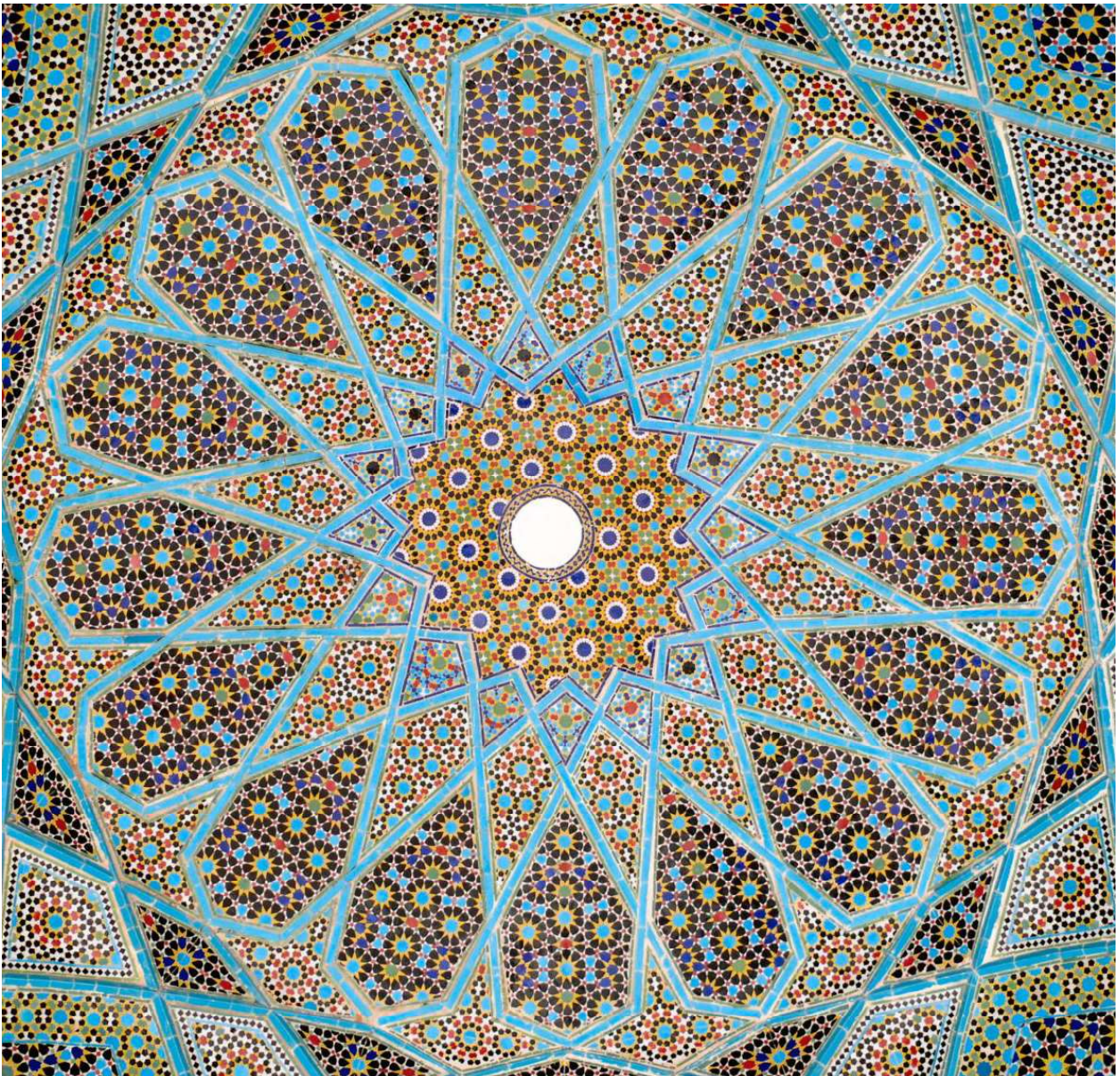


Íñigo Olaizola Diez

El arte del desorden: Teselaciones aperiódicas en la arquitectura



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA



TRABAJO FIN DE GRADO

Íñigo Olaizola Diez

*El arte del desorden:
Teselaciones aperiódicas en la arquitectura*

EL ARTE DEL DESORDEN:
TESELACIONES APERIÓDICAS EN LA ARQUITECTURA

Estudiante
Íñigo Olaizola Diez

Tutor/a
Daniel Jeremy Fox Hornig
Departamento de Matemática Aplicada

Aula TFG 5
María Barbero Liñan, *coordinador/a*
Jose Antonio Flores Soto, *adjunto/a*

Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Índice

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

1. CUASICRISTALES

Descubrimiento

Vínculo con la arquitectura

2. TESELACIONES APERIÓDICAS

Teselas Wang

Teselas de Robinson

Teselas aperiódicas de Penrose

Teselaciones Girih

Teselaciones por sustitución

El problema Einstein

Fichas

3. APLICACIÓN EN LA ARQUITECTURA

Aplicación según su uso

Avances tecnológicos para creación, visualización y ejecución de los
teselados

Ejemplos de su uso

CONCLUSIONES

GLOSARIO

FUENTES

Bibliografía y recursos digitales

Procedencia de las ilustraciones

ANEJO

Fichas

Mapa de teselaciones Girih

Resumen

Se examina el papel y la aplicación de las teselaciones aperiódicas en el ámbito de la arquitectura, buscando explorar la relación entre las teselaciones aperiódicas y la arquitectura, destacando su potencial creativo y las oportunidades que ofrecen para la innovación en el diseño arquitectónico. Las teselaciones aperiódicas son patrones geométricos que se caracterizan por su habilidad para cubrir el plano sin que se produzca una repetición regular, creando diseños visualmente interesantes y no convencionales.

El objetivo principal de este estudio es investigar cómo estas teselaciones aperiódicas pueden utilizarse como instrumentos creativos en el diseño arquitectónico. Se analiza la formación y procedencia de las teselaciones aperiódicas junto a casos de estudio de proyectos arquitectónicos que han incorporado teselaciones aperiódicas, examinando su impacto estético y funcional.

El trabajo aborda diferentes enfoques y técnicas utilizadas para generar teselaciones aperiódicas. Se exploran también las ventajas y desafíos que surgen al trabajar con teselaciones aperiódicas, como la adaptación a condiciones específicas del entorno, la optimización del uso del espacio y la relación entre los patrones aperiódicos y la funcionalidad de los espacios arquitectónicos.

Además, se examinan las posibilidades de la tecnología digital y la fabricación avanzada en la implementación de teselaciones aperiódicas en la arquitectura contemporánea. Se considera la capacidad de la impresión 3D, el corte láser y otros procesos de fabricación para materializar las complejidades y detalles de las teselaciones aperiódicas en la construcción real.

PALABRAS CLAVE

Teselaciones aperiódicas · Girih · prototeselas · R. Penrose · B. Grünbaum · G. C. Shephard

Introducción

«Los conjuntos aperiódicos de teselas recorren una delgada línea entre el orden y el desorden»¹ En este artículo, publicado en marzo de 2023, los autores comentan sobre las condiciones de las teselaciones aperiódicas y como, en muchos casos, es complicado saber si se trata de un conjunto aperiódico. El simple hecho de que se repita una región periódica en cualquier parte del plano rompería la aperiodicidad del conjunto entero. Es por eso que, cuando vemos un teselado aperiódico, parece que se repiten patrones, pero, cuando nos centramos en una de esas regiones siempre aparece una tesela con una orientación o colocación distinta. A primera vista es difícil determinar si un teselado es aperiódico, ya que es necesario detenerse para observar todas las regiones y compararlas entre ellas. La necesidad de que estas teselas tengan una orientación concreta, rompiendo la periodicidad y por tanto el orden, es lo que da sentido al título de este trabajo.

La curiosidad e interés que ha generado la repetición de patrones geométricos para crear diseños complejos y visualmente atractivos, han hecho de las teselaciones un objeto de fascinación y estudio, sobre todo durante las últimas décadas. Estas estructuras geométricas, compuestas por la repetición de un conjunto de formas básicas sin superposición ni brechas, han desempeñado papeles cruciales en diversos campos, desde la arquitectura y el diseño de interiores hasta la matemática y la física, concretamente en el ámbito de la cristalografía. Tradicionalmente, gran parte de la atención se ha centrado en las teselaciones periódicas, donde las formas se repiten en un patrón regular y predecible.

El término teselación o teselado, también conocidos como mosaico o pavimentación, se refiere a una repetición de patrones creados por piezas pequeñas de cerámica o piedra, estas son denominadas teselas. En su aplicación en la arquitectura, las teselaciones requieren «edificios formalmente contruidos con superficies permanentes que puedan ser teseladas, estructuras que solo son posibles en civilizaciones más complejas.»² Los teselados han formado parte de la cultura de multitud de civilizaciones repartidas por el mundo siendo usados para la decoración de elementos arquitectónicos entre otras cosas. Esto se debe, como escribe Chaim Goodman-Strauss, a que «en prácticamente todas las sociedades humanas, los textiles, los adornos de pared y la cerámica iluminan un deseo humano fundamental por la repetición agradable de motivos.»³

En contraste, las teselaciones aperiódicas se caracterizan por ser patrones que se pueden elaborar en un plano infinito de forma precisa sin repetir sus elementos base, desafiando nuestra intuición visual ya que aparentan ser repetitivos, lo que facilita abrir nuevos mundos de posibilidades estéti-

1. Traducción propia de la cita en la página 2 de: Smith, David, Samuel Myers, Joseph, Kaplan, Craig S. y Goodman-Strauss, Chaim. *An Aperiodic Monotile*. Yorkshire, Cambridge, Ontario y Nueva York; 2023, 89 páginas.

2. Traducción propia de la cita en la página 1 de: Goodman-Strauss, Chaim. «Tessellations». *La Matematica* (Turin), 2011, páginas 249-285.

3. Traducción propia de la cita en la página 1 de: Goodman-Strauss, Chaim. «Tessellations». *La Matematica* (Turin), 2011, páginas 249-285.

cas y matemáticas lo que es imposible con patrones que si se repiten. Aunque las teselaciones aperiódicas han sido objeto de estudio durante décadas, en el ámbito arquitectónico particularmente, todavía quedan muchos aspectos por explorar y comprender en profundidad ya que falta mucho trabajo previo para adaptar los conceptos científicos a el contexto artístico y de diseño.

El presente trabajo tiene como objetivo investigar y analizar las teselaciones aperiódicas desde una perspectiva interdisciplinaria, combinando conceptos de matemáticas, arte y arquitectura. Se explorarán diferentes tipos de teselaciones aperiódicas, incluyendo las teselaciones de Penrose, las teselaciones de Wang y otras variantes emergentes las cuales se pueden ver en el apartado 2.

A lo largo de este estudio, se abordarán cuestiones fundamentales relacionadas con las teselaciones aperiódicas, como las reglas de construcción, las simetrías presentes, las propiedades geométricas y la generación de estos patrones. También se analizarán las aplicaciones prácticas de las teselaciones aperiódicas en campos como la arquitectura y el diseño de interiores.

Para llevar a cabo esta investigación, se utilizarán herramientas y enfoques, desde el análisis matemático, su uso en la historia y técnicas de visualización actuales que nos permiten entender estas teselaciones tan complejas. Además, se examinarán obras artísticas y creaciones arquitectónicas como las teselaciones Girih en el apartado 2 y los ejemplos de la arquitectura contemporánea del apartado 3 que se inspiran en las teselaciones aperiódicas, analizando cómo se han utilizado para lograr resultados sorprendentes y originales.

Se espera que este trabajo contribuya al campo de las teselaciones aperiódicas, en su aplicación en la arquitectura, ampliando el conocimiento existente y proporcionando nuevas perspectivas sobre estas estructuras matemáticas y su relevancia en distintos ámbitos. Además, se espera despertar el interés de los lectores descubriendo nuevas formas de belleza y orden en lo aparentemente caótico e irregular. Es por eso que surge el título del arte del desorden.

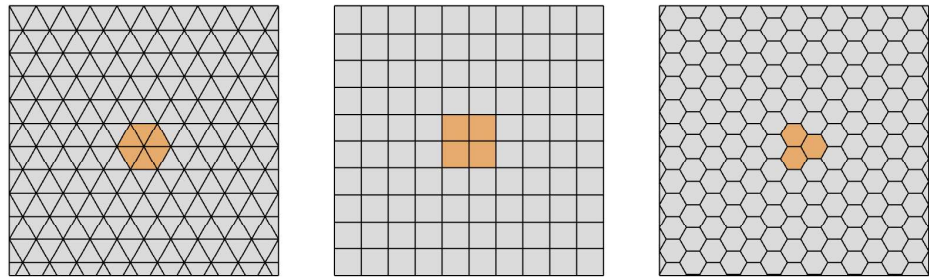
Con el fin de entender este trabajo hay que diferenciar entre los tres tipos de teselaciones, las periódicas, las no periódicas y las aperiódicas ya que crean patrones totalmente distintos y siguen una serie de normas diferentes a la hora de su formación:

Una teselación periódica es aquella en la que se puede delinear una región que tesela el plano por traslación, es decir, desplazando la posición de la región sin rotarla ni reflejarla. Solamente hay tres polígonos regulares con los que se puede cubrir completamente el plano, el triángulo equilátero (Fig. 1.1), el cuadrado (Fig. 1.2) y el hexágono (Fig. 1.3).

Fig. 1.1 (Izq.) Elaboración propia. Teselación (3,6)

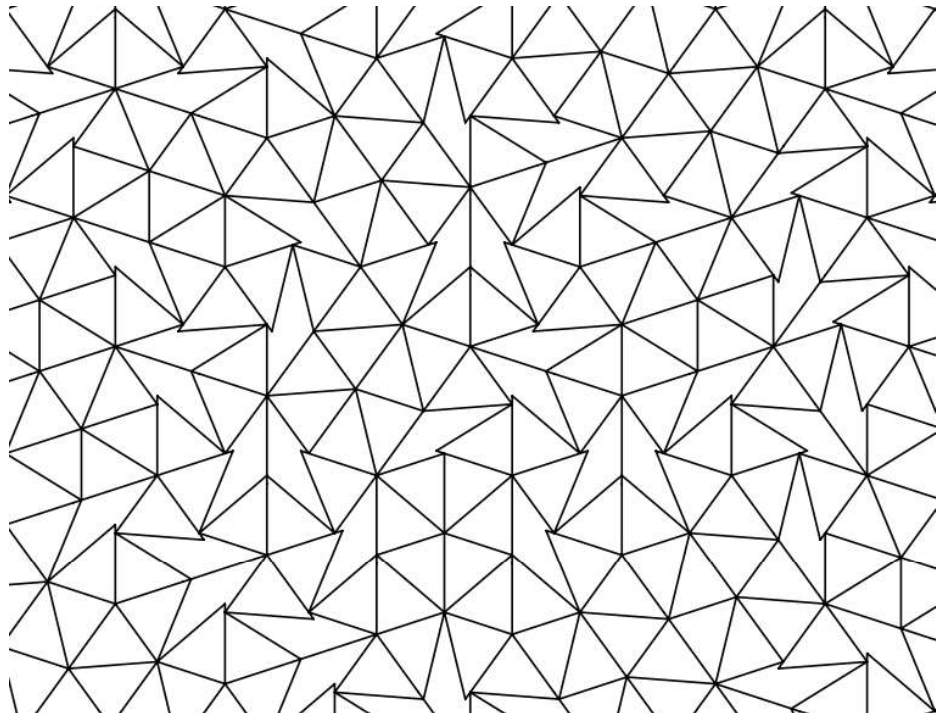
Fig. 1.2 (Centro) Elaboración propia. Teselación (4,4)

Fig. 1.3 (Der.) Elaboración propia. Teselación (6,3)



Una teselación no periódica es simplemente una que no está fijada por ninguna traslación no trivial. A veces, el término describía, implícita o explícitamente, un mosaico generado por un conjunto de prototipos aperiódicos. Estos prototipos de teselas aperiódicas no siempre forman teselaciones aperiódicas, en muchas de sus distribuciones forman teselados no periódicos.

Fig. 1.4 Fragmento de una teselación no periódica con dos teselas asimétricas.



¿Existen conjuntos de teselaciones que se teselen solo de forma no periódica? Por «sólo» queremos decir que ni una sola forma o subconjunto

ni el conjunto completo se teselan periódicamente, sino que al usarlos todos es posible un teselado no periódico. Se permiten mosaicos giratorios y reflectantes.

Por último, y la más importante para este trabajo, una teselación aperiódica es una teselación no periódica con una propiedad añadida que es que no tiene regiones periódicas de tamaño considerable.

