Universidad Politécnica
de Madrid

Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos

Grado en Matemáticas e Informática

Trabajo Fin de Grado

Topología de Espacios Finitos

Autor: Alejandro Díaz Tiburón
Tutor(a): Héctor Barge Yáñez

Madrid, Junio - 2022

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas e Informática

Título: Topología de Espacios Finitos

Junio - 2022

Autor: Alejandro Díaz Tiburón
Tutor: Héctor Barge Yáñez
Departamento de Matemática Aplicada a las TIC
ETSI Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

En este trabajo se van a desarrollar dos teoremas. El primero, el Teorema de McCord, que relaciona mediante una equivalencia de homotopía débil un complejo simplicial con un espacio finito. El segundo, el Teorema de Clader, es un resultado más potente que el anterior ya que nos permite recuperar el tipo de homotopía de un espacio finito a partir de un complejo simplicial mediante los límites inversos.

Para poder explicar ambos teoremas, en el primer capítulo haremos una introducción a los contenidos del trabajo.

En el segundo, introduciremos los conceptos más elementales de topología, entre ellos los espacios finitos (objeto de estudio principal en este trabajo) y relacionaremos los espacios finitos con los espacios con preorden.

En el tercer capítulo entraremos en la Teoría de McCord. En él haremos una introducción a los complejos simpliciales y los relacionaremos con los espacios finitos.

Después, hablaremos de los grupos de homotopía de orden superior y de las equivalencias de homotopía débil. Cerraremos el capítulo hablando del Teorema de McCord y de dos aplicaciones que son equivalencias de homotopía débil entre un complejo simplicial y un espacio finito.

En el cuarto capítulo hablaremos del Teorema de Clader, para ello hablaremos sobre límites inversos.

En los siguientes capítulos terminaremos el trabajo hablando de las conclusiones que como autor del trabajo he obtenido y del posible futuro impacto que pueda tener el trabajo.

Abstract

In this project, two theorems will be developed. The first, McCord's Theorem, which relates by weak homotopy equivalence a simplicial complex with a finite space. The second, Clader's Theorem, is a more powerful result than the previous one since it allows us to recover the homotopy type of a finite space from a simplicial complex through inverse limits.

In order to explain both theorems, in the first chapter we will make an introduction to the contents of the project.

In the second, we will introduce the most elementary concepts in topology, among them finite spaces -main object of study in this project- and we will relate finite spaces with preordered spaces.

In the third chapter we will go into McCord's Theory. In it we will introduce simplicial complexes and relate them to finite spaces.

Then we will talk about higher homotopy groups and weak homotopy equivalences. We will close the chapter talking about McCord's Theorem and two weak homotopy equivalences between a simplicial complex and a finite space.

In the fourth chapter we will talk about Clader's Theorem, for this we will talk about inverse limits.

In the following chapters we finish the project talking about the conclusions that I have obtained as the author of the work and the possible future impact that the work may have.

Tabla de contenidos

1. Introducción **1**

2. Espacios finitos y posets **3**
2.1. Definición, ejemplos y propiedades 3
2.2. Topología inducida por un preorden 6
2.3. Aplicaciones continuas en espacios finitos 13
2.4. Nociones de conexión en espacios finitos 15

3. Teorema de McCord **19**
3.1. Complejos Simpliciales 19
3.2. Homotopía de orden superior 26
3.3. Teorema de McCord 30

4. Límites inversos y Teorema de Clader **35**
4.1. Límites inversos 35
4.2. Límites inversos de espacios topológicos finitos 36

5. Resultados y conclusiones **37**

6. Análisis de impacto **39**

Bibliografía **41**

Capítulo 1

Introducción

En este Trabajo Fin de Grado se propone estudiar, entender y hacer una exposición razonada de los resultados de McCord y Clader.

Para la redacción de este documento, se ha seguido la estructura del primer capítulo del libro de Barmak [1] y se han completado los resultados necesarios para que quede más completa la explicación de los conceptos desarrollados en el mismo.

En este documento se va a desarrollar el Teorema de McCord, para ello previamente haremos una introducción sobre los conceptos básicos de la topología algebraica y de espacios finitos. A continuación, hablaremos de las relaciones que hay entre los espacio finitos y aquellos que verifican un preorden.

Posteriormente, trataremos las aplicaciones continuas que relacionan espacios espacios finitos y algunos conceptos de conexión en este tipo de espacios. Todo esto podemos encontrarlo en el Capítulo 2.

Una vez llegados a este punto, en el Capítulo 3 introduciremos los conceptos de *complejos simpliciales* y la topología que nos generan este tipo de complejos. También construiremos espacio finitos a través de complejos simpliciales y, viceversa, contruiremos complejos simpliciales a través de espacios finitos. En la Sección 3.1 veremos la relación que hay entre estas dos construcciones.

A continuación, en la Sección 3.2 hablaremos de las *homotopías de orden superior*, es decir, daremos una generalización de los grupos de homotopía y de las homotopías para dimensiones mayores que cero. Para poder explicar esta parte del trabajo se ha seguido el libro de Hatcher [2].

Después, llega el turno del Teorema de McCord en la Sección 3.3, donde explicaremos la relación que existe entre un espacio finito y un complejo simplicial a través de la equivalencia de homotopía débil. También veremos un ejemplo de cómo funcionan las aplicaciones de McCord.

Por último, en el Capítulo 4 hablaremos del Teorema de Clader 4.2.1 que nos relaciona un complejo simplicial con el tipo de homotopía de un espacio que se obtiene como límite inverso de una secuencia de espacios finitos que construiremos. Para poder hacer esto, hablaremos antes de *límites inversos* en la Sección 4.1. El desarrollo de esta sección se ha apoyado en los contenidos del libro de Hocking y Young [3].

Capítulo 2

Espacios finitos y posets

En este primer capítulo introduciremos los conceptos principales y más importantes para el desarrollo de este trabajo.

Comenzaremos con las definiciones más elementales como la de topología, después daremos algunas propiedades y formas de dar una representación de la misma a través de las bases.

A continuación, en la Sección 2.2 hablaremos de conjuntos preordenados y parcialmente ordenados. Principalmente nos centraremos en aquellos con un preorden, ya que estos son los que relacionaremos con los espacios finitos. Es más, veremos que en un espacio finito una topología y un preorden son, en esencia, lo mismo.

Después, introduciremos las relaciones entre espacio finitos y para ello hablaremos de las aplicaciones continuas. En la Sección 2.3 también veremos cómo afectan estas aplicaciones al preorden del espacio.

Para terminar este capítulo, vamos a hablar de los conceptos de conexión en un espacio. Además, veremos la correspondencia que hay entre la conexión y la conexión por caminos en los espacio finitos. Gracias a esta relación, podemos dar una descripción combinatoria de las homotopías.

2.1. Definición, ejemplos y propiedades

En esta sección haremos una introducción del objeto principal de estudio de este trabajo: *los espacios finitos*. Introduciremos algunos conceptos básicos de estos espacios, estudiaremos sus propiedades y presentaremos algunos ejemplos.

Definición 2.1.1. Dado un conjunto X y el conjunto de partes de X, denotado por $\mathcal{P}(X)$, una *topología* en X es un subconjunto $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, cuyos elementos se denominan *abiertos*, y que cumple las siguientes propiedas:

(1) $\emptyset, X \in \tau$

(2) Dada una colección $\{U_i\}_{i\in I}$ de elementos de τ, entonces:

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau,$$

es decir, la unión arbitraria de subconjuntos abiertos es abierto.

(3) Si $U_1, \ldots, U_n$ son elementos de τ, entoces:

$$U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \tau,$$

es decir, la intersección finita de abiertos es abierto.

El par (X, τ) se denomina *espacio topológico*. Puesto que normalmente no causará confusión, diremos simplemente que X es un espacio topológico y omitiremos hacer referencia explícita a la topología τ.

A continuación se introduce un ejemplo de una topología en un espacio finito.

Ejemplo 2.1.2. Sea $X = \{a, b, c\}$ un conjunto formado por tres elementos. La familia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, con $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ es una topología en X. En efecto, la propiedad (1) se cumple por definición. Veamos que la unión de abiertos es abierto. Sean U y V abiertos de X. Si alguno de ellos es $\emptyset$ o X no hay nada que probar. Supongamos entonces que U y V son subconjuntos propios de X. Entonces:

- Si $U = \{a\}$ se tiene que $U \cup V = \{a, b\} \in \tau$ si $V = \{b\}$ y $U \cup V = V \in \tau$ en otro caso.
- Si $U = \{b\}$ se tiene que $U \cup V = \{a, b\} \in \tau$ si $V = \{a\}$ y $U \cup V = V \in \tau$ si $V = \{a, b\}$ y $U \cup V = X \in \tau$ en otro caso.
- Si $U = \{a, b\}$ y $V = \{a, c\}$ entonces $U \cup V = X \in \tau$.

Obsérvese que todas las situaciones se reducen a alguno de los casos anteriores. Ahora vamos a comprobar que la intersección finita de abiertos es abierto. Al igual que pasa con la unión, si U o V son $\emptyset$ o X no hay nada que probar. Veamos ahora qué ocurre si U y V son dos subconjuntos propios de X:

- Si $U = \{a\}$ se tiene que $U \cap V = \emptyset \in \tau$ si $V = \{b\}$, y $U \cap V = U \in \tau$ en otro caso.
- Si $U = \{b\}$ se tiene que $U \cap V = U \in \tau$ si $V = \{a, b\}$, y $U \cap V = \emptyset \in \tau$ en otro caso.
- Si $U = \{a, b\}$ y $V = \{a, c\}$ entonces $U \cap V = \{a\} \in \tau$

Se puede ver que todas las posibilidades se reducen a alguno de estos casos.

Esto prueba que τ es una topología de X.

Proposición 2.1.3. Sea X un espacio topológico finito y $x \in X$. Entonces existe un abierto U_x tal que $x \in U_x$ con la propiedad de que si U es abierto en X y $x \in U$ entonces $U_x \subset U$.

Demostración. Definimos
$$U_x = \bigcap_{\substack{U \text{ abierto} \\ x \in U}} U$$
Puesto que X es un espacio finito se tiene que existe un número finito de abiertos que satisfacen que $x \in U$. Entonces U_x es intersección finita de abiertos y, por tanto, abierto. La construcción garantiza que si U es abierto y $x \in U$ entonces $x \in U_x \subset U$.

□

Para cada $x \in X$ el abierto U_x introducido en la Proposición 2.1.3 se denomina *abierto mínimo que contiene a* x. En el siguiente ejemplo se muestran los abiertos mínimos para cada punto del espacio topológico introducido en el Ejemplo 2.1.2.

