Universidad Politécnica
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos**

Grado en matemáticas e informática

Trabajo Fin de Grado

Números Surreales y Juegos

Autor: Carlota Fernández Feres
Tutor(a): Águeda Mata Hernández

Madrid, Junio 2022

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

Trabajo Fin de Grado
Grado en matemáticas e informática

Título: Números Surreales y Juegos

Junio 2022

Autor: Carlota Fernández Feres
Tutor: Águeda Mata Hernández
Matemática Aplicada a las TIC
ETSI Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

El presente Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo definir y demostrar las propiedades de los números surreales, como se verá en el capítulo 2, así como las operaciones entre ellos, recogidas en el capítulo 3. Entender y plasmar estos conocimientos es imprescindible para lograr aplicar estos números a la resolución de ciertos juegos, lo cual se estudiará en el capítulo 4.

El trabajo comienza con una introducción en la que se contextualiza el origen de los números surreales, que se remonta a 1937 con el matemático John Horton Conway. Tras analizar las características de los juegos de dos jugadores, Conway llegó a la conclusión de que había juegos que se podían interpretar como la suma de muchos otros más simples y utilizó esta idea para analizar algunos juegos de estrategia. Conway creía firmemente en su idea, una nueva forma de describir todos estos números desde la nada, comenzando desde el 0. A partir de este, se podían construir otros números, siendo estos el 1 y el -1. De la combinación de los anteriores resultaban otros números nuevos y, así sucesivamente dando lugar al infinito.
Posteriormente, Jacob A. Lurie, un matemático estadounidense, basándose en las ideas de Conway, describió los números surreales como aquellos que se pueden utilizar para medir la ventaja que tiene un jugador sobre otro en cierto tipo de juegos, como por ejemplo, los juegos combinatorios.

El siguiente capítulo se centra principalmente en la definición detallada de los números surreales como un conjunto de números formado por dos coordenadas que, a su vez, son dos conjuntos de números preexistentes. Se demuestran las propiedades que cumplen estos números surreales y, las relaciones que se establecen entre ellos.
Una vez demostradas las propiedades básicas, se llega finalmente a la aparición de cuatros números nuevos a los que se denomina: -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ y 2.

Para poder definir las operaciones entre estos números surreales que van apareciendo gradualmente, es necesario introducir un conjunto de números aún más amplio, a los que se denomina pseudo-números. Tanto para la suma como para la multiplicación se demuestran las propiedades de asociatividad y conmutatividad, se demuestra también la propiedad distributiva, que relaciona ambas operaciones, así como el elemento neutro y el elemento opuesto de la suma.
A través de estas propiedades se llega a la conclusión de que el conjunto de los números surreales con la operación suma es un subgrupo del grupo de los pseudo-números y, como cumple la conmutatividad, es un grupo abeliano que

además es compatible con el orden definido (orden total). Y el conjunto de los números surreales con la suma y la operación producto es un subanillo del anillo de los pseudo-números y, como cumple la conmutatividad, es un anillo conmutativo.

A continuación, se introduce el concepto de juegos combinatorios. Estos juegos son aquellos en los que participan solamente dos jugadores I y D y cuyos movimientos válidos se expresan como P_i y P_d, dando lugar a la definición de juego como el conjunto de las diferentes opciones de desplazamientos de los jugadores, $G = \{P_i, P_d\}$. El final del juego llega cuando alguno de estos dos conjuntos es vacío, es decir, cuando el jugador al que le toca mover ya no dispone de ninguna opción de movimiento.
Además, también se refiere a la idea de juegos simultáneos entendidos estos como la suma de los dos juegos componentes, siendo estos más simples. Cada jugador, en su turno, elige uno de los dos juegos y hace en él una jugada válida, luego, le toca escoger al otro jugador y así sucesivamente.
Se profundiza en un juego en particular, el juego con Dominoes de Göran Andersson, en el que los jugadores sitúan fichas sobre un tablero dividido en cuadrados, cubriendo éstas dos cuadrados adyacentes. Mientras el jugador I sitúa las fichas verticalmente, el jugador D debe situarlas horizontalmente. En una partida de este juego, suelen quedar espacios vacíos en el tablero, de tal forma que éste queda divido en regiones, por lo que el juego se transforma en una suma de juegos más pequeños.

Considerando lo anterior, se ha logrado una implementación del juego descrito previamente a través de la cual podemos obtener un resultado más visual de lo estudiado a lo largo del proyecto. En este se muestran las diferentes situaciones que se pueden dar en función de los movimientos que los jugadores van realizando durante el juego y, dando lugar por tanto a distintas imágenes en las que el tablero aparece dividido en juegos más simples.

Abstract

This Final Degree Project aims to define and demonstrate the properties of surreal numbers, as will be seen in chapter 2, as well as the operations between them, in chapter 3. Understanding and capturing this knowledge is essential to be able to apply these numbers to the resolution of certain games, will be studied in Chapter 4.

The project begins with an introduction that contextualizes the origin of surreal numbers, which dates back to 1937 with the mathematician John Horton Conway. After analyzing the characteristics of two-player games, Conway came to the conclusion that there were games that could be interpreted as the sum of many simpler ones, and used this idea to analyze some strategy games. Conway was a strong believer in his idea of a new way to describe all these numbers from scratch, starting with 0. From this, other numbers could be built, these being 1 and -1. Other new numbers resulted from the combination of the previous ones, and so on, giving rise to infinity.
Later, Jacob A. Lurie, an American mathematician, based on Conway's ideas, described surreal numbers as those that can be used to measure the advantage that one player has over another one in certain types of games, such as combinatorial games.

The next chapter focuses mainly on the detailed definition of surreal numbers as a set of numbers made up of two coordinates which in turn are two pre-existing sets of numbers. The properties that these surreal numbers meet and the relationships that are established between them are demonstrated.
Once the basic properties have been demonstrated, we finally arrive at the appearance of four new numbers which are called: -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ and 2.

In order to define the operations between surreal numbers that appear gradually it is necessary to introduce an even larger set of numbers, which are called pseudo-numbers. For both addition and multiplication, the properties of associativity and commutativity are demonstrated, as well as the distributive property that relates both operations and both the neutral element and the opposite element of the sum.
Through these properties we reach the conclusion that the set of surreal numbers with the addition operation is a subgroup of the group of pseudo-numbers and, since it complies with commutativity, it is an abelian group that is also compatible with the defined order (total order). And, the set of surreal numbers with the addition and product operation is a subring of the ring of pseudo-numbers

and it is also a commutative ring, since it satisfies commutativity.

Next, the concept of combinatorial games is introduced. These games are those in which only two players I and D participate and whose valid moves are expressed as P_i and P_d, giving rise to the definition of the game as the set of different options for moving that the two players have, $G = \{P_i, P_d\}$. The end of the game comes when one of these two sets is empty, that is, when the player whose turn it is to move no longer has any movement options.
In addition, it also refers to the idea of simultaneous games understood as the sum of the two component games, these being simpler. Each player, in his turn, chooses one of the two games and makes a valid move in it, then it is the other player´s turn to choose and so on.
This project focuses into one game in particular, Dominoes of Göran Andersson, in which players place tiles on a board divided into squares, covering two adjacent squares. While player I places the tiles vertically, player D must place them horizontally. In this game, there are usually empty spaces on the board dividing it into regions in such a way that the game becomes a sum of smaller games.

Considering all the matters previously mentioned, an implementation of the game described above has been achieved, obtaining therefore a more visual result of what was studied throughout the project. This shows the different situations that can occur depending on the movements that the two players make during the game, giving rise to different images in which the board appears divided into simpler games.

Tabla de contenidos

Capítulo 1

Introducción

El origen de los números surreales se remonta muchas décadas atrás. Todo comenzó con el matemático John Horton Conway, nacido el 16 de diciembre de 1937, y su interés en un juego de origen oriental llamado Go. Tras analizar y estudiar a fondo las características de dos jugadores de Go de la universidad de Cambridge, Conway se dio cuenta de que cuando el desarrollo del juego estaba avanzado, se podía interpretar como la suma de muchos otros juegos más pequeños y simples. Utilizó esta idea para analizar muchos juegos de estrategia, llegando a la conclusión de que se comportaban en cierto modo como los números.

La relación entre números y juegos se explica a través de una variante del juego de Nim. La versión original de este juego consiste en dividir en tres pilas o filas una determinada cantidad de objetos iguales y cada jugador, en su turno, puede coger tantos objetos como desee de una misma pila, siendo el que retire el último objeto de una pila el ganador del juego. Sin embargo, Conway decidió variar un poco el juego de forma que cada objeto pertenezca a uno de los dos jugadores y con la condición de que un jugador solo pudiera retirar objetos de una pila si el objeto quitado es uno suyo.

Suponiendo que cada jugador tenga objetos de diferentes colores, se pueden colocar de distintas formas y cada disposición inicial de los objetos representa un juego y resulta que se puede asociar con un número en particular.

El vínculo entre juegos y números que define Conway le llevó a crear una familia de números construidos a partir de conjuntos matemáticos relacionados con secuencias de opciones binarias. Los patrones de decisiones de sí o no, como las pilas de los contadores de la variante de Conway, se corresponden con estos números.

Conway se dio cuenta de que esta nueva forma de generar números abarcaba todos los números reales, racionales e irracionales pero que también iba más allá, dando lugar a representar números "más grandes" que infinito y "más pequeños" que la fracción más pequeña. De hecho, Conway soñaba con que podrían aplicarse para explicarlo todo.

En 1972, Conway decidió contarle su reciente descubrimiento a Donald E. Knuth, un experto en ciencias de la computación y matemático que quedó fascinado con esta idea. Knuth se dispuso a plasmar todos estos conocimientos en una novela para estudiantes a la que llamó *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness* [1]. Decía que existen infinitos números surreales entre dos números reales. Por ello, de un periódico francés que hablaba de 'nombres sur ordinaux' sacó la preposición "sur" ("por encima") para añadírsela a real".

La idea principal de Conway es que hay una nueva forma de describir todos los números, construyéndolos desde la nada, y concretamente la nada sería como la representación del 0. A partir del 0, se puede construir otro número, resultando ser el 1. Y se puede utilizar el 0 y el 1 para crear otro número, que resulta ser el 2 y, el 1 y el 2 dando lugar al $1/2$. Y así consecutivamente creando algo parecido a un universo de números, dando lugar al infinito y llegando a tener todos los números enteros y fracciones diádicas. Los matemáticos los describen como una familia de ω números. Y posteriormente, aparecen todos los números reales que son una familia de números incluso más grande.

Continuando creando números a partir de los que ya tenemos llegamos a mitad de infinito, la raíz de infinito o incluso infinito elevado a infinito y todos estos números pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. También se pueden manipular los infinitesimales de igual forma. Por lo que va mucho más allá de cualquier número jamás concebido por nadie. La aplicación práctica de estos números no está muy desarrollada ya que, hasta el momento, ha habido muy poca investigación sobre ellos. Jacob A. Lurie [2], un matemático estadounidense, inspirado en el libro *On Numbers and Games* [3], describió los números surreales, basándose en ejemplos de la teoría de juegos combinatorios, como aquellos que se pueden utilizar para medir la ventaja que tiene un jugador sobre otro en cierto tipo de juegos.

Lurie explica uno de sus juegos de la siguiente forma: se juega con un determinado número de botellas, unas de Cocacola y otras de Pepsi, y cada jugador en su turno bebe únicamente de un tipo de botella, siendo el perdedor quien se quede antes sin botellas. Por ello, si hay más botellas de Cocacola que de Pepsi, ganará el primero, mientras que si hay más de Pepsi que de Cocacola, ganará el segundo. Por último, si hay el mismo número de botellas de cada tipo, perderá el que antes se las acabe. Lurie mide la ventaja de un jugador sobre el otro como la diferencia entre el número de botellas de cada tipo.

Con este ejemplo, Lurie ilustra cómo es posible medir la ventaja entre jugadores asignando un número a un juego en concreto y, generalizando esto a un gran número de juegos y situaciones se introducen los números surreales.

1.1. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es realizar un estudio introductorio de los números surreales y aplicarlos a la resolución de ciertos tipos de juegos.

Para lograr este objetivo general, se deben extraer algunos más concretos con los que comenzar la contextualización y, que definitivamente reflejan de forma más concisa el desarrollo del proyecto.

- Búsqueda de documentación sobre números surreales.
  La recopilación de información es el primer paso que se ha de llevar a cabo para conseguir un desarrollo total del proyecto.

- Definiciones y propiedades de los números surreales.
  Para el completo entendimiento del progreso del trabajo es fundamental comprender el origen de los números surreales además de las propiedades que cumplen y las relaciones que se establecen entre ellos.

- Operaciones con números surreales.
  Para el desarrollo de esta sección se introduce un grupo más amplio de números, los pseudo-números, de los que también se estudiarán sus propiedades y relaciones con el fin de lograr definir las operaciones entre números surreales.

- Aplicación de los números surreales a la resolución de ciertos juegos.
  Entender estos conocimientos es esencial para alcanzar la aplicación de estos números a ciertos juegos. Para ello, se introduce el concepto de juego $G = \{P_i, P_d\}$ como un conjunto de números reales formados por dos coordenadas, al igual que los números surreales, siendo estas las diferentes opciones de movimientos del jugador I y D respectivamente.

- Implementación del juego de Dominoes de Göran Andersson.
  Finalmente se ha implementado este juego en particular para poder poner en práctica todo lo estudiado a lo largo del proyecto.

Capítulo 2

Los números surreales

Definición 2.1 *Sea $x = \{X_i, X_d\}$ un conjunto de números formado por dos coordenadas que, a su vez son dos conjuntos de números preexistentes. El conjunto x se dice que es un números surreal si $\forall x_i \in X_i$ y $\forall x_d \in X_d$ se cumple que $x_i \ngeq x_d$.*

Definición 2.2 *Sean $x = \{X_i, X_d\}$ e $y = \{Y_i, Y_d\}$ dos números surreales, se dice que $x \leq y \iff \forall x_i \in X_i$ tenemos que $x_i \ngeq y$ y $\forall y_d \in Y_d$ tenemos que $x \ngeq y_d$.*

Observación 2.1 *Según la definición de número surreal, a partir del conjunto $\emptyset$, el primer número que se puede crear es $\{\emptyset, \emptyset\}$, al que denominamos "0". Decimos entonces que, el cero se crea el día cero. Los siguientes números se crean a partir del 0 y, son el $1 = \{0, \emptyset\}$ y el $-1 = \{\emptyset, 0\}$, ambos creados en el día uno.*

Definición 2.3 *Si x es un número surreal, el día en el que se crea x se nota por $d(x)$, siendo:*

- $d(0) = 0$
- $d(1) = 1$ y $d(-1) = 1$

Proposición 2.1 *Para los primeros números creados podemos establecer las siguientes propiedades:* $0 \leq 0$, $-1 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$, $-1 \leq -1$, $-1 \leq 1$:

DEMOSTRACIÓN:

- $0 = \{\emptyset, \emptyset\} \leq \{\emptyset, \emptyset\} = 0$:
  $\forall x_i \in \emptyset$ se verifica que $x_i \ngeq 0$ y $\forall y_d \in \emptyset$ se verifica que $0 \ngeq y_d$.
  Que son ambas verdaderas ya que no existe ningún elemento en $x_i \in \emptyset$ ni $y_d \in \emptyset$.

  Así tenemos que $0 \leq 0$.

- $-1 = \{\emptyset, 0\} \leq \{\emptyset, \emptyset\} = 0$:
  $\forall x_i \in \emptyset$ se verifica que $x_i \ngeq 0$ y $\forall y_d \in \emptyset$ se verifica que $-1 \ngeq y_d$.
  Que son ambas verdaderas ya que no existe ningún elemento en $x_i \in \emptyset$ ni $y_d \in \emptyset$.

  Así tenemos que $-1 \leq 0$.

- $0 = \{\emptyset, \emptyset\} \leq \{0, \emptyset\} = 1$:
  $\forall x_i \in \emptyset$ se verifica que $x_i \not\geq 1$ y $\forall y_d \in \emptyset$ se verifica que $0 \not\geq y_d$.
  Que son ambas verdaderas ya que no existe ningún elemento en $x_i \in \emptyset$ ni $y_d \in \emptyset$.

  $$\text{Así tenemos que } 0 \leq 1.$$

- $1 = \{0, \emptyset\} \leq \{0, \emptyset\} = 1$:
  $\forall y_d \in \emptyset$ se verifica que $1 \not\geq y_d$ ya que no existe ningún elemento $y_d \in \emptyset$ y $\forall x_i \in \{0\}$ se verifica que $x_i \not\geq 1$ ya que si fuera $x_i \geq 1$, por ser $x_i = 0 \Longrightarrow$ $1 = \{0, \emptyset\} \leq \{\emptyset, \emptyset\} = 0 \Longrightarrow 0 \not\geq 0$ que contradice la primera de las propiedades.

  $$\text{Así tenemos que } 1 \leq 1.$$

- $-1 = \{\emptyset, 0\} \leq \{\emptyset, 0\} = -1$:
  $\forall x_i \in \emptyset$ se verifica que $x_i \not\geq -1$ ya que no existe ningún elemento $x_i \in \emptyset$ y $\forall y_d \in \{0\}$ se verifica que $-1 \not\geq y_d$ ya que si fuera $-1 \geq y_d$, por ser $y_d = 0 \Longrightarrow$ $0 = \{\emptyset, \emptyset\} \leq \{\emptyset, 0\} = -1 \Longrightarrow 0 \not\geq 0$ que contradice la primera de las propiedades.

  $$\text{Así tenemos que } -1 \leq -1.$$

- $-1 = \{\emptyset, 0\} \leq \{0, \emptyset\} = 1$:
  $\forall x_i \in \emptyset$ se verifica que $x_i \not\geq 1$ ya que no existe ningún elemento $x_i \in \emptyset$ y $\forall y_d \in \emptyset$ se verifica que $-1 \not\geq y_d$ ya que no existe ningún elemento $y_d \in \emptyset$.

  $$\text{Así tenemos que } -1 \leq 1.$$

Proposición 2.2 *Sean* $x = \{\emptyset, X_d\}$ *e* $y = \{Y_i, \emptyset\}$ *dos números surreales* $\Longrightarrow x \leq y$.

DEMOSTRACIÓN:
$x \leq y$ implica las siguientes:

$$\forall x_i \in \emptyset : x_i \not\geq y \text{ y } \forall y_d \in \emptyset : x \not\geq y_d.$$

Ambas son ciertas ya que nigún elemento de $\emptyset$ contradice las desigualdades.

Teorema 2.1 (Transitividad) *Sean* $x = \{X_i, X_d\}$, $y = \{Y_i, Y_d\}$ *y* $z = \{Z_i, Z_d\}$ *tres números surreales, si* $x \leq y$ *e* $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.