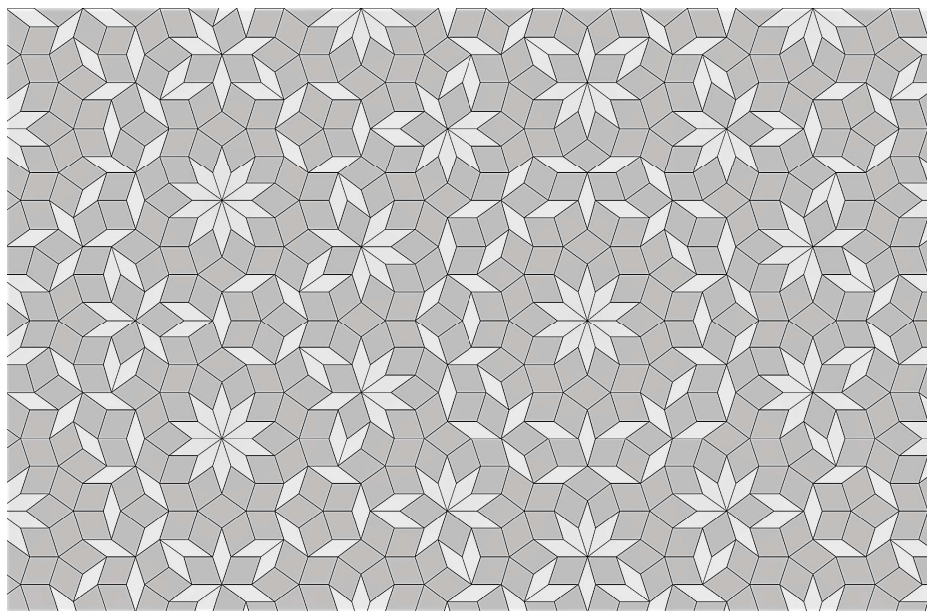


Fig. 1.5 Elaboración propia. Teselación aperiódica de Penrose

Los conjuntos aperiódicos de mosaicos se encuentran en una delgada línea entre el orden y el desorden, admitiendo teselaciones, pero solo aquellas sin simetría traslacional, nunca permitiendo la simple repetición de teselaciones periódicas.⁴

En este trabajo nos vamos a centrar en las teselaciones aperiódicas ya que por motivos que veremos a continuación no han sido estudiadas hasta hace relativamente poco, por lo que la información que tenemos sobre ellas es limitada.

Aunque los teselados aparecen en la mayoría de las civilizaciones, los más impresionantes y complejos provienen de los territorios islámicos. Esto se debe a que el arte religioso islámico, no representa figuras y otros seres vivos ya que en el Islám, Dios es el único que puede crear formas vivas. «Una representación artística es una “creación”. La creación para los musulmanes más ortodoxos, está prohibida por entender que es un intento de “imitar a dios”, que tiene el poder creador.»⁵ Es por ello que desarrollan unos patrones intrincados en los cuales se crean regiones que se pueden asemejar a figuras de seres vivos, pero con un carácter mucho más geométrico.

4. Traducción propia de la cita en la página 2 de: Smith, David, Samuel Myers, Joseph, Kaplan, Craig S. y Goodman-Strauss, Chaim. *An Aperiodic Monotile*. Yorkshire, Cambridge, Ontario y Nueva York; 2023, 89 páginas.

5. Obtenido del artículo de Europapress: <https://www.europapress.es/sociedad/noticia-islam-no-admite-dibujar-ala-mahoma-personas-animales-20150111123721.html>; enero 2015

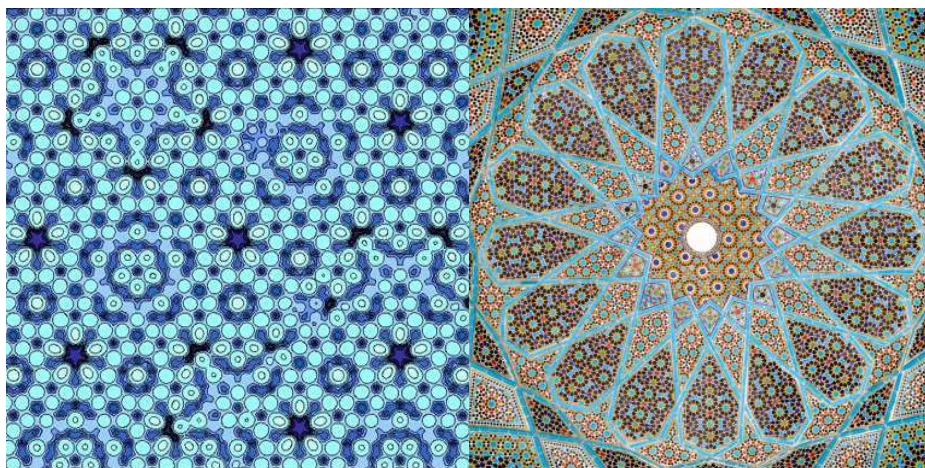
1 Cuasicristales

Descubrimeinto

La noción de la aperiodicidad, emerge primero en contextos científicos ya que como punto de partida, tenemos las matemáticas y la física moderna. Estos patrones aperiódicos representan estructuras complejas y ordenadas que no cumplen con las simetrías regulares relacionadas con la cristalografía. Los primeros experimentos cristalográficos se realizaron en 1912, pero entre 1920 y 1960, hubo diversos avances en la metodología lo cual permitió usar la difracción de rayos X para analizar estructuras moleculares más complejas. Hasta 1982, los científicos creían que había dos tipos de materiales, sólidos ordenados con naturaleza cristalina y materiales desordenados amorfos como el cristal. Todas las estructuras cristalinas eran periódicas ya que tenían simetrías traslacionales. Se creía que los cristales solo podían tener simetrías de orden 2, 3, 4 y 6 pero, Dan Schechtman, mientras trabajaba en la Universidad Johns Hopkins, con aleaciones de aluminio, descubrió un patrón de difracción de rayos X para una aleación de aluminio-manganeso que mostraba una simetría de orden 10 lo que implica una simetría icosaédrica. Este hallazgo permitió que se empezasen a estudiar los cristales cuasiperiódicos o cuasicristales.

Fig. 1.1 *Modelo atómico de una superficie cuasicristal de una aleación de aluminio-paladio-manganeso. J.W. Evans, The Ames Laboratory, US Department of Energy*

Fig. 1.2 *Teselación actual de la tumba del poeta Hafez, construida en 1935.*



Vínculo con la arquitectura

El vínculo entre los cuasicristales y la arquitectura radica en la influencia que los cuasicristales han tenido en la inspiración y creación de diseños arquitectónicos. Como se puede observar con las figuras 1.1 y 1.2, La disposición de los átomos de los elementos conocidos como cuasicristales se asemeja a los teselados islámicos como el de la cúpula de la tumba del poeta Hafez. La búsqueda de simetrías imposibles genera patrones innovadores

Información sobre los cuasicristales contrastada con el artículo: The Discovery of Quasicrystals, Scientific Background on the Nobel Prize in Chemistry 2011, que describe el motivo por el que se le otorgó el Premio Nobel de Química de 2011 a Dan Schechtman.

que pueden ser utilizados como tamices de luz en cubiertas de edificios. Un ejemplo notable es el Museo Louvre Abu Dhabi, diseñado por el arquitecto Jean Nouvel, cuya cúpula está inspirada en patrones cuasicristalinos. La cúpula presenta un intrincado patrón geométrico que permite el paso de una luz difusa y crea una experiencia visual única en el interior del museo.

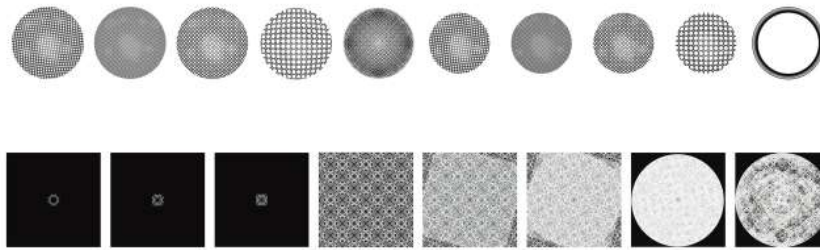


Fig. 1.3 Modelos de formación de la cubierta representando las distintas capas que la forman.

El resultado de la superposición de 8 capas con geometrías de distintos tamaños y ángulos crea el efecto conocido como “lluvia de luz” la cual se mueve a medida que avanza el día y por la noche forma 7,850 estrellas.

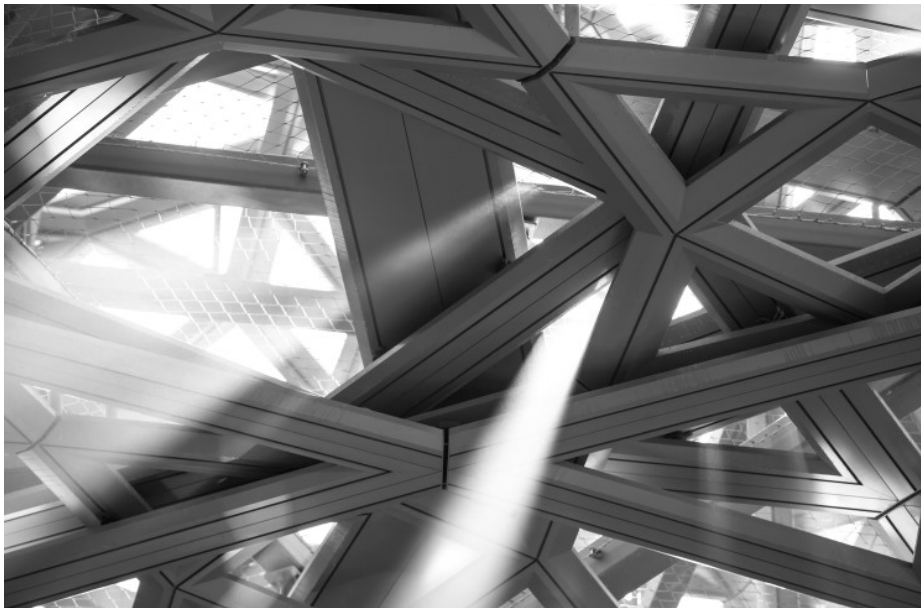


Fig. 1.4 Imagen de la entrada de luz solar a través de la cubierta.

2 Teselaciones aperiódicas

Teselas Wang

Un par de décadas antes, Hao Wang estaba tratando de resolver el problema de decidibilidad (1). Para ello, intentaba encontrar un algoritmo que determinara si algún prototipo finito dado, creaba un teselado. En 1966, Robert Berger, un estudiante de Wang, se le ocurrió un conjunto de teselas que eran aperiódicas. Consistía de 20.426 teselas Wang las cuales son un cuadrado unitario, con bordes, cada uno de un color tal que solo se pueden unir con bordes del mismo color al formar la teselación. Otra condición que deben cumplir este prototipo de teselas es que no se permite ni rotar ni reflejar los cuadrados. Berger redujo el número de teselas a 104, ese número ha seguido reduciéndose hasta solo necesitar 11 teselas Wang

Fig. 2.1 Fig. 2.1 Las 11 teselas Wang (izq) y el teselado que forman (der).

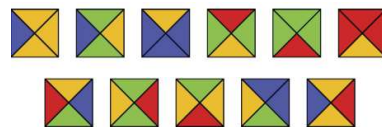
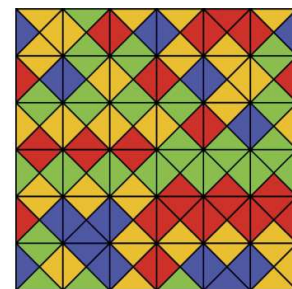


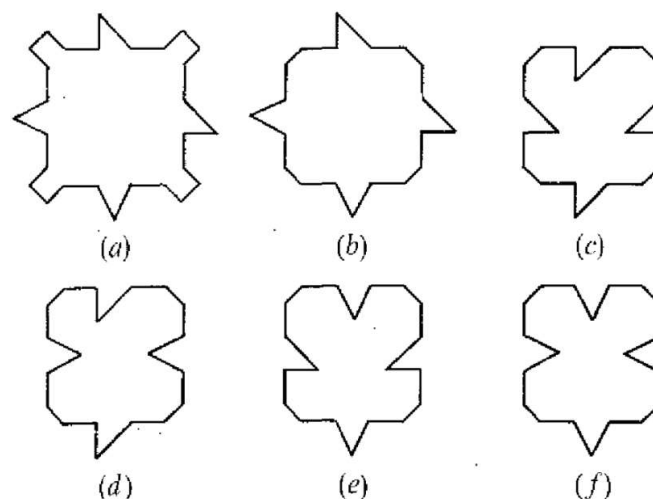
Figure 1: Wang Tiles.



Teselas de Robinson

En 1971, Raphael M. Robinson descubrió un prototipo de teselas aperiódicas. Consistía de 6 teselas cuadradas cuyas esquinas y bordes habían sido modificadas.

Fig. 2.2 Las 6 prototeselas de Robinson



En 5 de las teselas, triángulos rectángulos isósceles han sido quitados de las esquinas. En la primera, se han añadido tres de esos triángulos a cada esquina para formar una extensión de la esquina. Con este criterio se determinan dos tipos en las teselas de Robinson, las teselas con esquina (a) y las que no tienen esquina (b), (c), (d), (e), (f)

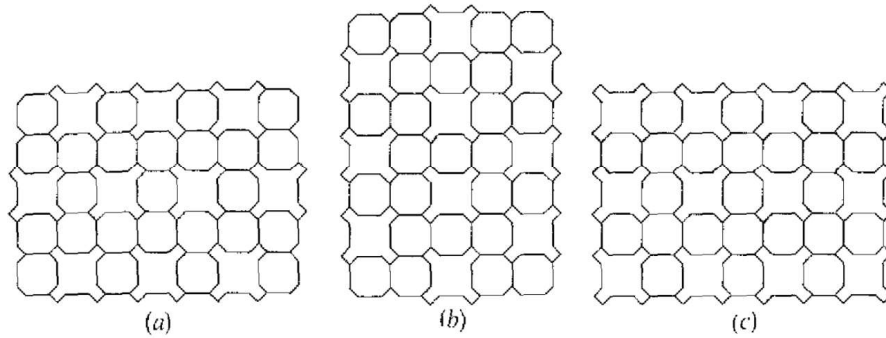


Fig. 2.3 3 ejemplos de posibles teselaciones que se pueden formar con las prototeselas de Robinson

Teselas de Ammann A_1

Similar a las teselas de Robinson, R. Ammann descubrió una serie de seis teselas que parten de un cuadrado. Como en las anteriores, las esquinas y los bordes han sido modificados. A diferencia de las de Robinson, que solo añaden y restan triángulos en los bordes de los cuadrados, las de Ammann añaden y restan dos geometrías distintas, un triángulo y un trapecio.

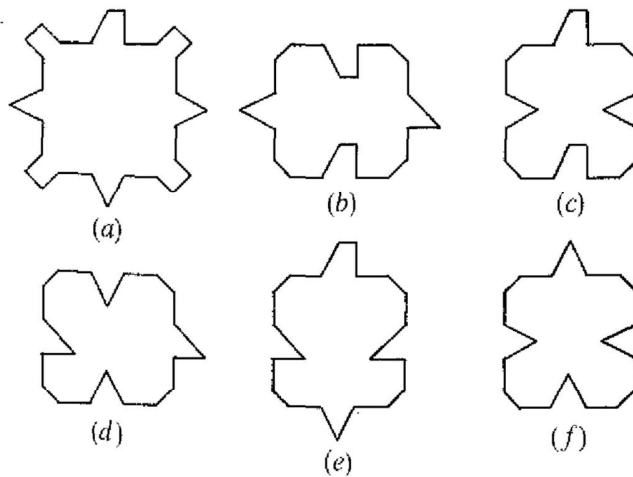


Fig. 2.4 Las 6 prototeselas de Ammann A_1

Para que se cumpla la aperiodicidad de esta teselación, las teselas de la (a) a la (e), no pueden ser rotadas $\pi/2$, solo pueden ser reflejadas horizontal y verticalmente. Por otro lado, la tesela (f), puede aparecer en cualquier orientación.

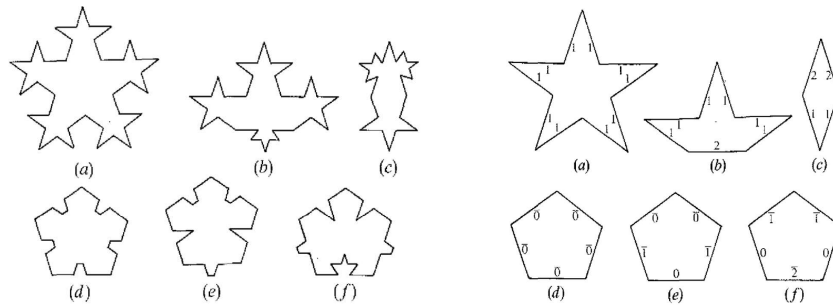
Teselaciones aperiódicas de Penrose

Teselación original de Penrose P_1

En 1973 y 1974, Roger Penrose descubrió tres prototipos de teselas aperiódicas diferentes. La teselación original está formada por 6 teselas, basadas en rombos, pentágonos regulares y medios-pentáculos. Estas teselas, como las anteriores, tienen los bordes modificados con muescas y protuberancias. Para simplificar su representación, reemplazamos las modificaciones de los bordes por un número.