Ejemplo 2.1.4. Vamos a obtener los abiertos mínimos para los puntos del espacio topológico $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

- Los abiertos de X que contienen a a son $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. Por lo que el abierto mínimo que contiene a a:
$$U_a = \{a\} \cap \{a, b\} \cap \{a, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a\}.$$
- Análogamente, dado que los abiertos de X que contienen a b son $\{\{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ se tiene que el abierto mínimo que contiene a b es:
$$U_b = \{b\} \cap \{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{b\}.$$
- Finalmente, los abiertos de X que contienen a c son $\{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ de donde se sigue que el abierto mínimo que contiene a c:
$$U_c = \{a, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, c\}.$$

Observación 2.1.5. En general, dado un espacio topológico X y $x \in X$ no existe un abierto mínimo que lo contiene. En efecto, sea $\mathbb{R}$ con la topología usual τ_u, donde
$$\tau_u = \{U \subset \mathbb{R} \mid \text{para cada } x \in U \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U\}.$$

Consideremos $x \in \mathbb{R}$ y supongamos, razonando por reducción al absurdo, que existe U_x abierto mínimo que contiene a x. Como U_x tiene la popiedad de que si U es un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a x, entonces $U_x \subset U$ en particular $U_x \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ y, por tanto, $U_x = \{x\}$. Pero $\{x\} \notin \tau_u$ lo que contradice la existencia de U_x.

La propiedad clave en la construcción de este contraejemplo es que la intersección arbitraria de abiertos no es necesariamente un abierto. Los espacios que cumplen esta propiedad se denominan *espacios de Alexandroff* [4].

El siguiente concepto que recordaremos es el de base de la topología de un espacio topológico.

Definición 2.1.6. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que la subfamilia $B_\tau \subset \tau$ es una *base* de τ si dado $U \in \tau$ y $x \in U$ existe $B_x \in B_\tau$ con $x \in B_x \subset U$.

Llamaremos a los B_x abiertos básicos.

Proposición 2.1.7. Si X es un espacio topológico finito, el conjunto

$$\mathcal{B}_{\text{mín}} = \{U_x \mid x \in X\},$$

donde U_x denota el abierto mínimo que contiene a x, es una base de la topología X. Además, si $\mathcal{B}'$ es una base de la topología de X entonces $\mathcal{B}_{\text{mín}} \subset \mathcal{B}'$.

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{B}_{\text{mín}}$ es una base de la topología de X. Para ello tenemos que ver que dado un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ se verifica que existe un $B_x \in \mathcal{B}_{\text{mín}}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Tomamos $B_x = U_x$ entonces por definición de abierto mínimo se cumple $x \in U_x \subset U$.

Consideramos $\mathcal{B}$ una base de la topología de X, a continuación veremos que $\mathcal{B}_{\text{mín}} \subset \mathcal{B}$. Para comprobar esto veamos que para cada $U_x \in \mathcal{B}_{\text{mín}}$ también se cumple que $U_x \in \mathcal{B}$.

Para cada $x \in X$, tenemos que $U_x \subset X$ es el abierto mínimo que lo contiene. Entonces por definición de base existe un $B_x \in \mathcal{B}$ que contiene a x tal que $B_x \subset U_x$. Sin embargo, $U_x \subset B_x$ por ser abierto mínimo. Por lo tanto, tenemos que $B_x = U_x$, lo que confirma que $\mathcal{B}_{\text{mín}} \subset \mathcal{B}$. □

La base $\mathcal{B}_{\text{mín}}$ introducida en la Proposición 2.1.7 se denomina *base mínima* del espacio finito X. En el siguiente ejemplo se obtiene la base mínima para el espacio topológico del ejemplo. Ejemplo 2.1.2

Ejemplo 2.1.8. Como se ha visto en el Ejemplo 2.1.4, los abiertos mínimos de X son $U_a = \{a\}, U_b = \{b\}, U_c = \{a, c\}$, luego la base mínima será:

$$\mathcal{B}_{\text{mín}} = \{U_a, U_b, U_c\} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}\}$$

2.2. Topología inducida por un preorden

En esta sección recordaremos los conceptos básicos de los conjuntos preordenados y parcialmente ordenados y veremos que existe una relación muy estrecha entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos preordenados.

Definición 2.2.1. Sea X un conjunto y sea $\leqslant$ una relación binaria en X. Decimos que $\leqslant$ es un *preorden* en X si verifica:

1. Reflexividad: $a \leqslant a$, para todo $a \in X$.
2. Transitividad: si $a, b, c \in X$, son tales que $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$ entonces $a \leqslant c$.

Si además, $\leqslant$ satisface:

3. Antisimetría: si $a, b \in X$ son tales que $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$, entonces $a = b$.

decimos que $\leqslant$ es un *orden parcial* en X. Un conjunto X dotado de un preorden (resp. orden parcial) $\leqslant$ se dice que es un *conjunto preordenado* (resp. *conjunto parcialmente ordenado*).

El siguiente resultado muestra que una topología en un espacio finito X induce de manera natural un preorden.

Proposición 2.2.2. Sea X un espacio finito. La relación

$$x \leqslant y \quad \text{si y solo si} \quad x \in U_y,$$

donde U_y es el abierto mínimo que contiene a y, es un preorden $\leqslant$ en X.

Demostración. Vamos comprobar que $\leqslant$ es un preorden, para ello comprobamos que verifica las propiedades reflexiva y transitiva:

- Reflexividad: dado que $x \in U_x$ para todo $x \in X$ se sigue que $x \leqslant x$.
- Transitividad: sean $x, y, z \in X$ y supongamos que $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$. Esto equivale a que $x \in U_y$ e $y \in U_z$. Como U_z es un abierto que contiene a y se tiene que $x \in U_y \subset U_z$ por lo que $x \leqslant z$ como queríamos ver.

Por lo tanto, $\leqslant$ es un preorden en X. □

Recíprocamente, vamos a ver que un preorden en un conjunto finito X induce una topología en X. Antes de eso, vamos a recordar un resultado que establece condiciones suficientes para que una familia de subconjuntos de un conjunto X sea base para alguna topología X.

Lema 2.2.3. *Sea X conjunto y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X, entonces existe $\tau_{\mathcal{B}}$ topología que tiene a $\mathcal{B}$ como base si y solo si:*

1. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
2. *Si* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *y* $x \in B_1 \cap B_2$, *existe* $B_3 \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Proposición 2.2.4. Sea X un conjunto finito preordenado y para cada $x \in X$ sea $B_x = \{y \in X \mid y \leqslant x\}$. La familia

$$\mathcal{B}_{\leqslant} = \{B_x \mid x \in X\}$$

es una base de una topología X. Además, $\mathcal{B}_{\leqslant}$ es la base mínima para dicha topología.

Demostración. En primer lugar vamos a ver que $\mathcal{B}_{\leqslant}$ es base de una topología de X aplicando el Lema 2.2.3:

1. La igualdad $X = \bigcup_{x \in X} B_x$ se cumple ya que

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{x \in X} B_x.$$

2. Sean B_y, B_z dos abiertos de $\mathcal{B}_{\leqslant}$ tales que $x \in B_y \cap B_z$. Veamos que $B_x \in \mathcal{B}_{\leqslant}$ verifica $x \in B_x \subset B_y \cap B_z$. Como $x \in B_y \cap B_z$ se tiene que $x \leqslant y$ y $x \leqslant z$. Por otro lado, para cada $u \in U_x$ se verifica que $u \leqslant x$ y por la transitividad de $\leqslant$ se tiene que $u \leqslant y$ y que $u \leqslant z$ luego $u \in B_y \cap B_z$ y, por tanto, $B_x \subset B_y \cap B_z$.

Por lo tanto, el Lema 2.2.3 garantiza que $\mathcal{B}_{\leqslant}$ es base de una topología de X.

Veamos ahora que la base $\mathcal{B}_{\leqslant}$ se trata de la base mínima:

Si $y \leqslant x$ entonces y está contenido en todos los abiertos que contengan a x y por lo tanto, por ser X un conjunto finito, se cumple que $y \in U_x$. Por otro lado, si $y \in U_x$ entonces verifica que $y \in \{z \in X \mid z \leqslant x\}$. Luego, $B_x = \{y \in X \mid y \leqslant x\} = U_x$ y por lo tanto tenemos $\mathcal{B}_{\leqslant} = \mathcal{B}_{\text{mín}}$

□

Las proposiciones Prosición 2.2.2 y Proposición 2.2.4 garantizan que en un conjunto finito, una topología induce un preorden en X que a su vez induce dicha topología. Por tanto, las topologías y los preordenes en espacios finitos son esencialmente lo mismo. Esta observación, realizada en primera instancia por Alexandroff [4] permite estudiar espacios finitos combinando topología algebraica con la combinatoria inducida por la estructura del preorden.

A continuación recordaremos la definición de la propiedad de separación T_0 de un espacio topológico. Vamos a ver que para topologías en espacios finitos inducidas por un preorden, esta propiedad equivale a que X sea efectivamente un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 2.2.5. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es T_0 si se cumple que dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ entonces se cumple que existe $U \subset X$ abierto tal que $x \in U, y \notin U$ o $y \in U, x \notin U$.

A continuación veremos un resultado que relaciona los espacios T_0 y los posets.

Proposición 2.2.6. Sea (X, τ) un espacio finito y $\leqslant$ el preorden inducido por τ en X. Son equivalentes:

1. (X, τ) es T_0.
2. $(X, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Demostración. Primero demostraremos $1. \Rightarrow 2.$:

Supongamos que X es T_0 y sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. $U \in X$ un abierto. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in U$, $y \notin U$. Tenemos por la Proposición 2.2.2 que $\leqslant$ es un preorden. Para comprobar que se trata de un orden parcial solamente haría falta demostrar la propiedad antisimétrica.

Sean $x, y \in X$ tales que $x \leqslant y$ y $y \leqslant x$. Esto lo que nos indica es que existe un $B_x \subset X$ tal que $y \notin B_x$, $x \in B_x$ y que existe un $B_y \subset X$ tal que $x \notin B_y$, $y \in B_y$. Puesto que X es T_0 entonces se cumple que $x = y$.

A continuación veremos $2. \Rightarrow 1.$

Sea $\leqslant$ una relación de orden parcial en X. Definimos los abiertos de X como $B_x = \{y \in X \mid y \leqslant x\}$. Por la Proposicion 2.2.4 sabemos que $\mathcal{B}_{\leqslant} = \{B_x \mid x \in X\}$ es base mínima de una topología en X. Ahora queremos ver que dados $x, y \in X$ existe un B_x tal que $x \in B_x$ y $y \notin B_x$. Supongamos que $x \leqslant y$ tomamos $B_x = \{z \in X \mid z \leqslant x\}$ entonces se cumple $x \in B_x$ y $Y \notin B_x$, por lo tanto X es T_0.

$\square$

Una forma de representar conjuntos finitos parcialmente ordenados es mediante un diagrama de Hasse.

Definición 2.2.7. Un *diagrama de Hasse* de un conjunto finito parcialmente ordenado $(X, \leqslant)$ es un digrafo cuyos vértices son los puntos de X y los arcos son los pares ordenados (x, y) donde $x \leqslant y$ y además no existe ningun $z \in X$ que pueda verificar $x \leqslant z \leqslant y$. Si (x, y) es arista del diagrama de Hasse del conjunto preordenado X, diremos que y *cubre a* x y lo denotaremos por $x \prec y$.