DEMOSTRACIÓN:
Por inducción sobre $n = d(x) + d(y) + d(z)$.
$\forall x, y, z$ tal que $d(x) + d(y) + d(z) < 2$ se verifica que si $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.
Para ello, hay varias opciones:

1. $d(x) + d(y) + d(z) = 0$
   siendo $d(x) = 0 \ \wedge \ d(y) = 0 \ \wedge \ d(z) = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0 \Longrightarrow x \leq z$.

2. $d(x) + d(y) + d(z) = 1$
   siendo $d(x) = 1 \ \vee \ d(y) = 1 \ \vee \ d(z) = 1$.

   - $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
     $x \leq y \Longrightarrow 1 = \{0, \emptyset\} \leq \{\emptyset, \emptyset\} = 0 \Longrightarrow 0 \not\geq 0$. Y llegamos a que en este caso no se dan nuestras hipótesis de que sea $x \leq y$ e $y \leq z$.

- $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$
  Se verifica que $x \leq y$ pero no puede ser $y \leq z$ ya que llegamos a contradicción como ha pasado antes: $1 = \{0, \emptyset\} \leq \{\emptyset, \emptyset\} = 0 \Longrightarrow 0 \ngeq 0$.
  Por tanto, tampoco en este caso se dan nuestras hipótesis $x \leq y$ e $y \leq z$.

- $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$
  En este caso sí se dan nuestras hipótesis de que $x \leq y$ y $y \leq z$ y vemos que, según se demostró en la Proposición 2.1, también se verifica la tesis de que $x \leq z$.

- $x = -1$, $y = 0$, $z = 0$
  En este caso también se dan las hipótesis de que $x \leq y$ y $y \leq z$ y vemos que, según se demostró en la Proposición 2.1, también se verifica la tesis de que $x \leq z$.

- $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$
  No puede ser $x \leq y$ por lo visto anteriormente, por tanto, no se dan las hipótesis.

- $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$
  No puede ser $y \leq z$ por lo visto anteriormente, por tanto, no se dan las hipótesis.

Supongamos que $\forall x, y, z$ tales que $d(x) + d(y) + d(z) < n$ se verifica que:

$$\text{si } x \leq y \text{ e } y \leq z \Longrightarrow x \leq z.$$

Sean x, y, z tales que $d(x) + d(y) + d(z) = n$ y $x \leq y$ e $y \leq z$.
Supongamos que la hipótesis buscada es falsa, es decir que:

$$x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \wedge \ x \nleq z.$$

Tenemos que esto es cierto solamente si las siguientes son verdaderas:

- $x \leq y \Longrightarrow \forall x_i \in X_i : x_i \ngeq y \ \wedge \ \forall y_d \in Y_d : x \ngeq y_d$.
- $y \leq z \Longrightarrow \forall y_i \in Y_i : y_i \ngeq z \ \wedge \ \forall z_d \in Z_d : y \ngeq z_d$.
- $x \nleq z \Longrightarrow \exists x_i \in X_i : x_i \geq z \ \vee \ \exists z_d \in Z_d : x \geq z_d$.

De la última condición surgen dos posibilidades:

- Si $\exists x_i \in X_i$ con $z \leq x_i$ entonces se tiene que: $y \leq z$ y $z \leq x_i$ pero $y \nleq x_i$.
  Siendo $d(x_i)+d(y)+d(z) < d(x)+d(y)+d(z) = n$. Contradicción de la hipóstesis de inducción.

o bien

- Si $\exists z_d \in Z_d$ con $z_d \leq x$ entonces se tiene que: $z_d \leq x$ y $x \leq y$ pero $z_d \nleq y$.
  Luego $d(x)+d(y)+d(z_d) < d(x)+d(y)+d(z) = n$. Contradicción de la hipóstesis de inducción.

Por tanto tenemos demostrado que $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.

Teorema 2.2 (Reflexividad) *Si x es un número surreal, entonces* $x \leq x$

DEMOSTRACIÓN:
Por inducción sobre $d(x)$, si $d(x) \in \{0, 1\}$ el resultado es cierto por lo antes visto y demostrado en la Proposición 2.1.
Supongamos que $\forall x$ número surreal tal que $d(x) < n$ el resultado es cierto y, sea x tal que $d(x) = n$.
Suponiendo que $x \nleq x$ entonces:

- $\exists x_i \in X_i$ tal que $x_i \geq x$

  o bien

- $\exists x_d \in X_d$ tal que $x \geq x_d$

Entonces:
Si se da el primer caso en el que $\exists x_i \in X_i$ tal que $x_i \geq x$, se tiene que: $x \leq x_i \Longrightarrow \forall x_i' \in X_i$ tenemos que $x_i' \ngeq x_i$ y, en particular que $x_i \ngeq x_i$ siendo $d(x_i) < n$. Luego llegamos a una contradicción en la hipótesis de inducción.

o bien

Si se da el segundo caso en el que $\exists x_d \in X_d$ tal que $x \geq x_d$, se tiene que: $x_d \leq x \Longrightarrow \forall x_d' \in X_d$ tenemos que $x_d \ngeq x_d'$ y, en particular que $x_d \ngeq x_d$ siendo $d(x_d) < n$. Luego llegamos a una contradicción en la hipótesis de inducción.

Por ello, tenemos demostrado que $x \leq x$.

Teorema 2.3 *Sea* $x = \{X_i, X_d\}$ *un número surreal,* $\forall x_i \in X_i$ *y* $\forall x_d \in X_d$ *se cumple que:*

a) $x_i \ngeq x$ y $x \ngeq x_d$.

b) $x_i \leq x$ y $x \leq x_d$.

DEMOSTRACIÓN:

a) Veamos que $\forall x_i \in X_i$ y $\forall x_d \in X_d$, se verifica que $x_i \ngeq x$ y que $x \ngeq x_d$ por contradicción.
   Por ello, suponiendo que la primera hipótesis es falsa tenemos que:

   $$\exists x_i \in X_i \text{ tal que } x \leq x_i \text{ o bien que } \exists x_d \in X_d \text{ tal que } x_d \leq x$$

   Suponiendo la primera hipótesis se tiene que, $x \leq x_i \Longrightarrow \forall x_i' \in X_i$ sería $x_i' \ngeq x_i$ y, en particular que $x_i \ngeq x_i$ que contradice el Teorema 2.2.
   Suponiendo la segunda hipótesis se tiene que, $x_d \leq x \Longrightarrow \forall x_d' \in X_d$ sería $x_d \ngeq x_d'$ y, en particular que $x_d \ngeq x_d$ que contradice el Teorema 2.2.
   Por tanto se deduce que $\forall x_i \in X_i$ y $\forall x_d \in X_d$ es $x_i \ngeq x$ y $x \ngeq x_d$.

b) Veamos que $\forall x_i \in X_i$ y $\forall x_d \in X_d$, se cumple que $x_i \leq x$ y que $x \leq x_d$ por inducción sobre $d(x)$:
   Si $d(x) = 1$ el resultado es cierto según se ha visto en la Proposición 2.1.
   Supongamos que el resultado es cierto $\forall x$ número surreal con $d(x) < n$ y sea x con $d(x) = n$. Entonces:

- Si $x_i \nleq x$, se verifica que:

$$\exists x_{ii} \in X_{ii} \text{ tal que } x_{ii} \geq x$$
$$\text{o bien}$$
$$\exists x_d \in X_d \text{ tal que } x_i \geq x_d$$

Pero la segunda opción contradice la definición de número surreal, por tanto debería darse la primera opción. Es decir que:
$\exists x_{ii}$ tal que $x \leq x_{ii}$ y, por tanto, $\forall x_i \in X_i$ es $x_i \ngeq x_{ii}$. Y esto contradice la hipótesis de inducción ya que $d(x_i) < d(x) = n$.

- Si $x \nleq x_d$, se verifica que:

$$\exists x_i \in X_i \text{ tal que } x_i \geq x_d$$
$$\text{o bien}$$
$$\exists x_{dd} \in X_{dd} \text{ tal que } x \geq x_{dd}$$

Pero la primera opción contradice la definición de número surreal, por tanto debería darse la segunda opción. Es decir que:
$\exists x_{dd}$ tal que $x_{dd} \leq x$ y, por tanto, $\forall x_d \in X_d$ es $x_{dd} \ngeq x_d$. Y esto contradice la hipótesis de inducción ya que $d(x_d) < d(x) = n$.

Se deduce por tanto que $\forall x_i \in X_i, \forall x_d \in X_d$, se tiene que $x_i \leq x$ y $x \leq x_d$.

Teorema 2.4 (Orden total) *Si $x \nleq y$ entonces $y \leq x$*

DEMOSTRACIÓN:
Si $x \nleq y$ implica que alguna de las siguientes hipótesis es verdadera:

$$\exists x_i \in X_i : y \leq x_i$$
$$\exists y_d \in Y_d : y_d \leq x$$

Suponiendo que la primera sea cierta, tomando del teorema anterior en el que se demuestra que $x_i \leq x$ y aplicando el teorema de transitividad tenemos que $y \leq x$.
Suponiendo que la segunda sea cierta, tomando del teorema anterior en el que se demuestra que $y \leq y_d$ y aplicando el teorema de transitividad tenemos que $y \leq x$.
Luego si $x \nleq y$ se cumple que $y \leq x$.

Definición 2.4 *Se define la relación $x \equiv y \iff x \leq y \wedge y \leq x$ que es de equivalencia:*

- *Es reflexiva ya que por el Teorema 2.2 de reflexividad se tiene que:* $x \leq x \Longrightarrow x \equiv x$.
- *Es simétrica ya que* $x \equiv y \Longrightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow y \leq x \wedge x \leq y \Longrightarrow y \equiv x$.
- *Es transitiva ya que* $x \equiv y \wedge y \equiv z \Longrightarrow x \leq y \wedge y \leq x \wedge y \leq z \wedge z \leq y$, *por el Teorema 2.1 de transitivdad* $\Longrightarrow x \leq z \wedge z \leq x \Longrightarrow x \equiv z$.

Definición 2.5 *Sean dos numeros surreales x e y, escribiremos que $x < y \iff x \leq y$ y $x \ngeq y$.*

Proposición 2.3 *Sean tres números surreales, x, y y z se cumple que:*

1. $x < y,\, y \leq z \Longrightarrow x < z$
2. $x \leq y,\, y < z \Longrightarrow x < z$

DEMOSTRACIÓN:

1. $x < y,\, y \leq z \Longrightarrow x < z$
   Por la propiedad transitiva demostrada en el Teorema 2.2:

   $$\text{Si } x < y,\, y \leq z \Longrightarrow x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$$

   Veamos que $x \not\geq z$ y ya tendríamos que $x < z$.
   Si fuera $x \geq z$ como $z \geq y$ por transitividad $x \geq y$, y esto no es cierto por la hipótesis ya que $x < y$. Por tanto, $x \leq z$ y $x \not\geq z \Longrightarrow x < z$.

2. $x \leq y,\, y < z \Longrightarrow x < z$
   Por la propiedad transitiva demostrada en el Teorema 2.2:

   $$\text{Si } x \leq y,\, y < z \Longrightarrow x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$$

   Veamos que $x \not\geq z$ y ya tendríamos que $x < z$.
   Si fuera $x \geq z$ como $y \geq x$ por transitividad $y \geq z$, y esto no es cierto por la hipótesis ya que $y < z \Longrightarrow y \leq z$ y $y \not\geq z$. Por tanto, $x \leq y$ e $y < z \Longrightarrow x < z$.

Proposición 2.4 *La relación $\leq$ definida en el conjunto cociente que proporciona la relación de equivalencia dada en la Definición 2.4, es una relación de orden total.*

DEMOSTRACIÓN:

- Es reflexiva $\Longrightarrow x \leq x$, demostrado en el teorema 2.2.
- Es transitiva, demostrado en el teorema 2.1.
- Es antisimétrica ya que $x \leq y \ \wedge \ y \leq x \Longrightarrow x \equiv y$.

Y todo par de números es comparable por el Teorema 2.4.

Observación 2.2 *Según se deduce del Teorema 2.3, si $x = \{X_i, X_d\}$ es un número surreal entonces, $\forall x_i \in X_i$ y $\forall x_d \in X_d$ se verifica que $x_i < x < x_d$.*

Teorema 2.5 *Sea $x = \{X_i, X_d\}$ un número surreal, y sean Y_i y Y_d dos conjuntos de números surreales tales que $\forall y_i \in Y_i$ y $\forall y_d \in Y_d$ se cumple que $y_i < x < y_d$. Entonces si llamamos $z = \{X_i \cup Y_i, X_d \cup Y_d\}$, se verifica que z es un número surreal y es $z \equiv x$.*

DEMOSTRACIÓN:
Sea $z = \{X_i \cup Y_i, X_d \cup Y_d\}$, entonces como sabemos que $\forall x_i \in X_i$ y $\forall x_d \in X_d$ es $x_i < x < x_d$ y, por hipótesis del teorema $\forall y_i \in Y_i$ y $\forall y_d \in Y_d$ se cumple que $y_i < x < y_d$, podemos escribir que:

$$X_i \cup Y_i < x < X_d \cup Y_d$$

Por tanto, z es un número surreal y, veamos además que de ello se deduce lo siguiente:

- $z \leq x$, para demostrarlo tenemos que ver que:

  a) $z_i \ngeq x \; \forall z_i \in Z_i = X_i \cup Y_i$

  b) $z \ngeq x_d \; \forall x_d \in X_d$

  (a) Veamos que $\forall z_i \in Z_i$ es $z_i \ngeq x$. Este resultado se verifica puesto que $\forall z_i \in Z_i = X_i \cup Y_i$ o bien $z_i \in X_i$ y, por tanto $z_i < x$ por la observación anterior, o bien $z_i \in Y_i$ y, por tanto $z_i < x$ por hipótesis.

  (b) Veamos que $\forall x_d \in X_d$ es $z \ngeq x_d$. Este resultado se verifica puesto que si existiera $x_d \in X_d$ tal que $x_d \leq z = \{X_i \cup Y_i, X_d \cup Y_d\}$ implicaría que $\forall z_d \in Z_d = X_d \cup Y_d$, tendríamos que $x_d \ngeq z_d$ y, en particular, como $x_d \in Z_d$, se tendría que $x_d \ngeq x_d$ lo que contradice el Teorema 2.2 de reflexividad.

- $x \leq z$ para demostrarlo tenemos que ver que:

  a) $x_i \ngeq z \; \forall x_i \in X_i$

  b) $x \ngeq z_d \; \forall z_d \in Z_d$

  (a) Veamos que $\forall x_i \in X_i$ es $x_i \ngeq z$. El resultado se verifica puesto que si existiera un $x_i \in X_i$ tal que $\{X_i \cup Y_i, X_d \cup Y_d\} = z \leq x_i$ implicaría que $\forall z_i \in Z_i = X_i \cup Y_i$ tendríamos que $z_i \ngeq x_i$ y, en particular, puesto que $x_i \in Z_i$, que $x_i \ngeq x_i$ lo que contradice el Teorema 2.2 de reflexividad.

  (b) Veamos que $\forall z_d \in Z_d$ es $x \ngeq z_d$. El resultado se verifica puesto que $\forall z_d \in Z_d = X_d \cup Y_d$ o bien $z_d \in X_d$ y, por tanto $x < z_d$ por la observación anterior, o bien $z_d \in Y_d$ y, por tanto $x < z_d$ por hipótesis.

Por tanto, tenemos demostrado que $z \leq x$ y $x \leq z \Longrightarrow z \equiv x$.

Observación 2.3 *Atendiendo a la definición de número surreal, aquellos con $d(x) \leq 2$ serían inicialmente los siguientes:*

$$\{\emptyset,\emptyset\},\ \{-1,\emptyset\},\ \{0,\emptyset\},\ \{1,\emptyset\},\ \{\{-1,0\},\emptyset\},\ \{\{-1,1\},\emptyset\},\ \{\{0,1\},\emptyset\},\ \{\{-1,0,1\},\emptyset\},$$
$$\{\emptyset,-1\},\ \{\emptyset,0\},\ \{\emptyset,1\},\ \{\emptyset,\{-1,0\}\},\ \{\emptyset,\{-1,1\}\},\ \{\emptyset,\{0,1\}\},\ \{\emptyset,\{-1,0,1\}\},\ \{-1,0\},$$
$$\{-1,1\},\ \{0,1\},\ \{\{-1,0\},1\},\ \{-1,\{0,1\}\}.$$

Pero podemos demostrar que algunos de estos números son equivalentes entre sí. De hecho veremos que los únicos realmente distintos son:

$$0 = \{\emptyset,\emptyset\},\ 1 = \{0,\emptyset\},\ -1 = \{\emptyset,0\}$$
$$\{1,\emptyset\},\ \{\emptyset,-1\},\ \{-1,0\},\ \{0,1\}$$

Lo demostraremos en el Teorema 2.6.

Corolario 2.1 *Entre los números surreales x con $d(x) \leq 2$, se verifican las siguientes relaciones:*

$$\{\emptyset,-1\} < -1 < \{-1,0\} < 0 < \{0,1\} < 1 < \{1,\emptyset\}$$

DEMOSTRACIÓN:

1. $\{\emptyset, -1\} < \{\emptyset, 0\} = -1$, ya que por la definición $\forall x_i \in \emptyset$ es $x_i \not\geq -1$ y $\forall y_d \in \{0\}$ es $\{\emptyset, -1\} \not\geq y_d$ pues si fuera $y_d = 0 \leq \{\emptyset, -1\}$ se tendría que $0 \not\geq -1$, dando lugar a contradicción. Por tanto $y_d \not\leq \{\emptyset, -1\}$.

2. $-1 = \{\emptyset, 0\} < \{-1, 0\}$, ya que por la definición $\forall x_i \in \emptyset$ es $x_i \not\geq \{-1, 0\}$ y $\forall y_d \in \{0\}$ es $\{\emptyset, 0\} \not\geq y_d$ pues si fuera $y_d = 0 \leq \{\emptyset, 0\}$ se tendría que $0 \not\geq 0$, dando lugar a contradicción. Por tanto $y_d \not\leq \{\emptyset, 0\}$.

3. $\{-1, 0\} < \{\emptyset, \emptyset\} = 0$, ya que $\forall x_i \in \{-1\}$ es $x_i \not\geq 0$, pues si fuera $0 = \{\emptyset, \emptyset\} \leq -1$ se tendría que $\emptyset \not\geq -1$ y llegaríamos a contradicción, y $\forall y_d \in \emptyset$ es $\{-1, 0\} \not\geq y_d$ pues si fuera $y_d = \emptyset \leq \{-1, 0\}$ se tendría que $\emptyset \not\geq 0$, dando lugar a contradicción. Por tanto $y_d \not\leq \{-1, 0\}$.