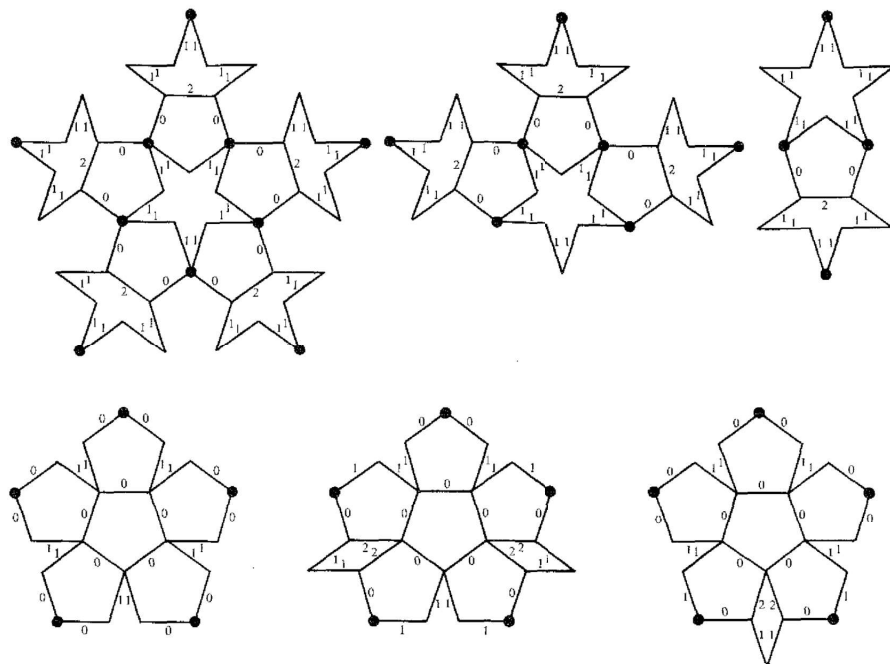
Fig. 2.5 (izq) Las 6 prototeselas originales de Penrose.

Fig. 2.6 (der) Simplificación de las prototeselas sustituyendo las formas de los vértices por números para simplificar el dibujo.



En la siguiente figura podemos observar las distintas regiones creadas con las prototeselas, definido en el glosario, P_1 de Robinson.

Fig. 2.7 6 regiones que se pueden formar usando las prototeselas originales de Penrose



Combinando las 6 regiones conseguimos formar un teselado aperiódico que podría seguir expandiéndose sin límites.

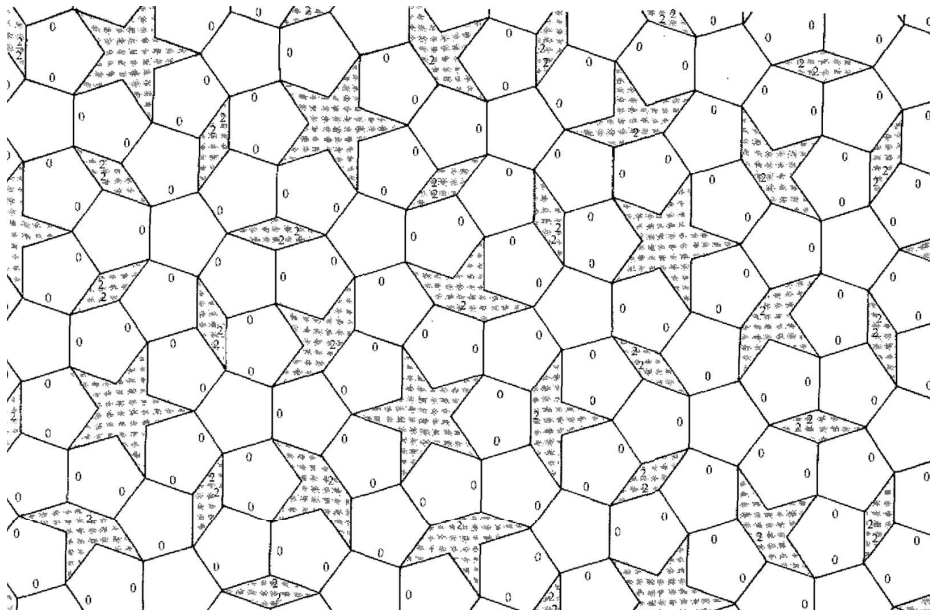


Fig. 2.8 Teselación aperiódica formada por las prototeselas originales de Penrose

Cometa y flecha P_2

El segundo tipo de prototeselas se conocen como cometa y flecha. La cometa es un cuadrilátero convexo con ángulos interiores de 72° , 72° , 72° y 144° . La flecha en cambio es un cuadrilátero no convexo con ángulos interiores de 36° , 36° , 72° y 216° . Ambas teselas tienen dos lados de largo unitario y los dos restantes son de Φ , el número áureo, alrededor de 1,618.

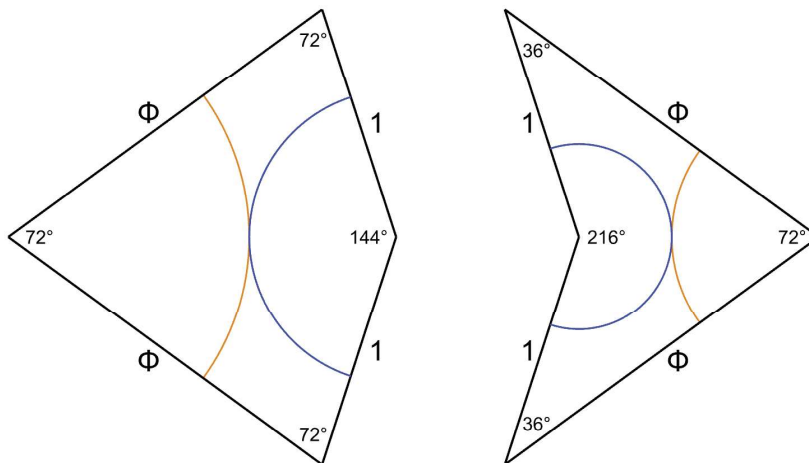


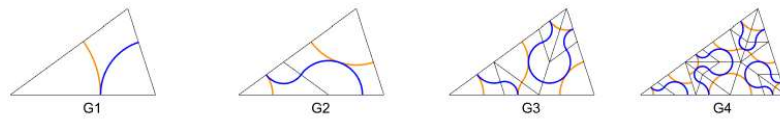
Fig. 2.9 Elaboración propia. A la izquierda, la tesela denominada cometa y a la derecha la flecha. Se representan los ángulos, dimensiones y diseño interior que permiten la teselación aperiódica.

Este tipo de teselas tienen posiciones limitadas por el dibujo interior. En este caso, son arcos de color naranja y azul. Los lados de la misma longitud encajarían sin el diseño interior pero no crearía una teselación aperiódica. Para que se cumplan las condiciones de aperiodicidad, los arcos del mismo color tienen que encajar creando continuidad.

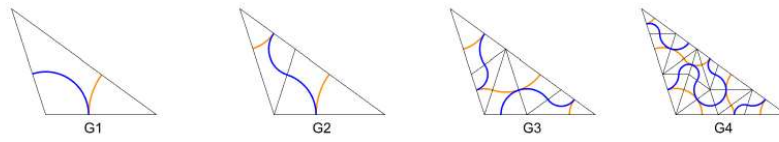
Fig. 2.10 Elaboración propia. De arriba a abajo, media cometa, media flecha, sol y estrella. Son 4 de las figuras fundamentales que permiten formar teselaciones aperiódicas.

G_1 , G_2 , G_3 y G_4 corresponden a las distintas generaciones

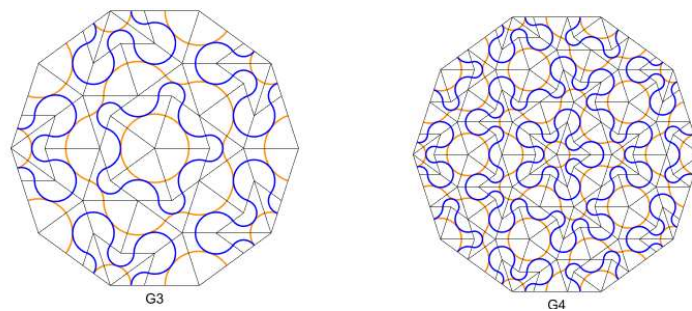
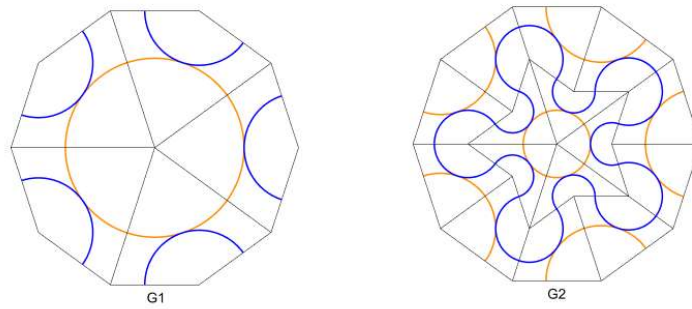
Media cometa



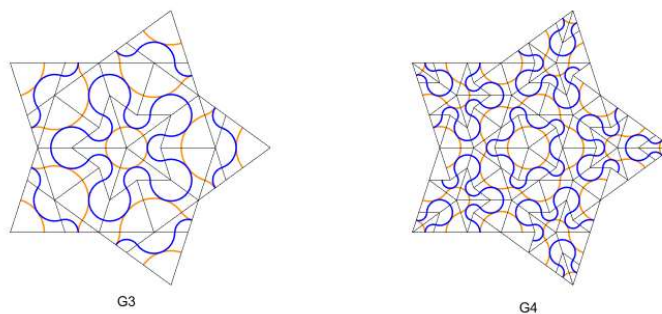
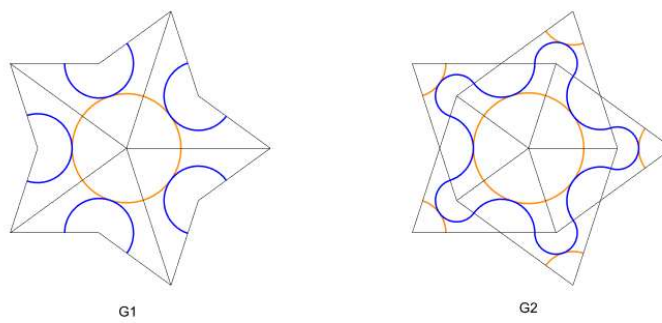
Media flecha



Sol



Estrella



Por el método de inflación y sustitución, definido en el glosario de términos al final del trabajo, un tipo de sustitución por la cual se puede teselar el plano aperiódicamente, observamos como dada una forma inicial creada por una o más teselas, podemos crear esa forma original a base de las prototeselas reduciendo su escala. Cada vez que reducimos su escala lo consideramos como una generación nueva. Vamos a observar 4 formas base y cómo cambian a lo largo de 4 generaciones.

Teselación rómbica P_3

Este prototipo de teselas aperiódicas está formado por dos rombos, uno más ancho, con ángulos interiores de 72° , 72° , 108° y 108° y otro más estrecho con ángulos interiores de 36° , 36° , 144° y 144° . Los ángulos son determinantes para su aperiodicidad ya que son los ángulos que se forman al dividir un círculo en 10 partes iguales y por tanto, como sucede en las teselaciones Girih que veremos en el siguiente apartado, permiten simetrías de orden 10, que genera en muchos casos patrones aperiódicos. Estas prototeselas suelen tener marcas o dibujos en su interior que condicionan su posición junto a otras teselas. En el ejemplo inferior observamos una porción del mosaico generado por las prototeselas con el diseño interior que aparece a continuación.

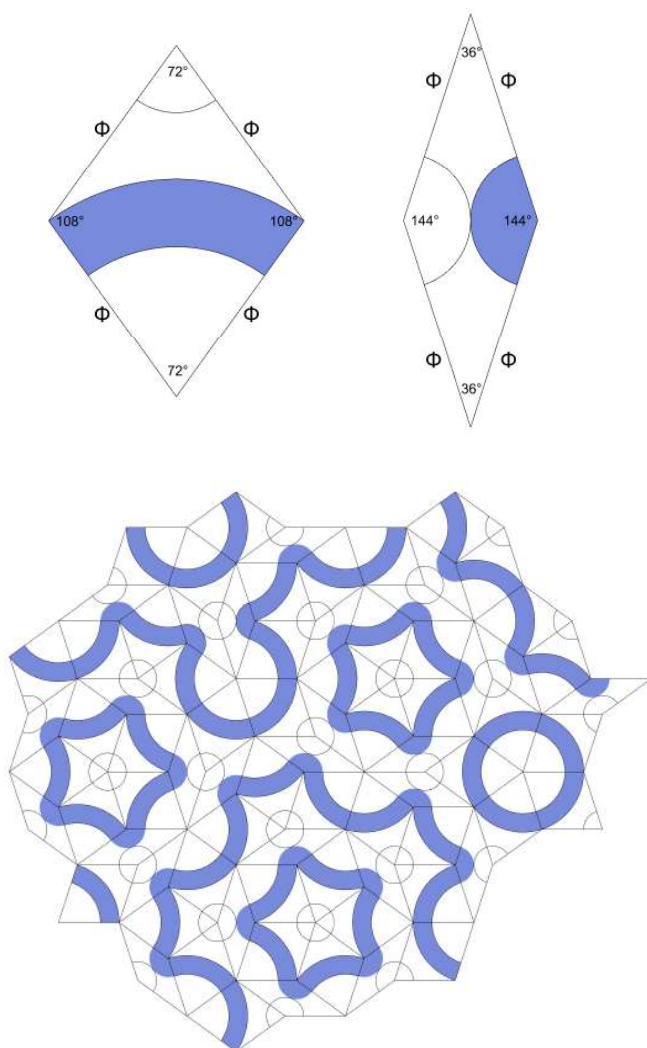
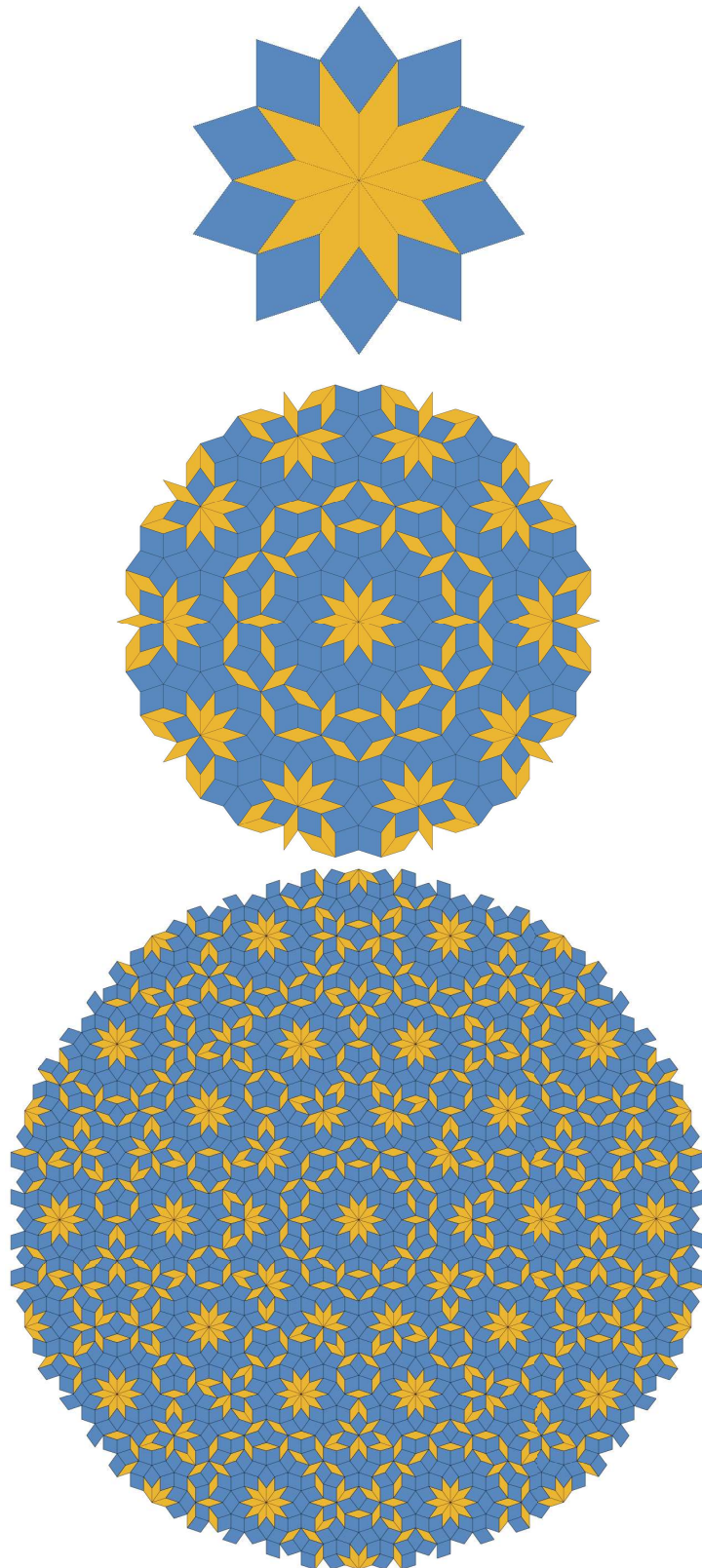


Fig. 2.11 (sup) A la izquierda, la tesela denominada rombo ancho y a la derecha el rombo fino. Se representan los ángulos, dimensiones y diseño interior que permiten la teselación aperiódica

Fig. 2.12 (inf) Un fragmento de una de las posibles teselaciones formadas por los rombos de Penrose

En cambio, si usamos teselas de dos colores obtenemos un diseño totalmente distinto con una formación más sencilla. En este tipo de diseños sin dibujo interior, como las teselas que usadas en las Fig. 2.13, es posible que se produzca la periodicidad en algún punto del plano por lo que no son estrictamente aperiódicos si consideramos un plano infinito, pero los podemos considerar aperiódicos si delimitamos su espacio a lo que nos intere-

Fig. 2.13 Elaboración propia usando es pasos de la formación radial de una teselación de Penrose.



sa en su aplicación en la arquitectura como puedes ser el recubrimiento de suelos o paredes.