A continuación vamos a construir un diagrama de Hasse en un ejemplo:

Ejemplo 2.2.8. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con la siguiente topología:

$$\tau = \{\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{b, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}\}$$

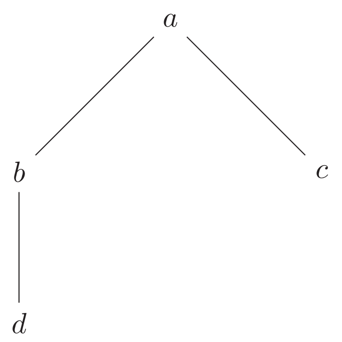
No es difícil ver que sus abiertos mínimos son los siguientes:

- $U_a = \{a, b, c, d\}$
- $U_b = \{b, d\}$
- $U_c = \{c\}$
- $U_d = \{d\}$

Con lo cual, de este conjunto de abiertos mínimos sacamos la siguiente relación:

$$\text{Para cada} \quad x, y \in X \quad x \leqslant y \quad \text{si se verifica que} \quad x \in U_y$$

Lo que nos deja el siguiente diagrama de Hasse:



A partir del diagrama anterior sacamos las siguientes conclusiones:

- a cubre a b y a c, o lo que es lo mismo $b \prec a$ y $c \prec a$.

- b cubre a d, o lo que es lo mismo $d \prec b$.
- d y c no cubren ningún punto.

Definición 2.2.9. Sea X un conjunto finito parcialmente ordenado finito y $x \in X$. Decimos que:

- $x \in X$ es un elemento *maximal* si $y \geqslant x$ entonces $y = x$.
- $x \in X$ es un elemento *minimal* si $y \leqslant x$ entonces $y = x$.

Observación 2.2.10. Sea X un conjunto finito parcialmente ordenado. Entonces existen $x_{\text{máx}}, x_{\text{mín}} \in X$ tales que son los elementos maximal y minimal de X respectivamente.

Proposición 2.2.11. Sea X un espacio topológico, si X tiene máximo o mínimo entonces es contráctil.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que X tiene máximo.

Tomamos la aplicación $F : X \times I \to X$ que viene definida por $F(x,t) = x$ si $t \in [0,1)$ y $F(x,t) = x_{\text{máx}}$ si $t = 1$, siendo $x_{\text{máx}}$ el máximo de X. Entonces hemos encontrado una *homotopía* entre X y el conjunto unipuntual $\{x_{\text{máx}}\}$. Por lo tanto, X es contráctil.

Para el caso en que X tenga mínimo en lugar de máximo se hace de forma análoga. □

En la demostración anterior hemos construído una *homotopía*, en la Sección 3.2 hablaremos más en detalle sobre homotopías.

A continuación vamos a caracterizar en términos combinatorios los abiertos y los cerrados de un espacio finito. Recordemos que un subconjunto $F \subset X$ se dice *cerrado* en X si su complementario es abierto. Antes de eso vamos a caracterizar el cerrado mínimo que contiene a cada punto.

Proposición 2.2.12. Sea X un espacio finito y $x \in X$. El conjunto

$$F_x = \{y \in X \mid y \geq x\}$$

es el menor cerrado que contiene a x, es decir, si $x \in F$ y F es cerrado, entonces $F_x \subset F$.

El conjunto F_x introducido en la Proposición 2.2.12 se denomina *clausura* o *adherencia* del punto x.

Demostración. Sea $U \subset X$ un abierto tal que $x \notin U$ entonces es de la forma $\bigcup_{z \in U} U_z$. Como x no está contenido en U entonces tampoco lo va a estar ningún y tal que $y \geqslant x$ ya que si estuviera, tendríamos que $x \in U_y$ por la propia definición de U_y lo que nos llevaría a que $x \in U$.

Por lo tanto, $y \in X \setminus U$ que es un cerrado en X. Luego, llegamos a la conclusión de que $F_x \subset X \setminus U$ para cada U abierto en X tal que $x \notin U$.

□

Para poder caracterizar los abiertos y los cerrados introducimos las nociones de down-set y up-set.

Definición 2.2.13. Sea X conjunto finito preordenado. Un subconjunto $U \subset X$ se denomina *down-set* si para cada $x \in U$ e $y \leqslant x$ se tiene $y \in U$. Análogamente, un subcojunto $F \subset X$ se denomina *up-set* si para cada $x \in F$ e $y \geqslant x$ se tiene que $y \in F$.

El siguiente resultado muestra que los abiertos y los cerrados están en correspondencia con los down-sets y up-sets respectivamente.

Proposición 2.2.14. Sea X un espacio finito. Entonces:

1. Un subconjunto $U \subset X$ es abierto si y solo si U es un down-set.
2. Un subcojunto $F \subset X$ es cerrado si y solo si F es un up-set.

Demostración. Primero demostraremos 1.:

Es claro que $U \subset X$ es un down-set si y solo si

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x$$

por lo que se sigue el resultado.

Demostremos 2.:

Sea $F \subset X$. El conjunto F es un up-set si y solo si

$$F = \bigcup_{x \in F} F_x$$

y puesto que F_x es cerrado para cada x se sigue el resultado.

□

A continuación se introducen los conceptos de cadena y anticadena en un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 2.2.15. Sea X un espacio finito. Una *cadena* es un subconjunto cuyos elementos son comparables dos a dos. Es decir, $C \subset X$ es una cadena si para cualesquiera $x, y \in C$ se tiene que $x \leqslant y$ o bien $x \geqslant y$. Por otro lado, una *anticadena* es un subconjunto cuyos elementos son dos a dos no comparables. Es decir, $A \subset X$ es una anticadena si para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que $x \nleqslant y$ y $x \ngeqslant y$.

La siguiente proposición muestra que dada una topología τ en un conjunto finito X, τ determina de manera natural otra topología en X.

Proposición 2.2.16. Sea (X, τ) un espacio finito. La familia de conjuntos

$$\tau^{op} = \{C \subset X \mid (X \setminus C) \in \tau\}$$

es una topología en X. Además:

1. El preorden inducido en X por τ^{op} es el preorden opuesto al inducido por τ, es decir,
$$x \leqslant_{\tau^{op}} y \quad \text{si y solo si} \quad y \leqslant_\tau x.$$

2. (X, τ^{op}) es T_0 si y solo si (X, τ) es T_0

Demostración. En primer lugar vamos a ver que τ^{op} se trata de una topología en X.

1. Como X es un espacio finito entonces tenemos que $\{\emptyset, X\}$ son cerrados, por tanto $\{\emptyset, X\} \in \tau^{op}$.

2. Para demostrar que la unión arbitraria de cerrados es cerrado basta con comprobar que se verifica para dos. Esto es así porque al ser X finito tiene un número finito de subconjuntos. Sean $C_1, C_2 \in \tau^{op}$ tenemos que su unión $C_1 \cup C_2$ será cerrado por ser unión de cerrados, por lo tanto $C_1 \cup C_2 \in \tau^{op}$.

3. Dados $C_1, C_2 \in \tau^{op}$, de forma análoga al apartado anterior obtenemos que $C_1 \cap C_2$ es cerrado en X y por tanto es abierto en X^{op}.

A continuación, veremos que se cumple 1.

Sean $x, y \in X$, supongamos que $x \leqslant_\tau y$ entonces $x \in U$ para cada $y \in U \in \tau$ por tanto para cada cerrado que contenga a y se cumple x está incluido, lo que nos lleva a que $x \geqslant_{\tau^{op}} y$. Demostrar que $x \leqslant_\tau y$ suponiendo que $x \geqslant_{\tau^{op}} y$ se hace de forma análoga.

Ahora, demostraremos 2.

Sean $x, y \in X$. Si (X, τ^{op}) es T_0 entonces sabemos que existe $C \in \tau^{op}$ tal que $y \in C$ y $x \notin C$. Mirando en la topología opuesta, tenemos que $y \notin (X \setminus C)$ y que $x \in (X \setminus C)$ por tanto hemos encontrado un abierto en τ tal que contiene a x pero no a y, luego (X, τ) es también es T_0. Obtener que (X, τ^{op}) es T_0 suponiendo que (X, τ) es T_0 se hace de forma análoga.

□

Observación 2.2.17. En general, si X no es finito la familia τ^{op} no es una topología en X.

Vamos a ver un contraejemplo donde comprobemos que se verifica esta observación.

Ejemplo 2.2.18. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual.Tenemos que su topología opuesta viene definida por
$$\tau^{op} = \{C \mid (\mathbb{R} \setminus C) \in \tau\}$$
que si fuera una topología se cumpliría que
$$\bigcup_{C \in \tau^{op}} C$$
es cerrado. Para ver que esto no tiene por qué cumplirse tomaremos una base particular de $\mathbb{R}$. Sea la siguiente familia

$$\{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y\}$$

que si fuera una topología se cumpliría la propiedad 2. de la Definición 2.1.1 y sin embargo encontramos que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{[\frac{1}{n}, \infty)\} = (0, \infty) \notin \tau^{op}$$

La topología introducida en la Proposición 2.2.16 se denomina *topología opuesta* en X. El conjunto finito preordenado X dotado de topología opuesta se denota por X^{op}. En algunas aplicaciones trabajar con la topología opuesta presenta ciertas ventajas. Esto queda de manifiesto en los trabajos [5] y [6], en los que se presentan algunos resultados de aproximación de espacios métricos a través de espacios finitos y algunas aplicaciones a los sistemas dinámicos.

Definición 2.2.19. Sea $A \subset X$ subespacio de un espacio topológico, la familia

$$U_A = \{U \cap A | U \subset X\}, \forall U \subset X$$

es una topología en A, y se llama *topología relativa.*

En particular, si X es finito y $a \in A$ tenemos por definición de topología de subespacio y abierto mínimo:

$$U_a^A = U_a^X \cap A$$

Definición 2.2.20. Sean X e Y dos espacios topológicos, la base de la *topología producto* es U x V, donde $U \in X, V \in Y$ ambos abiertos.

En particular, si X, Y son finitos y $(x, y) \in X$ x Y, entonces $Y_{(x,y)} = U_x$ x U_y.

Con esta definición obtenemos los siguientes resultados:

Proposición 2.2.21.

1. Sea A subespacio de X espacio topológico finito y sean $a, a' \in A$. Entonces se cumple:

   $$a \leqslant_A a' \Longleftrightarrow a \leqslant_X a'$$

   Donde $\leqslant_A$ denota el preorden en la topología de A y $\leqslant_X$ el preorden en la topología de X.

2. Sean X, Y espacios topológicos finitos, $(x, y), (x', y') \in X$ x Y con la topología producto. Entonces:

   $$(x, y) \leqslant (x', y') \Longleftrightarrow x \leqslant x', y \leqslant y'$$

2.3. Aplicaciones continuas en espacios finitos

En esta sección recordaremos los conceptos básicos de aplicaciones entre espacios finitos. Además, veremos que la noción de aplicación continua entre espacios finitos se corresponde con la de aplicación que preserva el orden entre conjuntos finitos preordenados.

