresponden a los espectros multifractales de la sección 4.3.2.1, representados en la figura 4.18.

Las dos últimas tablas, 7-5 y 7-6, corresponden a los espectros multifractales conjuntos de la sección 4.3.2.2, representados en las figuras 4.19 y 4.20.

Tabla 7-1 Resultados de aplicar la metodología de Chhabra-Jensen, para el cálculo directo del espectro multifractal, a la imagen del NDVI de la figura 4.17 (a) obtenida de la imagen MODIS del 14/03/2006.

NDVI (14/03/2006)				
q	α	f(α)	error_f(α)	error_ α
-10	2.0979	1.6498	0.0899	0.0148
-9	2.0932	1.6941	0.073	0.0148
-8	2.088	1.7382	0.0577	0.0148
-7	2.0822	1.7818	0.0418	0.0000
-6	2.0756	1.8247	0.0289	0.0000
-5	2.0655	1.8664	0.0187	0.0146
-4.5	2.0637	1.8866	0.0133	0.0000
-4	2.0591	1.9061	0.0135	0.0000
-3.5	2.0542	1.9247	0.0000	0.0000
-3	2.0488	1.9421	0.0000	0.0000
-2.5	2.0493	1.9457	0.0000	0.0000
-2	2.0397	1.9673	0.0000	0.0000
-1.5	2.0312	1.9822	0.0000	0.0000
-1	2.0309	1.9874	0.0000	0.0000
-0.5	2.0234	1.9960	0.0000	0.0000
0	2.0089	2.0000	0.0000	0.0000
0.5	1.9997	1.9978	0.0000	0.0000
1	1.9922	1.9922	0.0000	0.0000
1.5	1.9854	1.9837	0.0000	0.0000
2	1.9791	1.9726	0.0000	0.0000
2.5	1.9732	1.9595	0.0000	0.0000
3	1.9678	1.9448	0.0000	0.0000
3.5	1.963	1.9291	0.0000	0.0000
4	1.9587	1.9129	0.0086	0.0000
4.5	1.9549	1.8969	0.0085	0.0000
5	1.9516	1.8813	0.0119	0.0000
6	1.9464	1.8525	0.0144	0.0000
7	1.9425	1.8274	0.0183	0.0000
8	1.9396	1.8058	0.0229	0.0000
9	1.9374	1.7868	0.0265	0.0000
10	1.9355	1.7694	0.0296	0.0000

Tabla 7-2 Resultados de aplicar la metodología de Chhabra-Jensen, para el cálculo directo del espectro multifractal, a la imagen del NSMI de la figura 4.17 (c) obtenida de la imagen MODIS del 14/03/2006.

NSMI (14/03/2006)				
q	α	f(α)	error_f(α)	error_ α
-10	2.0932	1.6287	0.0558	0.0086
-9	2.0854	1.7026	0.0388	0.0000
-8	2.0785	1.7617	0.0259	0.0000
-7	2.0721	1.8097	0.0165	0.0000
-6	2.0658	1.8500	0.0107	0.0000
-5	2.0594	1.8857	0.0077	0.0000
-4.5	2.0585	1.8929	0.0077	0.0000
-4	2.0539	1.9124	0.0000	0.0000
-3.5	2.0491	1.9303	0.0000	0.0000
-3	2.0441	1.9466	0.0000	0.0000
-2.5	2.0387	1.9614	0.0000	0.0000
-2	2.033	1.9744	0.0000	0.0000
-1.5	2.0268	1.9851	0.0000	0.0000
-1	2.0203	1.9932	0.0000	0.0000
-0.5	2.0136	1.9983	0.0000	0.0000
0	2.0067	2.0000	0.0000	0.0000
0.5	1.9999	1.9983	0.0000	0.0000
1	1.9934	1.9934	0.0000	0.0000
1.5	1.9872	1.9856	0.0000	0.0000
2	1.9814	1.9756	0.0000	0.0000
2.5	1.9762	1.9640	0.0000	0.0000
3	1.9716	1.9513	0.0000	0.0000
3.5	1.9675	1.9380	0.0000	0.0000
4	1.9639	1.9246	0.0079	0.0000
4.5	1.9608	1.9112	0.0078	0.0000
5	1.9580	1.8979	0.0078	0.0000
6	1.9533	1.872	0.0108	0.0000
7	1.9493	1.8462	0.0131	0.0000
8	1.9458	1.8198	0.0166	0.0000
9	1.9425	1.7922	0.0179	0.0000
10	1.9394	1.7630	0.0204	0.0000

Tabla 7-3 Resultados de aplicar la metodología de Chhabra-Jensen, para el cálculo directo del espectro multifractal, a la imagen del NDVI de la figura 4.17 (b) obtenida de la imagen MODIS del 29/07/2006.