4. $0 = \{\emptyset, \emptyset\} < \{0, 1\}$, ya que por la definición $\forall x_i \in \emptyset$ es $x_i \not\geq \{0, 1\}$ y $\forall y_d \in \{1\}$ es $\{\emptyset, \emptyset\} \not\geq y_d$ pues si fuera $y_d = 1 \leq \{\emptyset, \emptyset\}$ se tendría que $1 \not\geq \emptyset$, dando lugar a contradicción. Por tanto $y_d \not\leq \{\emptyset, \emptyset\}$.

5. $\{0, 1\} < \{0, \emptyset\} = 1$, ya que $\forall x_i \in \{0\}$ es $x_i \not\geq 1$, por ser 0 elemento izquierdo de 1, y $\forall y_d \in \emptyset$ es $\{0, 1\} \not\geq y_d$ pues si fuera $y_d = \emptyset \leq \{0, 1\}$ se tendría que $\emptyset \not\geq 1$, dando lugar a contradicción. Por tanto $y_d \not\leq \{0, 1\}$.

6. $1 = \{0, \emptyset\} < \{1, \emptyset\}$, ya que $\forall x_i \in \{0\}$ es $x_i \not\geq \{1, \emptyset\}$, pues si fuera $\{1, \emptyset\} \leq 0$ entonces $1 \not\geq 0$ y llegaríamos a contradicción, y $\forall y_d \in \emptyset$ es $\{0, \emptyset\} \not\geq y_d$ pues si fuera $y_d = \emptyset \leq \{0, \emptyset\}$ se tendría que $\emptyset \not\geq \emptyset$, dando lugar a contradicción. Por tanto $y_d \not\leq \{0, \emptyset\}$.

Observación 2.4 *En el Corolario 2.1 hemos considerado únicamente $4 = 2^2$ números surreales x con $d(x) = 2$. Veamos en el siguiente teorema que efectivamente la cantidad de números surreales x, esecialmente distintos, con $d(x) = n$, es 2^n.*

Teorema 2.6 *Sean los números surreales x con $d(x) \leq n - 1$, ordenados de menor a mayor, los siguientes: $x_1 < x_2 < ... < x_{m-1} < x_m$ entonces los números surreales x con $d(x) = n$ son: $\{\emptyset, x_1\}, \{x_1, x_2\}, ..., \{x_{m-1}, x_m\}, \{x_m, \emptyset\}$ y, además se verifica que:*

$$\{\emptyset, x_1\} < x_1 < \{x_1, x_2\} < x_2 < ... < x_{m-1} < \{x_{m-1}, x_m\} < x_m < \{x_m, \emptyset\}.$$

Por lo tanto, los números surreales x con $d(x) = n$ son 2^n nuevos números.

DEMOSTRACIÓN:

a) Todo número surreal $z = \{Z_i, Z_d\}$ con $d(z) = n$ verifica que $Z_i, Z_d \subset \{x_1, ..., x_m\}$. Entonces, si $Z_i = \emptyset$ vamos a definir que $a = \emptyset$, si $Z_i \neq \emptyset$ definimos que $a = max\{Z_i\}$.
Si $Z_d = \emptyset$ definimos que $b = \emptyset$, si $Z_d \neq \emptyset$ definimos que $b = min\{Z_d\}$.
Se verifica entonces por el Teorema 2.5 que para $a, b \in \{\emptyset, x_1, ..., x_m\}$:

$$z \equiv \{a, b\}$$

b) De la Observación 2.2 se deduce:

$$\{\emptyset, x_1\} < x_1 < \{x_1, x_2\} < x_2 < ... < x_{m-1} < \{x_{m-1}, x_m\} < x_m < \{x_m, \emptyset\}$$

Por tanto, $\{\emptyset, x_1\}, \{x_1, x_2\}, ..., \{x_{m-1}, x_m\}, \{x_m, \emptyset\}$ son $m+1$ números nuevos con $d(x) = n$ distintos de los números surreales x con $d(x) = n-1$.

c) Veamos que los números descritos anteriormente son los únicos.
Por lo indicado en el apartado a), todo número surreal z con $d(z) = n$ será de la forma $z = \{a, b\}$ con $a, b \in \{\emptyset, x_1, ..., x_m\}$. Por tanto, vemos que: $\forall j,k \in \{1, ..., m\}$ con $k \leq j$, si consideramos el número surreal $\{x_{k-1}, x_{j+1}\}$, queremos demostrar que $\{x_{k-1}, x_{j+1}\}$ es equivalente a uno de los números ya descritos y, que exactamente será el número $x \in \{x_k, ..., x_j\}$ con $d(x)$ mínimo, es decir, $d(x) \leq d(y)\ \forall y \in \{x_k, ..., x_j\}$.
Sea $z = \{x_{k-1}, x_{j+1}\}$ y $x = \{X_i, X_d\}$ se verifica lo siguiente:
$X_i \cap \{x_k, ..., x_j\} = \emptyset$ y $X_d \cap \{x_k, ..., x_j\} = \emptyset$ porque $d(x) \leq d(y)\ \forall y \in \{x_k, ..., x_j\}$ y, por tanto ningún elemento de $\{x_k, ..., x_j\}$ puede formar parte de x:

$$max\{X_i \cup \{x_{k-1}\}\} = x_{k-1} \text{ y } min\{X_d \cup \{x_{j+1}\}\} = x_{j+1}$$

Porque sabemos que $x_1 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_j < ... < x_m$ están ordenados de menor a mayor y que $x_{k-1} < x < x_{j+1}$, por el Teorema 2.5 tenemos que:

$$x \equiv \{X_i \cup \{x_{k-1}\}, X_d \cup \{x_{j+1}\}\} \equiv \{x_{k-1}, x_{j+1}\} = z.$$

d) Vamos a demostrar por inducción que la cantidad de números surreales x con $d(x) = k$ es $n(k) = 2^k$. Sabemos que la cantidad de números surreales x con $d(x) = 0$ es $n(0) = 2^0 = 1$ y con $d(x) = 1$ es $n(1) = 2^1 = 2$.
Suponiendo que $\forall i < k$, la cantidad de números surreales x con $d(x) = i$ es $n(i) = 2^i$ entonces la cantidad total de números surreales que tenemos en el paso $k-1$ es:

$$\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = \frac{1-2^k}{-1} = 2^k - 1$$

Por tanto, por el resultado obtenido en el apartado b, la cantidad de números surreales x con $d(x) = k$ es:

$$n(k) = 2^k$$

Y, el total de números hasta el día k, es decir, con $d(x) \leq k$ es:

$$t(k) = \sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$$

Ejemplos:

1. Si $k = 0$, $n(0) = 2^0 = 1$
2. Si $k = 1$, $n(1) = 2^1 = 2$ y $t(1) = 2^2 - 1 = 3$ que coincide con $n(0) + n(1)$
3. Si $k = 2$, $n(2) = 2^2 = 4$ y $t(2) = 2^3 - 1 = 7$ que coincide con $n(0) + n(1) + n(2)$

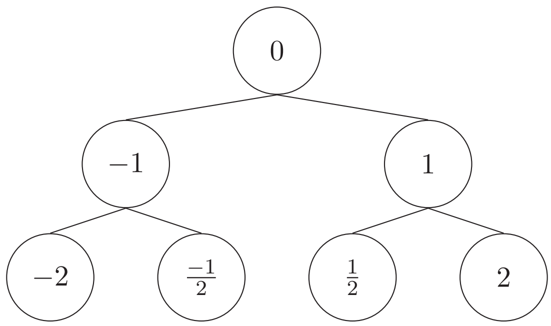
Siendo los 4 numeros x con $d(x) = 2$ los siguientes:

$$\{\emptyset, -1\} < \{-1, 0\} < \{0, 1\} < \{1, \emptyset\}$$

Y, se les podría dar los siguientes nombres:

$$-2 = \{\emptyset, -1\}$$
$$\tfrac{-1}{2} = \{-1, 0\}$$
$$\tfrac{1}{2} = \{0, 1\}$$
$$2 = \{1, \emptyset\}$$

El siguiente gráfico muestra los primeros números creados a partir del 0, añadiendo los 4 números nuevos encontrados con $d(x) = 2$.



Capítulo 3

Operaciones con números surreales

3.1. Suma

Observación 3.1 *Sean* $x = \{X_i, X_d\}$ *e* $y = \{Y_i, Y_d\}$ *números surreales,* $\forall x_i \in X_i$, $\forall x_d \in X_d$, $\forall y_i \in Y_i$ *y* $\forall y_d \in Y_d$*, podemos definir la suma de la siguiente forma:*

$$x + y = \{(X_i + y) \cup (x + Y_i), (X_d + y) \cup (x + Y_d)\}$$

Además, se define $x + \emptyset = \emptyset$ *y* $\emptyset + \emptyset = \emptyset$*.*

Pero no podemos afirmar que esta operación dote al conjunto de números surreales de estructura de grupo, es decir, no podemos garantizar todavía que el resultado sea un número surreal. Para asegurarnos de ello, necesitamos probar algunas cosas.

Definición 3.1 (Pseudo-números) *Un pseudo-número* x *de la forma* $x = \{X_i, X_d\}$ *es un conjunto formado por dos coordenadas que, a su vez son dos conjuntos de pseudo-números preexistentes. El conjunto de todos los pseudo-números lo notaremos por* P *y llamaremos* $d(x)$ *al mínimo paso en el que se puede construir un pseudo-número. El primer pseudo-número que se puede obtener es* $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$*, que es el único pseudo-número* $x \in P$ *con* $d(x) = 0$*.*

Definición 3.2 (Relación de orden de pseudo-números) *Sean* x *e* y *dos pseudo-números de la forma* $x = \{X_i, X_d\}$ *e* $y = \{Y_i, Y_d\}$*, se define la relación de orden* $x \leq y \iff \forall x_i \in X_i$ *se verifica que* $x_i \not\geq y$ *y* $\forall y_d \in Y_d$ *se verifica que* $x \not\geq y_d$*.*

Proposición 3.1 *Se verifica que P con la relación de orden dada en la Definición 3.2 cumple la reflexividad y la transitividad.*

DEMOSTRACIÓN:

1. Reflexiva: Todo pseudo-número x verifica que $x \leq x$ y, lo demostraremos por inducción sobre d(x).
   Si $d(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 = \{\emptyset, \emptyset\} \Longrightarrow \forall x_i, x_d \in \emptyset$ es $x_i \not\geq x$ y $x \not\geq x_d$.

Suponiendo que el resultado es cierto $\forall x$ pseudo-número con $d(x) < k$, sea x pseudo-número con $d(x) = k$, entonces:
Si $x \nleq x$, implica que alguna de las siguientes hipótesis ha de verificarse:

- $\exists x_i \in X_i$ tal que $x_i \geq x \Longrightarrow \exists x_i$ pseudo-número con $d(x_i) < k$ tal que $x_i \nleq x_i$, llegando a contradicción con la hipótesis de inducción.
O bien.

- $\exists x_d \in X_d$ tal que $x \geq x_d \Longrightarrow \exists x_d$ pseudo-número con $d(x_d) < k$ tal que $x_d \nleq x_d$, llegando a contradicción con la hipótesis de inducción.

Luego $x \leq x$.

2. Transitiva: Todo trío pseudo-números x,y y z, verifica que si $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$. Lo demostraremos por inducción sobre $d(x)$.
Si $d(x) + d(y) + d(z) = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0 = \{\emptyset, \emptyset\}$ y, por tanto, $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
Suponiendo que el resultado es cierto $\forall x$,y,z pseudo-números con $d(x) + d(y) + d(z) < k$, sean x,y,z pseudo-números con $d(x) + d(y) + d(z) = k$, y tales que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces:
Suponiendo que $x \nleq z$, alguna de las siguientes hipótesis ha de verificarse:

   - $\exists x_i \in X_i$ tal que $x_i \geq z \Longrightarrow y \leq z$, $z \leq x_i$ pero $y \nleq x_i$ siendo $d(x_i) + d(y) + d(z) < d(x) + d(y) + d(z) = k$

   - $\exists z_d \in Z_d$ tal que $x \geq z_d \Longrightarrow z_d \leq x$, $x \leq y$ pero $z_d \nleq y$ siendo $d(x) + d(y) + d(z_d) < d(x) + d(y) + d(z) = k$

   Lo que contradice la hipótesis de inducción. Luego, queda demostrado que $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.

Definición 3.3 (Relación de equivalencia de pseudo-números) *Sean dos pseudo-números x e y de la forma $x = \{X_i, X_d\}$ e $y = \{Y_i, Y_d\}$, se define la relación $x \equiv y \iff x \leq y \wedge y \leq x$ que es de equivalencia:*

- *Reflexiva: Por la Proposición 3.1 se tiene que todo pseudo-número x verifica que $x \leq x \Longrightarrow x \equiv x$.*

- *Simétrica: Si $x \equiv y \Longrightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow y \leq x \wedge x \leq y \Longrightarrow y \equiv x$.*

- *Transitiva: Si $x \equiv y \wedge y \equiv z \Longrightarrow x \leq y \wedge y \leq x \wedge y \leq z \wedge z \leq y$, por la transitividad demostrada en la Proposición 3.1 $\Longrightarrow x \leq z \wedge z \leq x \Longrightarrow x \equiv z$.*

Teorema 3.1 *Sea $\mathcal{P} = P/_{\equiv}$ el conjunto cociente de P sobre la relación de equivalencia definida en la Definición 3.3. Entonces la relación $\leq$ definida en la Definición 3.2, es de orden.*

DEMOSTRACIÓN:

- Reflexiva: Todo pseudo-número x verifica que $x \leq x$ por la Proposición 3.1.

- Antisimétrica: Si x e y son pseudo-números tales que $x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x \equiv y$, por definición de la relación de equivalencia.

- Transitiva: Todo trío de pseudo-números x,y y z, tales que $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ por la Proposición 3.1.

Proposición 3.2 *Todo pseudonúmero x con $x = \{X_i, X_d\}$ verifica que $\forall x_i \in X_i$ es $x_i \ngeq x$ y $\forall x_d \in X_d$ es $x \ngeq x_d$.*

DEMOSTRACIÓN:
Porque si $\exists x_i \in X_i$ con $x_i \geq x \Longrightarrow x_i \ngeq x_i$ y si $\exists x_d \in X_d$ con $x \geq x_d \Longrightarrow x_d \ngeq x_d$ y ambas contradicen la reflexividad.

Observación 3.2 *El orden en el conjunto $\mathcal{P}$ no es total: Si x e y son pseudo-números, el que se verifique que $x \ngeq y$ no implica necesariamente que $x < y$.*

Definición 3.4 (Suma de pseudo-números) *Si $x = \{X_i, X_d\}$, $y = \{Y_i, Y_d\}$ son pseudo-números, entonces:*

$$x + y = \{(X_i + y) \cup (x + Y_i), (X_d + y) \cup (x + Y_d)\}$$

Además, se define que $x + \emptyset = \emptyset$ y $\emptyset + \emptyset = \emptyset$.

Observación 3.3 *La siguiente proposición va a demostrar que la suma de pseudo-números está bien definida ya que $x + y$ es un pseudo-número z al estar formado por dos conjuntos de pseudo-números previamente definidos, siendo estos:*

$$Z_i = (X_i + y) \cup (x + Y_i) \ \text{ y } \ Z_d = (X_d + y) \cup (x + Y_d)$$

Proposición 3.3 *La suma de pseudo-números da como resultado un pesudo-número.*

DEMOSTRACIÓN:
Sean x e y pseudo-números, para demostrar que $x + y$ es un pseudo-número aplicamos inducción sobre $d(x) + d(y)$.
Si $d(x) + d(y) = 0 \Longrightarrow x = 0 = y \Longrightarrow x + y = \{\emptyset, \emptyset\} = 0$ es un pseudo-número.
Suponiendo el resultado cierto $\forall x$, y pseudo-números con $d(x) + d(y) < k$, sean x,y pseudo-números con $d(x) + d(y) = k$, entonces:
$\forall x_i \in X_i$ es $d(x_i) + d(y) < d(x) + d(y) = k \Longrightarrow X_i + y$ es un pseudo-número. Y también, $\forall y_i \in Y_i$ es $d(x) + d(y_i) < d(x) + d(y) = k \Longrightarrow x + Y_i$ es un pseudo-número.
Análogamente, $\forall x_d \in X_d$ es $d(x_d) + d(y) < d(x) + d(y) = k \Longrightarrow X_d + y$ es un pseudo-número. Y también, $\forall y_d \in Y_d$ es $d(x) + d(y_d) < d(x) + d(y) = k \Longrightarrow x + Y_d$ es un pseudo-número.
Luego podemos concluir que $x + y$ es pseudo-número.

Observación 3.4 *Veamos las propiedades que tiene ($\mathcal{P}$,+) siendo $\mathcal{P}$ el conjunto cociente de pseudo-números sobre la relación de equivalencia dada en la Definición 3.3 y, la operación suma dada en la Definición 3.4.*

Teorema 3.2 (Propiedades de ($\mathcal{P}$,+)) *Se verifica que ($\mathcal{P}$,+) es asociativa, conmutativa y, además tiene elemento neutro que es $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$*

DEMOSTRACIÓN:

1. Asociativa: $\forall x,y,z \in \mathcal{P}$ se verifica que $x + (y + z) = (x + y) + z$ por inducción sobre $d(x) + d(y) + d(z)$.
   El resultado es cierto para $d(x) + d(y) + d(z) = 0$.

Suponiendo el resultado cierto $\forall x,y,z \in \mathcal{P}$ con $d(x)+d(y)+d(z) < k$, sean $x,y,z \in P$ con $d(x)+d(y)+d(z) = k$, entonces,
Por una parte:
$y+z = \{(Y_i+z)\cup(y+Z_i),(Y_d+z)\cup(y+Z_d)\} \Longrightarrow$
$x+(y+z) = \{(X_i+(y+z))\cup(x+(Y_i+z))\cup(x+(y+Z_i)),$
$(X_d+(y+z))\cup(x+(Y_d+z))\cup(x+(y+Z_d))\}.$
Por otra parte:
$x+y = \{(X_i+y)\cup(x+Y_i),(X_d+y)\cup(x+Y_d)\} \Longrightarrow$
$x+(y+z) = \{((X_i+y)+z)\cup((x+Y_i)+z)\cup((x+y)+Z_i),$
$((X_d+y)+z)\cup((x+Y_d)+z)\cup((x+y)+Z_d)\}.$
Por hipótesis de inducción, por ser:

- $d(x_i)+d(y)+d(z) < d(x)+d(y)+d(z) = k$ se verifica que $X_i+(y+z) = (X_i+y)+z$.
- $d(x)+d(y_i)+d(z) < d(x)+d(y)+d(z) = k$ se verifica que $x+(Y_i+z) = (x+Y_i)+z$.
- $d(x)+d(y)+d(z_i) < d(x)+d(y)+d(z) = k$ se verifica que $x+(y+Z_i) = (x+y)+Z_i$.
- $d(x_d)+d(y)+d(z) < d(x)+d(y)+d(z) = k$ se verifica que $X_d+(y+z) = (X_d+y)+z$.
- $d(x)+d(y_d)+d(z) < d(x)+d(y)+d(z) = k$ se verifica que $x+(Y_d+z) = (x+Y_d)+z$.
- $d(x)+d(y)+d(z_d) < d(x)+d(y)+d(z) = k$ se verifica que $x+(y+Z_d) = (x+y)+Z_d$.