Antes de empezar vamos a recordar lo que es una aplicación continua.

Definición 2.3.1. Sean X, Y dos espacios topológicos, entonces $f : X \to Y$ es una aplicación continua en $x \in X$ si para cada entorno N' de $f(x)$ existe un entorno N de x tal que se cumple $f(N) \subset N'$.

Diremos que f es continua en todo X si es continua en cada $x \in X$.

A continuación, veremos cómo se caracterizan las aplicaciones continuas.

Proposición 2.3.2. Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La aplicación f es continua.
2. Si $V \subset Y$ es abierto, entonces $f^{-1}(V)$ también es abierto de X.
3. Si $C \subset Y$ es cerrado, entonces $f^{-1}(C)$ también es cerrado de X.
4. Si $\mathcal{B}_Y$ es una base de Y, con $B \in \mathcal{B}_Y$, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto de X.

Continuaremos recordando la noción de aplicación que preserva el orden.

Definición 2.3.3. Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre conjuntos preordenados. Decimos que f *preserva el orden* si para cualesquiera $x, x' \in X$ con $x \leqslant x'$ se tiene que $f(x) \leqslant f(x')$.

La siguiente proposición establece que las aplicaciones continuas en espacios finitos son justamente aquellas que preservan los preórdenes inducidos.

Proposición 2.3.4. Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios finitos. Entonces, f es continua si y solo si f preserva el orden.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua y $x \leqslant x'$ en X. Entonces $f^{-1}(U_{f(x')}) \subseteq X$ es abierto y como $x' \in f^{-1}(U_{f(x')})$ obtenemos que $x \in U_{x'} \subseteq f^{-1}(U_{f(x')})$. De donde se sigue que $f(x) \leqslant f(x')$.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que f preserva el orden. Para ver que f es continua basta ver que $f^{-1}(U_y)$ es abierto para cada U_y perteneciente a la base mínima de Y, $\mathcal{B}_{\text{mín}}$.

Sean $x \in f^{-1}(U_y)$ y $x' \leqslant x$, entonces $f(x') \leqslant f(x) \leqslant y$ por $x \in f^{-1}(U_y)$ y por lo tanto se cumple $U_x \subseteq f^{-1}(U_y)$ y por tanto es abierto lo que garantiza la continuidad de f.

$\square$

Ahora, veamos un ejemplo de aplicación continua y que preserva el preorden:

Ejemplo 2.3.5. Tomamos el mismo espacio que en el Ejemplo 2.2.8 con la topología definida en el mismo. Recordemos que el orden de este espacio es el siguiente:

- $b \leqslant a$
- $c \leqslant a$
- $d \leqslant b$

Tomamos la función identidad $Id : X \to X$. Esta función es continua ya que para cada $U \in X$ abierto, tenemos que $f^{-1}(U) = U$.

Comprobar que preserva el orden es trivial, ya que la topología es la misma tras aplicar la función.

Proposición 2.3.6. Sean X, Y dos espacios finitos y $f : X \to Y$ una aplicación. Considérese la aplicación $f^{op} : X^{op} \to Y^{op}$ dada por $f^{op}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Entonces, $f : X \to Y$ es continua si y solo si $f^{op} : X^{op} \to Y^{op}$ es continua.

Demostración. Supongamos que f es continua y sea $V \subset Y$ abierto, luego $Y \setminus V \in Y^{op}$ y es cerrado. Por tanto, tenemos que $f^{-1}(Y \setminus V)$ es cerrado y por tanto pertenece a X^{op}. Entonces, tenemos que f^{op} es continua.

Demostrar que f es continua teniendo que f^{op} también lo es, es análogo.

$\square$

La aplicación f^{op} introducida en la Proposición 2.3.6 se denomina *aplicación opuesta* asociada a f.

A continuación vamos a ver la continuidad de la aplicación opuesta del Ejemplo 2.3.5

Ejemplo 2.3.7. Antes de ver cuál es al aplicación opuesta a la definida en el Ejemplo 2.3.5 recordemos cuál sería la toplogía opuesta

$$\tau^{op} = \{\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{a, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{a\}, \{a, b\}\}$$

Para ver que la aplicación $Id^{op} : X^{op} \to X^{op}$ es continua, basta con ver que se trata de una identidad ya que está definida por $Id^{op}(x) = Id(x)$ para cada $x \in X$ y ambas aplicaciones están definidas sobre el mismo espacio subyacente.

2.4. Nociones de conexión en espacios finitos

En esta sección veremos que las componentes conexas de los espacios finitos coinciden con las componentes conexas por caminos y que también coinciden con las componentes conexas del poset correspondiente. Este resultado nos dará una descripción combinatoria de las homotopías.

Antes de empezar con esta sección, vamos a ver qué es un camino.

Definición 2.4.1. Sea X un espacio topológico, llamaremos *camino* en X a la aplicación continua $\alpha : [0, 1] \to X$.

Diremos que el origen es $\alpha(0)$ y el final $\alpha(1)$.

A partir de ahora cada vez que queramos hacer referancia al intervalo $[0, 1]$ lo llamaremos I por simplificación.

Lema 2.4.2. *Sean X espacio topológico finito y $x, y \in X$ dos puntos comparables. Entonces existe un camino entre x e y en X.*

Demostración. Supongamos $x \leqslant y$, definimos $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(t) = x$ si $0 \leqslant t$, $\alpha(1) = y$.

Si $U \subseteq X$ es un abierto que contiene a y entonces, también contiene a x. Luego, $\alpha^{-1}(U)$ es uno de los siguientes conjuntos: $\emptyset$, I o $[0, 1)$. Todos ellos son abiertos en I. Por lo tanto, α es un camino de x a y en X. $\square$

Con este resultado podemos establecer una relación entre los caminos y el preorden.

Ahora veamos los conceptos de *valla* y *recubrimiento*

Definición 2.4.3. Sea X un conjunto con preorden. Una *valla en* X es una secuencia $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de puntos tales que dos puntos consecutivos cualesquiera son comparables.

Definición 2.4.4. Sea X un espacio topológico. Diremos que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ colección arbitraria de subconjuntos de X es un *recubrimiento de* X si se cumple que

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Si además, cada U_i es abierto en X entonces diremos que $\mathcal{U}$ es *recubrimiento abierto de* X.

Dadas estas definiciones, ya podemos definir qué es un conjunto *compacto*.

Definición 2.4.5. Sea $C \subset X$, se dice que C es *compacto* si existe $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recubrimiento abierto en X tal que $C \subset \bigcup U_i$ entonces existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{U}$ que verifica que:

$$C \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}_f} U$$

Observación 2.4.6. Si X es un espacio finito entonces todo subconjunto de X va a ser compacto.

A continuación pasaremos a ver una definición de espacio conexo.

Definición 2.4.7. Sea X un espacio topológico. Una *separación* $(U \mid V)$ de X es un par de abiertos U, V de X tales que se dan las siguientes condiciones

- $U \cup V = X$
- $U \cap V = \emptyset$

Diremos entonces que X es *conexo* si solamente admite la separación trivial $(X \mid \emptyset)$

Una vez vista la conexión paseremos a ver qué es la conexión por orden.

Definición 2.4.8. Sea X un conjunto preordenado. Entonces diremos que X *es conexo por orden* si para cada dos puntos $x, y \in X$ existe una valla que empieza en x y termina en y.

Por último, vamos a relacionar los distintos tipos de conexión que hemos visto a lo largo de esta sección.

Proposición 2.4.9. Sea X un espacio finito. Los siguientes conceptos son equivalentes:

1. X es un espacio conexo.
2. X es un espacio preordenado conexo por orden.
3. X es un espacio conexo por caminos.

Demostración. Comenzaremos demostrando $2. \Rightarrow 3.$:

Si X es conexo por orden, por el Lema 2.4.2 también lo es por caminos.

Para ver $1. \Rightarrow 2.$ Solo tenemos que ver que si X no es conexo esto implica que no lo es tampoco por orden.

Supongamos que X es conexo y $x \in X$. Sea $A = \{y \in X \mid \text{existe una valla de } x \text{ a } y\}$. Si $y \in A$ y $z \leqslant y$ entonces se tiene que $z \in A$ por lo tanto, A es down-set. Análogamente, para el caso $z \leqslant y$ obtenemos que A es up-set y por tanto $A = X$.

Por último $3. \Rightarrow 1.$ se trata de un resultado elemental en topología. Su demostración la podemos ver aquí [7]. $\square$

Capítulo 3

Teorema de McCord

En este capítulo nos centraremos en la Teoría de McCord. Para poder hablar de esto, antes tenemos que ver qué es un *complejo simplicial* y cómo obtenerlos a partir de un espacio finito. También necesitaremos hacer la construcción inversa, es decir, construir un espacio finito a partir de un complejo simplicial. Todo esto lo veremos en la Sección 3.1, además de la relación que hay entre las dos construcciones.

En la Sección 3.2 veremos el concepto de *homotopía* y el *grupo fundamental*. Después, daremos una generalización de estos conceptos para hablar de los *grupos de homotopía débil*.

Visto esto cerraremos el capítulo hablando de las aplicaciones $\mathcal{X}$-McCord y $\mathcal{K}$-McCord y demostraremos que ambas aplicaciones son *equivalencias de homotopía débil* entre un espacio finito y un complejo simplicial.

3.1. Complejos Simpliciales

En esta sección hablaremos de los *complejos simpliciales*, daremos una defición de lo que son y vamos a dar la topología asociada a su *realización geométrica*. Además, vamos a construir un complejo simplicial a partir de un espacio finito y viceversa. También veremos que estos dos complejos simpliciales se pueden relacionar entre sí y uno será lo que llamamos la *subdivisión baricéntrica* del otro.

Antes de nada veremos qué es un complejo simplicial y algunos conceptos como *ser cara de*.

Definición 3.1.1. Un *complejo simplicial* K es un conjunto finito no vacío V_K (el conjunto de vértices) y un conjunto S_K (el conjunto de símplices) que satiface que cualquier subconjunto de V de cardinalidad 1 es un *símplice* y cualquier subconjunto no vacío de un símplice es otro símplice.

Notaremos $v \in K$ si $v \in V_K$, $\sigma \in K$ si $\sigma \in S_K$.

En general, indentificaremos un complejo simplicial con su conjunto de símplices.

Definición 3.1.2. Si un símplice σ está contenido dentro de otro símplice τ, diremos que σ *es cara* de τ. Además, en caso de $\sigma \neq \tau$ diremos que es una *cara propia*.

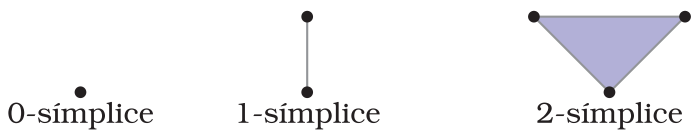
Una vez vistos los conceptos de símplice y complejo simplicial veamos qué es la *dimensión* de estos elementos.