NDVI (29/07/2006)				
q	α	f(α)	error_f(α)	error_ α
-10	2.0781	1.7478	0.0474	0.0120
-9	2.0746	1.7809	0.0399	0.0120
-8	2.0708	1.8129	0.0331	0.0000
-7	2.0667	1.8438	0.0261	0.0000
-6	2.0621	1.8735	0.0187	0.0000
-5	2.057	1.9019	0.011	0.0000
-4.5	2.0541	1.9156	0.0111	0.0000
-4	2.0509	1.9289	0.0111	0.0000
-3.5	2.0475	1.9418	0.0000	0.0000
-3	2.0437	1.9541	0.0000	0.0000
-2.5	2.0395	1.9656	0.0000	0.0000
-2	2.0348	1.9762	0.0000	0.0000
-1.5	2.0295	1.9855	0.0000	0.0000
-1	2.0234	1.993	0.0000	0.0000
-0.5	2.0166	1.9981	0.0000	0.0000
0	2.0083	2.0000	0.0000	0.0000
0.5	2.0001	1.9979	0.0000	0.0000
1	1.9912	1.9912	0.0000	0.0000
1.5	1.9814	1.9789	0.0000	0.0000
2	1.9709	1.9606	0.0000	0.0000
2.5	1.9600	1.9360	0.0000	0.0000
3	1.9489	1.9054	0.0085	0.0000
3.5	1.9379	1.8697	0.0118	0.0000
4	1.9274	1.8303	0.0164	0.0086
4.5	1.9176	1.7886	0.0240	0.0086
5	1.9086	1.7463	0.0341	0.0085
6	1.8939	1.6655	0.0579	0.0147
7	1.8831	1.5954	0.0868	0.0188

Tabla 7-4 Resultados de aplicar la metodología de Chhabra-Jensen, para el cálculo directo del espectro multifractal, a la imagen del NSMI de la figura 4.17 (d) obtenida de la imagen MODIS del 29/07/2006.

NSMI (29/07/2006)				
q	α	f(α)	error_f(α)	error_ α
-10	2.0500	1.7706	0.0251	0.0000
-9	2.0447	1.8215	0.0163	0.0000
-8	2.0399	1.8620	0.0083	0.0000
-7	2.0355	1.8949	0.0085	0.0000
-6	2.0314	1.9218	0.0000	0.0000
-5	2.0273	1.9442	0.0000	0.0000
-4.5	2.0253	1.9539	0.0000	0.0000
-4	2.0232	1.9627	0.0000	0.0000
-3.5	2.0211	1.9707	0.0000	0.0000
-3	2.0189	1.9778	0.0000	0.0000
-2.5	2.0166	1.9841	0.0000	0.0000
-2	2.0142	1.9894	0.0000	0.0000
-1.5	2.0117	1.9938	0.0000	0.0000
-1	2.0091	1.9971	0.0000	0.0000
-0.5	2.0062	1.9992	0.0000	0.0000
0	2.0032	2.0000	0.0000	0.0000
0.5	2.0000	1.9992	0.0000	0.0000
1	1.9966	1.9966	0.0000	0.0000
1.5	1.9930	1.9921	0.0000	0.0000
2	1.9891	1.9853	0.0000	0.0000
2.5	1.9850	1.9761	0.0000	0.0000
3	1.9807	1.9643	0.0000	0.0000
3.5	1.9762	1.9495	0.0000	0.0000
4	1.9715	1.9318	0.0000	0.0000
4.5	1.9666	1.9110	0.0000	0.0000
5	1.9616	1.8871	0.0000	0.0000
6	1.9513	1.8306	0.0075	0.0000
7	1.9411	1.7643	0.0144	0.0000
8	1.9314	1.6914	0.0195	0.0000
9	1.9225	1.6158	0.0280	0.0000
10	1.9146	1.5411	0.0378	0.0078

Tabla 7-5 Resultados de aplicar la metodología de Chhabra-Jensen, para el cálculo directo del espectro multifractal conjunto del NDVI y del NSMI de la figura 4.17 (a y d) obtenidos de la imagen MODIS del 14/03/2006.