Luego podemos deducir que $x+(y+z) = (x+y)+z$ se cumple y, por tanto, la operación es asociativa.

2. Conmutativa: $\forall x,y \in \mathcal{P}$ se tiene que $x+y = y+x$ por inducción sobre $d(x)+d(y)$.
El resultado es cierto para $d(x)+d(y) = 0$.
Suponiendo el resultado cierto $\forall x$, y pseudo-números con $d(x)+d(y) < k$, sean x,y pseudo-números con $d(x)+d(y) = k$, entonces:
$x+y = \{(X_i+y)\cup(x+Y_i),(X_d+y)\cup(x+Y_d)\}$
$y+x = \{(Y_i+x)\cup(y+X_i),(Y_d+x)\cup(y+X_d)\}$
Por hipótesis de inducción, por ser:

   - $d(x_i)+d(y) < d(x)+d(y) = k$ se verifica que $X_i+y = y+X_i$.
   - $d(x)+d(y_i) < d(x)+d(y) = k$ se verifica que $x+Y_i = Y_i+x$.
   - $d(x_d)+d(y) < d(x)+d(y) = k$ se verifica que $X_d+y = y+X_d$.
   - $d(x)+d(y_d) < d(x)+d(y) = k$ se verifica que $x+Y_d = Y_d+x$.

   Luego podemos deducir que $x+y = y+x$ se cumple y, por tanto, la operación es conmutativa.

3. Existe elemento neutro: Por inducción sobre $d(x)$, si $d(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow x + 0 = x$. Sea $x \in \mathcal{P}$ con $d(x) < k$ y $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$ se verifica que:
   $x + 0 = \{(X_i + 0) \cup (x + \emptyset), (X_d + 0) \cup (x + \emptyset)\} = \{(X_i + 0), (X_d + 0)\}$ por ser $x + \emptyset = \emptyset \; \forall x \in \mathcal{P}$.
   Por hipótesis de inducción $\forall x_i \in X_i$, como $d(x_i) < d(x) = k$, se verifica que $X_i + 0 = X_i$ y, análogamente $X_d + 0 = X_d$. Luego podemos deducir que $x + 0 = x$ se verifica y, por tanto afirmar la existencia de elemento neutro.

Teorema 3.3 (Compatibilidad de la suma con la relación de orden) *Se verifica* $\forall x, x', y, y' \in \mathcal{P}$ *que:*

I. Si $x \leq x' \land y \leq y' \Longrightarrow x + y \leq x' + y'$

II. Si $x + y \geq x' + y' \land y \leq y' \Longrightarrow x \geq x'$

DEMOSTRACIÓN:
Por inducción sobre $d(x) + d(x') + d(y) + d(y')$.
El resultado es cierto para $d(x) + d(x') + d(y) + d(y') = 0 \Longrightarrow x = x' = y = y' = 0 = \{\emptyset, \emptyset\}$.
Notaremos $I(a, a', b, b')$ a la propiedad de que: si $a \leq a'$ y $b \leq b' \Longrightarrow a + b \leq a' + b'$ y, notaremos $II(a, a', b, b')$ a la propiedad de que: si $a' + b' \leq a + b$ y $b \leq b' \Longrightarrow a' \leq a$.
Supongamos que $I(x, x', y, y')$ y $II(x, x', y, y')$ son ciertas para todos pseudo-números x, x', y, y' con $d(x) + d(x') + d(y) + d(y') < k$. Sean $x, x'y, y'$ pseudo-números con $d(x) + d(x') + d(y) + d(y') = k$.

A) Si $x \leq x'$ e $y \leq y'$. Entonces, $\forall x_i \in X_i$, $y_i \in Y_i$, $x'_d \in X'_d$, $y'_d \in Y'_d$:

   a) Si fuera $x_i + y \geq x' + y'$, como se verifica que $y \leq y' \Longrightarrow$ por hipótesis de inducción se verifica $II(x_i, x', y, y') \Longrightarrow x' \leq x_i \Longrightarrow x \nleq x'$. Llegando a contradicción con las hipótesis dadas en A.

   b) Si fuera $x + y_i \geq x' + y'$, como se verifica que $x \leq x' \Longrightarrow$ por hipótesis de inducción se verifica $II(y_i, y', x, x') \Longrightarrow y' \leq y_i \Longrightarrow y \nleq y'$. Llegando a contradicción con las hipótesis dadas en A.

   c) Si fuera $x + y \geq x'_d + y'$, como se verifica que $y \leq y' \Longrightarrow$ por hipótesis de inducción se verifica $II(x, x'_d, y, y') \Longrightarrow x'_d \leq x \Longrightarrow x \nleq x'$. Llegando a contradicción con las hipótesis dadas en A.

   d) Si fuera $x + y \geq x' + y'_d$, como se verifica que $x \leq x' \Longrightarrow$ por hipótesis de inducción se verifica $II(y, y'_d, x, x') \Longrightarrow y'_d \leq y \Longrightarrow y \nleq y'$. Llegando a contradicción con las hipótesis dadas en A.

   Recopilando de $a), b), c)$ y $d)$ se deduce que:

$$\begin{gathered} x_i + y \ngeq x' + y' \\ x + y_i \ngeq x' + y' \\ x + y \ngeq x'_d + y' \\ x + y \ngeq x' + y'_d \end{gathered}$$

   Luego se verifica que $x + y \leq x' + y'$, lo que demuestra que se verifica la propiedad I, es decir: si $x \leq x' \land y \leq y' \Longrightarrow x + y \leq x' + y'$.

B) Si $x + y \geq x' + y'$ e $y \leq y'$. Entonces, $\forall x_d \in X_d$, $x'_i \in X'_i$:

e) Si fuera $x'_i \geq x$, como se verifica que $y \leq y' \Longrightarrow$ por hipótesis de inducción se verifica $I(x, x'_i, y, y') \Longrightarrow x+y \leq x'_i+y' \Longrightarrow x'+y' \nleq x+y$. Llegando a contradicción con las hipótesis dadas en B.

f) Si fuera $x_d \leq x'$, como se verifica que $y \leq y' \Longrightarrow$ por hipótesis de inducción se verifica $I(x_d, x', y, y') \Longrightarrow x_d + y \leq x' + y' \Longrightarrow x' + y' \nleq x + y$. Llegando a contradicción con las hipótesis dadas en B.

Recopilando de $e)$ y $f)$ se deduce que:

$$x \nleq x'_i$$
$$x_d \nleq x'$$

Luego se verifica que $x' \leq x$, lo que demuestra que se verifica la propiedad II, es decir: si $x + y \geq x' + y' \wedge y \leq y' \Longrightarrow x \geq x'$.

Definición 3.5 (Elemento opuesto) *Sea $x = \{X_i, X_d\}$ un pseudo-número, se define $-x = \{-X_d, -X_i\}$.*

Teorema 3.4 *Para todo pseudo-número x se verifica que $x + (-x) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN:
Por inducción sobre $d(x)$.
El resultado es cierto para $d(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 = \{\emptyset, \emptyset\} \Longrightarrow -x = 0 = \{\emptyset, \emptyset\} \Longrightarrow x + (-x) = \{\emptyset, \emptyset\} = 0$.
Supongamos que el resultado es cierto para todo pesudo-número x con $d(x) < k$.
Sea x un pseudo-número con $d(x) = k$.
Sea $-x = \{-X_d, -X_i\}$, entonces:
$x + (-x) = \{(X_i + (-x)) \cup (x + (-X_d)), (X_d + (-x)) \cup (x + (-X_i)) = \{Z_i, Z_d\} = z$
Tenemos que demostrar que $z \leq 0$ y que $z \geq 0$ y, entonces tendremos que $z \equiv 0$.

a) Si fuera $z \nleq 0 \Longrightarrow \exists z_i \in Z_i$ tal que $0 \leq z_i$ ya que la otra condición queda descartada por ser $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$ y, por tanto $\nexists u \in \emptyset$ que verifique que $z \geq u$.
Luego si $z_i \geq 0$ surgen dos posibilidades:

   i) Si $z_i \in X_i - x \Longrightarrow z_i = x_i - x \geq 0 \Longrightarrow \forall y_d \in (x_i - x)_d$ se verifica que $0 \ngeq y_d$ y, en particular para $y_d = x_i - x_i \in (x_i - x)_d$ se verifica que $x_i - x_i \nleq 0$ siendo $d(x_i) < d(x) = k$ y, esto contradice la hipótesis de inducción.

   ii) Si $z_i \in x - X_d \Longrightarrow z_i = x - x_d \geq 0 \Longrightarrow \forall y_d \in (x - x_d)_d$ se verifica que $0 \ngeq y_d$ y, en particular para $y_d = x_d - x_d \in (x - x_d)_d$ se verifica que $x_d - x_d \nleq 0$ siendo $d(x_d) < d(x) = k$ y, esto contradice la hipótesis de inducción.

Por tanto, $z \leq 0$.

b) Si fuera $z \ngeq 0 \Longrightarrow \exists z_d \in Z_d$ tal que $0 \geq z_d$ ya que la otra condición queda descartada por ser $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$ y, por tanto $\nexists u \in \emptyset$ que verifique que $u \geq z$ por ser $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$.
Luego si $0 \geq z_d$ surgen dos posibilidades:

   i) Si $z_d \in X_d - x \Longrightarrow z_d = x_d - x \leq 0 \Longrightarrow \forall y_i \in (x_d - x)_i$ se verifica que $y_i \ngeq 0$ y, en particular para $y_i = x_d - x_d \in (x_d - x)_i$ se verifica que $x_d - x_d \ngeq 0$ siendo $d(x_d) < d(x) = k$ y, esto contradice la hipótesis de inducción.

ii) Si $z_d \in x - X_i \Longrightarrow z_d = x - x_i \leq 0 \Longrightarrow \forall y_i \in (x - x_i)_i$ se verifica que $y_i \ngeq 0$ y, en particular para $y_i = x_i - x_i \in (x - x_i)_i$ se verifica que $x_i - x_i \ngeq 0$ siendo $d(x_i) < d(x) = k$ y, esto contradice la hipótesis de inducción.

Por tanto, $z \geq 0$.

Luego queda demostrado que $z \leq 0$ y que $z \geq 0$ y, por tanto $z \equiv 0$.

Teorema 3.5 *El conjunto de pseudo-números con la suma es un grupo abeliano.*

DEMOSTRACIÓN:
Inmediata a partir de los resultados del teorema anterior ya que se deduce que:

- La operación es interna por la Proposición 3.3.
- La suma es asociativa por el Teorema 3.2.
- La suma es conmutativa por el Teorema 3.2.
- Existe elemento neutro, que es el $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$ por el Teorema 3.2.
- Todo pseudo-número $x = \{X_i, X_d\}$ tiene un inverso u opuesto $-x = \{-X_d, -X_i\}$ tal que $x + (-x) = 0$ por el Teorema 3.4.

Observación 3.5 *De ello se pueden deducir las propiedades que sabemos que se cumplen en todos los grupos. Por ejemplo:*

a) $-(-x) = x$

b) $-(x + y) = -x - y$

c) $(x + y) - y = x$

Proposición 3.4 *Si $x \leq y$ entonces $-y \leq -x$.*

DEMOSTRACIÓN:
Por la compatibilidad de la suma con la relación de orden, $x \leq y \Longrightarrow x + (-x) \leq y + (-x) \Longrightarrow 0 \leq y + (-x) \Longrightarrow -y + 0 \leq -y + (y + (-x)) \Longrightarrow -y \leq -x$

Observación 3.6 *El conjunto de números surreales es un subconjunto del conjunto de pseudo-números. Vamos a demostrar que el conjunto de los números surreales con la operación suma es un subgrupo del grupo de los pseudo-números y, por tanto, también es un grupo abeliano.*

Teorema 3.6 *Si x e y son números surreales entonces $x + y$ es un número surreal.*

DEMOSTRACIÓN:
Por inducción sobre $d(x) + d(y)$.
Si $d(x) + d(y) = 0$ entonces $x = y = 0 \Longrightarrow x + y = 0$ que es un número surreal.
Supongamos que el resultado es cierto para todos los números sureales x e y tales que $d(x) + d(y) < k$ y sean x e y números surreales tales que $d(x) + d(y) = k$.
Por hipótesis de inducción tenemos que $\forall x_i \in X_i$, $\forall x_d \in X_d$, $\forall y_i \in Y_i$ y $\forall y_d \in Y_d$, $x_i + y$, $x + y_i$, $x_d + y$, $x + y_d$ son números surreales.
Además por la compatibilidad de la suma con la relación de orden, tenemos que:

$$x_i < x_d \Longrightarrow x_i + y < x_d + y$$
$$x_i < x \wedge y < y_d \Longrightarrow x_i + y < x + y < x + y_d$$

$$y_i < y_d \Longrightarrow x + y_i < x + y_d$$
$$y_i < y \wedge x < x_d \Longrightarrow x + y_i < x + y < x_d + y$$

Por tanto, podemos verificar que
$x + y = \{(X_i + y) \cup (x + Y_i), (X_d + y) \cup (x + Y_d)\} = \{Z_i, Z_d\}$ es un número surreal ya que $\forall z_i \in Z_i$, $z_d \in Z_d$ es $z_i < x + y < z_d$ y que la suma es una operación interna.

Teorema 3.7 *El elemento neutro* 0 *es un número surreal. Demostrado en el capítulo anterior.*

Teorema 3.8 *Sea* x *un número surreal de la forma* $\{X_i, X_d\}$*, su elemento opuesto* $-x = \{-X_d, -X_i\}$ *es un número surreal.*

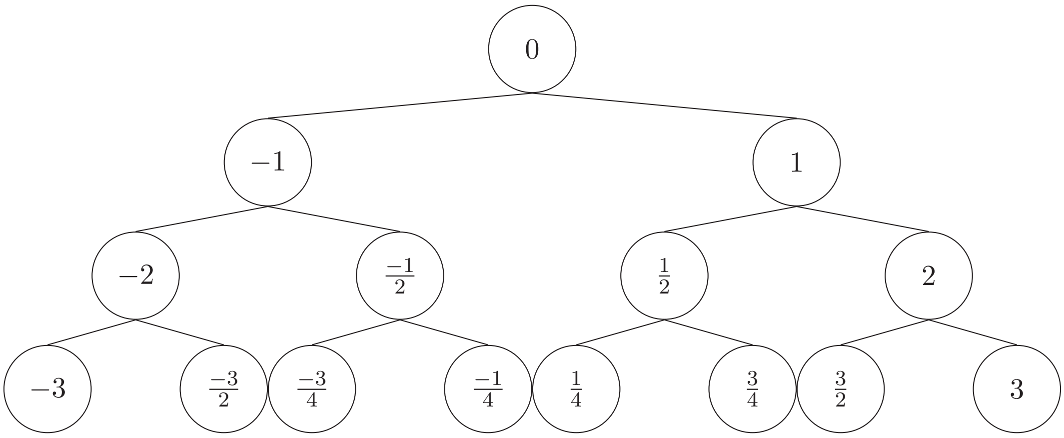
DEMOSTRACIÓN:
Sean x un número surreal, para demostrar que $-x$ es un número surreal aplicamos inducción sobre $d(x)$.
Si $d(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 = \{\emptyset, \emptyset\} \Longrightarrow (-x) = -0 = \{\emptyset, \emptyset\}$ es un número surreal.
Suponiendo el resultado cierto $\forall x$ número surreal con $d(x) < k$. Sea x un número surreal con $d(x) = k$.
Sea $-x = \{-X_d, -X_i\}$, entonces, por hipótesis de inducción:
$\forall x_i \in X_i$ es $d(x_i) < d(x) = k \Longrightarrow -x_i$ es un número surreal. Y también, $\forall x_d \in X_d$ es $d(x_d) < d(x) = k \Longrightarrow -x_d$ es un número surreal y, además como $x_i < x_d$, por la Proposición 3.4, se verifica que $-x_d < -x_i$.
Luego podemos afirmar que $-x = \{-X_d, -X_i\}$ es un número surreal.

Observación 3.7 *De los teoremas 3.6, 3.7 y 3.8 se deduce que el conjunto de los números surreales con la operación suma es un grupo abeliano compatible con el orden definido que, además, como se demostró en el capítulo 2, es un orden total en este conjunto.*

Ejemplos:

- $0 + 1 = \{(\emptyset + 1) \cup (0 + 0), (\emptyset + 1) \cup (0 + \emptyset)\} = \{\emptyset \cup 0, \emptyset \cup \emptyset\} = \{0, \emptyset\} = 1 = 1 + 0$
- $1 + 1 = \{(0 + 1) \cup (1 + 0), (\emptyset + 1) \cup (1 + \emptyset)\} = \{1 \cup 1, \emptyset \cup \emptyset\} = \{1, \emptyset\} = 2$
- $(-1)+(-1) = \{(\emptyset+(-1))\cup((-1)+\emptyset), (0+(-1))\cup((-1)+0)\} = \{\emptyset\cup\emptyset, (-1)\cup(-1)\} = \{\emptyset, -1\} = -2$
- $\frac{1}{2}+1 = \{(0+1)\cup(\frac{1}{2}+0), (1+1)\cup(\frac{1}{2}+\emptyset)\} = \{1\cup\frac{1}{2}, (2)\cup\emptyset\} = \{1\cup\frac{1}{2}, 2\} \equiv \{1, 2\} = \frac{3}{2}$
- $(-1)+\frac{-1}{2} = \{(\emptyset+\frac{-1}{2}))\cup((-1)+(-1)), (0+\frac{-1}{2}))\cup((-1)+0)\} = \{\emptyset\cup(-2), \frac{-1}{2}\cup(-1)\} = \{(-2), (-1) \cup \frac{-1}{2}\} \equiv \{(-2), (-1)\} = \frac{-3}{2}$
- $2 + 1 = \{(1 + 1) \cup (2 + 0), (\emptyset + 1) \cup (2 + \emptyset)\} = \{2 \cup 2, \emptyset \cup \emptyset\} = \{2, \emptyset\} = 3$
- $(-2) + (-1) = \{(\emptyset + (-1)) \cup ((-2) + \emptyset), ((-1) + (-1)) \cup ((-2) + 0)\} = \{\emptyset \cup \emptyset, (-2) \cup (-2)\} = \{\emptyset, -2\} = -3$

El siguiente gráfico muestra los 8 números nuevos encontrados con $d(x) = 3$:



3.2. Multiplicación

Una vez definida la suma entre números surreales, procederemos a definir el producto de dos números surreales y, para ello, usaremos la convención usual de producto de a y b como ab.