Definición 3.1.3. Un símplice con $n+1$ vértices se llama n-símplice y tiene dimensión n. Lo notaremos por $\dim(\sigma)$, siendo σ un símplice.

Diremos que la *dimensión de un complejo simplicial* K es el supremo de las dimensiones de sus símplices. Llamaremos n-complejo a un complejo con dimensión n.

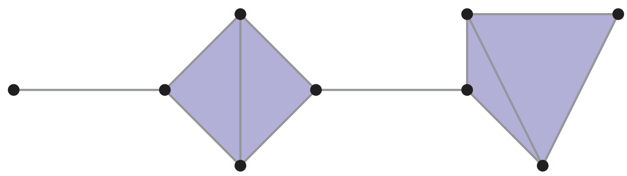
Veamos un ejemplo de símplice y otro de complejo simplicial.

Ejemplo 3.1.4. A continuación podemos ver 3 ejemplos de símplices, uno de dimensión 1, otro de dimensión 2 y un último símplice de dimensión 3:



Ahora veremos un ejemplo de complejo simplicial de dimensión 2.

Ejemplo 3.1.5. Podemos ver que el siguiente complejo simplicial se compone de 9 vértices, 12 aristas y 4 caras.



Ahora daremos una definición de la aplicaciones entre complejos simpliciales. Antes de hacer esto, tenemos que ver qué es el *esquema de vértices* y una definición de *realización geométrica*.

Definición 3.1.6. Sean K un complejo simplicial y V su conjunto de vértices. Llamaremos *esquema de vértices* al complejo simplicial A formado por todos aquellos subconjuntos de V que generan símplices en K.

Definición 3.1.7. Sea K un complejo simplicial, la *realización geométrica* $|K|$ de K es el conjunto de combinaciones formales convexas

$$\sum_{v \in K} \alpha_v v \text{ tal que } \{v \mid \alpha_v > 0\} \text{ es símplice de } K.$$

Definición 3.1.8. Una *aplicación simplicial* $\varphi : K \to L$ entre dos complejos simpliciales K, L es una aplicación de los vértices V_K a los vértices V_L que envía símplices en símplices.

$\varphi : K \to L$ induce una aplicación continua bien definida $|\varphi| : |K| \to |L|$ entre sus realizaciones geométricas definida por

$$|\varphi|(\sum_{v\in K} \alpha_v v) = \sum_{v\in K} \alpha_v \varphi(v)$$

Definición 3.1.9. Llamaremos *símplice maximal* a aquellos símplices que no sean caras propias de otro símplice. Al conjunto de símplices maximales también se le llama *facets*.

Definición 3.1.10. Un *subcomplejo* de un complejo simplicial K es un complejo simpicial L tal que $V_L \subseteq V_K$ y $S_L \subseteq S_K$.

Diremos que $L \subseteq K$ es *completo* si cualquier símplice de K con todos sus vértices en L, también es símplice de L.

A continuación vamos a metrizar la realización geométrica de un complejo simplicial.

Definición 3.1.11. Dado $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ símplice de dimensión n, el *símplice cerrado* $\bar{\sigma}$ es el conjunto de las combinaciones formales convexas

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i \text{ con } \alpha_i \geqslant 0 \text{ para cada } i \leqslant n \text{ y } \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1.$$

Un símplice cerrado es un espacio métrico con la métrica d dada por

$$d(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2}$$

Por tanto $|K|$ se puede ver como la unión de los símplices cerrados $\bar{\sigma}$ con $\sigma \in K$

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \bar{\sigma}$$

La topología de $|K|$ es la *topología final* con respecto a los símplices cerrados, es decir, un conjunto $U \subseteq |K|$ es abierto si y solo si $U \cap \bar{\sigma}$ es abierto en el espacio métrico $\bar{\sigma}$ para cada $\sigma \in K$. Para los cerrados es análogo.

Definición 3.1.12. El *soporte* de un punto $x = \sum_{v\in K} \alpha_v v \in |K|$ es el símplice $\mathrm{sop}(x) = \{v \mid \alpha_v > 0\}$

Definición 3.1.13. Sea σ símplice, entonces el *símplice abierto* $\mathring{\sigma}$ es el subconjunto de puntos de $\bar{\sigma}$ cuyo soporte es exactamente σ.

Hasta quí hemos visto una definición de complejo simplicial independiente de un espacio topológico, ahora veremos que podemos obtener un complejo simplicial a partir de un espacio topológico finito T_0.

Definición 3.1.14. Sea X un espacio finito T_0. El complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ asociado a X es el complejo simplicial cuyos símplices son cadenas no vacías de X.

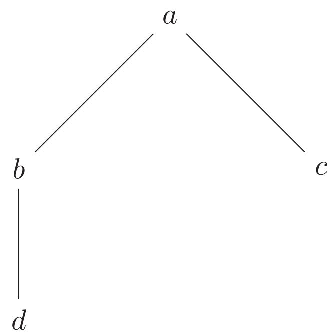
Además, si tenemos $f : X \to Y$ aplicación continua entre dos espacios topológicos finios T_0, entonces la *aplicación simplicial asociada* $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ se define por $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$ para cada $x \in X$.

Vista esta definición, vamos a ver un ejemplo de un espacio finito.

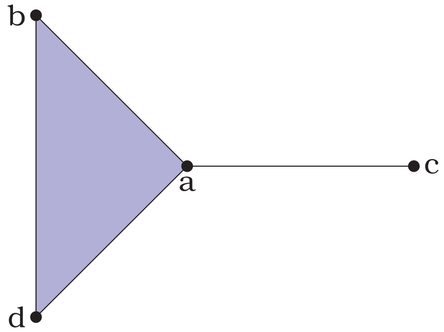
Ejemplo 3.1.15. Tomaremos el espacio topológico del Ejemplo 2.2.8. Recordemos que venía definido por el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ y la siguiente topología:

$$\tau = \{\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{b, d\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}\}$$

Con esto obteníamos el siguiente diagrama de Hasse.



Ahora obtenemos el complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ asociado a este espacio.



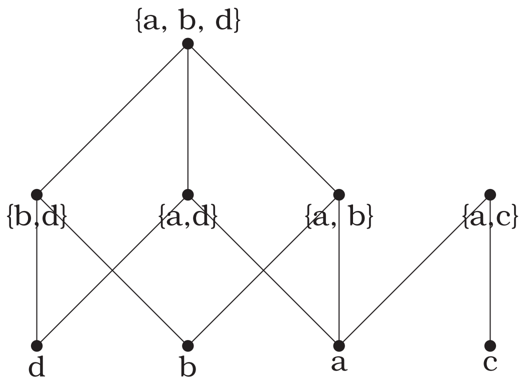
A continuación, daremos una definición de un *poset de caras* asociado a un complejo simplicial.

Definición 3.1.16. Sea K un complejo simplicial finito. El espacio T_0 finito $\mathcal{X}(K)$ asociado a K, o poset de caras, es el poset de los símplices de K ordenados por inclusión.

Si $\varphi : K \to L$ es una aplicación simplicial entre complejos simpliciales, entonces existe $\mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K) \to \mathcal{X}(L)$ aplicación continua definida por $\mathcal{X}(\varphi)(\sigma) = \varphi(\sigma)$ para cada $\sigma \in K$.

Ahora vamos a ver un ejemplo de cómo se construye el el poset de caras de un símplice.

Ejemplo 3.1.17. Vamos a tomar el complejo simplicial del Ejemplo 3.1.15



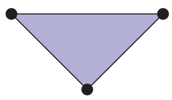
Este sería el espacio finito T_0 asociado al complejo simplicial mencionado anteriormente.

Ahora veremos que podemos obtener nuevos complejos simpliciales, para ello veremos el concepto de *subdivisión baricéntrica*. Antes de poder ver de qué se trata veamos otras dos definiciones.

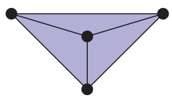
Definición 3.1.18. Sea K un complejo simplicial. Diremos que un complejo simplicial L es una subdivisión de K si:

1. $|K| = |L|$.
2. Cada símplice de L está contenido en un símplice de K.

Ejemplo 3.1.19. Para ver este ejemplo, vamos a tomar el 2-símplice



y el siguiente complejo simplicial L



Podemos ver que ambos tienen el mismo espacio subyacente, ya que para ambos la unión de sus símplices cerrados nos deja un triángulo de dimensión 2. Además, cada símplice del complejo L está contenido en el 2-símplice.

Definición 3.1.20. Sea σ un k-símplice cerrado generado por los vértices $v_0, \ldots, v_k$. Llamaremos *baricentro* de σ al punto

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k+1} v_i \in \mathring{\sigma}$$

Ahora veremos qué es un *j-esqueleto* de un complejo simplicial y un *cono simplicial*.

Definición 3.1.21. Sea K un complejo simplicial. El j-esqueleto de K es el subcomplejo definido por

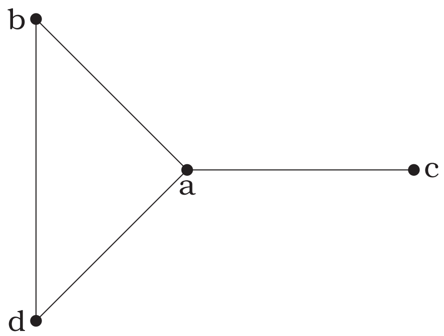
$$\{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) \leqslant j\}$$

Lo notaremos por $K^{(j)}$.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1.22. Vamos a construir el 0-esqueleto del complejo simplicial obtenido en el Ejemplo 3.1.15

Ahora, vamos a construir su 1-esqueleto



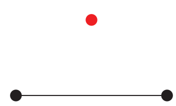
Definición 3.1.23. Sea σ un k-símplice con $V_\sigma = \{v_0, \ldots, v_k\}$. Sea v un punto no contenido en el subespacio afín generado por V_σ. Definimos el *cono* de σ con vértice v y lo notamos por $\overline{\sigma * v}$ como el $(k+1)$-símplice generado por $V_\sigma \cup \{v\}$.

Ahora veamos un ejemplo de cómo construir un cono.

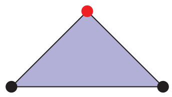
Ejemplo 3.1.24. Vamos a construir un cono para un símplice de dimensión 0.

Pasamos construir el cono

Veamoslo ahora para un 1-símplice



El cono resultante sería el siguiente



Una vez vistos estos conceptos ya podemos ver qué es la *subdivisión baricéntrica.*

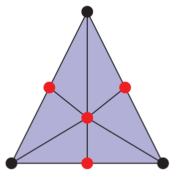
Definición 3.1.25. Sea K un complejo simplicial. La *subdivisión baricéntrica* de K es el complejo simplicial $Sd(K)$ que se construye de manera inductiva sobre el j-esqueleto de la siguiente manera:

1. $Sd(K^{(0)}) = K^{(0)}$.