14/03/2006				
q	p	α_{NDVI}	α_{NSMI}	$f(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI})$
-3	-10	2.0794	2.0814	1.7087
	-9	2.0773	2.0798	1.7299
	-8	2.0752	2.0781	1.7505
	-7	2.0732	2.0762	1.7711
	-6	2.0711	2.0739	1.7921
	-5	2.0691	2.071	1.8141
	-4	2.0672	2.0671	1.8372
	-3	2.0654	2.0618	1.8612
	-2	2.0637	2.0544	1.8845
	-1	2.0622	2.0445	1.9037
	0	2.0608	2.0317	1.914
	1	2.0595	2.0162	1.9098
	2	2.0585	1.9991	1.8872
	3	2.0577	1.9819	1.8467
	4	2.0572	1.9663	1.7939
	5	2.057	1.9534	1.7364
	6	2.0573	1.9433	1.6807
	7	2.0577	1.9357	1.6298
	8	2.0583	1.9297	1.5836
	9	2.059	1.9249	1.5402
	10	2.0597	1.9206	1.4976
-2	-10	2.0754	2.0792	1.7402
	-9	2.0732	2.0776	1.7598
	-8	2.0709	2.0759	1.7791
	-7	2.0685	2.0739	1.7988
	-6	2.0659	2.0715	1.8194
	-5	2.0631	2.0685	1.8419
	-4	2.0598	2.0643	1.8667
	-3	2.056	2.0587	1.8939
	-2	2.0515	2.051	1.9221
	-1	2.046	2.0406	1.9483
	0	2.0397	2.0274	1.9673
	1	2.0328	2.0118	1.9732
	2	2.0259	1.9949	1.9617
	3	2.0197	1.9785	1.9331
	4	2.015	1.964	1.892
	5	2.0119	1.9522	1.8453
	6	2.0103	1.9431	1.7984
7	2.0098	1.9361	1.7539	
8	2.0101	1.9305	1.7118	

	9	2.0108	1.9259	1.671
	10	2.0118	1.9218	1.6301
-1	-10	2.0936	2.1032	1.5211
	-9	2.0832	2.0939	1.6197
	-8	2.0746	2.0856	1.6991
	-7	2.0675	2.0782	1.7621
	-6	2.0618	2.0712	1.8129
	-5	2.0572	2.0644	1.8551
	-4	2.0539	2.057	1.8915
	-3	2.0518	2.0485	1.9234
	-2	2.0515	2.0381	1.9495
	-1	2.0536	2.0256	1.966
	0	2.059	2.0111	1.9677
	1	2.0683	1.9958	1.9507
	2	2.0812	1.9811	1.9159
	3	2.097	1.9683	1.8685
	4	2.1144	1.9582	1.8157
	5	2.132	1.9504	1.7633
	6	2.1491	1.9445	1.7137
	7	2.1651	1.9398	1.6675
	8	2.1796	1.9359	1.6239
	9	2.1926	1.9325	1.5818
0	-11	2.0892	2.1019	1.5373
	-10	2.0795	2.0932	1.6288
	-9	2.0713	2.0854	1.7026
	-8	2.0643	2.0785	1.7617
	-7	2.0583	2.0721	1.8097
	-6	2.0527	2.0659	1.8501
	-5	2.0472	2.0594	1.8857
	-4	2.0414	2.0521	1.9185
	-3	2.0348	2.0434	1.9488
	-2	2.027	2.0329	1.9749
	-1	2.0183	2.0205	1.9933
	0	2.0089	2.0069	2
	1	1.9998	1.9932	1.991
	2	1.9919	1.9806	1.9745
3	1.9858	1.97	1.9482	
4	1.9817	1.9616	1.919	
5	1.9794	1.9551	1.8896	
6	1.9784	1.9499	1.8611	
7	1.9784	1.9456	1.8331	
8	1.9791	1.9418	1.8049	
9	1.9804	1.9384	1.7761	
10	1.9823	1.9353	1.7464	
11	1.9846	1.9323	1.7156	

1	-11	2.0761	2.0926	1.6329
	-10	2.0685	2.0853	1.7025
	-9	2.062	2.0787	1.759
	-8	2.0563	2.0725	1.8053
	-7	2.0509	2.0666	1.8446
	-6	2.0454	2.0604	1.8794
	-5	2.0395	2.0534	1.9116
	-4	2.0326	2.0452	1.9416
	-3	2.0243	2.0352	1.9681
	-2	2.0145	2.0234	1.9877
	-1	2.0035	2.0101	1.9966
	0	1.9922	1.9964	1.9922
	1	1.9818	1.9836	1.9755
	2	1.973	1.9728	1.9507
	3	1.9661	1.9642	1.9225
	4	1.9611	1.9576	1.8945
	5	1.9575	1.9524	1.8678
	6	1.9549	1.9483	1.8423
	7	1.9531	1.9447	1.8174
	8	1.9519	1.9415	1.7923
	9	1.951	1.9386	1.7668
10	1.9506	1.9359	1.7408	
2	-12	2.0727	2.0924	1.6305
	-11	2.0658	2.0854	1.6973
	-10	2.0598	2.079	1.7523
	-9	2.0544	2.0731	1.8026
	-8	2.0493	2.0673	1.837
	-7	2.044	2.0612	1.8718
	-6	2.0382	2.0545	1.9038
	-5	2.0314	2.0465	1.9338
	-4	2.0231	2.0369	1.9606
	-3	2.0133	2.0253	1.9811
	-2	2.002	2.0122	1.9914
	-1	1.9902	1.9985	1.9884
	0	1.9791	1.9855	1.9727
	1	1.9695	1.9744	1.9481
	2	1.9618	1.9655	1.9197
	3	1.9561	1.9588	1.8915
	4	1.9518	1.9536	1.865
	5	1.9486	1.9495	1.8401
	6	1.9461	1.946	1.8162
	7	1.9441	1.943	1.7923
	8	1.9425	1.9402	1.7682
9	1.9411	1.9376	1.7437	
10	1.94	1.9352	1.7188	