Observación 3.8 *Sean $x = \{X_i, X_d\}$ e $y = \{Y_i, Y_d\}$ números surreales, podemos definir el producto de la siguiente forma:*

$$xy = \{(X_iy + xY_i - X_iY_i) \cup (X_dy + xY_d - X_dY_d), (X_iy + xY_d - X_iY_d) \cup (X_dy + xY_i - X_dY_i)\}$$

Además, se define $x \cdot \emptyset = \emptyset$ y $\emptyset \cdot \emptyset = \emptyset$.

Pero igual que pasaba con la suma, no podemos afirmar que esta operación dote al conjunto de números surreales de estructura de grupo, es decir, no podemos garantizar todavía que el resultado sea un número surreal. Para asegurarnos de ello, necesitamos probar algunas cosas.

Definición 3.6 (Producto de pseudo-números) *Si $x = \{X_i, X_d\}$, $y = \{Y_i, Y_d\}$ son pseudo-números, entonces:*

$$xy = \{(X_iy + xY_i - X_iY_i) \cup (X_dy + xY_d - X_dY_d), (X_iy + xY_d - X_iY_d) \cup (X_dy + xY_i - X_dY_i)\}$$

Además, se define $x \cdot \emptyset = \emptyset$ y $\emptyset \cdot \emptyset = \emptyset$.

Observación 3.9 *Veamos en primer lugar que el producto de pseudo-números está bien definido ya que xy es un pseudo-número z al estar formado por dos conjuntos de pseudo-números previamente definidos, siendo estos:*

$$Z_i = (X_iy + xY_i - X_iY_i) \cup (X_dy + xY_d - X_dY_d)$$
$$Z_d = (X_iy + xY_d - X_iY_d) \cup (X_dy + xY_i - X_dY_i)$$

Proposición 3.5 *El producto de pseudo-números da como resultado un pesudo-número.*

DEMOSTRACIÓN:
Sean x e y dos pseudo-números y sea $z = xy$.

Razonando por inducción sobre $d(x) + d(y)$ tenemos que:
Si $d(x) + d(y) = 0$ entonces $x = y = 0 \Longrightarrow$
$z = xy = \{\emptyset \cdot y + x \cdot \emptyset - \emptyset \cdot \emptyset \cup \emptyset \cdot y + x \cdot \emptyset - \emptyset \cdot \emptyset, \emptyset \cdot y + x \cdot \emptyset - \emptyset \cdot \emptyset \cup \emptyset \cdot y + x \cdot \emptyset - \emptyset \cdot \emptyset = \{\emptyset, \emptyset\} = 0$
Suponiendo el resultado cierto para todo par de pseudo-números x e y con $d(x) + d(y) < k$, sean x e y pseudo-números con $d(x) + d(y) = k$.
Entonces, por hipótesis de inducción, los productos $X_i y$, xY_i, $X_i Y_i$, $X_d y$, xY_d, $X_d Y_d$, $X_i Y_d$, $X_d Y_i$ son pseudo-números, y puesto que la suma de pseudo-números es un pseudo-número se deduce que:
$z = \{(X_i y + xY_i - X_i Y_i) \cup (X_d y + xY_d - X_d Y_d), (X_i y + xY_d - X_i Y_d) \cup (X_d y + xY_i - X_d Y_i)\}$
es un pseudo-número.

Proposición 3.6 *Para todo pseudo-número x se verfica que $0x = x0 = 0$.*

DEMOSTRACIÓN:
Por ser $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$, si $x = \{X_i, X_d\}$ entonces:
$x0 = \{(X_i 0 + x\emptyset - X_i\emptyset) \cup (X_d 0 + x\emptyset - X_d\emptyset), X_i 0 + x\emptyset - X_i\emptyset) \cup (X_d 0 + x\emptyset - X_d\emptyset)\}$.
Y por definición $a\emptyset = \emptyset$ y $a + \emptyset = \emptyset$, por tanto $x0 = \{\emptyset, \emptyset\} = 0$.
Análogamente $0x = 0$.

Observación 3.10 *Veamos las propiedades que tiene ($\mathcal{P}$,·), siendo $\mathcal{P}$ el conjunto cociente de pseudo-números sobre la relación de equivalencia definida y la operación suma.*

Teorema 3.9 (Propiedades de ($\mathcal{P}$,·)) *Se verifica que ($\mathcal{P}$,·) cumple la propiedad conmutativa y además, tiene elemento neutro (unidad) que, en este caso es $1 = \{0, \emptyset\}$.*

DEMOSTRACIÓN:

1. Conmutativa: $\forall x, y \in \mathcal{P}$ se tiene que $xy = yx$ por inducción sobre $d(x) + d(y)$.
   El resultado es cierto para $d(x) + d(y) = 0$, siendo $x = 0$ y $y = 0$.
   Suponiendo el resultado cierto $\forall x$, y pseudo-números con $d(x) + d(y) < k$, sean x,y pseudo-números con $d(x) + d(y) = k$, entonces:
   $xy = \{(X_i y + xY_i - X_i Y_i) \cup (X_d y + xY_d - X_d Y_d), (X_i y + xY_d - X_i Y_d) \cup (X_d y + xY_i - X_d Y_i)\}$
   $yx = \{(Y_i x + yX_i - Y_i X_i) \cup (Y_d x + yX_d - Y_d X_d), (Y_i x + yX_d - Y_i X_d) \cup (Y_d x + yX_i - Y_d X_i)\}$
   Por hipótesis de inducción, por ser:
   - $d(x_i) + d(y) < d(x) + d(y) = k$ se verifica que $X_i y = yX_i$.
   - $d(x) + d(y_i) < d(x) + d(y) = k$ se verifica que $xY_i = Y_i x$.
   - $d(x_i) + d(y_i) < d(x) + d(y) = k$ se verifica que $X_i Y_i = Y_i X_i$.
   - $d(x_d) + d(y) < d(x) + d(y) = k$ se verifica que $X_d y = yX_d$.
   - $d(x) + d(y_d) < d(x) + d(y) = k$ se verifica que $xY_d = Y_d x$.
   - $d(x_d +) d(y_d) < d(x) + d(y) = k$ se verifica que $X_d Y_d = Y_d X_d$.

   Luego podemos deducir que $xy = yx$ se cumple y, por tanto, la operación es conmutativa.
2. Existe elemento neutro o unidad: Por inducción sobre $d(x)$.
   Si $d(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 = \{\emptyset, \emptyset\} \Longrightarrow$ por la Proposición 3.6 se verifica que $1 \cdot 0 = 0 = \{\emptyset, \emptyset\} = x$.

Supongamos que el resultado es cierto para todo pseudo-número x con $d(x) < k$. Sea $x \in \mathcal{P}$ con $d(x) = k$ y $1 = \{0, \emptyset\}$ se verifica que:
$1x = \{(0x + 1X_i - 0X_i) \cup (\emptyset x + 1X_d - \emptyset X_d), (0x + 1X_d - 0X_d) \cup (\emptyset x + 1X_i - \emptyset X_i)\} = \{1X_i, 1X_d\}$ por ser $\emptyset x = \emptyset \ \forall x \in \mathcal{P}$ y, $0x = 0 \forall x \in \mathcal{P}$
Por hipótesis de inducción, como $d(X_i) < d(x) = k$, se verifica que $1X_i = X_i$ y, análogamente $1X_d = X_d$. Luego podemos deducir que $1x = x$ se verifica y, además como hemos demostrado la conmutatividad, también se verifica $x1 = x$.
Por tanto podemos afirmar la existencia de elemento neutro siendo este $1 = \{0, \emptyset\}$.

Teorema 3.10 (Propiedad distributiva del producto respecto de la suma) *Todo trío de pseudo-números x,y,z verifica que $x(y+z) = xy + xz$*

DEMOSTRACIÓN:
Por inducción sobre $d(x) + d(y) + d(z)$.
Si $d(x) + d(y) + d(z) = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0 \Longrightarrow$
$x(y+z) = 0(0+0) = 0 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = xy + xz$.
Supongamos que el resultado es cierto para todos x,y,z pseudo-números tales que $d(x) + d(y) + d(z) < k$ y, sean x,y,z pseudo-números con $d(x) + d(y) + d(z) = k$.
Entonces:

$$y + z = \{(Y_i + z) \cup (y + Z_i), (Y_d + z) \cup (y + Z_d)\}$$

$$\begin{aligned} x(y+z) = \{ & x(Y_i + z) + X_i(y+z) - X_i(Y_i + z) \cup \\ & x(y + Z_i) + X_i(y+z) - X_i(y + Z_i) \cup \\ & x(Y_d + z) + X_d(y+z) - X_d(Y_d + z) \cup \\ & x(y + Z_d) + X_d(y+z) - X_d(y + Z_d), \\ & x(Y_d + z) + X_i(y+z) - X_i(Y_d + z) \cup \\ & x(y + Z_d) + X_i(y+z) - X_i(y + Z_d) \cup \\ & x(Y_i + z) + X_d(y+z) - X_d(Y_i + z) \cup \\ & x(y + (Z_d)_i) + X_d(y+z) - X_d(y + Z_i)\} \end{aligned}$$

Y aplicando la hipótesis de inducción a cada sumando se tiene que:

$$\begin{aligned} x(y+z) = \{ & (xz + xY_i + X_iy - X_iY_i) \cup (xy + xZ_i + X_iz - X_iZ_i) \cup \\ & (xz + xY_d + X_dy - X_dY_d) \cup (xy + xZ_d + X_dz - X_dZ_d), \\ & (xz + xY_d + X_iy - X_iY_d) \cup (xy + xZ_d + X_iz - X_iZ_d) \cup \\ & (xz + xY_i + X_dy - X_dY_i) \cup (xy + xZ_i + X_dz - X_dZ_i)\} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} xy + xz = & \{(xY_i + X_iy - X_iY_i) \cup (xY_d + X_dy - X_dY_d), \\ & (xY_i + X_dy - X_dY_i) \cup (xY_d + X_iy - X_iY_d)\} + \\ & \{(xZ_i + X_iz - X_iZ_i) \cup (xZ_d + X_dz - X_dZ_d), \\ & (xZ_i + X_dz - X_dY_i) \cup (xZ_d + X_iz - X_iZ_d)\} = \\ & \{(xY_i + X_iy - X_iY_i + xz) \cup (xY_d + X_dy - X_dY_d + xz) \cup \\ & (xy + xZ_i + X_iz - X_iZ_i) \cup (xy + xZ_d + X_dz - X_dZ_d), \\ & (xY_i + X_dy - X_dY_i + xz) \cup (xY_d + X_iy - X_iY_d + xz) \cup \\ & (xy + xZ_i + X_dz - X_dZ_i) \cup (xy + xZ_d + X_iz - X_iZ_d)\} \end{aligned}$$

Y, como se puede comprobar, se verifica que:

$$x(y+z) = xy + xz$$

Teorema 3.11 (Propiedad asociativa del producto respecto de la suma) *Todo trío de pseudo-números x,y,z verifica que $(xy)z = x(yz)$*

DEMOSTRACIÓN:
Por inducción sobre $d(x) + d(y) + d(z)$.
El resultado es cierto para $d(x) + d(y) + d(z) = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0 \Longrightarrow x(yz) = 0 = (xy)z$.
Supongamos el resultado cierto $\forall x,y,z$ pseudo-números con $d(x)+d(y)+d(z) < k$, sean $x,y,z \in P$ con $d(x) + d(y) + d(z) = k$ entonces,
Por un lado se tiene que:

$$yz = \{(Y_iz + yZ_i - Y_iZ_i) \cup (Y_dz + yZ_d - Y_dZ_d), (Y_iz + yZ_d - Y_iZ_d) \cup (Y_dz + yZ_i - Y_dZ_i)\}$$

Y, por tanto

$$\begin{aligned} x(yz) = \{&(X_i(yz) + x(Y_iz + yZ_i - Y_iZ_i) - X_i(Y_iz + yZ_i - Y_iZ_i)) \cup \\ &(X_i(yz) + x(Y_dz + yZ_d - Y_dZ_d) - X_i(Y_dz + yZ_d - Y_dZ_d)) \cup \\ &(X_d(yz) + x(Y_iz + yZ_d - Y_iZ_d) - X_d(Y_iz + yZ_d - Y_iZ_d)) \cup \\ &(X_d(yz) + x(Y_dz + yZ_i - Y_dZ_i) - X_d(Y_dz + yZ_i - Y_dZ_i)), \\ &(X_i(yz) + x(Y_iz + yZ_d - Y_iZ_d) - X_i(Y_iz + yZ_d - Y_iZ_d)) \cup \\ &(X_i(yz) + x(Y_dz + yZ_i - Y_dZ_i) - X_i(Y_dz + yZ_i - Y_dZ_i) \cup \\ &(X_d(yz) + x(Y_iz + yZ_i - Y_iZ_i) - X_d(Y_iz + yZ_i - Y_iZ_i)) \cup \\ &(X_d(yz) + x(Y_dz + yZ_d - Y_dZ_d) - X_d(Y_dz + yZ_d - Y_dZ_d))\} \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad distributiva demostrada en el teorema anterior y la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\begin{aligned} x(yz) = \{&(X_iyz + xY_iz + xyZ_i - xY_iZ_i - X_iyZ_i - X_iY_iz + X_iY_iZ_i) \cup \\ &(X_iyz + xY_dz + xyZ_d - xY_dZ_d - X_iyZ_d - X_iY_dz + X_iY_dZ_d) \cup \\ &(X_dyz + xY_iz + xyZ_d - xY_iZ_d - X_dyZ_d - X_dY_iz + X_dY_iZ_d) \cup \\ &(X_dyz + xY_dz + xyZ_i - xY_dZ_i - X_dyZ_i - X_dY_dz + X_dY_dZ_i), \\ &(X_iyz + xY_iz + xyZ_d - xY_iZ_d - X_iyZ_d - X_iY_iz + X_iY_iZ_d) \cup \\ &(X_iyz + xY_dz + xyZ_i - xY_dZ_i - X_iyZ_i - X_iY_dz + X_iY_dZ_i) \cup \\ &(X_dyz + xY_iz + xyZ_i - xY_iZ_i - X_dyZ_i - X_dY_iz + X_dY_iZ_i) \cup \\ &(X_dyz + xY_dz + xyZ_d - xY_dZ_d - X_dyZ_d - X_dY_dz + X_dY_dZ_d)\} \end{aligned}$$

Y por otro lado se comprueba que el valor de $(xy)z$ es el mismo:

$$xy = \{(X_iy + xY_i - X_iY_i) \cup (X_dy + xY_d - X_dY_d), (X_iy + xY_d - X_iY_d) \cup (X_dy + xY_i - X_dY_i)\}$$

Y, por tanto

$$\begin{aligned} (xy)z = \{&((X_iy + xY_i - X_iY_i)z + (xy)Z_i - (X_iy + xY_i - X_iY_i)Z_i) \cup \\ &((X_dy + xY_d - X_dY_d)z + (xy)Z_i - (X_dy + xY_d - X_dY_d)Z_i) \cup \\ &((X_iy + xY_d - X_iY_d)z + (xy)Z_d - (X_iy + xY_d - X_iY_d)Z_d) \cup \\ &((X_dy + xY_i - X_dY_i)z + (xy)Z_d - (X_dy + xY_i - X_dY_i)Z_d), \\ &((X_iy + xY_i - X_iY_i)z + (xy)Z_d - (X_iy + xY_i - X_iY_i)Z_d) \cup \\ &(X_dy + xY_d - X_dY_d)z + (xy)Z_d - (X_dy + xY_d - X_dY_d)Z_d) \cup \\ &((X_iy + xY_d - X_iY_d)z + (xy)Z_i - (X_iy + xY_d - X_iY_d)Z_i) \cup \\ &((X_dy + xY_i - X_dY_i)z + (xy)Z_i - (X_dy + xY_i - X_dY_i)Z_i)\} \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad distributiva demostrada en el teorema anterior y la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$\begin{aligned} (xy)z = \{&(X_iyz + xY_iz - X_iY_iz + xyZ_i - X_iyZ_i - xY_iZ_i + X_iY_iZ_i) \cup \\ &(X_dyz + xY_dz - X_dY_dz + xyZ_i - X_dyZ_i - xY_dZ_i + X_dY_dZ_i) \cup \\ &(X_iyz + xY_dz - X_iY_dz + xyZ_d - X_iyZ_d - xY_dZ_d + X_iY_dZ_d) \cup \end{aligned}$$

$$(X_dyz + xY_iz - X_dY_iz + xyZ_d - X_dyZ_d - xY_iZ_d + X_dY_iZ_d),$$
$$(X_iyz + xY_iz - X_iY_iz + xyZ_d - X_iyZ_d - xY_iZ_d + X_iY_iZ_d) \cup$$
$$(X_dyz + xY_dz - X_dY_dz + xyZ_d - X_dyZ_d - xY_dZ_d + X_dY_dZ_d) \cup$$
$$(X_iyz + xY_dz - X_iY_dz + xyZ_i - X_iyZ_i - xY_dZ_i + X_iY_dZ_i) \cup$$
$$(X_dyz + xY_iz - X_dY_iz + xyZ_i - X_dyZ_i - xY_iZ_i + X_dY_iZ_i)\}$$

Y, como se puede comprobar, se verifica que:

$$(xy)z = x(yz)$$

Teorema 3.12 *El conjunto de pseudo-números con la operación producto ($\mathcal{P}$,$\cdot$) es un anillo conmutativo y con identidad.*

DEMOSTRACIÓN:
Inmediata a partir de los resultados del teorema anterior ya que se deduce que:

- La operación es interna por la Proposición 3.5.
- El producto es asociativo por el Teorema 3.11.
- El producto es conmutativo por el Teorema 3.9.
- El producto es distributivo por el Teorema 3.10.
- Existe elemento neutro, que es el $1 = \{0, \emptyset\}$ por el Teorema 3.9.

Observación 3.11 *De ello se pueden deducir las propiedades que cumplen todos los anillos conmutativos. Por ejemplo:*

a) $(-x)(-y) = xy$

b) $x(-y) = (-x)y = -xy$
Porque se tiene $0 = x0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y)$, de ahí que $x(-y) = -xy$

Observación 3.12 *El conjunto de números surreales es un subconjunto del conjunto de pseudo-números. Vamos a demostrar que el conjunto de los números surreales con la operación producto es un subanillo del anillo de los pseudo-números y, por tanto, también es un anillo conmutativo.*

Proposición 3.7 *Si x e y son números surreales y xy es un número surreal, entonces si $x > 0$ e $y > 0 \Longrightarrow xy > 0$.*

DEMOSTRACIÓN:

- Si $x > 0$ y $0 \notin X_i \Longrightarrow x = \{0 \cup X_i, X_d\}$ y, por tanto podemos suponer que $0 \in X_i$.
- Si $y > 0$ y $0 \notin Y_i \Longrightarrow y = \{0 \cup Y_i, Y_d\}$ y, por tanto podemos suponer que $0 \in Y_i$.