2. $Sd(K^{(j)})$ es la unión de $Sd(K^{(j-1)})$ con el conjunto de símplices de la forma $\overline{b_\sigma \cup \tau}$, donde b_σ es el baricentro de σ, un j-símplice, y τ es cualquier símplice de $Sd(k^{(j-1)})$ contenido en una cara de σ.

Veamos un ejemplo de construcción de la subdivisión baricéntrica.

Ejemplo 3.1.26. Vamos a construir la subdivisión baricéntrica de un 2-símplice.



El espacio finito T_0 asociado a un complejo simplicial y el complejo simplicial asociado a un espacio finito T_0 quedan relacionados por el siguiente resultado.

Proposición 3.1.27. Sea K un complejo simplicial, entonces se verifica que

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$$

es la primera subdivisión baricéntrica.

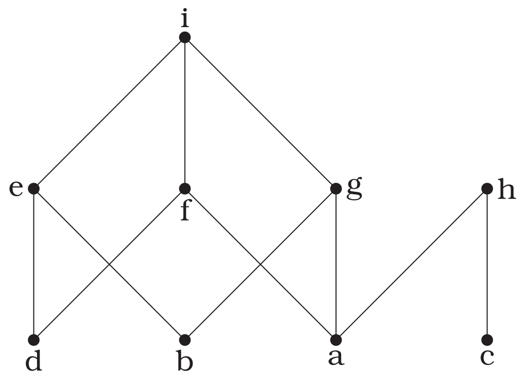
La demostración de este resultado la podemos encontrar aquí [7].

Ahora veremos cómo se verifica esto con los Ejemplos 3.1.15 y 3.1.17.

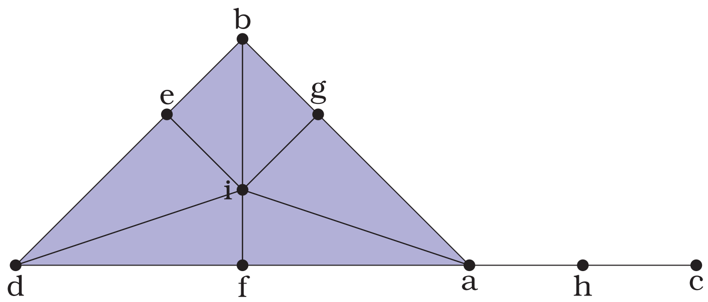
Ejemplo 3.1.28. Para hacer esto primero vamos a construir el complejo simplicial asociaso al espacio descrito en el Ejemplo 3.1.17. Antes de hacer esto vamos a renombrar los vértices del diagrama de Hasse para que posteriormente quede más claro el resultado. Haremos las siguientes sustituciones:

$$\{\{b, d\} = e, \{a, d\} = f, \{a, b\} = g, \{a, c\} = h, \{a, b, c\} = i\}$$

lo que nos dejaría el siguiente espacio



ahora que ya tenemos el espacio, vamos a obtener el complejo simplicial



que como se puede observar se trata de la primera subdivisión baricéntrica del complejo simplicial del Ejemplo 3.1.15.

3.2. Homotopía de orden superior

A lo largo de esta sección haremos un introducción a los conceptos de homotopía y grupos de homotopías. Después generalizaremos estos conceptos para dimensión n. Por último, hablaremos de las homotopías débiles.

Para empezar, veamos qué es una homotopía.

Definición 3.2.1. Sean X, Y dos espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Una *homotopía* entre f y g es una aplicación $F : X \times I \to Y$ continua tal que verifica lo siguiente para cada $x \in X$

- $F(x, 0) = f(x)$
- $F(x, 1) = g(x)$

Diremos que f es *homotópica* a g, y lo notaremos por $f \simeq g$, si existe un homotopía entre f y g.

Veamos un ejemplo de dos aplicaciones que sean homotópicas.

Ejemplo 3.2.2. Para construir nuestra homotopía tomaremos dos funciones continuas en $\mathbb{R}$. La primera de ellas, f viene definida de la siguiente manera

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) \mapsto x^2$$

y la segunda, de la siguiente forma

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) \mapsto 5x^3 - 17$$

Una vez definidas nuestras funciones, vamos a contruir nuestra homotopía. Sea $h : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ que viene definida por

$$h(x,t) = f(x)t + g(x)(1-t)$$

es una aplicación continua por ser composición de funciones continuas y cumple que para cada $x \in \mathbb{R}$ verifica $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$. por lo tanto, h es una homotopía entre las funciones f y g.

A continuación, introduciremos el concepto de *ser contráctil* y daremos una caracterización de los conjuntos contráctiles.

Primero vamos a ver qué significa que un espacio sea contráctil.

Definición 3.2.3. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *contráctil* si tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio unipuntual.

Veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 3.2.4. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y sean las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función identidad y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función constante 2.

Definimos la homotopía $H : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ dada por la siguiente función $H(x,t) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x)$.

Podemos ver que se cumple que $H(x,0) = f(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y que $H(x,1) = g(x) = 2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ tiene el mismo tipo de homotopía que el conjunto unipuntual $\{2\}$ y podemos afirmar que es contráctil.

Una vez visto qué significa ser contráctil vamos a dar una caracterización de aquellos espacios que son contráctiles.

Proposición 3.2.5. Sea X un espacio topológico finito que tiene máximo o mínimo, entonces X es contráctil.

Demostración. Tomamos X espacio finito. Supongamos sin pérdida de generalidad que tiene máximo y además que es $x_{\text{máx}}$.

Vamos a construir la aplicación $F : X \times I \to X$ definida por

$$F(x,t) = \begin{cases} x \text{ si } t \in [0,1) \\ x_{\text{máx}} \text{ si } t = 1 \end{cases}$$

que es continua y verifica $F(x,0) = x$ y $F(x,1) = x_{\text{máx}}$. Por lo tanto, F es una homotopía entre la función identidad x y la función constante $x_{\text{máx}}$, ambas continuas.

Esto nos indica que X es homotópico al conjunto unipuntual $\{x_{\text{máx}}\}$ y por lo tanto contráctil. □

Ya hemos visto qué son los espacios contráctiles y cuáles son. Ahora veremos un tipo de aplicación llamada *retracción*.

Definición 3.2.6. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ un subespacio y la aplicación $i : A \hookrightarrow X$ una inclusión, es decir, un aplicación continua definida por $i(x) \mapsto x$.

Diremos que una aplicación continua $r : X \to A$ es una retracción si se cumple que $r \circ i = id_A$, o lo que es lo mismo, $r(a) = a$ para cada $a = A$.

Si además, $i \circ r \simeq id_X$ diremos que r es *retracción por deformación*. Si se cumple esto mismo pero relativo a A entonces decimos que es *retracción por deformación fuerte*.

Diremos que A es un *retracto* de X si existe una retracción de X en A. En caso de que exista una retracción por deformación diremos que A es un *retracto por deformación* y si existe retracción por deformación fuerte, entonces A es *retracto por deformación fuerte*.

A continuación, veremos la relación entre un espacio contráctil y la conexión por caminos.

Proposición 3.2.7. Sea X un espacio topológico contráctil, entonces se cumple que X es conexo por caminos.

Demostración. Sea $x_0 \in X$, si X es contráctil entonces tiene el mismo tipo de homotopía que x_0. Sean id_X la aplicación identidad en X y $c_p : X \to X$ la aplicación constante definida por $c_p(x) = p$ para todo $x \in X$, entonces, $id_X \simeq c_p$.

Tomamos $H : X \times I \to X$ la homotopía entre id_X y c_p, entonces se cumple que H es continua y para cada $x \in X$ verifica que $H(x,0) = id_X(x) = x$ y $H(x,1) = c_p(x) = p$.

Sean $a, b \in X$ vamos a construir un camino que va desde a hasta b. Para hacer esto definimos $\varphi : I \to X$ que viene dada por $\varphi(t) = H(a,t)$, que es un camino desde a hasta p ya que se cumple $\varphi(0) = a$ y $\varphi(1) = p$. Repetimos esto mismo pero para b con $\psi : I \to X$ definida por $\psi(x) = H(b,t)$.

Ahora ya podemos definir el camino desde a hasta b, sea $\gamma : I \to X$ definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \psi^{-1}(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

□

Una vez vista la homotopía, vamos a definir el grupo fundamental. Para poder hacer esto, antes tenemos que ver en qué consiste el producto de caminos.

Definición 3.2.8. Sean X un espacio topológico y $\sigma_0, \sigma_1 : I \to X$ dos caminos en X tales que $\sigma_0(1) = \sigma_1(0)$. Definimos el camino producto como

$$(\sigma_0 * \sigma_1)(s) \begin{cases} \sigma_0(2s) & 0 \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \sigma_1(2s-1) & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

Definición 3.2.9. Sea X espacio topológico y $x_0 \in X$. Diermos que un camino $\sigma : I \to X$ es un *lazo basado en* x_0 si $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. El conjunto de clases de homotopía de lazos basados en x_0

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\sigma] \mid \sigma \text{ es lazo basado en } x_0\}$$

dotados del producto de caminos * es un grupo que se denomina *grupo fundamental* de X basado en x_0.

A continuación, vamos a relacionar las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos con los homeomorfismos de sus grupos fundamentales.

Definición 3.2.10. Dada una aplicación continua $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, se define el homeomorfismo inducido por f relativo al punto x_0 como

$$\begin{gathered} f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \\ f_*([\sigma]) \mapsto [f \circ \sigma] \end{gathered}$$

donde $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ denota $f(x_0) = y_0$.

Una vez visto el grupo de homotopía de orden 1, vamos a generalizar esa definición para cualquier orden.

Definición 3.2.11. Sea I^n cubo n-dimensional unitario, es decir $I^n = [0,1]^n$. La frontera ∂I^n de I^n es el subespacio formado por los puntos que tienen al menos una coordenada igual a 0 o bien igual a 1.

Dado X un espacio topológico con punto base $x_0 \in X$, definimos el grupo de homotopía de orden n, y lo denotamos por $\pi_n(X, x_0)$ como el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ donde las homotopías f_t satisfacen que $f_t(\partial I^n) = x_0$ para cada t.

Una vez hemos visto el conjunto de nuestro grupo, vamos a definir nuestra operación.

Definición 3.2.12. Si $n \geqslant 2$, la operación suma $+$ en $\pi_n(X, x_0)$ generaliza la operación composición en π_1. Nuestra suma $+$ viene definida por

$$(f+g)(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & 0 \leqslant s_1 \leqslant 1/2 \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & 1/2 \leqslant s_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

Esta operación está bien definida en las clases de homotopía. Puesto que solamente está involucrada la primera componente en la suma, el mismo argumento que se usa para π_1 nos muestra que $\pi_n(X, x_0)$ es grupo. Además, para $n \geqslant 2$ tenemos que $\pi_n(X, x_0)$ es abeliano, es decir, se cumple $f + g \simeq g + f$. La demostración de estos resultados se puede encontrar en el libro de Hatcher [2].

Ahora veremos cómo se define la aplicación inducida para las homotopías de orden superior.