3	-13	2.0695	2.0925	1.6204
	-12	2.0632	2.0858	1.6859
	-11	2.0577	2.0796	1.7407
	-10	2.0527	2.0738	1.7869
	-9	2.0477	2.068	1.8266
	-8	2.0427	2.0621	1.8619
	-7	2.037	2.0555	1.8943
	-6	2.0304	2.0477	1.9246
	-5	2.0223	2.0384	1.9518
	-4	2.0125	2.0271	1.9732
	-3	2.0013	2.0141	1.9849
	-2	1.9894	2.0003	1.9835
	-1	1.9779	1.9871	1.9689
	0	1.9678	1.9757	1.9448
	1	1.9598	1.9665	1.9164
	2	1.9538	1.9596	1.888
	3	1.9493	1.9544	1.8615
	4	1.9458	1.9503	1.8369
	5	1.9431	1.9469	1.8135
	6	1.9409	1.9439	1.7903
	7	1.939	1.9412	1.767
8	1.9373	1.9387	1.7431	
9	1.9358	1.9363	1.7189	
10	1.9345	1.9341	1.6943	
4	-13	2.0608	2.0866	1.667
	-12	2.0557	2.0805	1.7233
	-11	2.0509	2.0747	1.7712
	-10	2.0463	2.069	1.8126
	-9	2.0413	2.063	1.8492
	-8	2.0359	2.0565	1.8826
	-7	2.0294	2.0489	1.9135
	-6	2.0215	2.0398	1.9413
	-5	2.0119	2.0287	1.9638
	-4	2.0008	2.0159	1.9769
	-3	1.9889	2.0021	1.9773
	-2	1.9772	1.9887	1.9642
	-1	1.9669	1.9769	1.941
	0	1.9587	1.9675	1.9129
	1	1.9525	1.9604	1.8846
2	1.9478	1.9551	1.8582	
3	1.9444	1.9509	1.834	
4	1.9416	1.9475	1.8111	
5	1.9393	1.9446	1.7886	
6	1.9373	1.9419	1.7659	
7	1.9355	1.9394	1.7426	

	8	1.9339	1.9371	1.7188
	9	1.9324	1.9349	1.6947
	10	1.9311	1.9329	1.6703
5	-13	2.0538	2.0818	1.6988
	-12	2.0493	2.0754	1.7499
	-11	2.0448	2.0701	1.7942
	-10	2.0401	2.0641	1.8331
	-9	2.0347	2.0576	1.8681
	-8	2.0284	2.0501	1.9001
	-7	2.0207	2.0411	1.9289
	-6	2.0114	2.0303	1.9525
	-5	2.0005	2.0177	1.9672
	-4	1.9886	2.0039	1.9696
	-3	1.9769	1.9904	1.9585
	-2	1.9664	1.9783	1.9366
	-1	1.958	1.9686	1.9093
	0	1.9516	1.9612	1.8813
	1	1.947	1.9557	1.8553
	2	1.9434	1.9516	1.8316
	3	1.9407	1.9482	1.8093
	4	1.9384	1.9452	1.7875
	5	1.9364	1.9426	1.7655
	6	1.9345	1.9401	1.7428
	7	1.9329	1.9378	1.7195
8	1.9314	1.9356	1.6957	
9	1.93	1.9336	1.6716	
10	1.9287	1.9317	1.6473	
6	-14	2.0519	2.0834	1.6662
	-13	2.0478	2.0774	1.7221
	-12	2.0435	2.0715	1.7705
	-11	2.0388	2.0654	1.8128
	-10	2.0336	2.0588	1.8504
	-9	2.0274	2.0514	1.8841
	-8	2.02	2.0425	1.9142
	-7	2.0109	2.0319	1.9391
	-6	2.0002	2.0195	1.9556
	-5	1.9885	2.0059	1.9602
	-4	1.9767	1.9922	1.9514
	-3	1.9662	1.9799	1.9314
	-2	1.9576	1.9698	1.9052
	-1	1.9511	1.9622	1.8779
	0	1.9464	1.9565	1.8525
1	1.9429	1.9522	1.8294	
2	1.9401	1.9488	1.808	
3	1.9379	1.9459	1.787	