Luego podemos concluir que $0 \in X_iy + xY_i - X_iY_i \Longrightarrow 0 \in (xy)_i \Longrightarrow xy > 0$.

Proposición 3.8 *Si x,a,y y b son números surreales y xy,ab,xb e ya son también números surreales, entonces:*
Si $x \leq a$ e $y \leq b \Longrightarrow xb + ya \leq xy + ab$.
Si $x < a$ e $y < b \Longrightarrow xb + ya < xy + ab$.

Notación 3.1 *Notaremos a las hipótesis de esta proposición por $P(x, a; y, b)$.*

DEMOSTRACIÓN:
Por ser x, a, y, b, xy, ab, xb e ya números surreales, se tiene que:

- Si $x < a$ e $y < b \Longrightarrow a - x > 0$ y $b - y > 0 \Longrightarrow$ por la propiedad distributiva demostrada en el Teorema 3.10: $(a-x)(b-y) = ab - ay - xb + xy$ y, como son números surreales por hipótesis, aplicando la proposición anterior tenemos que:
$$ab - ay - xb + xy > 0 \Longrightarrow ab + xy > ay + xb$$

- Si $x = a$ o $y = b \Longrightarrow a - x = 0$ o $b - y = 0 \Longrightarrow$ por la propiedad distributiva demostrada en el Teorema 3.10: $(a-x)(b-y) = ab - ay - xb + xy$ y, como el producto de un número surreal por cero, es cero, tenemos que:
$$ab - ay - xb + xy = 0 \Longrightarrow ab + xy = ay + xb$$

Teorema 3.13 *Si x e y son números surreales entonces xy es un número surreal.*

DEMOSTRACIÓN:
Por inducción sobre $d(x) + d(y)$.
El resultado es cierto para $d(x) + d(y) = 0$, ya que si $d(x) + d(y) = 0$ entonces $x = y = 0 \Longrightarrow xy = 0 = \{\emptyset, \emptyset\}$.
Supongamos el resultado es cierto para todos números surreales x, y con $d(x) + d(y) < k$. Sean x, y números surreales con $d(x) + d(y) = k$.
Tenemos que:

$$xy = \{(X_iy + xY_i - X_iY_i) \cup (X_dy + xY_d - X_dY_d), (X_iy + xY_d - X_iY_d) \cup (X_dy + xY_i - X_dY_i)\}.$$

Por hipótesis de inducción se verifica que X_iy, xY_i, X_iY_i, X_dy, xY_d, X_dY_d, X_iY_d, X_dY_i son números surreales $\Longrightarrow (xy)_i$ y $(xy)_d$ son números surreales.

A) Veamos que $X_iy + xY_i - X_iY_i < X_i'y + xY_d - X_i'Y_d$

i) Puede ocurrir que $X_i \leq X_i'$ y entonces se dan las condiciones $P(X_i, X_i'; Y_i, y)$ y, por tanto tenemos:
$$X_iy + X_i'Y_i \leq X_iY_i + X_i'y \Longrightarrow X_iy - X_iY_i \leq X_i'y - X_i'Y_i$$
$$\Longrightarrow X_iy + xY_i - X_iY_i \leq X_i'y + xY_i - X_i'Y_i \ (*)$$
Como además también se dan las condiciones de $P(X_i', x; Y_i, Y_d)$ tenemos que:
$$X_i'Y_d + xY_i < X_i'Y_i + xY_d \Longrightarrow xY_i - X_i'Y_i < xY_d - X_i'Y_d$$
$$\Longrightarrow X_i'y + xY_i - X_i'Y_i < X_i'y + xY_d - X_i'Y_d \ (**)$$
Y, de las desigualdades $(*)$ y $(**)$ se deduce que:
$$X_iy + xY_i - X_iY_i \leq X_i'y + xY_i - X_i'Y_i < X_i'y + xY_d - X_i'Y_d$$

ii) Si por el contrario se da que $X_i' \leq X_i$, entonces se dan las condiciones de $P(X_i, x; Y_i, Y_d)$ y, por tanto tenemos:
$$X_iY_d + xY_i < X_iY_i + xY_d \Longrightarrow X_iy - X_iY_i \leq xY_d - X_iY_d$$
$$\Longrightarrow X_iy + xY_i - X_iY_i \leq xY_i + xY_d - X_iY_d \ (*)$$

Como además también se dan las condiciones de $P(X_i', X_i; y, Y_d)$ tenemos que:

$$X_i'Y_d + X_iy < X_i'y + X_iY_d \Longrightarrow X_iy - X_iY_d < X_i'y - X_i'Y_d$$
$$\Longrightarrow X_iy + xY_d - X_iY_d < X_i'y + xY_d - X_i'Y_d \ (**)$$

Y, de las desigualdades $(*)$ y $(**)$ se deduce que:

$$X_iy + xY_i - X_iY_i < X_i'y + xY_d - X_i'Y_d$$

B) Veamos que $X_iy + xY_i - X_iY_i < X_dy + xY_i' - X_dY_i'$

i) Puede ocurrir que $Y_i \leq Y_i'$ y entonces se dan las condiciones $P(X_i, x; Y_i, Y_i')$ y, por tanto tenemos:

$$X_iY_i' + xY_i \leq X_iY_i + xY_i' \Longrightarrow xY_i - X_iY_i \leq xY_i' - X_iY_i'$$
$$\Longrightarrow X_iy + xY_i - X_iY_i \leq X_iy + xY_i' - X_iY_i' \ (*)$$

Como además también se dan las condiciones de $P(X_i, X_d; Y_i', y)$ tenemos que:

$$X_iy + X_dY_i' < X_iY_i' + X_dy \Longrightarrow X_iy - X_iY_i' < X_dy - X_dY_i'$$
$$\Longrightarrow X_iy + xY_i' - X_iY_i' < X_dy + xY_i' - X_dY_i' \ (**)$$

Y, de las desigualdades $(*)$ y $(**)$ se deduce que:

$$X_iy + xY_i - X_iY_i \leq X_iy + xY_i' - X_iY_i' < X_dy + xY_i' - X_dY_i'$$

ii) Si por el contrario se da que $Y_i' \leq Y_i$, entonces se dan las condiciones de $P(X_i, X_d; Y_i, y)$ y, por tanto tenemos:

$$X_iy + X_dY_i \leq X_iY_i + X_dy \Longrightarrow X_iy - X_iY_i \leq X_dy - X_dY_i$$
$$\Longrightarrow X_iy + xY_i - X_iY_i \leq X_dy + xY_i - X_dY_i \ (*)$$

Como además también se dan las condiciones de $P(x, X_d; Y_i', Y_i)$ tenemos que:

$$xY_i + X_dY_i' < xY_i' + X_dY_i \Longrightarrow xY_i - X_dY_i < xY_i' - X_dY_i'$$
$$\Longrightarrow X_dy + xY_i - X_dY_i < X_dy + xY_i' - X_dY_i' \ (**)$$

Y, de las desigualdades $(*)$ y $(**)$ se deduce que:

$$X_iy + xY_i - X_iY_i \leq X_dy + xY_i - X_dY_i < X_dy + xY_i' - X_dY_i'$$

C) Veamos que $X_dy + xY_d - X_dY_d < X_iy + xY_d' - X_iY_d'$

i) Puede ocurrir que $Y_d \leq Y_d'$ y entonces se dan las condiciones $P(X_i, X_d; y, Y_d)$ y, por tanto tenemos:

$$X_iY_d + X_dy \leq X_iy + X_dY_d \Longrightarrow X_dy - X_dY_d \leq X_iy - X_iY_d$$
$$\Longrightarrow X_dy + xY_d - X_dY_d \leq X_iy + xY_d - X_iY_d \ (*)$$

Como además también se dan las condiciones de $P(X_i, x; Y_d, Y_d')$ tenemos que:

$$X_iY'_d + xY_d < X_iY_d + xY'_d \Longrightarrow xY_d - X_iY_d < xY'_d - X_iY'_d$$
$$\Longrightarrow X_iy + xY_d - X_iY_d < X_iy + xY'_d - X_iY'_d \ (**)$$

Y, de las desigualdades $(*)$ y $(**)$ se deduce que:

$$X_dy + xY_d - X_dY_d \leq X_iy + xY_d - X_iY_d < X_iy + xY'_d - X_iY'_d$$

ii) Si por el contrario se da que $Y'_d \leq Y_d$, entonces se dan las condiciones de $P(x, X_d; Y'_dY_d)$ y, por tanto tenemos:

$$xY_d + X_dY'_d \leq xY'_d + X_dY_d \Longrightarrow xY_d - X_dY_d \leq xY'_d - X_dY'_d$$
$$\Longrightarrow X_dy + xY_d - X_dY_d \leq X_dy + xY'_d - X_dY'_d \ (*)$$

Como además también se dan las condiciones de $P(X_i, X_d; y, Y'_d)$ tenemos que:

$$X_iY'_d + X_dy < X_iy + X_dY'_d \Longrightarrow X_dy - X_dY'_d < X_iy - X_iY'_d$$
$$\Longrightarrow X_dy + xY'_d - X_dY'_d < X_iy + xY'_d - X_iY'_d \ (**)$$

Y, de las desigualdades $(*)$ y $(**)$ se deduce que:

$$X_dy + xY_d - X_dY_d \leq X_dy + xY'_d - X_dY'_d < X_iy + xY'_d - X_iY'_d$$

D) Veamos que $X_dy + xY_d - X_dY_d < X'_dy + xY_i - X'_dY_i$

i) Puede ocurrir que $X_d \leq X'_d$ y entonces se dan las condiciones $P(x, X_d; Y_i, Y_d)$ y, por tanto tenemos:

$$xY_d + X_dY_i \leq xY_i + X_dY_d \Longrightarrow xY_d - X_dY_d \leq xY_i - X_dY_i$$
$$\Longrightarrow X_dy + xY_d - X_dY_d \leq xY_i + X_dy - X_dY_i \ (*)$$

Como además también se dan las condiciones de $P(X_d, X'_d; Y_i, y)$ tenemos que:

$$Xdy + X'_dY_i < X_dY_i + X'_dy \Longrightarrow X_dy - X_dY_i < X'_dy - X'_dY_i$$
$$\Longrightarrow xY_i + X_dy - X_dY_i < X'_dy + xY_i - X'_dY_i \ (**)$$

Y, de las desigualdades $(*)$ y $(**)$ se deduce que:

$$X_dy + xY_d - X_dY_d \leq xY_i + X_dy - X_dY_i < X'_dy + xY_i - X'_dY_i$$

ii) Si por el contrario se da que $X'_d \leq X_d$, entonces se dan las condiciones de $P(X'_d, X_d; y, Y_d)$ y, por tanto tenemos:

$$X'_dY_d + X_dy \leq X'_dy + X_dY_d \Longrightarrow X_dy - X_dY_d \leq X'_dy - X'_dY_d$$
$$\Longrightarrow X_dy + xY_d - X_dY_d \leq X'_dy + xY_d - X'_dY_d \ (*)$$

Como además también se dan las condiciones de $P(x, X'_d; Y_i, Y_d)$ tenemos que:

$$xY_d + X'_dY_i < xY_iX'_dY_d \Longrightarrow xY_d - X'_dY_d < xY_i - X'_dY_i$$
$$\Longrightarrow X'_dy + xY_d - X'_dY_d < X'_dy + xY_i - X'_dY_i \ (**)$$

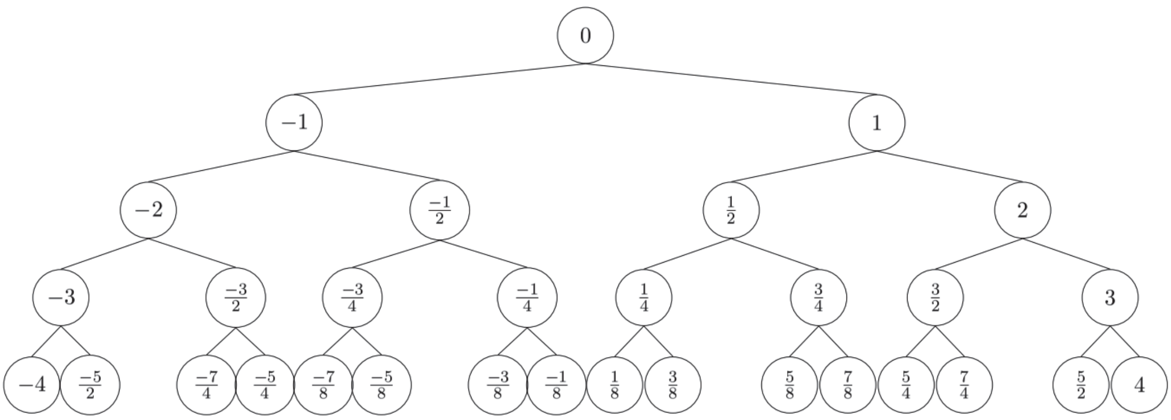
Y, de las desigualdades $(*)$ y $(**)$ se deduce que:

$$X_d y + xY_d - X_dY_d \leq X'_d y + xY_d - X'_dY_d < X'_d y + xY_i - X'_dY_i$$

Y, como hemos verificado que ambas partes de (xy), siendo estas $(xy)_i$ y $(xy)_d$, son números surreales y son tales que $(xy)_i < (xy)_d$, queda demostrado que (xy) también es un número surreal.

Ejemplos:

- $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ por la Proposición 3.6.
- $1 \cdot 1 = 1$ por ser 1 el elemento neutro, demostrado en el Teorema 3.9.
- $(-1)\cdot(-1) = \{(\emptyset\cdot(-1) + (-1)\cdot\emptyset - \emptyset\cdot\emptyset) \cup (0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 - 0\cdot 0), (\emptyset\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 - \emptyset\cdot 0) \cup (0\cdot(-1) + (-1)\cdot\emptyset - 0\cdot\emptyset)\} = \{\emptyset\cup 0, \emptyset\cup\emptyset\} = \{0,\emptyset\} = 1$
- $1\cdot 2 = \{(0\cdot 2 + 1\cdot 1 - 0\cdot 1)\cup(\emptyset\cdot 2 + 1\cdot\emptyset - \emptyset\cdot\emptyset), (0\cdot 2 + 1\cdot\emptyset - 0\cdot\emptyset)\cup(\emptyset\cdot 2 + 1\cdot 1 - \emptyset\cdot 1)\} = \{1\cup\emptyset, \emptyset\cup\emptyset\} = \{1,\emptyset\} = 2$
- $1\cdot(-2) = \{(0\cdot(-2) + 1\cdot\emptyset - 0\cdot\emptyset)\cup(\emptyset\cdot(-2) + 1\cdot(-1) - \emptyset\cdot(-1)), (0\cdot(-2) + 1\cdot(-1) - 0\cdot(-1))\cup(\emptyset\cdot(-2) + 1\cdot\emptyset - \emptyset\cdot\emptyset)\} = \{\emptyset\cup\emptyset, (-1)\cup\emptyset\} = \{\emptyset,(-1)\} = -2$
- $2\cdot 2 = \{(1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1)\cup(\emptyset\cdot 2 + 2\cdot\emptyset - \emptyset\cdot\emptyset), (0\cdot 2 + 2\cdot\emptyset - 0\cdot\emptyset)\cup(\emptyset\cdot 2 + 2\cdot 1 - \emptyset\cdot 1)\} = \{3\cup\emptyset, \emptyset\cup\emptyset\} = \{3,\emptyset\} = 4$
- $(-2)\cdot(2) = \{(\emptyset\cdot(2) + (-2)\cdot 1 - \emptyset\cdot 1)\cup((-1)\cdot 2 + (-2)\cdot\emptyset - (-1)\cdot\emptyset), (\emptyset\cdot 2 + (-2)\cdot\emptyset - \emptyset\cdot\emptyset)\cup((-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 - (-1)\cdot 1\} = \{\emptyset\cup\emptyset, \emptyset\cup -3\} = \{\emptyset,(-3)\} = -4$
- $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \{(0\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} - 0\cdot 0)\cup(1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot 1), (0\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 - 0\cdot -1)\cup(1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 - 0\cdot 1)\} = \{0\cup 0, \frac{1}{2}\cup\frac{1}{2}\} = \{0,\frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$



El gráfico anterior muestra los siguientes números creados, añadiendo 16 números nuevos encontrados con $d(x) = 4$.

Capítulo 4

Aplicaciones y juegos

4.1. Juegos combinatorios

Los juegos combinatorios son aquellos en los que participan solamente dos jugadores, siendo estos I y D. Se puede interpretar cada posición del juego como P y, desde cada una de ellas, las reglas del juego indican los desplazamientos válidos de I y D. Se pueden expresar éstos como P_i y P_d siendo los movimientos permitidos de los jugadores I y D respectivamente, y sin que exista una secuencia infinita de ellos.
El juego finaliza cuando el jugador al que le toca mover tiene un conjunto vacío de opciones de movimiento, es decir que, $P_i = \emptyset$ o bien $P_d = \emptyset$. Se identifica el juego con la posición desde la que se comienza. Tenemos, por ejemplo:

$0 = \{\emptyset, \emptyset\}$ $\quad$ $1 = \{0, \emptyset\}$ $\quad$ $-1 = \{\emptyset, 0\}$ $\quad$ $* = \{0, 0\}$

Figura 4.1: Posiciones iniciales

Una estrategia ganadora para un jugador es la que conduce a éste a una victoria independientemente de los movimientos de su contrincante. Existen diferentes tipos:

- En el juego $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.
- En el juego $1 = \{0, \emptyset\}$, el jugador I tiene una estrategia ganadora, independientemente de quién empiece.
- En el juego $-1 = \{\emptyset, 0\}$, el jugador D tiene una estrategia ganadora, independientemente de quién empiece.

- En el juego $* = \{0, 0\}$, el primer jugador tiene una estrategia ganadora.

Se define que un juego $G = \{P_i, P_d\}$:

- $G > 0$, es positivo, si hay estrategia ganadora para I
- $G < 0$, es negativo, si hay estrategia ganadora para D
- $G = 0$, si el segundo jugador tiene una estrategia ganadora
- $G \parallel 0$, si el primer jugador tiene una estrategia ganadora

Y, de ello deducimos que:

- $G \geq 0 \iff G > 0$ o $G = 0$, es decir, tiene estrategia ganadora el jugador I o el segundo en comenzar.
- $G \leq 0 \iff G < 0$ o $G = 0$ es decir, tiene estrategia ganadora el jugador D o el segundo en comenzar.
- $G \mid\!\rhd 0 \iff G > 0$ o $G \parallel 0$, es decir, tiene estrategia ganadora el jugador I o el primero en comenzar.
- $G \lhd\!\mid 0 \iff G < 0$ o $G \parallel 0$, es decir, tiene estrategia ganadora el jugador D o el primero en comenzar.