Sobre los teselados de Penrose se recoge considerablemente más información debido a que resultaban más atractivas que el resto de las teselaciones aperiódicas por lo tanto han sido más estudiadas y comentadas. «Aquí limitamos la atención al conjunto P₂ por la sencilla razón de que este conjunto ha atraído más atención que los demás y, en consecuencia, se sabe más sobre él.»⁶ Además, al contrario de otros autores de teselaciones aperiódicas, Penrose ya tenía fama que adquirió de manera independiente como matemático y físico, ya que había hecho varios descubrimientos en otros contextos que eran llamativos y por tanto atrajo un mayor interés sobre el tema al investigarlo. Este tipo de teselaciones se asemejan mucho a las teselaciones que se pueden encontrar en la arquitectura islámica del siglo XV conocidas como teselas Girih.

Teselaciones Girih

Las teselas Girih son un conjunto de patrones decorativos geométricos utilizados en la arquitectura islámica, especialmente en la época medieval. Estas teselas son reconocidas por su complejidad y belleza visual, y se caracterizan por su capacidad de generar patrones aperiódicos a partir de un conjunto limitado de elementos básicos. Se recoge información de este tipo de teselas datadas en el siglo XIII, pero es durante el siglo XV cuando aparecen multitud de ejemplos en la arquitectura islámica de estas teselaciones. Estas teselas han sido estudiadas por Peter J. Lu, un físico interesado en el estudio de las teselaciones decagonales y cuasicristalinas de la arquitectura medieval islámica. En un principio se creía que estas decoraciones se hacían con regla y compás, una técnica heredada de los griegos. Aparecen en las tallas en piedra estos complicados patrones que parecen imposibles de hacer con tanta perfección con estas sencillas herramientas.

Aunque en la arquitectura islámica medieval se pueden construir patrones girih periódicos sencillos que incorporan motivos decagonales utilizando una regla y un compás, en la arquitectura islámica medieval también se encuentran motivos decagonales mucho más complejos. Estos patrones complejos pueden tener celdas unitarias que contienen cientos de decágonos y pueden repetir los mismos motivos decagonales en varias escalas de longitud. Colocar y dibujar individualmente cientos de estos decágonos con regla y compás habría sido extremadamente engorroso y probablemente habría acumulado distorsiones geométricas, que no se observan.⁷

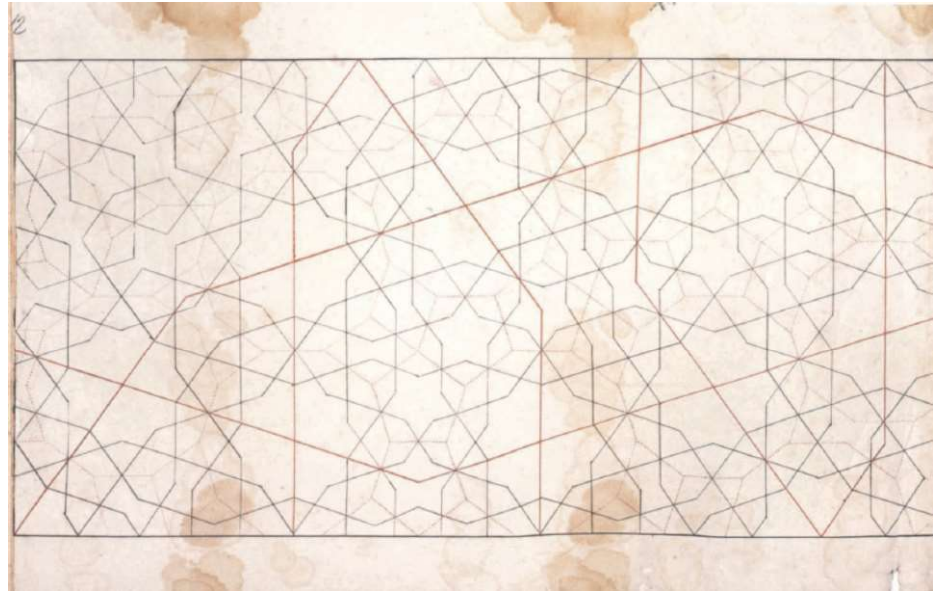
Es por eso que Lu, investigando sobre estos elementos decorativos hizo un descubrimiento importante. Se produjo un avance conceptual en el que los patrones Girih se reconcebían como teselados por lo que estaban formados por una serie de teselas. Esto simplificaba su ejecución ya que cual-

6. Traducción propia de la cita en la página 558 de: Güm̈baum, Branko. *Tilings and Patterns* (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), 700 páginas.

7. Traducción propia de la cita en la página 1106 de: Lu, Peter J. *Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture*.

quiera podía crear patrones complejos partiendo de cinco dominios fundamentales, equivalentes a las prototeselas de las teselaciones aperiódicas.

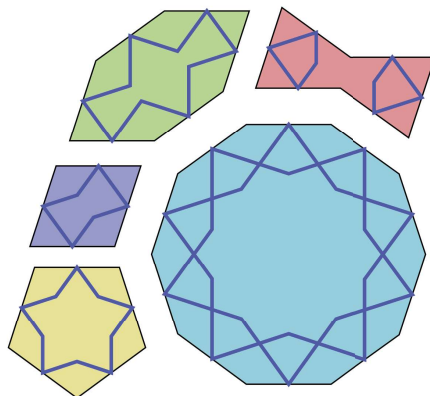
Fig. 2.14 Ilustración 28 del Topkapi Scroll



La imagen muestra un fragmento del Topkapi Scroll (s. XV-XVI), el rollo es una valiosa fuente de información, contiene 114 patrones que pueden haber sido utilizados directa o indirectamente por los arquitectos y artesanos para crear los patrones de mosaico en muchas mezquitas de todo el mundo. Como se puede observar en la imagen, hay tres tipos de líneas: la negra, que marca las líneas decorativas de cada tesela; la roja punteada, que indica los contornos de las teselas girih; la roja gruesa, que representa una inflación de las teselas originales. Este es uno de los pilares en los que se apoya este descubrimiento ya que si no tuviesen nada que ver en su formación no estarían dibujadas en los manuscritos originales.

Las líneas que conectan los puntos de las teselas forman figuras estrelladas y entrelazadas componiendo polígonos regulares como estrellas de cinco puntas y pentágonos. Se utilizan como revestimiento de superficies como cúpulas, paredes y frisos creando relieves decorativos que pueden ser interpretados como representaciones simbólicas en el contexto de la religión y la cultura islámica.

Fig. 2.15 Las 5 teselas Girih



Estas son las 5 teselas Girih que se utilizaron desde el siglo XII y XVII para crear los intrincados diseños que recubrían los edificios importantes de las regiones de Oriente Medio y Asia Central que veremos en el apartado 3. En la imagen a continuación vemos los patrones imposibles que se podrían llegar a crear con las 5 teselas Girih.

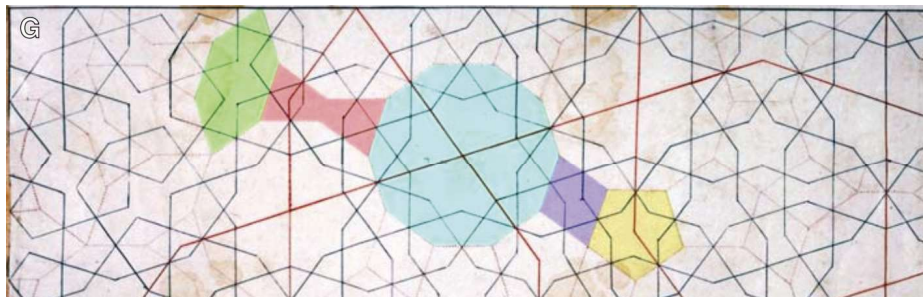


Fig. 2.16 Los contornos de cinco teselas girih aparecen en el panel 28 del pergamino de Topkapi, donde hemos coloreado cada una de las teselas de acuerdo con el esquema de color en la figura anterior

En la actualidad, las teselas Girih han despertado el interés de matemáticos, arquitectos y diseñadores por su complejidad geométrica y su capacidad para generar patrones aperiódicos como se puede observar en el libro de *Islamic Geometric Patterns* de Jay Bonner. Un dato curioso sobre este libro y que explica porque no siempre se denominan Girih a este tipo de teselas es que al ser una palabra en Farsi que significa nudo, en la mayoría de los escritos sobre el tema se les denomina “unidad traslacional” o “unidad de repetición”. Su estudio y aplicación han inspirado nuevas investigaciones en el campo de las teselaciones aperiódicas, así como su uso en el diseño de superficies y elementos arquitectónicos contemporáneos.

Aunque no todas las teselaciones Girih sean aperiódicas, las teselas Girih sí que pueden generar patrones aperiódicos y, siendo los pocos ejemplos que podemos encontrar ejecutados en grandes superficies son adecuados para el estudio. Como no existían las herramientas con las que contamos hoy en día en el pasado, las teselas se elaboraron usando ángulos formados en la división de un círculo en 10 partes iguales.

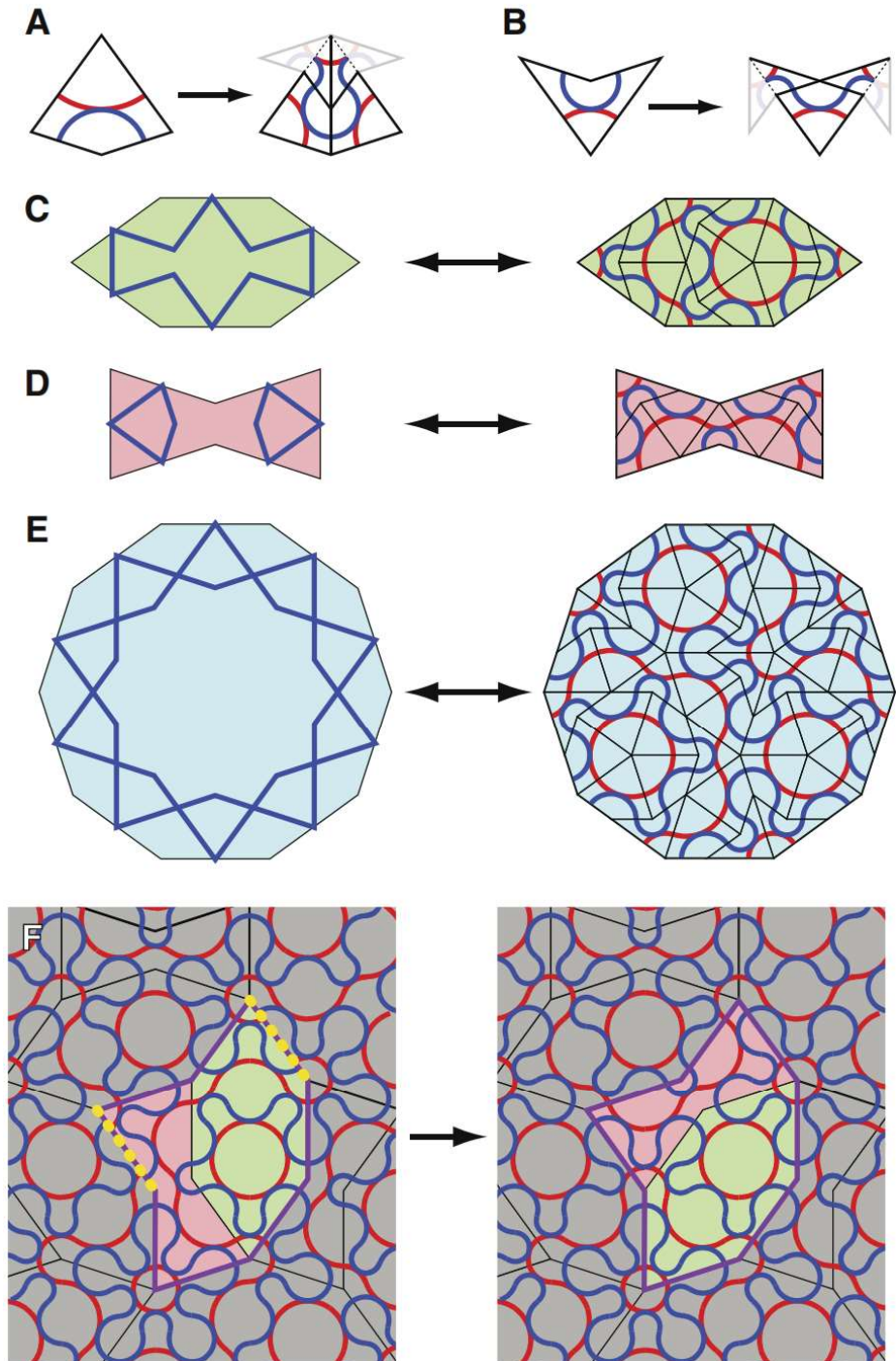
En Girih con diez divisiones: el ángulo de las líneas de la familia aguda se basa en 36 grados o $1/10$ segmento de círculo. El ángulo de las líneas de la familia mediana se basa en 72 grados o $2/10$ segmentos de un círculo. El ángulo de las líneas de la familia obtusa se basa en 108 grados o $3/10$ segmentos de un círculo. Además, el ángulo de las líneas de la familia de los dos puntos se basa en 144 grados o $4/10$ segmentos de un círculo.⁸

Es esta relación de ángulos que crea similitudes con las prototeselas de Penrose y las teselaciones que estas forman. Además, como sucede con las prototeselas, no todos los dominios fundamentales generan patrones con la estructura correcta para poder teselar el plano. Cuando se combinan Girih con Penrose se pierde la simetría de algunas teselas por lo que no tienen reglas de concordancia. Hay que hacer un esfuerzo mayor para poder organizar estas teselas y que funcionen.

8. Traducción propia de: Hely, Seyed Ali-Akbar. . *Girih and Arch in islamic Architecture*. 1986

En la teselación de Darb-i Imam (Fig 3.4), 3700 teselas de Penrose que encajan con las Girih. De estas 3700 teselas, solo aparecen 11 errores, representados en la Fig. 1.1 por las líneas discontinuas amarillas. Estos están identificados ya que las líneas dentro de las teselaciones de penrose no encajan en un lado, los cuales se pueden deshacer moviendo dos teselas. Se pueden llegar a considerar errores en la construcción o en una de las diversas reparaciones que ha sufrido el edificio.

Fig. 2.17 Imagen del proceso que relaciona las teselas Girih con los cuasicristales a través de las teselas de la cometa y flecha de Penrose.



Como se ve en los bordes con líneas punteadas amarillas de la imagen F, no hay continuidad con los patrones rojos y azules, lo cual se soluciona cambiando la orientación de esas dos teselas.

¿Existe un procedimiento de subdivisión compatible con inflación de penrose? «Un fragmento solo es un fragmento de una teselación de penrose»⁹ la aperiodicidad solo se cumple si hay una forma de extender el teselado infinitamente sin errores, es por eso que el autor considera que un fragmento no es suficiente para demostrarlo ya que todo fragmento de una teselación de penrose puede ser parte de una matriz periódica y por tanto expandirse periódicamente hasta el infinito. Para el decágono, la subdivisión de penrose funciona perfectamente creando un fragmento de penrose con simetría de orden 10 sin ningún error. En cambio, en la pajarita no ocurre lo mismo. Al hacer la sustitución, se generan dos errores en dos uniones entre el decágono y dos hexágonos, que no se pueden eliminar. Es debido a estos errores que no podemos considerar Darb-i Imam como una sustitución perfecta de cuasicristales de Penrose.

Teselaciones por sustitución

El método de sustitución es una manera de elaborar teselaciones usando una estructura jerárquica. Una teselación por sustitución es aquella que está generada por una descomposición e inflación repetidas de una “rep-tile”, definido en el glosario. Es el método para la creación de muchas teselaciones con simetría no traslacional. Estas teselaciones están formadas por un tipo de tesela conocida como “Rep-tile”¹⁰ o “k-rep-tile”¹¹ es el nombre de las teselas que pueden teselar con réplicas escaladas con un factor k de sí mismas.

Teselas aperiódicas de Ammann

Ammann A2 (Chair)

En el caso de la prototesela A2, el factor de inflación es relativamente peque-



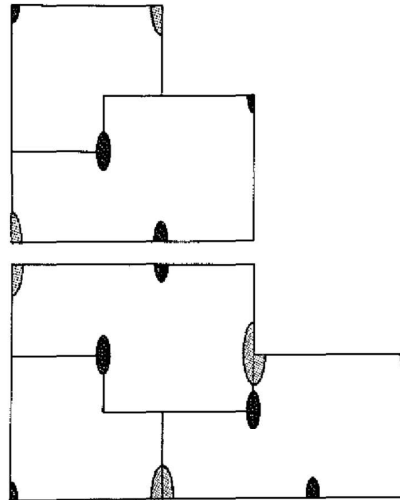
Fig. 2.18 Prototeselas
Ammann A2

ño, precisamente la raíz cuadrada de Φ , aproximadamente 1,272.

9. Traducción propia de una frase dicha por Lu, Peter J. en la conferencia en el coloquio del departamento de física de la Universidad de Harvard, presentada el 3 de diciembre de 2007. Se puede ver en <https://www.youtube.com/watch?v=rldnu9rNpH8&t=314s>

10 y 11. Terminos obtenidos de ADAMS, Colins. The Tiling Book. (Providence, American Mathematical Society, 2022). 298 páginas

Fig. 2.19 Formación por sustitución de las teselas Ammann A2



Como se puede ver en las figuras superiores las teselas A2 son un claro ejemplo de sustitución ya que reduciendo su tamaño con el factor de inflación k mencionado anteriormente, se pueden formar teselaciones más complejas con el mismo contorno que las prototeselas.