	4	1.9359	1.9432	1.7657
	5	1.9341	1.9407	1.7437
	6	1.9324	1.9384	1.721
	7	1.9308	1.9362	1.6976
	8	1.9294	1.9342	1.6737
	9	1.9281	1.9323	1.6496
	10	1.9269	1.9305	1.6254
7	-14	2.0463	2.0794	1.6865
	-13	2.0422	2.0732	1.7407
	-12	2.0377	2.0669	1.7877
	-11	2.0325	2.0602	1.8287
	-10	2.0265	2.0527	1.8651
	-9	2.0192	2.044	1.897
	-8	2.0104	2.0336	1.9235
	-7	1.9999	2.0214	1.9419
	-6	1.9884	2.0079	1.9489
	-5	1.9767	1.9941	1.9426
	-4	1.9661	1.9816	1.9249
	-3	1.9574	1.9712	1.9004
	-2	1.9508	1.9633	1.8742
	-1	1.946	1.9574	1.8497
	0	1.9425	1.953	1.8274
	1	1.9398	1.9495	1.8069
	2	1.9376	1.9466	1.7868
	3	1.9356	1.9439	1.7664
	4	1.9338	1.9414	1.7452
	5	1.9322	1.9391	1.723
	6	1.9306	1.9369	1.7001
7	1.9292	1.9348	1.6765	
8	1.9278	1.9329	1.6526	
9	1.9266	1.9311	1.6286	
10	1.9254	1.9294	1.6045	
8	-14	2.041	2.0753	1.7035
	-13	2.0366	2.0687	1.7566
	-12	2.0315	2.0618	1.8025
	-11	2.0256	2.0543	1.8423
	-10	2.0185	2.0455	1.8768
	-9	2.0099	2.0353	1.9053
	-8	1.9997	2.0233	1.9258
	-7	1.9884	2.0099	1.9353
	-6	1.9768	1.9962	1.932
	-5	1.9662	1.9835	1.917
	-4	1.9574	1.9728	1.8945
-3	1.9506	1.9646	1.8699	
-2	1.9458	1.9585	1.8465	

	-1	1.9423	1.9539	1.8253
	0	1.9396	1.9504	1.8058
	1	1.9374	1.9473	1.7868
	2	1.9355	1.9446	1.7674
	3	1.9337	1.9421	1.747
	4	1.9321	1.9397	1.7255
	5	1.9305	1.9375	1.703
	6	1.9291	1.9354	1.6799
	7	1.9277	1.9334	1.6562
	8	1.9264	1.9316	1.6323
	9	1.9253	1.9299	1.6084
10	1.9242	1.9283	1.5845	
9	-14	2.0356	2.0709	1.7187
	-13	2.0306	2.0637	1.7708
	-12	2.0247	2.056	1.8153
	-11	2.0177	2.0472	1.8531
	-10	2.0094	2.037	1.8841
	-9	1.9995	2.0253	1.907
	-8	1.9884	2.0121	1.9193
	-7	1.977	1.9984	1.9191
	-6	1.9664	1.9856	1.9072
	-5	1.9575	1.9746	1.8874
	-4	1.9506	1.9661	1.8647
	-3	1.9457	1.9597	1.8428
	-2	1.9422	1.955	1.8229
	-1	1.9395	1.9513	1.8046
	0	1.9374	1.9482	1.7868
	1	1.9355	1.9454	1.7685
	2	1.9337	1.9429	1.749
	3	1.9321	1.9405	1.7282
	4	1.9306	1.9382	1.7064
	5	1.9291	1.936	1.6836
	6	1.9277	1.934	1.6603
7	1.9264	1.9322	1.6366	
8	1.9253	1.9304	1.6128	
9	1.9241	1.9288	1.5889	
10	1.9231	1.9273	1.5652	
10	-14	2.0297	2.066	1.7327
	-13	2.0239	2.0579	1.7832
	-12	2.0171	2.049	1.8255
	-11	2.0089	2.0389	1.8598
	-10	2.0003	2.0273	1.8854
	-9	1.9885	2.0143	1.9007
	-8	1.9772	2.0008	1.9038
	-7	1.9667	1.9878	1.8953

	-6	1.9577	1.9766	1.8785
	-5	1.9508	1.9677	1.8582
	-4	1.9457	1.9611	1.8382
	-3	1.9422	1.9562	1.8199
	-2	1.9395	1.9523	1.8031
	-1	1.9374	1.9491	1.7866
	0	1.9355	1.9463	1.7695
	1	1.9338	1.9437	1.751
	2	1.9322	1.9412	1.7311
	3	1.9307	1.9389	1.7099
	4	1.9292	1.9367	1.6876
	5	1.9278	1.9347	1.6646
	6	1.9265	1.9328	1.6412
	7	1.9253	1.931	1.6175
	8	1.9242	1.9293	1.5938
	9	1.9231	1.9278	1.5701
	10	1.9222	1.9263	1.5465

Tabla 7-6 Resultados de aplicar la metodología de Chhabra-Jensen, para el cálculo directo del espectro multifractal conjunto del NDVI y del NSMI de la figura 4.17 (b y d) obtenidos de la imagen MODIS del 29/07/2006.