Definición 3.2.13. Sea $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación, entonces φ induce una aplicación $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ que viene definida por $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$

Un caso particular de los grupos de homotopía es el de los espacios contráctiles, ya que para $n > 0$ sus grupos son iguales a cero, es decir,

$$\pi_n(X, x_0) = 0 \text{ para todo } n$$

Este resultado se sigue de que las equivalencias de homotopía inducen isomorfismos en los grupos de homotopía y de que los grupos de un conjunto unipuntual $Y = \{y_0\}$ son cero, o lo que es lo mismo, $\pi_n(Y, y_0) = 0$ para todo n.

Vistos los grupos de homotopía, veamos qué es la equivalencia de homotopía débil.

Definición 3.2.14. Sean X, Y dos espacio topológicos y sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Diremos que f es una *equivalencia de homotopía débil* si induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía.

Proposición 3.2.15. Sean X, Y espacios topológicos y sean $f, g : X \to Y$. Entonces:

$$f \simeq g \Leftrightarrow \text{ existe una valla } f = f_0 \leqslant f_1 \geqslant f_2 \ldots f_n = g$$

Es más, si $A \subseteq X$ entonces:

$$\begin{gathered} f \simeq g \text{ rel } A \Leftrightarrow \text{ existe una valla } f = f_0 \leqslant f_1 \geqslant f_2 \ldots f_n = g \\ \text{tales que } f_i \mid_A = f \mid_A \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant n \end{gathered}$$

La demostración de este resultado puede verse en el libro de Barmak [1].

Corolario 3.2.16. Sean X, Y dos espacios finitos y $f, g : X \to Y$ aplicaciones, entonces $f \simeq g \Leftrightarrow f^{op} \simeq f^{op}$.

En particular, f es una equivalencia de homotopía si y solo si $f^{op} : X^{op} \to Y^{op}$ es una equivalencia de homotopía y dos espacios finitos son equivalentes homotópicamente si y solo si sus espacios opuestos también lo son.

3.3. Teorema de McCord

En esta sección veremos el Teorema de McCord 3.3.1, que juega un papel esencial en la teoría de homotopía de espacios finitos. Este resultado lo que nos dice es que si tenemos una aplicación continua que sea equivalencia de homotopía débil localmente, entonces también será equvalencia de homotopía débil de por sí.

Proposición 3.3.1. Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Supongamos que existe $\mathcal{U}$ recubrimiento abierto básico de Y tal que cada restricción

$$f\mid_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \to U$$

es equivalencia de homotopía débil para cada $U \in \mathcal{U}$. Entonces $f : X \to Y$ es equivalencia de homotopía débil.

La demostración de este resultado fue realizada por McCord por primera vez en 1966 y la podemos ver en [8]. Esta prueba está basada en un resultado análogo hecho por Dold y Thom para las *quasifibraciones*.

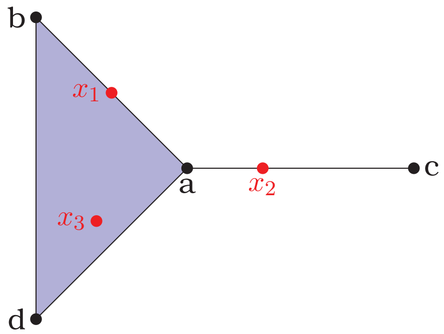
Definición 3.3.2. Sea X espacio T_0 finito, entonces la *aplicación $\mathcal{K}$-McCord*

$$\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \to X \text{ viene definido por } \mu_X(\alpha) = \text{mín}(\text{sop}(\alpha))$$

Veamos un ejemplo de aplicación de $\mathcal{K}$-McCord.

Ejemplo 3.3.3. A partir del espacio y el complejo simplicial del Ejemplo 3.1.15 veamos su aplicación de $\mathcal{K}$-McCord.

El complejo simplicial asociado al espacio es el siguiente:



Ahora veamos el valor de los puntos dibujados en rojo una vez aplicada μ_X.

- En el caso de x_1, sabemos que su soporte es el conjunto $\{b, a\}$ y el mínimo de esos dos puntos por el orden de X es b. Por lo tanto tenemos que $\mu_X(x_1) = b$.
- En el caso de x_2, sabemos que su soporte es el conjunto $\{a, c\}$ y el mínimo de esos dos puntos por el orden de X es c. Por lo tanto tenemos que $\mu_X(x_2) = c$
- En el caso de x_3, sabemos que su soporte es el conjunto $\{a, b, d\}$ y el mínimo de esos dos puntos por el orden de X es d. Por lo tanto tenemos que $\mu_X(x_3) = d$

Ahora veremos que esta aplicación es una equivalencia de homotopía débil con el siguiente Teorema.

Proposición 3.3.4. La aplicación $\mathcal{K}$-McCord μ_X es una equivalencia de homotopía débil para cada X espacio finito T_0.

Demostración. Sea $U_x \in X$ el abierto mínimo que contiene a $x \in X$. Recordemos que por ser X finito T_0, entonces U_x es contráctil por tener máximo. Vamos a demostrar que para cada $x \in X$, $\mu_X^{-1}(U_x)$ es abierto y contráctil. Esto nos mostrará que μ_X es continua y cada restricción $\mu_X\ |_{\mu_X^{-1}(U_x)}\colon \mu_X^{-1}(U_x) \to U_x$ es equivalencia de homotopia débil. Con esto podemos aplicar el Teorema de McCord 3.3.1 a μ_X, demostrando así que es una equivalencia de homotopía débil.

Sean $x \in X$, $L = \mathcal{K}(X \setminus U_x) \subseteq \mathcal{K}(X)$, L es el subcomplejo completo de K que contiene los vértices que no están en U_x. Podemos afirmar entonces que $\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$.

Si $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$ entonces se cumple que $\text{mín}(\text{sop}(\alpha)) \in U_x$. En particular, el soporte de α contiene un vértice de U_x y, por lo tanto, $\alpha \in |L|$.

Por otro lado, si $\alpha \in |L|$ entonces existe $y \in \text{sop}(\alpha)$ tal que $y \in U_x$ y por consecuente se cumple que $\text{mín}(\text{sop}(\alpha)) \leqslant y \leqslant x$ y $\mu_X(\alpha) \in U_x$. Puesto que $|L| \subseteq |\mathcal{K}(X)|$ es cerrado, tenemos que $\mu_X^{-1}(U_x)$ es abierto (por tener $\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$).

Ahora veremos que $|\mathcal{K}(U_x)|$ es retracto por deformación fuerte de $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. Esto es un caso particular de un hecho más general:

Sea $i : |\mathcal{K}(U_x)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ la inclusión. Si $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$, $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$ para algún $\beta \in |\mathcal{K}(U_x)|, \gamma \in |L|$ con $0 < t \leqslant 1$.

Definimos $r : |\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \to |\mathcal{K}(U_x)|$ por $r(\alpha) = \beta$. Nótese que r es continua ya que $r\ |_{(|\mathcal{K}(X)|\setminus|L|)\cap\bar{\sigma}}\colon (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma} \to \bar{\sigma}$ es continua para todo $\sigma \in \mathcal{K}(X)$, donde $\bar{\sigma} \subseteq |\mathcal{K}(X)|$ denota el símplice cerrado.

Ahora tomamos $H : (|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \times I \to |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ homotopía lineal entre $1_{|\mathcal{K}(X)|\setminus|L|}$ y $r \circ i$, por ejemplo, tomamos $H(\alpha, s) = (1-s)\alpha + s\beta$. Entonces, H está bien definida y es continua puesto que cada restricción

$$H\ |_{((|\mathcal{K}(X)|\setminus|L|)\cap\bar{\sigma})\times I}\colon ((|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma}) \times I \to \bar{\sigma}$$

es continua para cada símplice σ de $\mathcal{K}(X)$.

Para demostrar la continuidad de r y de H usamos que $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ tiene la topología final con respecto alos subespacios $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L| \cap \bar{\sigma}$ con $\sigma \in \mathcal{K}(X)$.

Como todo U_x es comparable con x, entonces $\mathcal{K}(U_x)$ es un cono simplicial con vértice x y si σ es símplice de $\mathcal{K}(U_x)$, entonces $\sigma \cup \{x\}$ también lo es. En particular, $|\mathcal{K}(U_x)|$ es contráctil y por tanto $\mu_X^{-1} = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$. $\square$

Veamos un ejemplo en el que calculamos los grupos de homotopía de dos espacios.

Ejemplo 3.3.5. Volvamos con el espacio del Ejemplo 3.1.15, vamos a calcular sus grupos de homotopía. Como X tiene máximo, es contráctil y por lo tanto todos sus grupos de homotopía $\pi_n(X, x_0) = 0$ con $x_0 \in X$ para cada n.

Ahora tomemos un espacio X tal que la realización geométrica de su complejo asociado es el 1-esqueleto del 2-símplice. No es difícil ver que esta realización geométrica es homeomorfo a S^1, la esfera de dimensión 1. Por la Proposición 3.3.4

sabemos que X tiene el mismo tipo de homotopía débil que la realización geométrica de su complejo asociado. Por lo tanto, sus grupos de homotopía son para $x_0 \in X$

$$\pi_n(X, x_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

El cáculo de los grupos de homotopía podemos verlo en el apartado 4.1 del libro de Hatcher [2].

Vista la aplicación $\mathcal{K}$-McCord, pasamos a introducir la *aplicación $\mathcal{X}$-McCord*.

Definición 3.3.6. Sea K un complejo finito, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$ es la primera subdivisión baricéntrica de K. Sea $\varphi : K \to L$ aplicación simplicial, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{X}(\varphi)) = \varphi' : K' \to L'$ es la aplicación inducida en las subdivisiones baricéntricas.

Tomamos $s_K : |K'| \to |K|$ homeomorfismo lineal definido por $s_K(\sigma) = b(\sigma)$ para cada símplice $\sigma \in K$, donde $b(\sigma) \in |K|$ denota el baricentro de σ.

Definimos la aplicación $\mathcal{X}$-McCord $\mu_K = \mu_{\mathcal{X}(K)} s_K^{-1} : |K| \to \mathcal{X}(K)$

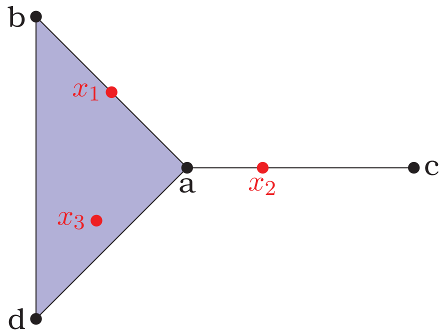
Proposición 3.3.7. La aplicación $\mathcal{X}$-McCord μ_K es una equivalencia de homotopía débil para cada complejo simplicial finito K.

Demostración. Se deduce inmediatamente de la Proposición 3.3.4. □

Ahora, veamos un ejemplo de la aplicación $\mathcal{X}$-McCord.