4.2. Juegos simultáneos

Nos referimos a juegos simultáneos cuando los jugadores I y D juegan a la vez a dos juegos distintos. En cada turno, el jugador al que le toca mover elige uno de los dos juegos y hace en él una jugada válida, luego, le toca escoger al segundo jugador y, así sucesivamente. El juego termina cuando el jugador al que le toca mover no puede hacer ninguna jugada válida en ninguno de los dos juegos. Podemos interpretar el valor de este juego como la suma de los dos juegos componentes.

4.3. Juego con Dominoes de Göran Andersson

En este juego se dispone de un tablero dividido en cuadrados. Los jugadores alternativamente sitúan fichas de dominó sobre el tablero cubriendo dos cuadrados adyacentes. El jugador I debe situar las fichas verticalmente mientras que el jugador D debe situarlas horizontalmente. Las fichas del tablero nunca deben solaparse unas con otras. El ganador de la partida es el último jugador capaz de realizar un movimiento válido.

4.3.1. Análisis del juego

En una partida de este juego, después de una serie de movimientos, suele ocurrir que los espacios vacíos en el tablero quedan divididos en regiones, por lo que el juego se transforma en una suma de juegos más pequeños y simples.
Los casos más sencillos son los siguientes:

Figura 4.2: Ninguno tiene un movimiento válido $0 = \{\emptyset, \emptyset\}$

Figura 4.3: El jugador I tiene un movimiento válido $1 = \{0, \emptyset\}$

Figura 4.4: El jugador D tiene un movimiento válido $-1 = \{\emptyset, 0\}$

En general si una región no tiene opciones de movimientos para D y tiene n opciones sucesivas de movimientos para I, su valor será n:

$$n = \{\{n-1, n-1, ..., 1, 0\}, \emptyset\} = \{n-1, \emptyset\}$$

En caso contrario:

$$-n = \{\emptyset, 1-n\}$$

Respecto a las fracciones tenemos que:

- $\{0, 1\} = \frac{1}{2}$
- $\{0, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$
- $\{0, \frac{1}{4}\} = \frac{1}{8}$

Y en general se verifica que:

$$\frac{2m+1}{2^{n+1}} = \left\{\frac{2m}{2^{n+1}}, \frac{2m+2}{2^{n+1}}\right\} = \left\{\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right\}$$

Así, por ejemplo:

$$\frac{357}{128} = \left\{\frac{356}{128}, \frac{358}{128}\right\} = \left\{\frac{89}{32}, \frac{179}{64}\right\}$$

A continuación se muestran otros casos de posibles desplazamientos para los jugadores I y D y su representación:

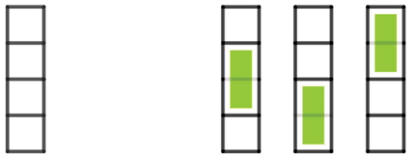


Figura 4.5: El jugador I tiene dos movimientos válidos $2 = \{(0,1), \emptyset\}$

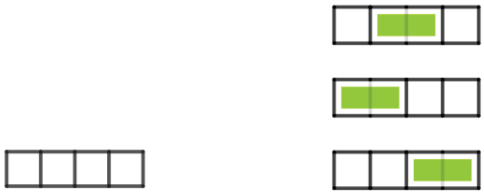


Figura 4.6: El jugador D tiene dos movimientos válidos $-2 = \{\emptyset, (0,1)\}$

Figura 4.7: Tanto el jugador I como el jugador D tienen un movimiento válido $* = \{0, 0\}$

Figura 4.8: El jugador I tiene dos movimientos válidos y el jugador D tiene solamente un movimiento válido $\frac{1}{2} = \{(0,-1), 1\}$

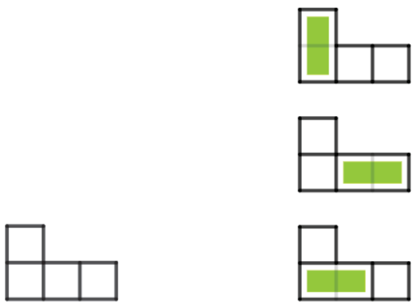


Figura 4.9: El jugador I tiene un movimiento válido y el jugador D tiene dos movimientos válidos $\frac{-1}{2} = \{-1, (0,1)\}$

Figura 4.10: Tanto el jugador I como el jugador D tienen dos movimientos válidos $\pm 1 = \{1, -1\}$, en este juego gana el primero en mover, es un juego fuzzy.

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

En este capítulo, se presentarán los resultados obtenidos con este trabajo y las conclusiones personales del autor.

5.1. Resultados

Los conocimientos adquiridos a lo largo del estudio y desarrollo del proyecto se han plasmado implementando el juego de Dominoes de Göran Andersson, a través del cual se pueden observar las diferentes posibilidades de movimientos de cada uno de los dos jugadores y, por tanto, dando lugar a la definición de juego $G = \{P_i, P_d\}$.

Para la implementación del juego se ha empleado el lenguaje de programación de Python utilizando principalmente el conjunto de módulos de Pygame, que permiten la creación de videojuegos.

El diseño del juego es una mezcla entre los conocidos ajedrez y dominó. De cada uno de ellos se ha escogido una parte de su estética. Del primero, el tablero formado por 64 casillas (8×8) de colores blanco y negro alternativamente y, del segundo, las fichas rectangulares que ocupan dos casillas contiguas.

Como se ha explicado anteriormente, el jugador I debe situar las fichas verticalmente y el jugador D horizontalmente. Para lograr una mayor claridad se han creado las fichas de los dos jugadores de colores diferentes, azul y rojo respectivamente, de forma que resulte más sencilla su distinción. Además se podrá observar cómo, a medida que los jugadores van colocando sus fichas, el tablero queda dividido en regiones separadas por una sola casilla. Dando lugar al fin del juego cuando ya no hay posibilidad de movimiento para alguno de los dos jugadores, es decir, cuando no queden dos casillas contiguas libres y, por tanto, siendo el jugador con un conjunto vacío de desplazamientos el perdedor.

A continuación se va a mostrar una partida de este juego.

Lo primero que se puede observar es la ventana principal, a la que se le ha añadido un tablero sobre el que se va a comenzar a jugar:

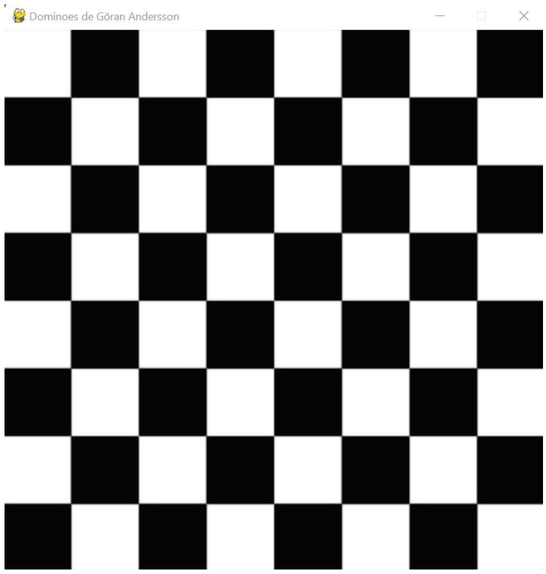


Figura 5.1: Tablero

Una vez abierta comienza el juego. El jugador I ha de colocar una ficha verticalmente, pudiendo situarla en cualquier casilla ya todas se encuentran libres. Seguidamente el jugador D colocará su primera ficha horizontalmente.

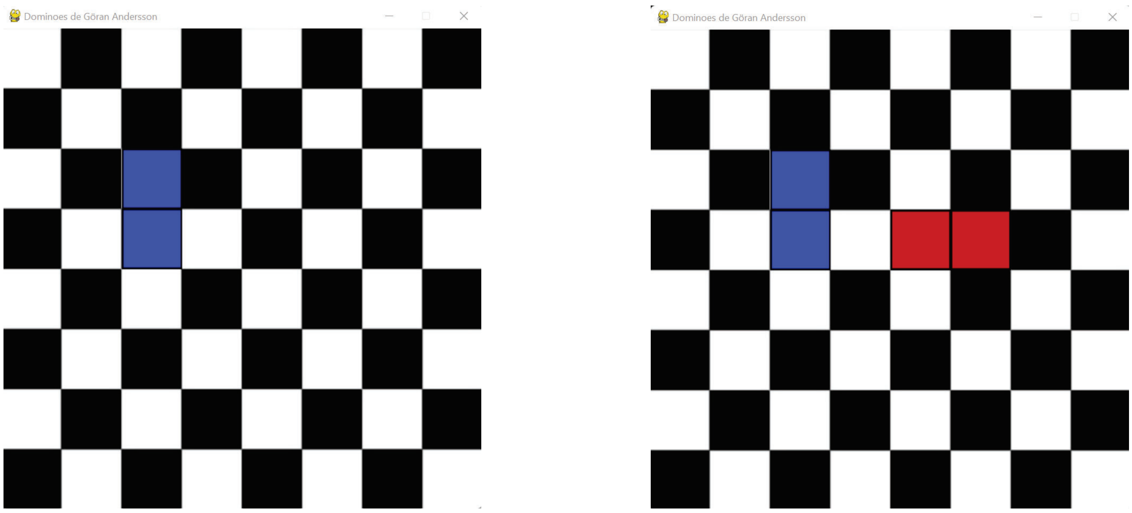


Figura 5.2: Primer movimiento del jugador I y D

Una vez realizado el primer movimiento de cada jugador, deben continuar colocando fichas sucesivamente siendo imposible superponer unas con otras ni salirse fuera del tablero.

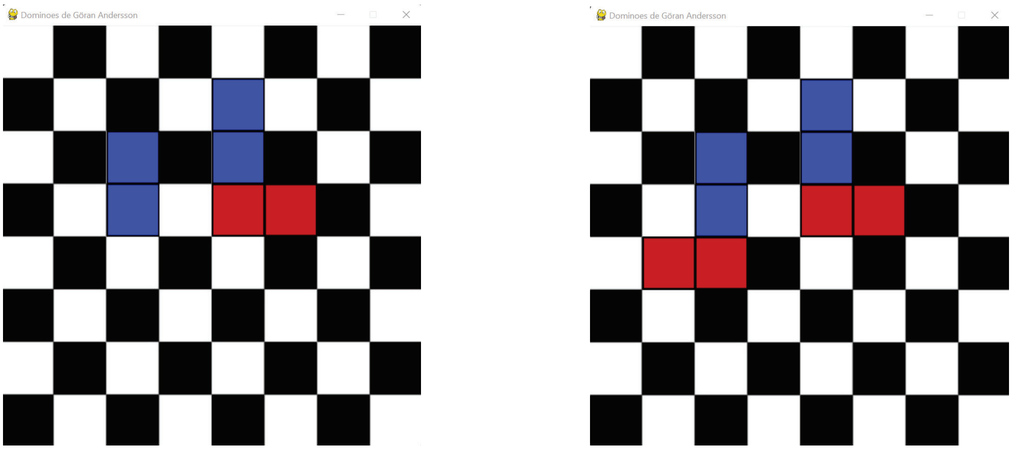


Figura 5.3: Segundo movimiento del jugador I y D

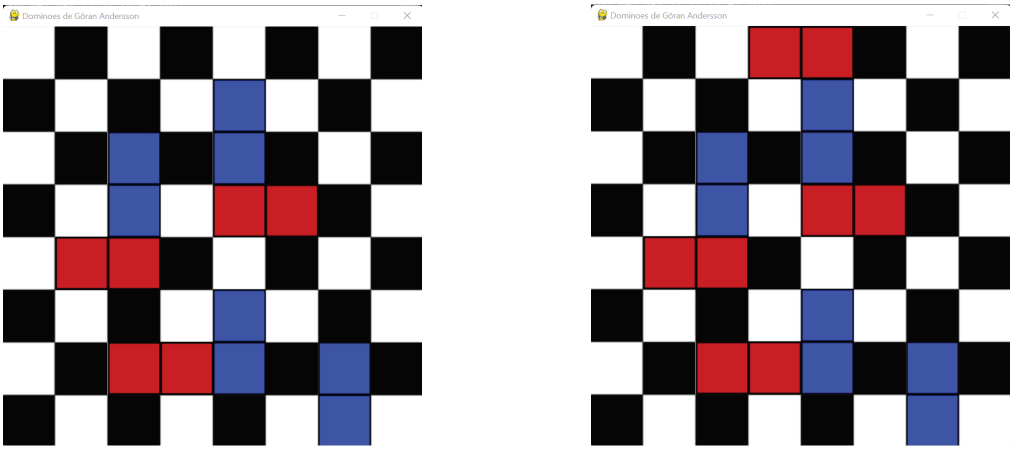


Figura 5.4: Cuarto movimiento del jugador I y D

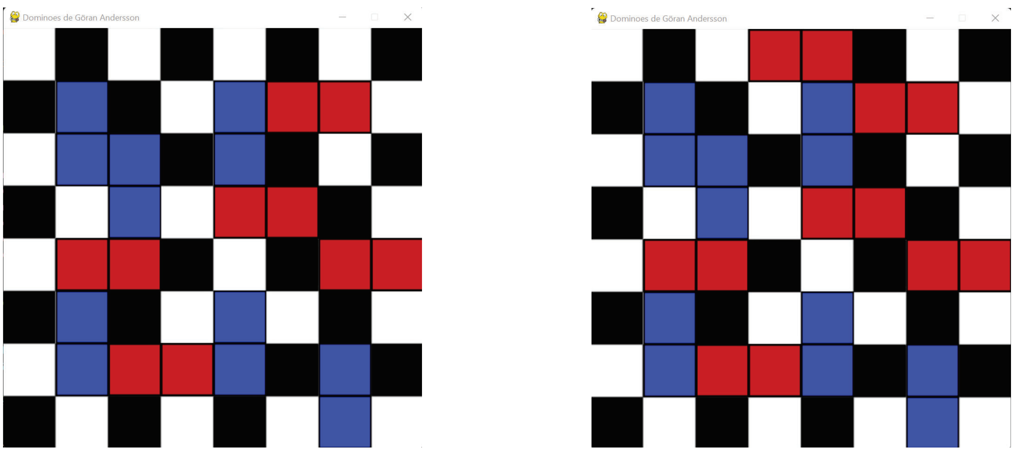


Figura 5.5: Sexto movimiento del jugador I y D

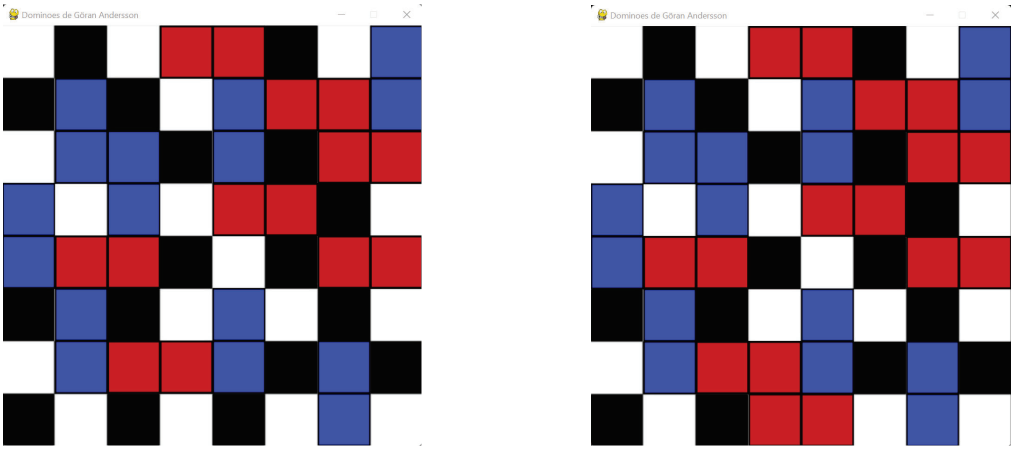


Figura 5.6: Octavo movimiento del jugador I y D

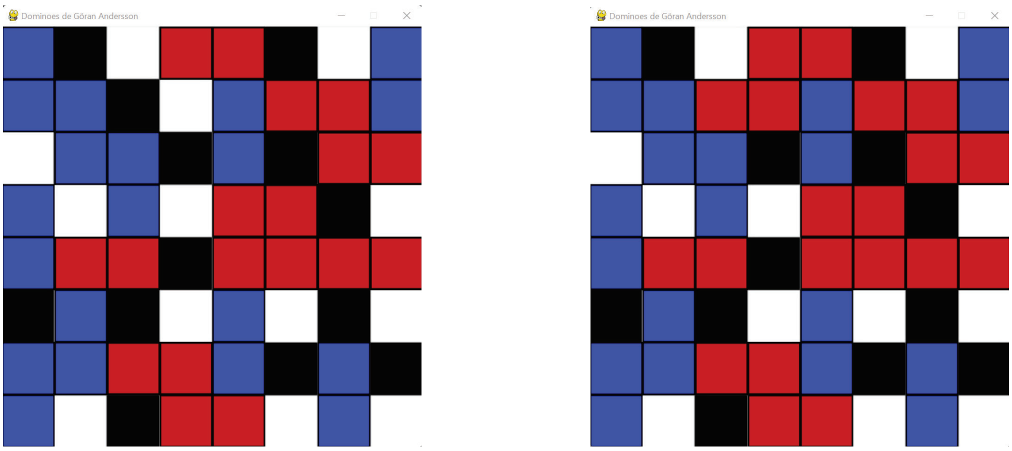


Figura 5.7: Décimo movimiento del jugador I y D

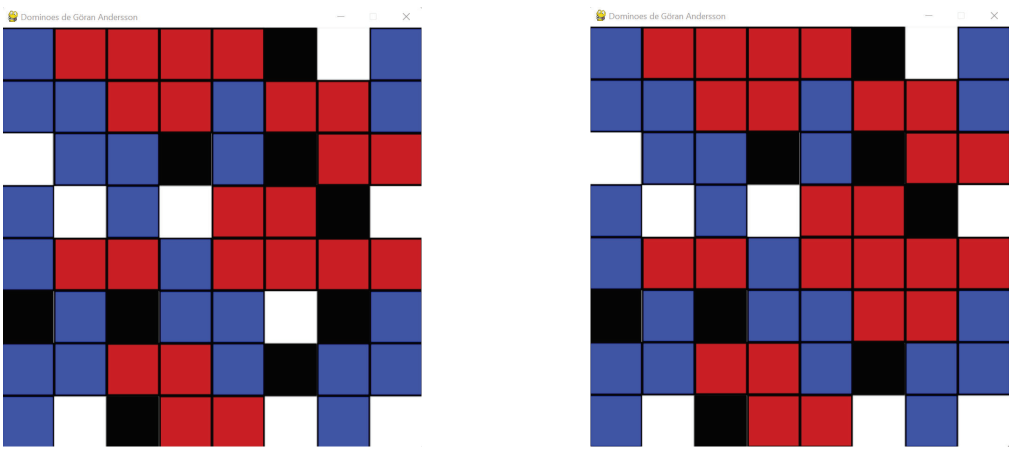


Figura 5.8: Duodécimo movimiento del jugador I y D

Podemos observar en la siguiente figura, como se comentaba al principio del apartado, que el tablero se encuentra claramente divido en secciones separadas por casillas vacías en las que ninguno de los dos jugadores puede colocar más fichas.