29/07/2006				
q	p	α_{NDVI}	α_{NSMI}	$f(\alpha_{NDVI}, \alpha_{NSMI})$
-4	-10	2.143	2.063	1.3908
	-9	2.1351	2.0598	1.4526
	-8	2.1268	2.0565	1.5142
	-7	2.1182	2.053	1.5745
	-6	2.1095	2.0494	1.6325
	-5	2.1009	2.0458	1.6869
	-4	2.0926	2.0421	1.737
	-3	2.0845	2.0384	1.7822
	-2	2.0769	2.0346	1.8219
	-1	2.0697	2.0309	1.8562
	0	2.063	2.0272	1.8852
	1	2.0565	2.0234	1.909
	2	2.0503	2.0195	1.9281
	3	2.0441	2.0153	1.9427
	4	2.0376	2.0109	1.9529
	5	2.0307	2.006	1.9586
	6	2.0231	2.0007	1.9595
	7	2.0145	1.9947	1.9549
	8	2.0046	1.9879	1.9437
	9	1.9932	1.9803	1.9247
	10	1.991	1.9719	1.8964
-3	-10	2.0968	2.0564	1.6213
	-9	2.0913	2.053	1.6699
	-8	2.0858	2.0495	1.7157
	-7	2.0803	2.0461	1.7582
	-6	2.0749	2.0426	1.7969
	-5	2.0697	2.0391	1.8316
	-4	2.0646	2.0357	1.8622
	-3	2.0598	2.0323	1.8888
	-2	2.055	2.0288	1.9117
	-1	2.0503	2.0253	1.9311
	0	2.0455	2.0217	1.9472
	1	2.0405	2.0179	1.9603
	2	2.0351	2.0137	1.9704
	3	2.029	2.0091	1.9771
	4	2.0221	2.004	1.98
	5	2.014	1.9982	1.978
	6	2.0046	1.9917	1.9701
7	1.9937	1.9842	1.9546	
8	1.9811	1.9759	1.9298	

	9	1.9668	1.9667	1.894
	10	1.9511	1.9567	1.846
-2	-10	2.0743	2.0518	1.7242
	-9	2.0705	2.0484	1.7644
	-8	2.0666	2.045	1.8012
	-7	2.0628	2.0416	1.8345
	-6	2.059	2.0382	1.8642
	-5	2.0552	2.0348	1.8903
	-4	2.0514	2.0314	1.9131
	-3	2.0475	2.028	1.9329
	-2	2.0434	2.0245	1.9499
	-1	2.0389	2.0208	1.9643
	0	2.034	2.0168	1.9761
	1	2.0285	2.0124	1.985
	2	2.022	2.0074	1.9905
	3	2.0144	2.0019	1.9917
	4	2.0055	1.9955	1.9873
	5	1.995	1.9883	1.9756
	6	1.9828	1.9801	1.9549
	7	1.9691	1.9711	1.9234
	8	1.9538	1.9612	1.8797
	9	1.9374	1.9506	1.823
	10	1.9205	1.9398	1.754
-1	-10	2.0635	2.0484	1.7755
	-9	2.0602	2.0449	1.8118
	-8	2.0569	2.0415	1.8445
	-7	2.0535	2.038	1.8736
	-6	2.05	2.0346	1.8994
	-5	2.0464	2.0311	1.922
	-4	2.0426	2.0276	1.9417
	-3	2.0385	2.0239	1.9587
	-2	2.0339	2.02	1.9731
	-1	2.0286	2.0157	1.9848
	0	2.0225	2.0109	1.9932
	1	2.0153	2.0055	1.9977
	2	2.0068	1.9994	1.9969
	3	1.9968	1.9924	1.9893
	4	1.9852	1.9845	1.9731
	5	1.9719	1.9756	1.9463
	6	1.9572	1.9659	1.9075
	7	1.9412	1.9555	1.8558
	8	1.9246	1.9447	1.7915
	9	1.908	1.9338	1.7161
	10	1.8919	1.9233	1.6324
0	-10	2.0845	2.05	1.7706