Ammann A3

En el caso de las prototeselas A3, existen dos condiciones para que se cumpla su aperiodicidad. La primera se trata de usar unas marcas en los vértices. En el caso de la imagen inferior, se han elegido segmentos de un círculo por lo que, al unirse entre sí, las prototeselas han de completar ese círculo.

Fig. 2.20 Prototeselas Ammann A3

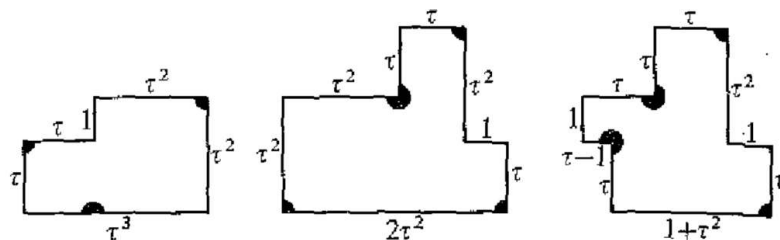
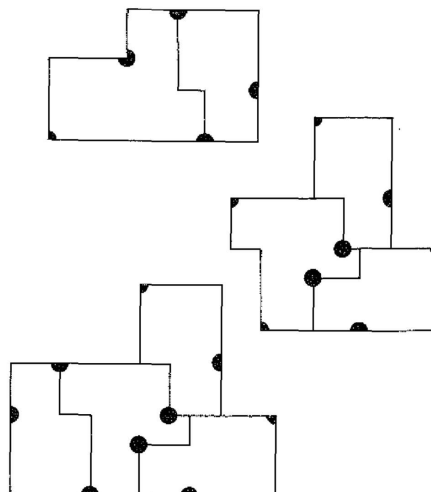
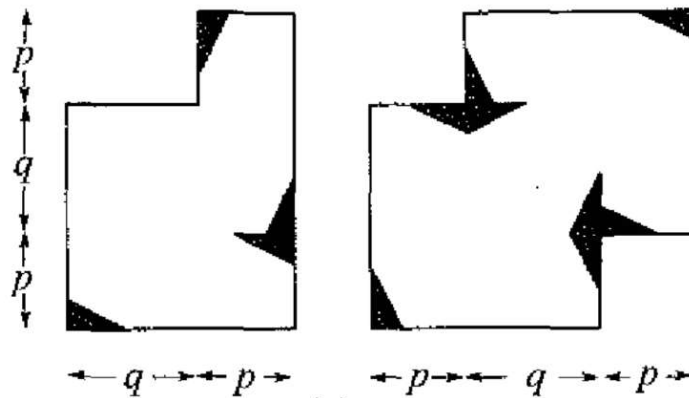


Fig. 2.21 Formación por sustitución de las teselas Ammann A3



La segunda condición es que no se permite reflejar las teselas ya que enton-

Fig. 2.22 Prototeselas
Ammann A_4

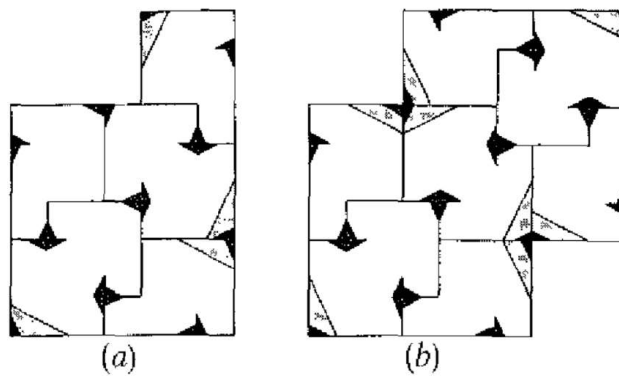


ces no encajarían los dibujos de los vértices.

Ammann A_4

En el teselado por sustitución de las teselas A_4 , no hay unas dimensiones

Fig. 2.23 Formación
por sustitución de las
teselas Ammann A_4



específicas de las teselas, siempre y cuando $p/q = \sqrt{2}$. Siguiendo estas pro-

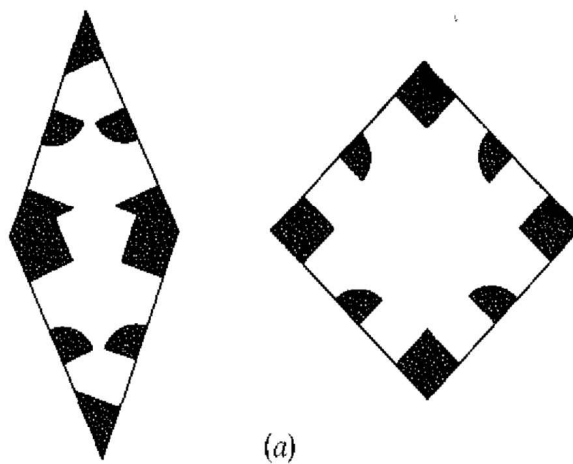


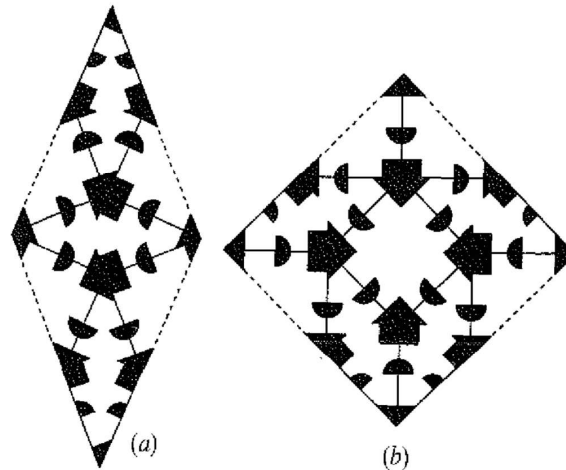
Fig. 2.24 Prototeselas
Ammann-Beenker

porciones de tamaño es posible la teselación por sustitución de estas prototeselas.

Ammann-Beenker

Este es el último tipo de prototeselas creado por Ammann y es el único con

Fig. 2.25 Formación por sustitución de las teselas Ammann-Beenker



teselas convexas lo cual lo diferencia del resto de teselaciones de Ammann. A diferencia de las otras teselaciones, estas teselas tienen que tener un diseño en todos sus lados y vértices para conseguir teselar el plano aperiódicamente.

Estas prototeselas son más sencillas que las otras descubiertas por Ammann ya que básicamente son un cuadrado y un rombo con ángulos de 45° y 135° . A la hora de teselar el plano por sustitución, la cosa es más complicada ya que más que una descomposición de las prototeselas es una recomposición. Al reducir las teselas por un factor $k = 0,5$, hace falta utilizar medias teselas para poder obtener una tesela con el mismo contorno.

Como se puede observar en todas las teselas de Ammann, y como es frecuente en las teselaciones aperiódicas, no solo dependen de su geometría del contorno ya que esta solamente les permite encajar entre ellas, la condición más importante es el diseño interior ya que es este el que les da la condición de aperiodicidad. Las prototeselas A2 y A3 están relacionadas con el número áureo ya que, en la sustitución, obtenemos unas teselas de tamaño similar debido a que el factor de inflación es de tan solo $\sqrt{\Phi}=1,272$. En el caso de A4 y A5, el factor de inflación es $\sqrt{2}$. Es evidente que la irracionalidad de estos factores de inflación tiene que ver con la aperiodicidad de las teselaciones, cosa que se repite en las proporciones de las teselas de Penrose.

Conway-Radin Pinwheel

Se trata del primer ejemplo de teselación monoédrica, lo que significa que cada tesela es isométrica a un grupo de teselas que forman la prototesela, donde las teselas tienen infinitud de aspectos creando así, una teselación de apariencia aleatoria pero que su formación está debida a las estrictas condiciones de su contorno.

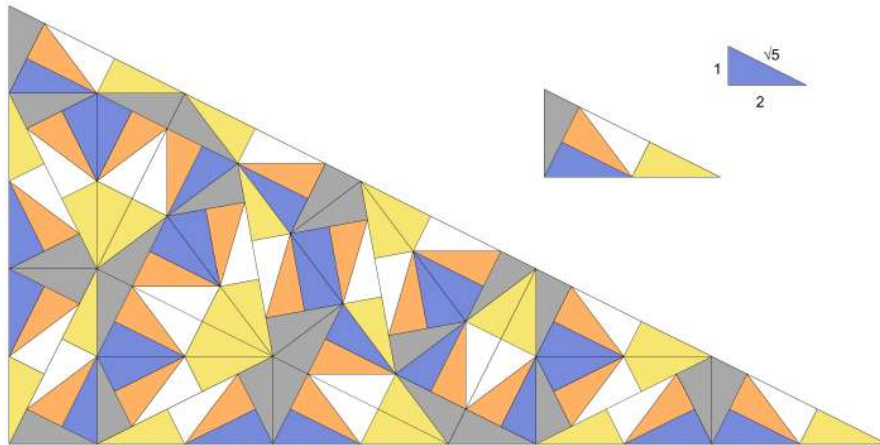


Fig. 2.26 Elaboración propia.
De derecha a izquierda, la
formación por inflación y
sustitución de un teselado de
Conway-Radin Pinwheel.

Chair Tile

Este ejemplo conocido como teselación de la silla. Se puede apreciar como la tesela original se descompone en 4 copias de sí misma reducidas por un factor de 2. Este proceso se puede repetir hasta formar una tesela como la que vemos en G4 con la que formar una teselación aperiódica.

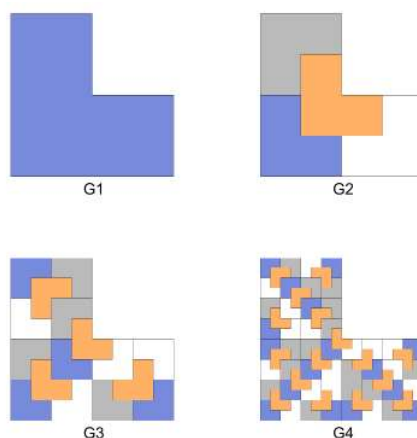
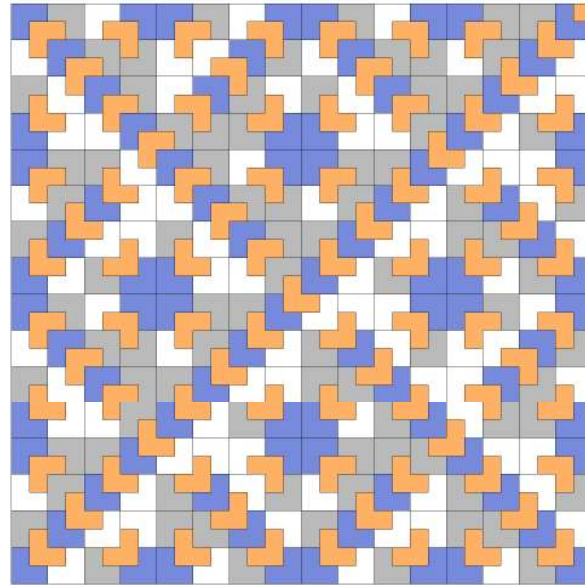


Fig. 2.27 Elaboración propia.
En el orden G1, G2, G3 y G4,
la formación por inflación y
sustitución de una Chair tile

A la hora de teselar un plano, al estar formada por una pieza ortogonal, resulta fácil su aplicación en la arquitectura ya que se puede usar para cubrir paredes o suelos que mayoritariamente tienen un contorno rectangular.

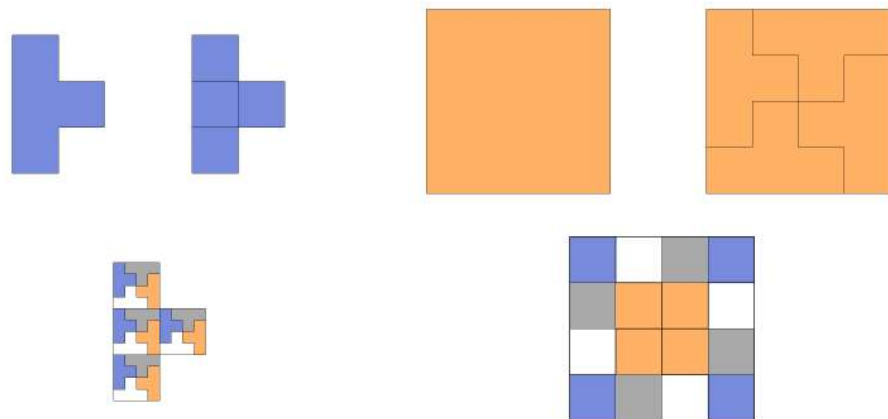
Fig. 2.28 Elaboración propia.
Una posible teselación
aperiódica formada por
la tesela Chair G_4 .



T tile

La tesela en T es un ejemplo sencillo de cómo se pueden formar teselados por sustitución. Como se puede observar la T está formada por cuatro cuadrados, y los cuadrados pueden formarse por cuatro Ts.

Fig. 2.29 Elaboración propia. Ejemplo de
formación por sustitución
e inflación de un tesela T



El problema Einstein

El término Einstein en las teselaciones se refiere a un problema geométrico. Viene del alemán ein stein que se traduce a una piedra y busca encontrar una prototesela capaz de teselar aperiódicamente el plano. Si limitamos las condiciones de aperiodicidad al contorno de la tesela únicamente, el problema se vuelve mucho más complejo. Como hemos visto anteriormente, muchas de las prototeselas aperiódicas necesitan un diseño en su interior que condiciona su unión con el resto de teselas. En la mayoría de los casos que buscaban resolver el problema Einstein, siempre se desafiaban los términos de tesela, teselación y aperiódica.

Tesela Taylor-Socolar

Esta teselación parte de un hexágono regular que como ya hemos visto, es una de las tres geometrías capaces de formar una teselación periódica perfecta. Para pasar de la periodicidad a la aperiodicidad, es necesario cumplir unas condiciones extra. Estas condiciones crean dos tipos de teselas distintas. En el primero de los casos, se utiliza un diseño en el interior del hexágono. Ya que solo con esta tesela no se cubre un plano aperiódicamente, se utiliza una segunda tesela, que es el reflejo de la primera. Como en diversas teselaciones aperiódicas se aceptan reflejos de teselas como si solo fuese una, técnicamente cuenta como una tesela Einstein.

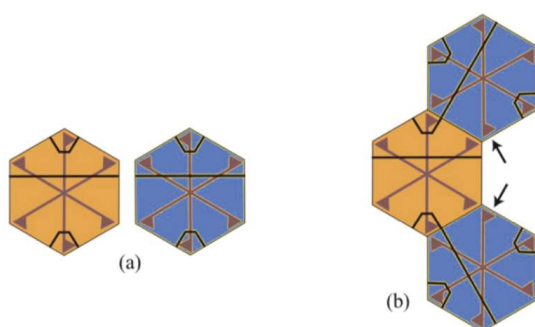


Fig. 2.30 (a), la prototesela Taylor-Socolar (ocre) y su reflejo (azul). (b) Muestra como tiene que ser la unión de las teselas para crear continuidad con el diseño interior lo cual fuerza su aperiodicidad.

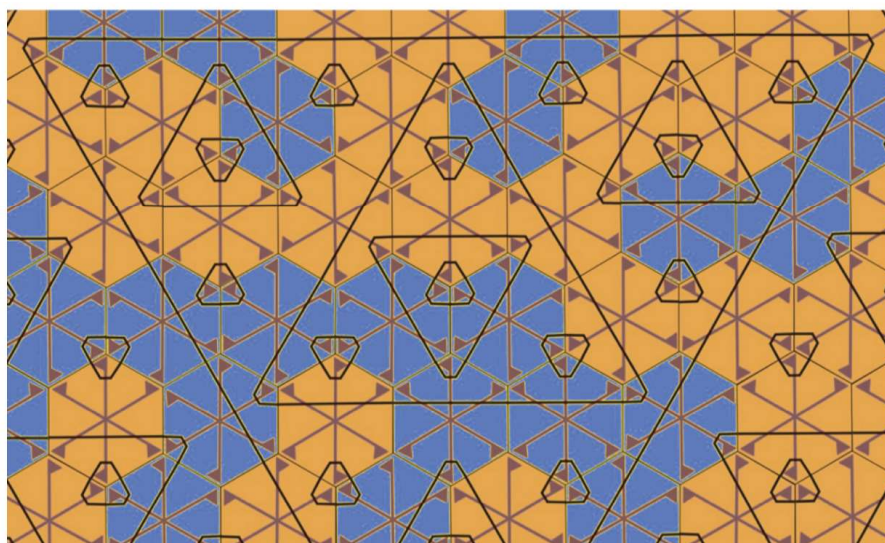


Fig. 2.31 Un fragmento de una de la teselación formada por la prototesela Taylor-Socolar.

En el segundo caso, no cumple estrictamente con ser una única tesela ya que sus bordes han sido modificados y con los sobrantes se generan unas piezas separadas de los vértices las cuales permiten forzar una posición y orientación que determinan la aperiodicidad. La aplicación de este tipo de teselación en la arquitectura no sería posible ya que para que encajasen en un plano, la separación y orientación de las seis piezas pequeñas que rodean el hexágono tendría que ser perfecta.

Fig. 2.32 Otro ejemplo de una prototesela Taylor-Socolar únicamente capaz de teselar diseños generados por ordenador.