Ejemplo 3.3.8. Para este ejemplo volvemos a utilizar el complejo simplicial asociado al espacio X del Ejemplo 3.1.15.

Tomamos los mismos puntos que en el Ejemplo 3.3.3



Primero pasamos de $|K|$ a $|K'|$ a través de la aplicación s_K^{-1}, esta aplicación no es más que una identidad ya que ambos espacios son homeomorfos. Luego nos queda lo siguiente:

- Para x_1 que es el baricentro del símplice {a, b} $s_k^{-1}(x_1) = f$.
- Para x_2, que es la combinación entre el vértice a y el baricentro del símplice $\{a, c\}$, $s_k^{-1}(x_2)$ es la combinación entre los vértices $\{a, i\}$. Es decir

$$x_2 = \lambda_a a + \lambda_{\sigma_1} b(\sigma_1) \quad \text{con} \quad \sigma_1 = \{a, c\}$$

entonces nos queda

$$s_k^{-1}(x_2) = \lambda_a s_k^{-1}(a) + \lambda_{\sigma_1} s_k^{-1}(b(\sigma_1)) = \lambda_a a + \lambda_{\sigma_1} i$$

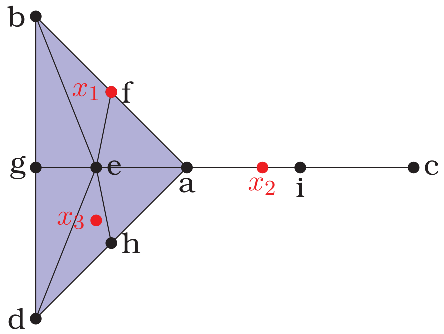
- Para x_3, que es la combinación entre el vértice d y el baricentro del símplice $\{a, d\}$ y el símplice $\{a, b, d\}$, $s_k^{-1}(x_3)$ es la combinación entre los vértices $\{e, d, h\}$. Es decir

$$x_3 = \lambda_d d + \lambda_{\sigma_1} b(\sigma_1) + \lambda_{\sigma_2} b(\sigma_2) \quad \text{con} \quad \sigma_1 = \{a, d\}, \sigma_2 = \{a, b, d\}$$

entonces nos queda

$$s_k^{-1}(x_3) = \lambda_d s_k^{-1}(d) + \lambda_{\sigma_1} s_k^{-1}(b(\sigma_1)) + \lambda_{\sigma_2} s_k^{-1}(b(\sigma_2)) = \lambda_d d + \lambda_{\sigma_1} h + \lambda_{\sigma_2} e$$

Podemos ver esto de manera más clara en el siguiente dibujo del complejo simplicial de la subdivisión baricéntrica.



Ahora solo nos queda pasar de $|K'|$ a $\mathcal{X}(K)$ con la aplicación $\mu_{\mathcal{X}(K)}$. Recordemos que el poset de caras de K podemos verlo en el Ejemplo 3.1.17. tenemos entonces las siguientes asignaciones:

- En el caso de x_1, sabemos que su soporte es el conjunto $\{f\}$ Por lo tanto, tenemos que $\mu_{\mathcal{X}(K)}(x_1) = f$.
- En el caso de x_2, sabemos que su soporte es el conjunto $\{a, i\}$ y el mínimo de esos dos puntos por el orden de $\mathcal{X}(K)$ es a. Por lo tanto, tenemos que $\mu_{\mathcal{X}(K)}(x_2) = a$.
- En el caso de x_3, sabemos que su soporte es el conjunto $\{e, d, h\}$ y el mínimo de esos dos puntos por el orden de $\mathcal{X}(K)$ es d. Por lo tanto, tenemos que $\mu_{\mathcal{X}(K)}(x_3) = d$.

Por último, veamos cómo nos deja esto utilizando la aplicación de $\mathcal{X}$-McCord μ_K:

- En el caso de x_1, tenemos que $\mu_K(x_1) = f$.
- En el caso de x_2, tenemos que $\mu_K(x_2) = a$.
- En el caso de x_3, tenemos que $\mu_K(x_3) = d$.

Capítulo 4

Límites inversos y Teorema de Clader

En este capítulo hablaremos del Teorema de Clader 4.2.1 que nos permite recuperar el tipo de homotopía de un complejo simplicial a partir de un límite inverso de espacios finitos.

4.1. Límites inversos

En esta sección hablaremos de lo que son las secuencias de límite inverso para después dar la definición de límite inverso.

Definición 4.1.1. Sea $X_0, X_1, X_2, \ldots$ una colección numerable de espacios y supongamos que para cada $n > 0$ existe una aplicación continua $f_n : X_n \to X_{n-1}$.

La secuencia de espacios y aplicaciones $\{X_n, f_n\}$ se denomina *secuencia de límite inverso* y se puede representar mediante el siguiente diagrama

$$\ldots \xrightarrow{f_{n+1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0$$

No es difícil ver que si $n > m$, entonces existe una aplicación continua $f_{n,m} : X_n \to X_m$ que viene dada por la composición

$$f_{n,m} = f_{m+1} \circ f_{m+2} \circ \ldots \circ f_{n-1} \circ f_n$$

Definición 4.1.2. Consiremos la *secuencia* $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ tal que cada x_n es un punto en el espacio X_n y tal que $x_n = f_{n+1}(x_{n+1})$ para cada $n \geqslant 0$.

Dicha secuencia puede ser identificada con un punto en el espacio producto $\mathbb{P}_{n=0}^{\infty} X_n$ considerando la función $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ definida por $\varphi(n) = x_n$.

El conjunto de todas estas secuencias es un subconjunto de $\mathbb{P}_{n=0}^{\infty} X_n$ y tiene la topología de subespacio.

Este espacio topológico es el *límite inverso de la secuencia* $\{X_n, f_n\}$ y lo denotaremos por X_∞.

4.2. Límites inversos de espacios topológicos finitos

En esta última sección, hablaremos de límites inversos en espacios topológicos finitos. Para ello veremos el Teorema de Clader y una construcción de secuencia de límite inverso que se usa en este Teorema.

En primer lugar, vamos a ver cómo obtenemos esta secuencia. Sea K un complejo simplicial finito. Tomamos $X_0 = \mathcal{X}(K)$ el espacio finito asociado a K con la topología opuesta de $\mathcal{X}(K)$, es decir, aquella generada por los conjuntos

$$B_x = \{y \in X_0 \mid x \leqslant y\} \quad \text{para} \quad x \in X$$

tomamos la topología opuesta para obtener la continuidad de las aplicaciones p_n que definiremos más adelante.

Para cada $n \geqslant 0$ sea K_n la n-ésima subdivisión baricéntrica de K y sea $X_n = \mathcal{X}(K_n)$ con la topología opuesta. Existe una aplicación natural $p_n : |K| \to X_n$ para cada n, ya que cada $x \in K$ está contenido en el interior de una única cara de K_n. Es más, existe una única aplicación $q_n : X_n \to X_{n-1}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & {|K|} \arrow[dl, "p_n"'] \arrow[dr, "p_{n-1}"] & \\ X_n \arrow[rr, "q_n"'] & & X_{n-1} \end{tikzcd}$$

En [9] se demuestra que tanto las funciones q_n como las p_n son continuas y por lo tanto obtenemos la siguiente secuencia de límite inverso

$$\ldots \xrightarrow{q_4} X_3 \xrightarrow{q_3} X_2 \xrightarrow{q_2} X_1 \xrightarrow{q_1} X_0$$

Una vez tenemos la secuencia, pasamos a enunciar el Teorema de Clader.

Proposición 4.2.1. Todo complejo simplicial finito es homotópicamente equivalente al límite inverso de una secuencia de espacios finitos.

La demostración de este resultado la podemos encontrar en [9], donde se obtiene que el complejo simplicial tiene el mismo tipo de homotopía que el límite de la secuencia construída anteriormente.

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

En este capítulo haremos un resumen de los resultados obtenidos en este trabajo e incluiremos algunas de las conclusiones personales que como autor del trabajo he sacado.

Empezaremos por los resultados. En primer lugar, en el trabajo uno de los resultados principales es el Teorema de McCord, que nos dice que la construcción de las aplicaciones $\mathcal{X}$-McCord y $\mathcal{K}$-McCord son equivalencias de homotopía débil entre un complejo simplicial y un espacio finito ya que son continuas y además retracto por deformación. En segundo lugar, el otro resultado principal de este trabajo es el Teorema de Clader, que nos dice que un complejo simplicial tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio finito que podemos obtener como límite inverso de la secuencia de espacios finitos asociados a las subdivisiones baricéntrticas de un complejo simplical.

Respecto a las conclusiones, gracias al estudio del Teorema de McCord me he dado cuenta de la relevancia que tiene como resultado ya que gracias a él se produjo un avance muy grande en este campo de las matemáticas.

Capítulo 6

Análisis de impacto

En este capítulo se realizará un análisis de impacto de los resultado sobtenidos durante la realización del trabajo.

A nivel personal he aprendido a editar textos en Latex, puesto que el trabajo está desarrollado en este lenguaje. Por otro lado, me ha ayudado a mejorar el entendimiento a la hora de leer un texto matemático y a su vez para redactarlo. Considero que es algo que en el futuro puede ser muy útil ya que una de los posibles pasos a dar a continuación en mi vida profesional podría ser ampliar los conocimientos de matemáticas y esto facilitaría el proceso. Además, me ha ayudado a afianzar y ampliar mis conocimientos en el ámbito de la Topología.

Si nos fijamos en el potencial impacto respecto a los Objetivos de Desarrollo Sostenible, este trabajo podría ayudar a generar una educación de calidad debido a que este documento podría hacer llegar las matemáticas más accesibles hacia los niños y adolescentes tanto de forma directa (leyéndolo ellos mismos) como indirecta (leyéndolo una tercera persona que más tarde pueda transmitir el contenido).

Bibliografía

[1] J. A. Barmak, *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. Springer, 2011.

[2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[3] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1961.

[4] J. P. May, "Finite Spaces and Larger Contexts," 2016. [Online]. Available: https://math.uchicago.edu/~may/FINITE/FINITEBOOK/FINITEBOOKCollatedDraft.pdf

[5] P. J. Chocano, M. A. Morón, and F. R. Ruiz del Portal, "Computational approximations of compact metric spaces," *Phys. D*, vol. 433, pp. Paper No. 133 168, 15, 2022.

[6] T. K. Dey, M. Juda, T. Kapela, J. Kubica, M. Lipiński, and M. Mrozek, "Persistent homology of Morse decompositions in combinatorial dynamics," *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, vol. 18, no. 1, pp. 510–530, 2019.

[7] H. B. Yáñez and A. Z. Saiz, *Topología*. Sanz y Torres, 2021.

[8] M. C. McCord, "Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces," *Duke Math. J*, vol. 33, pp. 465–474, 1966.

[9] E. Clader, "Erratum to "inverse limits of finite topological spaces" [MR2591919]," *Homology Homotopy Appl.*, vol. 18, no. 1, pp. 25–26, 2016.