	-9	2.0688	2.0447	1.8215
	-8	2.0579	2.0399	1.8621
	-7	2.05	2.0356	1.8949
	-6	2.0438	2.0314	1.9218
	-5	2.0385	2.0274	1.9442
	-4	2.0335	2.0232	1.9627
	-3	2.0283	2.0189	1.9778
	-2	2.0226	2.0142	1.9894
	-1	2.016	2.0091	1.9971
	0	2.0083	2.0032	2
	1	1.9992	1.9966	1.9966
	2	1.9887	1.9891	1.9853
	3	1.9765	1.9807	1.9641
	4	1.963	1.9714	1.9315
	5	1.9483	1.9614	1.8863
	6	1.9331	1.9509	1.8289
	7	1.9179	1.9404	1.7606
	8	1.9034	1.9302	1.6843
	9	1.8903	1.9207	1.6036
	10	1.8787	1.9121	1.522
1	-10	2.0483	2.0431	1.8305
	-9	2.0448	2.0391	1.8649
	-8	2.0411	2.0351	1.8951
	-7	2.0373	2.0311	1.9213
	-6	2.0331	2.027	1.9438
	-5	2.0284	2.0227	1.9628
	-4	2.0231	2.0181	1.9783
	-3	2.017	2.013	1.9898
	-2	2.0097	2.0073	1.9966
	-1	2.0012	2.0009	1.9976
	0	1.9912	1.9937	1.9912
	1	1.9797	1.9856	1.9756
	2	1.9668	1.9766	1.9491
	3	1.9528	1.9669	1.9107
	4	1.938	1.9567	1.8602
	5	1.9232	1.9463	1.7987
	6	1.9088	1.9362	1.7286
	7	1.8956	1.9265	1.6529
	8	1.8838	1.9178	1.5753
	9	1.8737	1.9099	1.4985
10	1.8653	1.903	1.425	
2	-12	2.049	2.0479	1.7791
	-11	2.0455	2.0437	1.82
	-10	2.0419	2.0395	1.8564
	-9	2.0381	2.0354	1.8884

	-8	2.0339	2.0311	1.9161
	-7	2.0294	2.0267	1.9399
	-6	2.0242	2.0221	1.9598
	-5	2.0183	2.0171	1.9755
	-4	2.0114	2.0115	1.9866
	-3	2.0033	2.0053	1.9921
	-2	1.9939	1.9984	1.9907
	-1	1.9831	1.9905	1.9807
	0	1.9709	1.9819	1.9606
	1	1.9576	1.9725	1.9291
	2	1.9434	1.9625	1.8857
	3	1.9289	1.9523	1.8313
	4	1.9148	1.9422	1.7677
	5	1.9015	1.9325	1.6976
	6	1.8895	1.9235	1.6244
	7	1.8791	1.9155	1.551
3	8	1.8703	1.9083	1.4797
	-12	2.0432	2.0443	1.8075
	-11	2.0393	2.0399	1.8458
	-10	2.0351	2.0355	1.8795
	-9	2.0306	2.031	1.9087
	-8	2.0255	2.0263	1.9335
	-7	2.0198	2.0213	1.9539
	-6	2.0132	2.0158	1.9696
	-5	2.0056	2.0098	1.9799
	-4	1.9968	2.0031	1.9837
	-3	1.9867	1.9956	1.9795
	-2	1.9752	1.9872	1.9658
	-1	1.9625	1.9781	1.9413
	0	1.9489	1.9684	1.9054
	1	1.9349	1.9584	1.8583
	2	1.921	1.9483	1.8016
4	3	1.9078	1.9386	1.7377
	4	1.8956	1.9295	1.6695
	5	1.8849	1.9212	1.5999
	6	1.8757	1.9137	1.5314
	-12	2.0366	2.0402	1.8333
	-11	2.0321	2.0356	1.8685
	-10	2.0271	2.0308	1.8989
	-9	2.0215	2.0257	1.9246
	-8	2.0152	2.0203	1.9454
	-7	2.008	2.0144	1.9608
	-6	1.9997	2.0079	1.9699
	-5	1.9902	2.0006	1.9716
-4	1.9794	1.9926	1.9645	