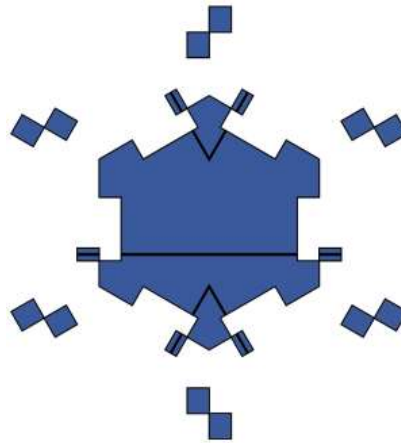
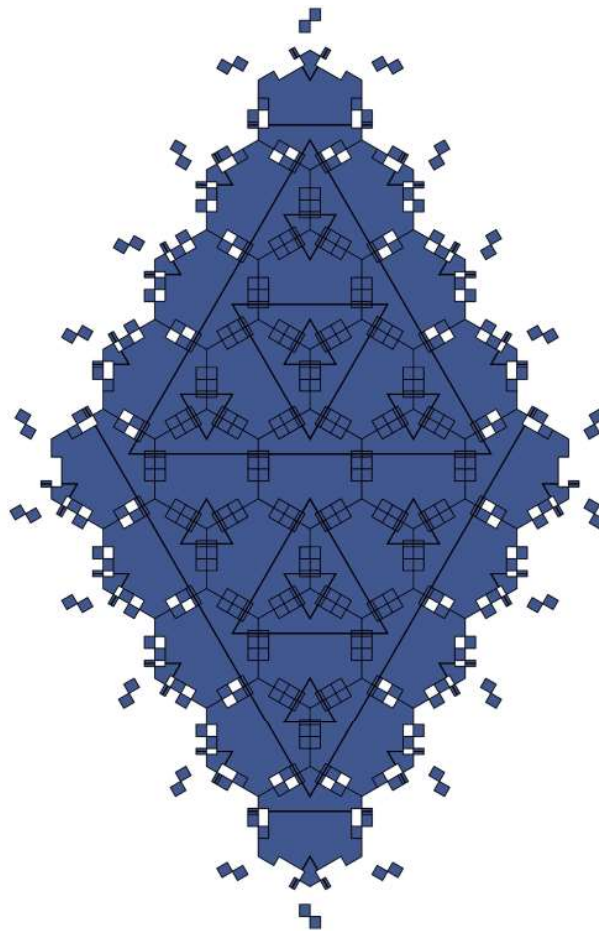


Fig. 2.33 Un fragmento de una de la teselación formada por la prototesela Taylor-Socolar



Gummelt Decagon

Se describe un decágono regular capaz de teselar el plano, pero para hacerlo tiene que cumplir una condición. La condición impuesta para que se produzca la aperiodicidad es que estos decágonos pueden solaparse generando los tramos oscuros (imagen superior derecha). Aunque el resultado puede teselar aperiódicamente, no es un teselado que se pueda aplicar en la arquitectura ya que las teselas no pueden solaparse.

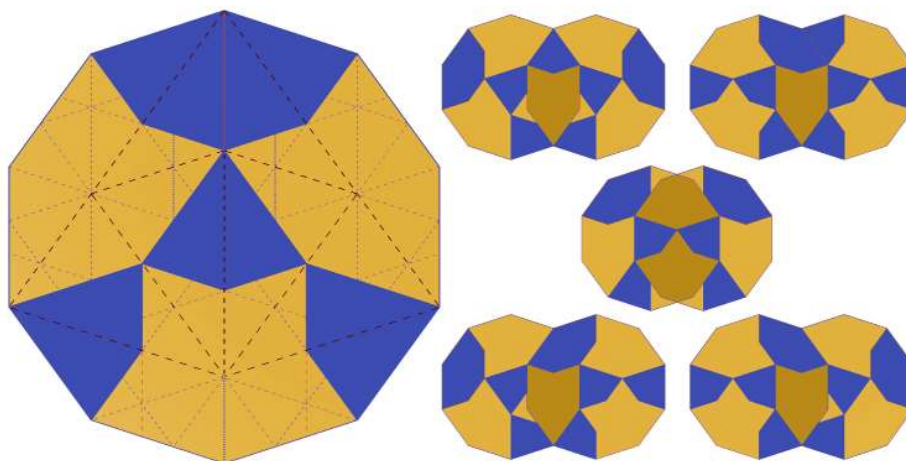


Fig. 2.34 A la derecha la prototesela Gummelt Decagon y a la izquierda, 5 posibles uniones.

Gray Hat Polykite

Recientemente, en marzo de 2023, se descubrió una tesela conocida como gray hat polykite. Esta tesela es capaz de cubrir el plano aperiódicamente. Lo curioso de esta tesela, que la separa del resto de prototeselas, es que permite numerosos teselados dependiendo de su orientación y configuración y todos ellos son aperiódicos, cosa que no es común en las prototeselas aperiódicas.

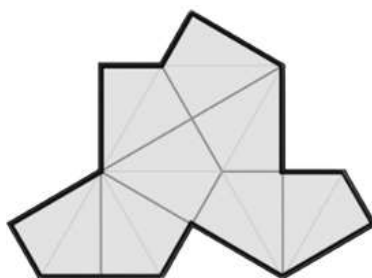
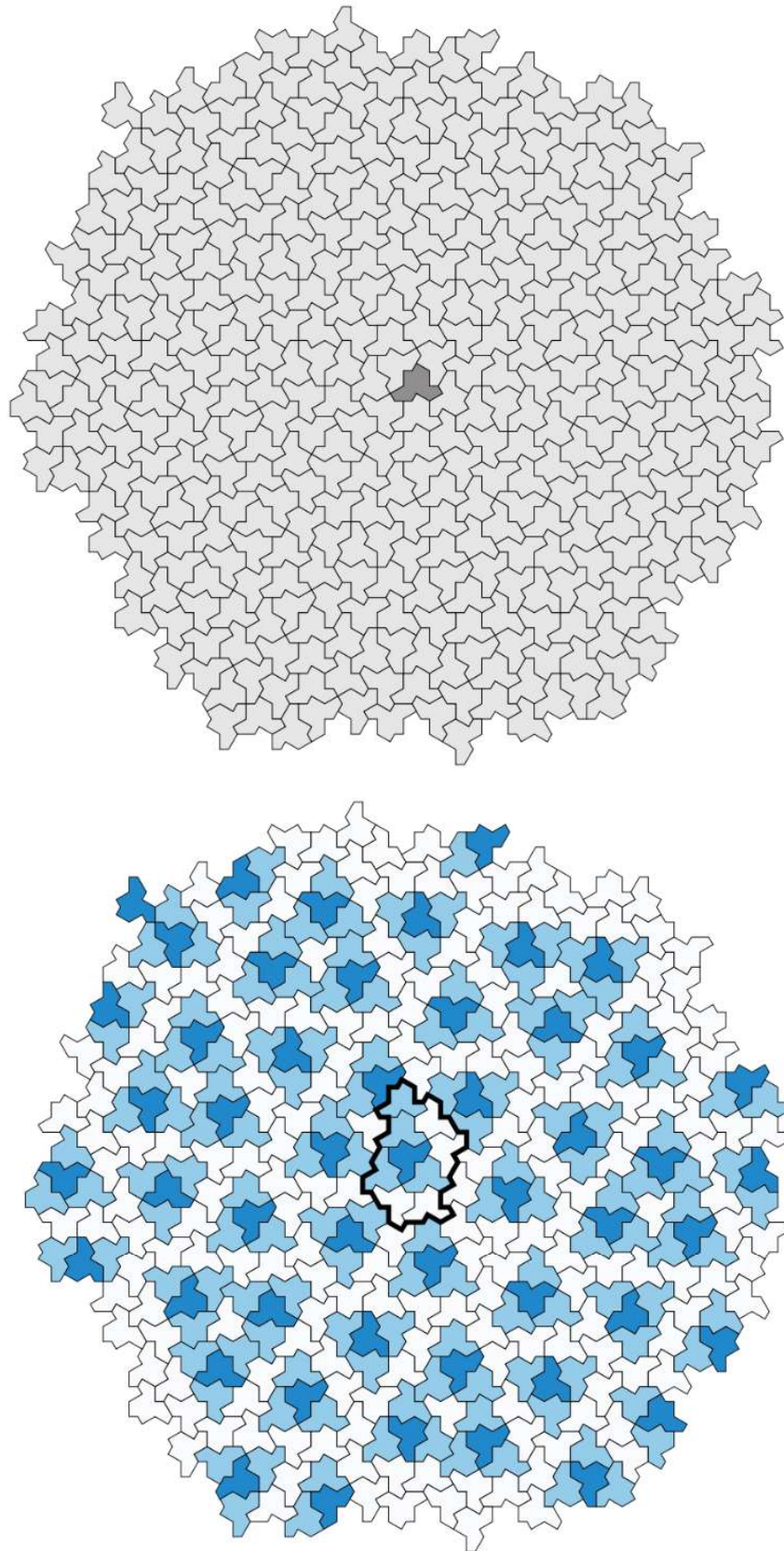


Fig. 2.35 La prototesela Gray Hat Polykite, la primera tesela que resuelve el problema Einstein.

Como se ve en la figura anterior, la tesela está formada por ocho rombos que se asemejan a las cometas de la teselación de Penrose P2. Como las cometas P2, sigue la proporción áurea, pero los ángulos son distintos. Es un ejemplo más de cómo estas proporciones de números irracionales generan teselaciones aperiódicas.

Fig. 2.36 Tesselación formada por la Gray Hat Polykite.
Abajo, la tesselación con colores que determinan los patrones de generación.



En la figura de la izquierda podemos ver la tesselación formada por esta tesela. A la derecha, podemos observar la tesela con tres colores distintos. La blanca y la azul claro son teselas sin reflejar mientras que la oscura está reflejada. En su formación, cada tesela reflejada está rodeada por otras ocho

teselas sin reflejar formando un grupo delineado en la figura de la derecha. Es la única tesela que se ha podido demostrar que es totalmente aperiódica, por lo tanto, resolviendo el problema Einstein.

Fichas

Existe un catálogo de teselaciones aperiódicas llamado Tilings Encyclopedia donde se recogen diversos ejemplos de teselaciones aperiódicas. Para su posible aplicación en la arquitectura, debemos establecer una serie de parámetros que nos ayuden a reducir el número de teselaciones que nos puedan servir. Para ello, establecemos una condición estética y una de complejidad de las prototeselas. Con estas dos condiciones reducimos las opciones a 20 opciones que están formadas por cuatro o menos prototeselas, las teselas son de elaboración sencilla y crean patrones complejos que resultan estéticos.

Al reducir el plano infinito de una teselación aperiódica por un espacio acotado que puede ser un suelo, una fachada o un techo, no todas las condiciones impuestas en las prototeselas se tienen que cumplir obligatoriamente. Al limitar el plano, muchos de los diseños interiores no hacen falta para cumplir la aperiodicidad en un espacio acotado, aunque pueden tener interés decorativo ya que complejizan el diseño.

En las fichas adjuntas en el anejo al final del documento vemos una serie de teselaciones aperiódicas cuyos colores han sido modificados para establecer una gama de colores común y por tanto, que la elección de color no sea un factor determinante a la hora de elegir una teselación. Se han elegido los colores azul, ocre, naranja y gris ya que crean un contraste que permite una visualización correcta.

En las fichas establecemos una serie de parámetros los cuales nos ayudan a identificar las teselaciones. Para ello empezamos con el nombre de la teselación, el cual suele referirse a las formas que tienen las teselas que la componen o es directamente el apellido del descubridor. En segundo lugar tenemos por quién han sido descubiertas, donde podemos observar que en muchos casos la misma persona es responsable de una serie de teselaciones. En tercer lugar tenemos el número de teselas, el cual es un factor importante para su aplicación en la arquitectura ya que cuanto menor sea el número de teselas más fácil es de formar el mosaico. La condición del dibujo interior es determinante a veces para formar la teselación aperiódica pero, en algunos casos resulta una ayuda a la hora de colocar las teselas ya que determina la posición en la que deben ir. Si la tesela es convexa o no convexa ayuda a determinar la forma de la teselación ya que las teselas convexas ayudan a formar patrones más orgánicos que se asemejan a estrellas o vegetación. Se recoge un breve párrafo de información sobre la teselación que ayuda a entender sus condiciones de emparejamiento y formación. Un aspecto importante que recogen estas fichas es la regla de sustitución que determina la formación de las prototeselas y representa pequeñas porciones de la teselación. Por último tenemos una región de tamaño considerable para permitir visualizar la teselación formada.

D. Frettlöh, E. Harriss, F.
Gähler: Tilings encyclopedia,
<https://tilings.math.uni-bielefeld.de/>

3 Aplicación en la arquitectura

Aplicación según su uso

Según la definición de teselación, se deberían usar teselas de pequeño tamaño las cuales se usan como elementos decorativos en el interior de los edificios. Si buscamos nuevas formas de usar teselas en arquitectura es necesario no limitar su aplicación al tamaño de las teselas. Las teselas, o mosaicos, tienen una amplia gama de aplicaciones en la arquitectura. A continuación, se presentan algunas de las formas más comunes en las que se utilizan teselas en el diseño y la construcción arquitectónica:

1. Revestimientos de paredes y suelos: Las teselas se utilizan con frecuencia para revestir tanto paredes como suelos en edificios. Los mosaicos de teselas ofrecen una variedad de opciones estéticas y pueden ser utilizados para crear patrones decorativos, imágenes o incluso texturas tridimensionales. Además de su valor estético, los mosaicos de teselas también pueden proporcionar una mayor durabilidad y resistencia a la superficie.
2. Fachadas y exteriores: Las teselas también se utilizan para revestir fachadas y exteriores de edificios. Este uso de teselas en la arquitectura puede ofrecer una apariencia visualmente impactante y contribuir a la identidad arquitectónica única de un edificio. Además, los mosaicos de teselas pueden brindar protección adicional contra los elementos y la intemperie.
3. Elementos decorativos: Las teselas se emplean frecuentemente para crear elementos decorativos y ornamentales en la arquitectura, como frios, rosetones, medallones o paneles decorativos. Estos elementos pueden aportar un toque artístico y sofisticado a los espacios arquitectónicos, realzando la belleza y el carácter del diseño.
4. Diseño interior: En el diseño interior, las teselas se pueden utilizar para crear elementos decorativos en paredes, techos, columnas o incluso muebles. Los mosaicos de teselas pueden proporcionar un elemento focal en un espacio, añadir textura y color, o delimitar áreas específicas.
5. Diseño de paisajes y exteriores: Además de su aplicación en la construcción de edificios, las teselas también se utilizan en el diseño de paisajes y exteriores. Pueden ser empleadas para crear caminos, senderos, murales o esculturas al aire libre, añadiendo un elemento artístico y distintivo al entorno.

En general, las teselas ofrecen una amplia gama de posibilidades creativas en la arquitectura. Su uso proporciona no sólo una estética atractiva, sino también durabilidad, resistencia y versatilidad. Con avances tecnológicos como la impresión 3D y el corte láser, las aplicaciones de las teselas

en la arquitectura siguen evolucionando y ofreciendo nuevas oportunidades de diseño y expresión artística.

Conviene separar su uso en dos categorías principales usando el tamaño de la tesela como elemento organizador. Es evidente que para teselar un interior, debido a las limitaciones de espacio, es conveniente utilizar teselas de menor tamaño ya que permiten crear patrones más complejos. Cuando aumentamos la escala y pensamos en su uso en fachadas, pavimentos y hasta elementos configuradores del espacio, para formar una teselación aperiódica podemos aumentar la escala de las teselas. Usando los avances tecnológicos podemos producir prototeselas con dimensiones exactas que permitan uniones perfectas y por tanto permitan teselas grandes superficies.

Avances tecnológicos para creación, visualización y ejecución de los teselados

En los últimos años, ha habido avances significativos en la producción de teselas, especialmente con el surgimiento y desarrollo de tecnologías digitales y avanzadas. Estos avances han permitido la fabricación más eficiente, precisa y personalizada de teselas, brindando nuevas posibilidades y oportunidades en el diseño arquitectónico. A continuación, se destacan algunos de los avances más relevantes:

1. **Fabricación digital:** La tecnología de fabricación aditiva, como la impresión 3D, ha revolucionado la producción de teselas. Permite la creación de formas complejas y detalladas que serían difíciles de lograr con métodos tradicionales. Esto ha facilitado la producción personalizada de teselas a gran escala y ha abierto nuevas oportunidades para la experimentación y la innovación en el diseño arquitectónico.

2. **Corte láser y CNC:** Las técnicas de corte láser y de control numérico computarizado (CNC) ofrecen una precisión y velocidad superiores en la producción de teselas. Estas tecnologías permiten el corte y grabado preciso de diferentes materiales, como madera, metal, piedra o cerámicos, facilitando la creación de teselas con diseños intrincados y detalles finos.

3. **Materiales avanzados:** El desarrollo de materiales avanzados y tecnologías de recubrimiento ha ampliado las opciones para la producción de teselas. Ahora es posible utilizar materiales más ligeros, resistentes y sostenibles, como polímeros reforzados con fibras, cerámicas de alta resistencia o materiales compuestos, lo que a su vez permite una mayor versatilidad en la forma y función de las teselas.

4. **Herramientas de diseño asistido por ordenador (CAD):** Los programas de diseño asistido por ordenador han mejorado la capacidad de generar y manipular diseños de teselas de manera eficiente. Estas herramientas permiten la creación de patrones complejos y la visualización en 3D, facilitando la exploración de diferentes opciones y la optimización de diseños antes de la fabricación.