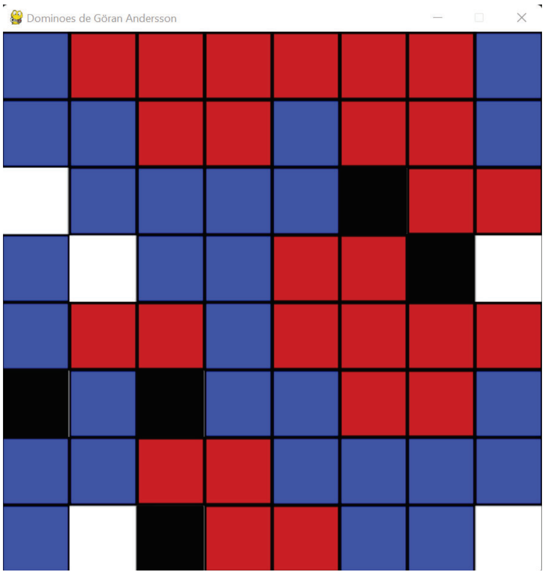


Figura 5.9: Decimocuarto movimiento del jugador I

El jugador I, tras colocar esta última ficha, se ha quedado sin movimientos puesto que no quedan dos casillas verticales contiguas vacías.

Por lo tanto, el jugador D habría ganado.

Figura 5.10: Fin del juego

5.2. Conclusiones generales

El desarrollo de este proyecto ha sido realmente gratificante, tanto académicamente como personalmente y he logrado aprender y crecer como estudiante.

Volviendo a lo mencionado en la introducción, en concreto a la sección de objetivos, el último de ellos fue añadido a medida que iba avanzando con el trabajo, teniendo en cuenta el progreso y rápido avance, y que era viable poder implementar el juego. Me encuentro muy satisfecha con el resultado obtenido, además de haber logrado entender documentos científicos, en inglés mayoritariamente, también he conseguido desarrollar código de forma eficiente y profesional poniendo en práctica todos los conocimientos adquiridos a lo largo del grado además de los aprendidos durante la realización del proyecto.

Personalmente, me encantan las matemáticas desde muy pequeña, todo lo relacionado con números y cálculos han despertado siempre mi interés. A la hora de plantearme la elaboración de mi proyecto, me llamó mucho la atención el tema de los números surreales puesto que jamás antes había oído hablar de ellos. Me resultaba curioso y a la vez emocionante aprender algo tan nuevo e interesante para mí como son los números surreales, ya que engloban todos los demás números.

Debo admitir que me ha resultado complicado a la vez que desafiante tanto demostrar algunos de los teoremas, debido a la escasa información que hay sobre este tema, como desarrollar el código del juego puesto que no había programado con Pygame anteriormente. Implementar los sprites, las fichas en este caso y conseguir que aparezcan en las diferentes posiciones donde los jugadores deciden colocarlas con el ratón, me supuso un reto pero finalmente lo he logrado con éxito, habiendo llegado a un resultado del que estoy muy orgullosa.

A continuación se van a mostrar algunas de las partes del código:

```python
class Ficha_izq(pygame.sprite.Sprite):
    # La ficha y su comportamiento en la pantalla
    def __init__(self):
        pygame.sprite.Sprite.__init__(self)
        # cargamos imagen
        self.image = carga_imagen("Ficha_izq1.png", IMG_DIR, alpha=True)
        # rectangulo con las dimensiones y posición de la imagen
        self.rect = self.image.get_rect()

    def dibujar(self, x, y):
        # Calculamos casilla donde colocar ficha
        self.rect.x = x* ANCHO_CASILLA
        self.rect.y = y* LARGO_CASILLA
```

Figura 5.11: Creación y colocación de fichas jugador *I*

```python
class Ficha_dcha(pygame.sprite.Sprite):
    # La ficha y su comportamiento en la pantalla
    def __init__(self):
        pygame.sprite.Sprite.__init__(self)
        self.image = carga_imagen("Ficha_dcha1.png", IMG_DIR, alpha=True)
        # rectangulo con las dimensiones y posición de la imagen
        self.rect = self.image.get_rect()

    def dibujar(self, x, y):
        # Calculamos casilla donde colocar ficha
        self.rect.x = x* ANCHO_CASILLA
        self.rect.y = y* LARGO_CASILLA
```

Figura 5.12: Creación y colocación de fichas jugador D

```python
    # Grupo con las fichas colocadas
    fichas = pygame.sprite.Group()
    pygame.display.flip()

    # variables booleanas para controlar turno del jugador y fin del juego
    turno = True
    terminado = False
    reloj = pygame.time.Clock()

    # Inicializamos matriz de casillas ocupadas con 0
    ocupadas = np.full((8, 8), 0)

    # Inicializamos casillas libres para ambos jugadores
    casillas_libres_izq = True
    casillas_libres_dcha = True
```

Figura 5.13: Inicialización de las principales variables del juego

```python
                if evento.type == pygame.MOUSEBUTTONDOWN:
                    pos = pygame.mouse.get_pos()
                    seleccionado = obtenerPos(pos)
                    x = int(seleccionado[0])
                    y = int(seleccionado[1])
```

Figura 5.14: Obtención de la posición del ratón

```
elif ((turno) and (casillas_libres_izq)):
    # Comprobamos que jugador I no intenta colocar en última fila
    if (y == 7):
        print("Se sale fuera del tablero")
    elif ((ocupadas[y][x]== 0) and (ocupadas[y+1][x]== 0)):
        # creamos ficha nueva
        ficha_izq = Ficha_izq()
        # añadimos ficha al grupo de fichas colocadas
        fichas.add(ficha_izq)
        # dibujamos la ficha
        ficha_izq.dibujar(x,y)
        pantalla.blit(ficha_izq.image, ficha_izq.rect)
        # actualizamos matriz con posiciones ocupadas
        ocupadas[y][x] = 1
        ocupadas[y+1][x] = 1
        # actualizamos turno
        turno = 0
        # actualizamos casillas libres
        casillas_libres_izq = casillasLibresIzq(ocupadas)
    else:
        print("No puede colocar ahi")
elif ((not turno) and (casillas_libres_dcha)):
    # Comprobamos que jugador D no intenta colocar en última columna
    if (x == 7):
        print("Se sale fuera del tablero")
    elif ((ocupadas[y][x]== 0) and  (ocupadas[y][x+1]== 0)):
        # creamos ficha nueva
        ficha_dcha = Ficha_dcha()
        # añadimos ficha al grupo de fichas colocadas
        fichas.add(ficha_dcha)
        # Dibujamos la ficha
        ficha_dcha.dibujar(x,y)
        pantalla.blit(ficha_dcha.image, ficha_dcha.rect)
        # actualizamos matriz con posiciones ocupadas
        ocupadas[y][x] = 1
        ocupadas[y][x+1] = 1
        # actualizamos turno
        turno = 1
        # actualizamos casillas libres
        casillas_libres_dcha = casillasLibresDcha(ocupadas)
```

Figura 5.15: Código principal de ambos jugadores

Capítulo 6

Análisis de impacto

En este capítulo se realizará un análisis del impacto potencial de los resultados obtenidos durante la realización del TFG, en los diferentes contextos para los que se aplique:

- Contexto personal
  Este trabajo supone para mí un crecimiento personal y profesional, he tenido la oportunidad de realizar un estudio intensivo sobre un tema que me era desconocido y que me ha aportado mucho aprendizaje y nuevos conocimientos.
  Además, he podido profundizar en el campo de la programación con Python, en concreto con Pygame, que considero que es importante y verdaderamente útil para el desarrollo de muchos sistemas o aplicaciones.

- Contexto social y cultural
  En cuanto al contexto cultural, los números surreales al fin y al cabo suponen un gran enriquecimiento del conjunto de números con los que trabajar en matemáticas. Por ejemplo, en estructuras algebraicas supone un enorme avance el hecho encontrar una serie de números que englobe a absolutamente todos los previamente existentes: reales, infinitos, infinitesimales, etc. y, que distinga entre unos y otros.
  Además se pretende que este trabajo sirva de base para todos aquellos que quieran profundizar en el tema de los números surreales y que facilite su estudio.

- Contexto económico
  En cuanto al contexto económico, en un futuro se podría intentar perfeccionar el juego y hacer una aplicación gratuita que pueda ser descargada en distintas plataformas.

Bibliografía

[1] DONALD E. KNUTH. *How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1974.

[2] JACOB LURIE. *The Efective Content of Surreal Algebra*. The Journal of Symbolic Logic. Volume 63. Number 2, 1998.

[3] JOHN HORTON CONWAY. *On Numbers and Games*. Prentice Hall, second edition, 2001.

[4] NORMAN L. ALLING. *Foundations of Analysis over Surreal Number Fields*. Elsevier Science Publishers B.V., 1987.

[5] IVARS PETERSON. *Mathematical Treks: From Surreal Numbers to Magic Circles*. The Mathematical Association of America, 2002.

[6] ELWYN R. BERLEKAMP, JOHN H. CONWAY, RICHARD K. GUY. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A K Peters, Ltd. Volume 1. Second edition, 2001.

[7] ELWYN R. BERLEKAMP, JOHN H. CONWAY, RICHARD K. GUY. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A K Peters, Ltd. Volume 2. Second edition, 2002.

[8] ELWYN R. BERLEKAMP, JOHN H. CONWAY, RICHARD K. GUY. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A K Peters, Ltd. Volume 3. Second edition, 2003.

[9] ELWYN R. BERLEKAMP, JOHN H. CONWAY, RICHARD K. GUY. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A K Peters, Ltd. Volume 4. Second edition, 2004.

[10] LEON HARKLEROAD. *Recursive Surreal Numbers*. Notre Dame Journal of Formal Logic. Volume 31. Number 3, 1990.

[11] ANTONGIULIO FORNASIERO. *Recursive definitions on surreal numbers*. arXiv:math/0612234v1. 2021.

[12] HARRY GOUSHOR. *An Introduction to the theory of Surreal Numbers*. London Mathematical Society Lecture Note Series 110. 1986.

[13] SIMON RUBINSTEIN-SALZADO, ASHVIN SWAMINATHAN. *Analysis on Surreal Numbers*. arXiv:1307.7392v2. 2014.

[14] PHILIP EHRLICH, ELLIOT KAPLAN. *Surreal Ordered Exponential Fields*. The journal of Symbolic Logic. Volume 86. Number 3, 2021.

Anexos

A continuación se muestra el código completo del juego implementado.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed May 4 17:28:41 2022

@author: carlo
"""

# ---------------------------
# Importacion de los m dulos
# ---------------------------

import pygame
from pygame.locals import *
import numpy as np
import os
import sys

# -----------
# Constantes
# -----------

ANCHO = 600
LARGO = 600
DIMENSIONES = [ANCHO, LARGO]
ANCHO_CASILLA = ANCHO/8
LARGO_CASILLA = LARGO/8
NEGRO  = (0, 0, 0)
BLANCO = (255, 255, 255)
IMG_DIR = "C:\\Users\\carlo\\Documents\\Matem ticas e Inform tica\\4   matem ticas Inform tica\\2nd cuatri\\TFG\\Juego"

# ------------------------------
# Clases y Funciones utilizadas
# ------------------------------

def carga_imagen(nombre, dir_imagen, alpha=False):
    # Encontramos la ruta completa de la imagen
    ruta = os.path.join(dir_imagen, nombre)
    try:
        image = pygame.image.load(ruta)
    except:
        print("Error, no se puede cargar la imagen: " + ruta)
        sys.exit(1)
    # Comprobar si la imagen tiene "canal alpha" (como los png)
    if alpha is True:
        image = image.convert_alpha()
    else:
        image = image.convert()
    return image
```

```python

def muestra_texto(pantalla,texto,tamano,color, x, y):
    fuente = pygame.font.SysFont("serif", tamano)
    superficie = fuente.render(texto,True,color)
    rectangulo = superficie.get_rect()
    rectangulo.midtop = (x, y)
    pantalla.blit(superficie,rectangulo)


class Ficha_izq(pygame.sprite.Sprite):
    # La ficha y su comportamiento en la pantalla
    def __init__(self):
        pygame.sprite.Sprite.__init__(self)
        # cargamos imagen
        self.image = carga_imagen("Ficha_izq1.png", IMG_DIR, alpha=True)
        # rectangulo con las dimensiones y posici n de la imagen
        self.rect = self.image.get_rect()

    def dibujar(self, x, y):
        # Calculamos casilla donde colocar ficha
        self.rect.x = x* ANCHO_CASILLA
        self.rect.y = y* LARGO_CASILLA


class Ficha_dcha(pygame.sprite.Sprite):
    # La ficha y su comportamiento en la pantalla
    def __init__(self):
        pygame.sprite.Sprite.__init__(self)
        self.image = carga_imagen("Ficha_dcha1.png", IMG_DIR, alpha=True)
        # rectangulo con las dimensiones y posici n de la imagen
        self.rect = self.image.get_rect()

    def dibujar(self, x, y):
        # Calculamos casilla donde colocar ficha
        self.rect.x = x* ANCHO_CASILLA
        self.rect.y = y* LARGO_CASILLA

def obtenerPos(mouse):
    # Obtenemos las posiciones de donde se ha pulsado
    xi,yi = mouse[0], mouse[1]
    ancho_casilla = ANCHO/8
    largo_casilla = LARGO/8

    # Ajustamos posiciones al tablero
    x = int (xi / ancho_casilla)
    y = int (yi / largo_casilla)

    return [x, y]

def casillasLibresIzq(ocupadas):
    for i in range(len(ocupadas) - 1):
        for j in range(len(ocupadas[0])):
            if (ocupadas[i][j] == ocupadas[i+1][j] == 0):
                return True
    return False

def casillasLibresDcha(ocupadas):
    for i in range(len(ocupadas)):
        for j in range(len(ocupadas[0]) - 1):
            if (ocupadas[i][j] == ocupadas[i][j+1] == 0):
                return True
    return False

def pantalla_fin(izq, dcha, pantalla):
    pantalla.fill((0,0,0))
    muestra_texto(pantalla,"FIN",75,(255,255,255),ANCHO/2,LARGO/4)
    muestra_texto(pantalla,"Pulsa para salir",20,(255,255,255),ANCHO/2,LARGO * 3/4)
```

```
    if (izq == 0):
        muestra_texto(pantalla,"Jugador D ha ganado",35,(255,0,0),ANCHO/2,LARGO/2)
    if(dcha == 0):
        muestra_texto(pantalla,"Jugador I ha ganado",35,(0,0,255),ANCHO/2,LARGO/2)
    pygame.display.flip()


# -----------------------------
# Funcion principal del juego
# -----------------------------

def main():
    pygame.init()
    # creamos la ventana y le ponemos un titulo:
    pantalla = pygame.display.set_mode(DIMENSIONES)
    pygame.display.set_caption("Dominoes de G r a n Andersson")

    # cargamos el fondo
    fondo = carga_imagen("tablero.jpg", IMG_DIR, alpha=False)
    pantalla.blit(fondo, (0, 0))

    # Grupo con las fichas colocadas
    fichas = pygame.sprite.Group()
    pygame.display.flip()

    # variables booleanas para controlar turno del jugador y fin del juego
    turno = True
    terminado = False
    reloj = pygame.time.Clock()

    # Inicializamos matriz de casillas ocupadas con 0
    ocupadas = np.full((8, 8), 0)

    # Inicializamos casillas libres para ambos jugadores
    casillas_libres_izq = True
    casillas_libres_dcha = True

    while terminado is False:
        for evento in pygame.event.get():
            if evento.type == pygame.QUIT:
                terminado = True
            if evento.type == pygame.MOUSEBUTTONDOWN:
                pos = pygame.mouse.get_pos()
                seleccionado = obtenerPos(pos)
                x = int(seleccionado[0])
                y = int(seleccionado[1])
                if (not casillas_libres_izq) or (not casillas_libres_dcha):
                    pantalla_fin(casillas_libres_izq,casillas_libres_dcha,pantalla)
                    while 1:
                        reloj.tick(60)
                        for evento in pygame.event.get():
                            if evento.type == pygame.QUIT:
                                pygame.quit()
                            if evento.type == pygame.MOUSEBUTTONDOWN:
                                pygame.quit()
                elif ((turno) and (casillas_libres_izq)):
                    # Comprobamos que jugador I no intenta colocar en  ltima  fila
                    if (y == 7):
                        print("Se sale fuera del tablero")
                    elif ((ocupadas[y][x]== 0) and (ocupadas[y+1][x]== 0)):
                        # creamos ficha nueva
                        ficha_izq = Ficha_izq()
                        # a adimos ficha al grupo de fichas colocadas
                        fichas.add(ficha_izq)
                        # dibujamos la ficha
                        ficha_izq.dibujar(x,y)
                        pantalla.blit(ficha_izq.image, ficha_izq.rect)
```

```
                        # actualizamos matriz con posiciones ocupadas
                        ocupadas[y][x] = 1
                        ocupadas[y+1][x] = 1
                        # actualizamos turno
                        turno = 0
                        # actualizamos casillas libres
                        casillas_libres_izq = casillasLibresIzq(ocupadas)
                    else:
                       print("No puede colocar ahi")
                elif ((not turno) and (casillas_libres_dcha)):
                   # Comprobamos que jugador D no intenta colocar en  ltima  columna
                    if (x == 7):
                        print("Se sale fuera del tablero")
                    elif ((ocupadas[y][x]== 0) and  (ocupadas[y][x+1]== 0)):
                        # creamos ficha nueva
                        ficha_dcha = Ficha_dcha()
                        # a adimos ficha al grupo de fichas colocadas
                        fichas.add(ficha_dcha)
                        # Dibujamos la ficha
                        ficha_dcha.dibujar(x,y)
                        pantalla.blit(ficha_dcha.image, ficha_dcha.rect)
                        # actualizamos matriz con posiciones ocupadas
                        ocupadas[y][x] = 1
                        ocupadas[y][x+1] = 1
                        # actualizamos turno
                        turno = 1
                        # actualizamos casillas libres
                        casillas_libres_dcha = casillasLibresDcha(ocupadas)
                    else:
                       print("No puede colocar ahi")
        reloj.tick(60)
        pantalla.blit(fondo, (0, 0))
        fichas.draw(pantalla)
        pygame.display.flip()

if __name__ == "__main__":
    main()
```

Este documento esta firmado por

Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Fecha/Hora	Tue May 31 17:16:44 CEST 2022
Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Numero de Serie	561
Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)