	-3	1.9674	1.9838	1.9473
	-2	1.9545	1.9744	1.919
	-1	1.941	1.9646	1.8796
	0	1.9274	1.9546	1.8303
	1	1.9142	1.9449	1.7729
	2	1.902	1.9356	1.7102
	3	1.891	1.9271	1.645
	4	1.8815	1.9194	1.5797
	5	1.8733	1.9125	1.5162
5	-13	2.0338	2.0404	1.8188
	-12	2.0289	2.0354	1.8554
	-11	2.0234	2.0303	1.8869
	-10	2.0174	2.0249	1.9133
	-9	2.0105	2.0191	1.9341
	-8	2.0027	2.0128	1.949
	-7	1.9938	2.0058	1.9568
	-6	1.9837	1.9981	1.9564
	-5	1.9724	1.9896	1.9465
	-4	1.9601	1.9805	1.9261
	-3	1.9471	1.9709	1.8948
	-2	1.9339	1.961	1.8532
	-1	1.9209	1.9513	1.8029
	0	1.9087	1.9419	1.7359
	1	1.8975	1.9332	1.686
	2	1.8875	1.9252	1.6245
	3	1.879	1.918	1.5638
	4	1.8717	1.9116	1.5051
	5	1.8656	1.906	1.4492
6	1.8605	1.901	1.3964	
6	-14	2.0309	2.0404	1.8026
	-13	2.0256	2.0352	1.8404
	-12	2.0197	2.0298	1.8728
	-11	2.0131	2.024	1.8996
	-10	2.0058	2.0178	1.9204
	-9	1.9974	2.011	1.9345
	-8	1.9879	2.0036	1.941
	-7	1.9773	1.9954	1.9386
	-6	1.9657	1.9866	1.9262
	-5	1.9533	1.9772	1.9033
	-4	1.9405	1.9676	1.8699
	-3	1.9277	1.9579	1.8273
	-2	1.9155	1.9484	1.7774
	-1	1.9041	1.9395	1.7226
0	1.8939	1.9312	1.6655	
1	1.8849	1.9237	1.608	

	2	1.8772	1.917	1.5518
	3	1.8707	1.9111	1.4978
	4	1.8652	1.9058	1.4461
	5	1.8605	1.9011	1.3971
	6	1.8565	1.8969	1.3503
7	-14	2.0222	2.0348	1.8235
	-13	2.0159	2.0291	1.8566
	-12	2.0089	2.023	1.8837
	-11	2.001	2.0164	1.9043
	-10	1.9921	2.0092	1.9178
	-9	1.9822	2.0014	1.9229
	-8	1.9713	1.9928	1.9188
	-7	1.9595	1.9837	1.9044
	-6	1.9472	1.9743	1.8798
	-5	1.9347	1.9646	1.8454
	-4	1.9225	1.9551	1.8028
	-3	1.911	1.946	1.7543
	-2	1.9005	1.9375	1.7022
	-1	1.8912	1.9297	1.6487
	0	1.8831	1.9227	1.5954
	1	1.8761	1.9164	1.5435
	2	1.8702	1.9108	1.4936
	3	1.8651	1.9058	1.4457
	4	1.8608	1.9013	1.3998
	5	1.8567	1.8973	1.3559
8	-14	2.012	2.0283	1.8383
	-13	2.0046	2.0219	1.8657
	-12	1.9963	2.0149	1.8862
	-11	1.987	2.0073	1.899
	-10	1.9768	1.9991	1.9031
	-9	1.9656	1.9903	1.8976
	-8	1.9538	1.981	1.882
	-7	1.9417	1.9715	1.8564
	-6	1.9296	1.962	1.822
	-5	1.9181	1.9528	1.7805
	-4	1.9074	1.944	1.7342
	-3	1.8977	1.9359	1.6852
	-2	1.8892	1.9286	1.6355
	-1	1.8818	1.922	1.5862
	0	1.8754	1.916	1.5383
	1	1.87	1.9107	1.492
	2	1.8653	1.9059	1.4474
3	1.8612	1.9016	1.4043	
4	1.8577	1.8977	1.3626	
9	-14	2.0003	2.0207	1.8457

	-13	1.9917	2.0134	1.8662
	-12	1.9821	2.0055	1.8786
	-11	1.9716	1.997	1.882
	-10	1.9604	1.988	1.8757
	-9	1.9487	1.9786	1.8595
	-8	1.9369	1.9691	1.8339
	-7	1.9254	1.9597	1.8003
	-6	1.9145	1.9508	1.7606
	-5	1.9045	1.9424	1.717
	-4	1.8956	1.9347	1.6714
	-3	1.8878	1.9278	1.6254
	-2	1.881	1.9215	1.58
	-1	1.8751	1.9158	1.5356
	0	1.87	1.9107	1.4926
	1	1.8656	1.9062	1.4507
	2	1.8618	1.902	1.41
3	1.8584	1.8982	1.3703	
10	-14	1.9872	2.0119	1.8443
	-13	1.9774	2.0037	1.8567
	-12	1.9668	1.9949	1.86
	-11	1.9556	1.9858	1.8535
	-10	1.9442	1.9764	1.8374
	-9	1.9327	1.967	1.8126
	-8	1.9218	1.9579	1.7805
	-7	1.9116	1.9492	1.7431
	-6	1.9023	1.9412	1.7025
	-5	1.894	1.9338	1.6604
	-4	1.8868	1.9272	1.6181
	-3	1.8805	1.9212	1.5761
	-2	1.875	1.9158	1.535
	-1	1.8703	1.9109	1.4947
	0	1.8661	1.9065	1.4553
	1	1.8624	1.9024	1.4166
2	1.8592	1.8987	1.3786	