En conjunto, estos avances en la producción de teselas han impulsado la innovación y la creatividad en el diseño arquitectónico. Han abierto nuevas posibilidades para la implementación de teselas en proyectos arquitectónicos, permitiendo diseños más personalizados, detallados y eficientes. Al mismo tiempo, estos avances tecnológicos continúan evolucionando y abriendo aún más perspectivas para la producción de teselas en el futuro.

Ejemplos de su uso

Pasado

Hoy en día, existen pocos ejemplos de teselaciones aperiódicas en el ámbito de la arquitectura. Esto se puede deber a que las teselaciones se rigen por una serie de reglas matemáticas y, en muchas ocasiones, los arquitectos tienen pocas nociones sobre la geometría y los campos relacionados con ella:

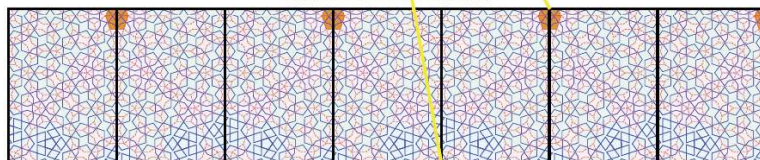
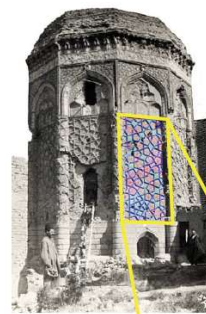
Every time there is a discussion about this science [geometry] between architects and scholars, architects say: Yes, we have heard about this science; but we do not still understand the function of geometry; And what categories deal with it.¹²

Las teselaciones Girih son un sistema matemático que se desarrolló durante generaciones en el arte y la cultura pero que ha sufrido una desconexión con el presente. Los artesanos que creaban las teselas entendían las reglas matemáticas necesarias para crearlas pero no eran capaces de transmitir su conocimiento por medio de la escritura. Era el artesano quien enseñaba al aprendiz, y así durante generaciones. En el momento en el que un artesano no tenía a quien transmitirle su conocimiento, estas nociones se perdían.

Gunbad-i Kabud, Maragha, Irán (1197)

Es considerado el primer ejemplo de teselas Girih en la arquitectura islámica y se trata de un mausoleo octogonal en el cual se puede apreciar un patrón, el cual es continuo en 7 de las caras ya que la que falta es la entrada. En la imagen se puede observar el patrón formado por las 5 teselas Girih y como este es capaz de adaptarse a los cambios de plano

Fig. 3.1 La construcción de Gunbad-i Kabud, Maragha, Irán (1197). Debajo, un despliegue de 7 de los lados mostrando la continuidad de la teselación.



12. Efendi, Ca'fer. 1987. Risale-i Mimariyye: An Early Seventeenth-Century Ottoman Treatise on Architecture (Studies in Islamic Art and Architecture: Supplements to Muqarna) (Howard Cra). E. J.Brill.

Tumba del poeta Hafez, Shiraz, Irán (1452)

Se trata de la tumba del poeta Hafez, construida en Shiraz, Irán en el 1452. Las teselas de cerámica vidriada forman conjuntos periódicos y aperiódicos. Aunque fue construida en el siglo XV, su forma original ha sido alterada, ya que en 1931 se decidió ampliar el monumento a Hafez. Aunque eligieron a André Godard, que era un arqueólogo y arquitecto, para dirigir estas ampliaciones y restauraciones, es altamente probable que la teselación fuese alterada ya que, como se ve en la imagen de 1906, la timba original era rectangular y no octogonal como la que se ve hoy en día. Quedan elementos originales de las teselaciones que se encontraban en este recinto de la época medieval pero, el elemento por el que es conocido actualmente es de 1935.



Fig. 3.2 Imagen de la tumba del poeta Hafez (1906)

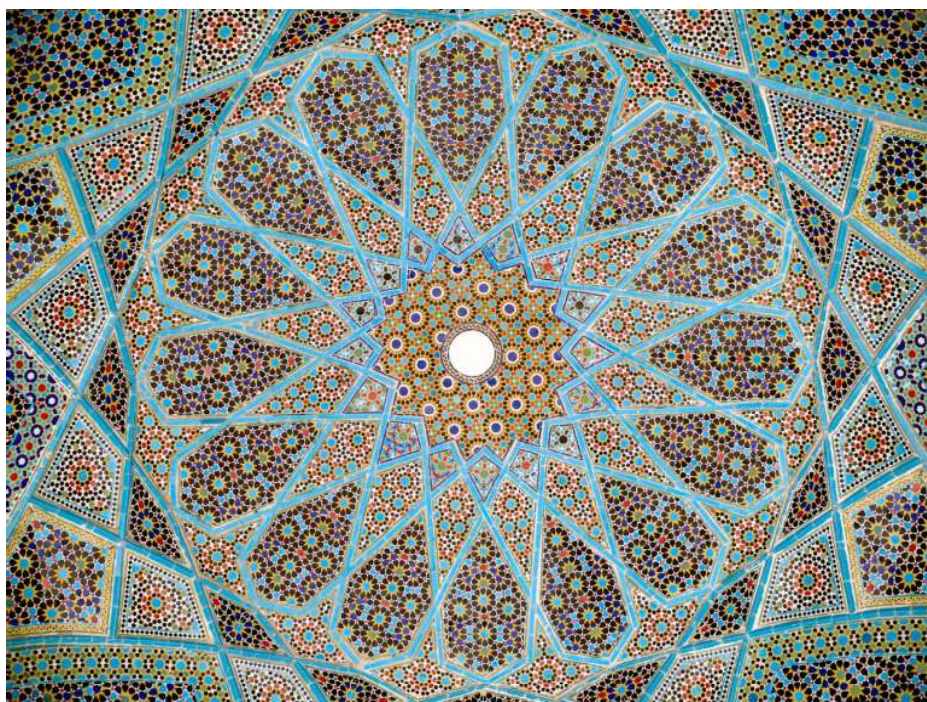
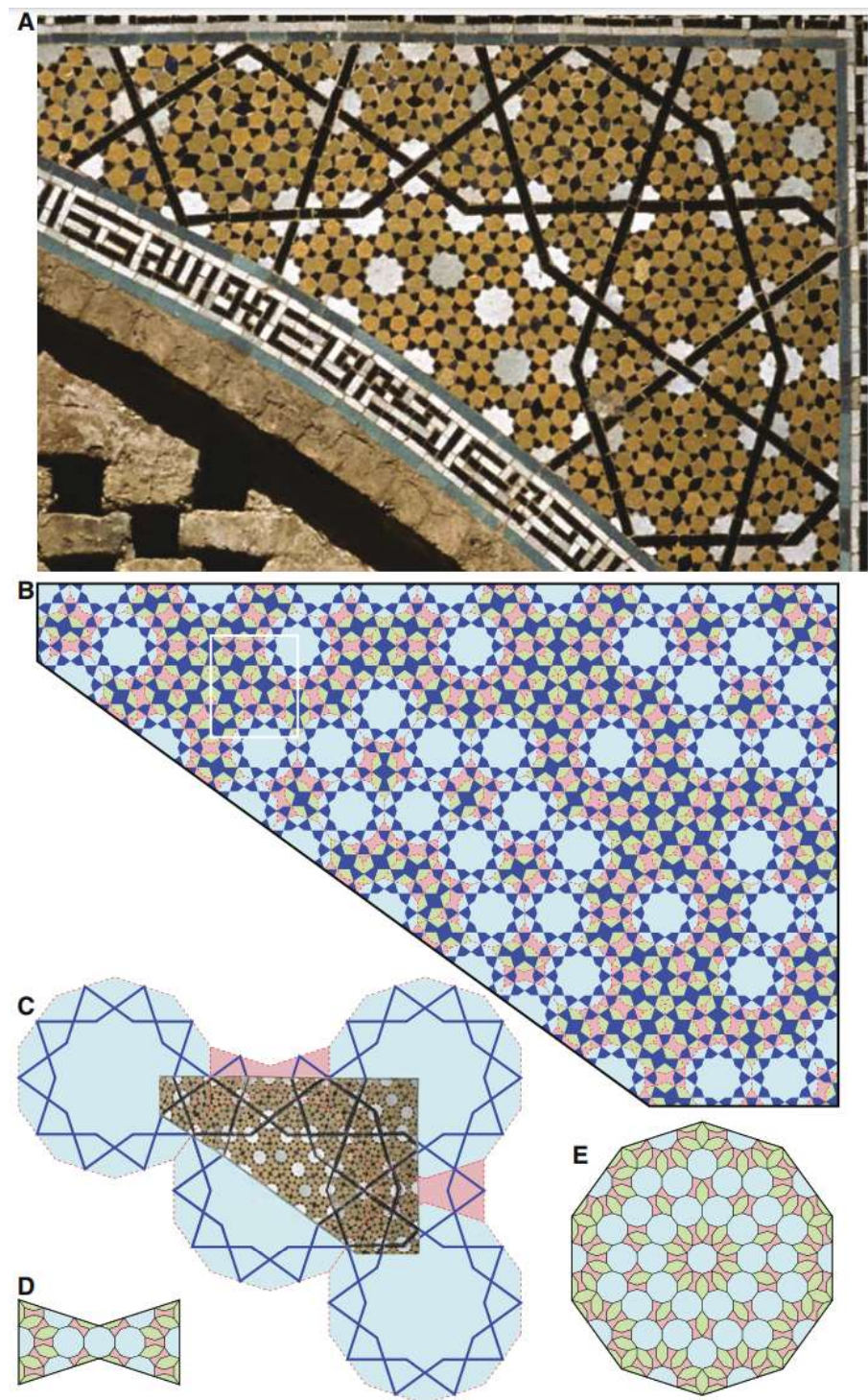


Fig. 3.3 Teselación actual de la tumba del poeta Hafez, construida en 1935.

Santuario Darb-i Iman, Isfahan, Iran, (1453)

En la Fig 3.4 podemos observar en la imagen A, un fragmento de la teselación descrita en el apartado 2 previamente, que existe una teselación a dos escalas. Las líneas negras forman parte de una teselación a mayor escala como se puede ver en el esquema C mientras que las teselas más pequeñas corresponden al esquema B donde se puede apreciar la complejidad del teselado realizado con solamente tres tipos de teselas lo que simplifica su ejecución. Las figuras D y E representan la inflación y sustitución que permite pasar de la escala representada en la figura C a la teselación que se forma en la figura B.

Fig. 3.4 (A) Fotografía de una teselación en el santuario Darb-i Iman. (B) Formación del teselado de menor escala usando teselas Girih. (C) Superposición de la imagen con teselas Girih a mayor escala. (D) y (E) Inflación y sustitución de la tesela decagonal y la pajarita



Se han explicado tres de las teselaciones Girih más conocidas y de las que se recoge más información pero, no son las únicas. En el anejo se adjunta un mapa donde se pueden ver una serie de edificaciones del periodo islámico medieval ordenadas cronológicamente con imágenes de cada una de ellas y con su posición marcada para ver las zonas donde eran más comunes. De este estudio observamos que, aunque existe arquitectura islámica medieval repartida por más zonas del mundo, como puede ser la Alhambra de Granada, solo se producen teselaciones Girih en Oriente Medio y Asia Central.

Presente

RMIT Storey Hall
ARM Architecture
Melbourne, Australia
Construido en 1995

El proyecto se basa en una ampliación de un edificio de 1887. Se trata de un edificio para la universidad RMIT que busca una dualidad en sus usos. No deja de ser un edificio de uso académico con espacios para conferencias pero, su diseño permite albergar exposiciones, conciertos, reuniones, cenas y multitud de eventos más.

El proyecto que lanzó por primera vez a ARM al territorio de los premios y la prensa fue el Storey Hall de la Universidad RMIT. Se encuentra casi inmediatamente al lado de la obra maestra de su mentor, el Edificio 8, y ha suscitado tantas discusiones como elogios y reproches. A diferencia de su vecino mayor, más disciplinado, el Storey Hall es un derroche de formas y referencias históricas, o más exactamente, de recuerdos. Como escribe Ian McDougall, «para mí, la cuestión de lo local tiene que ver directamente con el significado de la memoria». Aquí, los recuerdos desenterrados y reelaborados en el tejido del edificio incluyen referencias a las sufragistas que se reunían allí, así como a la historia local irlandesa-australiana, en el abundante uso del verde. Aunque algunos ven en este conjunto fragmentado una deconstrucción temprana, su mezcla desordenada de narrativas culturales es un anatema para las ascéticas construcciones formales de Peter Eisenman.¹³

Aunque busca ser una aplicación directa de la teselación rómbica de Penrose, no cumplen las condiciones estrictas para que se complete la teselación aperiódica.

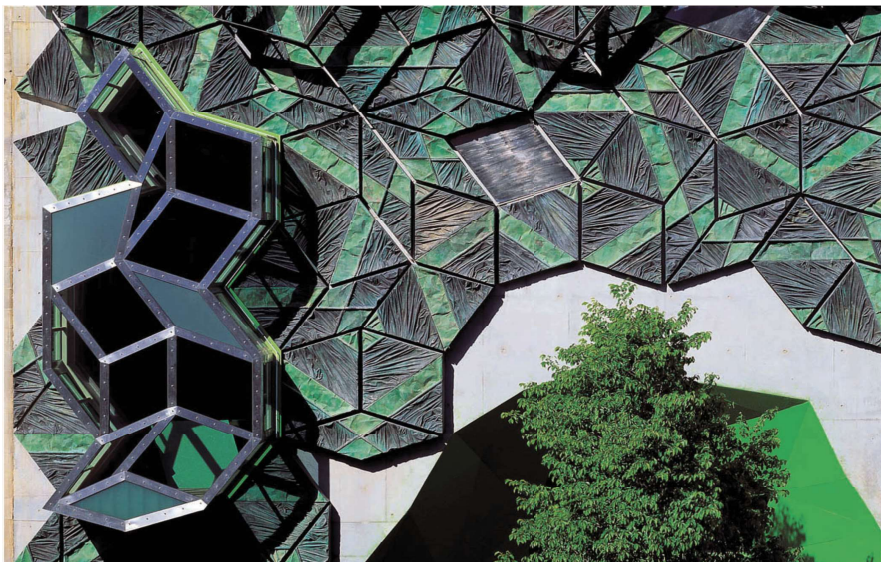


Fig. 3.5 Fachada principal Storey Hall.

13. Traducción propia de LOCAL HEROES AUSTRALIAN-NESS MADE IN MELBOURNE. Uncube Magazine. Noviembre 2014. <https://www.uncubemagazine.com/sixcms/detail.php?id=14817757>

Como se observa en la fotografía, las teselas utilizadas en la fachada del Storey Hall tienen el diseño que veremos a continuación:

Fig. 3.6 Teselas de Penrose que forman la teselación de la fachada.



Los rombos tienen la proporción correcta pero existe un fallo en el diseño interior. Como se puede observar, las teselas tienen dos colores, conocidas como condiciones locales o reglas de concordancia, las cuales determinarán su aperiodicidad. Con el diseño elegido para la fachada, las teselas deberían haber tenido dos colores a parte del de la base de la tesela. Es el uso del color el que crea las reglas para su colocación y orientación.

Fig. 3.7 Diagrama de las teselas de Penrose con el diseño interior que forma una teselación aperiódica.

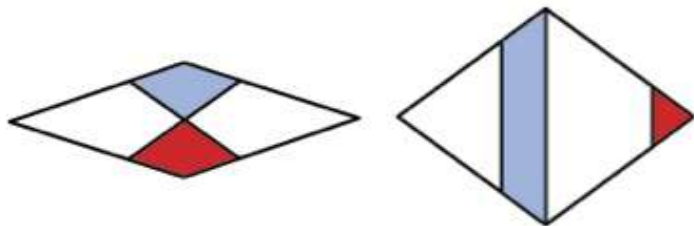
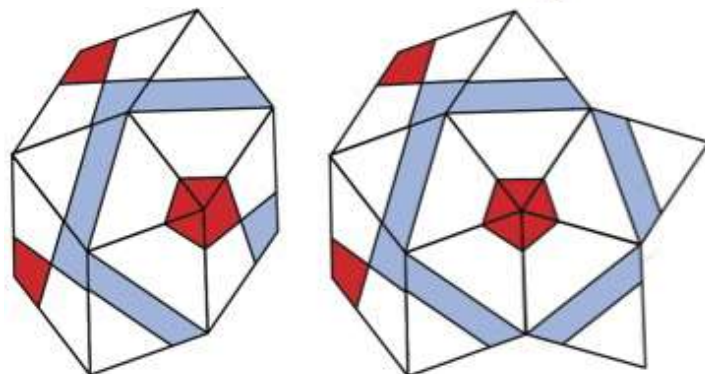


Fig. 3.8 Fragmento de la Teselación que forman las teselas de la Fig. 3.7



Es necesario que solo se unan los bordes con el vértice del mismo color para que se forme la teselación. Al teselar la fachada, observamos como todo encajaría si las teselas tuviesen vértices de dos colores. Pero, como no es el caso de las teselas del Storey Hall, la fachada tiene dos huecos en los que faltan teselas ya que no continuarían con el patrón de la teselación aperiódica. Se puede observar como faltan las teselas marcadas en el dibujo como 1 y 2 ya que son las que no cumplen con las condiciones de unión.

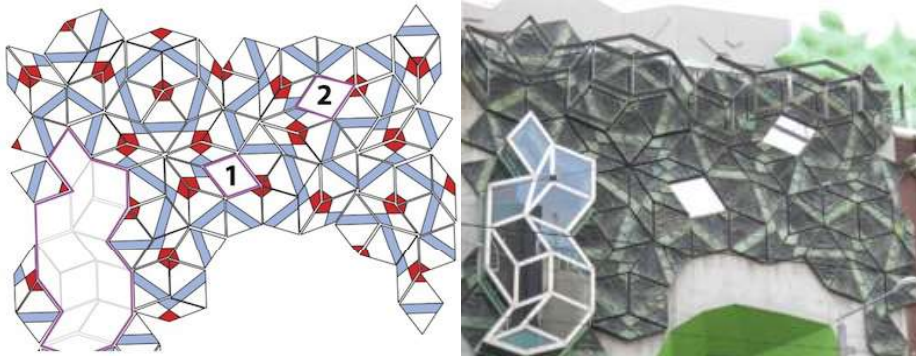


Fig. 3.9 (Izq) Diagrama de la teselación correcta de Penrose con el diseño interior que forma una teselación aperiódica.

Fig. 3.10 (Der) Teselación realizada en la fachada del edificio con los errores causados por el incorrecto diseño.

Además, cuando llegamos a los bordes, ocurren otra serie de errores ya que se utilizan teselas completas para rellenar los espacios colindantes con los edificios medianeros. Para evitar este problema, hubiese sido necesario emplear una serie de medias teselas que continuaran con el diseño establecido.



Fig. 3.11 Fragmento de la fachada con dos errores señalados causados por un fallo de diseño.

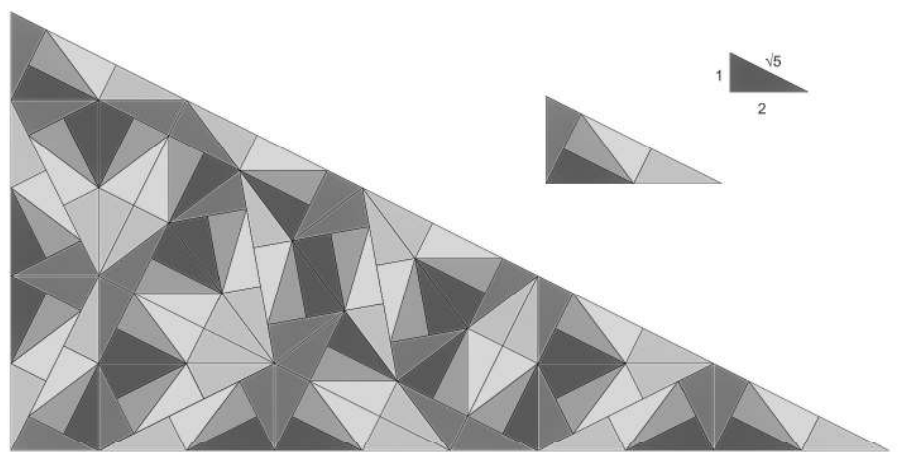
Federation Square
Lab Architecture Studio, Bates Smart
Melbourne, Australia
Construido en 2002



Fig. 3.12 Vista del edificio del Federation Square desde la plaza

Este edificio ha sido objeto de mucha controversia desde que se inauguró en 2002. En un principio se criticaba su estética debido a que las geometrías del teselado Conway-Radin Pinwheel rompían con la estética de la ciudad, una crítica común para un diseño innovador y un tanto ecléctico. Otra crítica que ha recibido fué por tema de presupuesto ya que por diversos motivos, el precio final fue más de cuatro veces superior al presupuesto original. En parte, el aumento del coste fue debido a la necesidad de desarrollar sistemas constructivos para montar la fachada triangular.

*Fig. 3.13 Elaboración propia.
De derecha a izquierda, la
formación por inflación y
sustitución de un teselado
de Conway-Radin Pinwheel.
Es la Teselación que forma
las fachadas del edificio.*



El sistema de fachada del edificio, utilizando una nueva comprensión de geometrías espaciales y de superficie, permite que los edificios individuales de Federation Square sean claramente diferenciados entre sí, manteniendo al mismo tiempo una coherencia total entre ellos. El enfoque crea distinciones a través de un alto grado de variación de la superficie y el material dentro de las técnicas de construcción necesariamente industriales, prefabricados necesarios para la realización de un complejo de edificios del tamaño de Federation Square. La industrialización ya no equivale a la normalización, sino que permite una diferenciación única a través de gran variedad de materiales y de figuras en la fachada.¹⁴

Las fachadas se componen de tres materiales: arenisca zinc y vidrio, siguiendo siempre una regla, siempre hay cinco teselas del mismo material formando una prototesela que organiza el espacio. Como comentan los arquitectos del proyecto, “La industrialización ya no equivale a la normalización, sino que permite una diferenciación única a través de gran variedad de materiales y de figuras en la fachada” vemos el motivo por el cual se ha elegido este tipo de teselación para revestir el edificio. Teóricamente, existiendo sistemas constructivos para fachadas de piezas ortogonales, no debería haber mucha diferencia con utilizar formas triangulares. Pero, como ocurre siempre que se sale de la norma, hace falta adaptar estos sistemas

¹⁴. Traducción de la descripción del edificio por los arquitectos en Lab Architecture Studio. Federation Square. Fractal Facade. www.labarchitecture.com

constructivos o crear unos nuevos lo cual incrementa el precio de los proyectos exponencialmente.

Aunque parezca que no hay una jerarquía debido a la innovación de la



Fig. 3.14 Fotografía del encuentro de los distintos materiales que componen la fachada.

fachada, rompiendo la monotonía de la forma y material a la que estamos acostumbrados, este tipo de teselación por inflación y descomposición está regido por una jerarquía en su composición con respecto a las otras teselas.

Viviendas en Carabanchel
Arata Isozaki & Asociados
Madrid, España
Construido en 2013

Se trata de una edificación que rompe con la ordenación en retícula ortogonal propia de una ciudad contemporánea. Esto se debe a que sigue, en planta, la teselación rómbica de Penrose esta vez modificando el tamaño de las teselas rombos de 12 metros de lado. «Siguiendo este patrón, las viviendas se organizan como una cadena de prismas que dibujan un biombo en esta fachada.»¹⁵

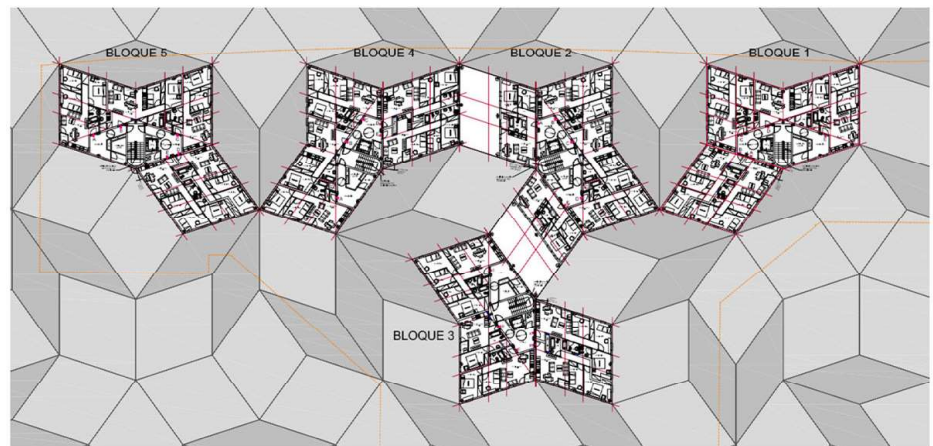
¹⁵. Descripción obtenida de los fabricantes de la fachada obtenida en <https://www.premiosdearquitectura.es/es/premios/34-premios-avs-2016/obras-presentadas/651-carabanchel-21-148-viviendas-proteccion-publica-en-alquiler-garajes-y-trasteros>

Fig. 3.15 Fachada norte de las 148 viviendas en Carabanchel, Arata Isozaki & Asociados



Como es común, los inconvenientes de las innovaciones en la forma de organizar las plantas de las viviendas los suelen pagar quienes habitan en ellas. Evidentemente, las plantas sinuosas y orgánicas crean espacios curiosos e interesantes. El problema surge a la hora de amueblar y utilizar estas viviendas. Son viviendas de protección, fomentado así el acceso a la vivienda de los colectivos más vulnerables mediante programas de arrendamiento adaptados a sus necesidades. Amueblar y usar una vivienda que rompe totalmente lo ortogonal es complicado y además es costoso y, teniendo en cuenta el público para el que están orientadas estas viviendas, no es lo más adecuado elaborarlas de esta forma. Pensar en el uso de un edificio, según su emplazamiento y necesidades es a veces más importante que el hecho de innovar a la hora de distribuir las plantas. Es la combinación de ángulos obtusos y agudos que fuerzan a usar mobiliario a medida, lo cual dispara el precio o a desaprovechar el espacio debido al uso de mobiliario estándar.

Fig. 3.16 Planta de las 148 viviendas en Carabanchel, Arata Isozaki & Asociados



Existen numerosas teselaciones que se pueden adaptar a una planta de un edificio de forma más adecuada con las que se puede organizar una serie de bloques de viviendas como pueden ser las teselaciones de Ammann A2, A3 y A4 las cuales generan espacios ortogonales y por tanto simplifican su uso y habitabilidad.

Transbay Transit Center
Pelli Clarke Pelli Architects
San Francisco
Construido en 2018

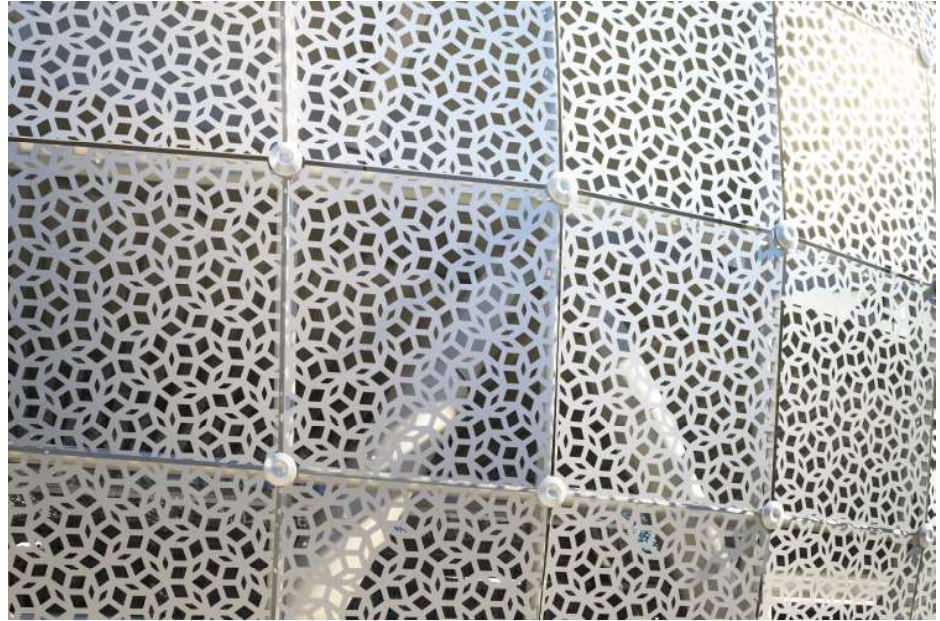
El proyecto es una estación de autobús con el potencial de convertirse en una futura estación de tren. Se forma un nodo de transporte en el centro de San Francisco, con una parte de parte público y espacio urbano, oficinas y establecimientos comerciales. La fachada ondulante y translúcida formada por teselaciones de Penrose crea espacios amplios y luminosos en las plazas inferiores. En este caso, se utiliza el negativo de la teselación. Los huecos donde estarían colocadas las teselas crean una segunda piel que tamiza la luz hacia el interior y difumina lo que sucede en el interior hacia el exterior, actuando como una celosía. Aunque no se trate de una teselación, dada la estricta definición de esta, los vacíos que forman el patrón de Penrose funcionan correctamente y crean un espacio visualmente atractivo.



Fig. 3.17 Fotomontaje del proyecto del Transbay Transit Center

Como se puede observar, las teselas tienen un formato que se asemeja más al que estamos acostumbrados a ver en la arquitectura del pasado y tienden a funcionar mejor. Forman unos patrones que desde lejos son difíciles de apreciar pero según uno se acerca puede entender la complejidad del espacio. Además, creo que es un tipo de teselación que está bien escogida según el uso del edificio ya que la imagen global que se crea es orgánica y dinámica propia de un nodo de transporte que recibe un tránsito de personas y vehículos constante.

Fig. 3.18 Detalle de la fachada que forma una teselación rómbica de Penros



Conclusiones

En conclusión, en el trabajo se ha explorado el papel y la aplicación de las teselaciones aperiódicas en el ámbito arquitectónico. A lo largo de la investigación, se han abordado diversos aspectos relacionados con estas estructuras geométricas excepcionales, destacando su importancia estética y funcional en el diseño arquitectónico.

Se ha evidenciado que las teselaciones aperiódicas ofrecen una alternativa innovadora a las teselaciones periódicas tradicionales, desafiando las reglas preestablecidas y generando patrones únicos y no repetitivos. Su aplicación en la arquitectura no solo brinda una estética visualmente atractiva, sino que también promueve una relación más dinámica y orgánica entre los espacios construidos y su entorno circundante.

Además, se ha resaltado la importancia de la creatividad y la experimentación en la generación de teselaciones aperiódicas, utilizando tanto enfoques matemáticos como técnicas digitales avanzadas. La implementación de tecnologías como la impresión 3D y el corte láser ha ampliado las posibilidades de materializar estas estructuras complejas y detalladas, permitiendo su aplicación en la construcción real.

Se ha demostrado que las teselaciones aperiódicas tienen un potencial significativo en el campo arquitectónico, ya sea como elementos decorativos y revestimientos superficiales. Su uso puede enriquecer y diversificar el lenguaje arquitectónico, generando espacios que desafían la norma y brindan experiencias espaciales únicas. Aquí cabe destacar la palabra potencial ya que, aunque durante las últimas décadas han sido estudiadas, diseñadas y encontradas multitud de teselaciones aperiódicas, su aplicación en la arquitectura contemporánea no parece ser la más acertada. Como objeto de debate se plantea, si realmente estamos usando estas teselaciones de forma correcta ya que al trasladar este tipo de revestimiento a materiales y escalas para las cuales no están diseñadas, el efecto que generan en la arquitectura contemporánea no es el mismo que la potente sensación que nos brinda ver los teselados islámicos de hace más de cinco siglos. Los teselas aperiódicas generan patrones más orgánicos que son más aptos en pavimentos, decoraciones interiores o elementos propios del diseño paisajístico. Su aplicación directa a la arquitectura genera en muchos casos una problemática añadida por intentar implementar este tipo de revestimiento y, en el caso de su uso como organizador de plantas arquitectónicas, crea espacios de difícil uso debido a los ángulos de las prototeselas.

En última instancia, este trabajo ha contribuido al conocimiento y la comprensión de las teselaciones aperiódicas en la arquitectura, resaltando su importancia en el ámbito del diseño arquitectónico contemporáneo

y su potencial para fomentar la innovación y la creatividad. A medida que avanzamos hacia el futuro, estas estructuras geométricas continuarán inspirando a arquitectos, diseñadores y académicos a explorar nuevas formas de concebir y construir espacios arquitectónicos. Debemos poder aprender del pasado para conseguir evocar sensaciones que despierten el interés por este mundo que une las matemáticas, el arte y la arquitectura a través de la creación de patrones estéticos y complejos usando la gran posibilidad de prototipos que tenemos hoy en día, más allá de la simple aplicación de nuevas tecnologías a elementos decorativos del pasado

Glosario

Teselación o teselado: Se refiere a una repetición de patrones creados por piezas pequeñas de cerámica o piedra.

Tesela: Cada una de las piezas con que se forma un teselado.

Teselación periódica: Aquella en la que se puede delinear una región que tesela el plano por traslación.

Teselación no periódica: Una teselación que no está fijada por ninguna traslación no trivial.

Teselación aperiódica: Una teselación no periódica con una propiedad añadida que es que no tiene regiones periódicas de tamaño considerable.

Cristalografía: La ciencia que estudia los cristales. La mayoría de los minerales, compuestos orgánicos y numerosos materiales, adoptan estructuras cristalinas cuando se han producido las condiciones favorables.

Cuasicristal: Una forma estructural que es ordenada pero no periódica.

Problema de decidibilidad: Es un problema de decisión para el cual es imposible construir un algoritmo que siempre conduzca a una respuesta de sí o no correcta.

Prototesela: Una de las geometrías de una tesela que forman una teselación.

Dominio fundamental: el elemento mínimo de diseño repetitivo que se necesita para construir todo el patrón utilizando uno o una combinación de rotación, reflexión o reflexión deslizante

(1, Modularity and Symmetry in Girih: A Case Study of the Blue Mosque in Tabriz-Iran, Aref Azizpour Shoubi · Ahad Nejad Ebrahimi · Yaser Shahbazi)

Traducción propia de la definición de "fundamental domain" obtenida de Azizpour Shoubi, Aref, Nejad Ebrahimi, Ahad, Shahbazi, Yaser. Modularity and Symmetry in Girih: A Case Study of the Blue Mosque in Tabriz-Iran. Nexus Netw J, 19 páginas, 2023.

Teselado por sustitución: Un teselado generado por la repetida descomposición e inflación de una rep-tile.

Rep-tile o k-rep-tile: El nombre de las teselas que pueden teselar con réplicas, escaladas con un factor k , de sí mismas.

Teselación monoédrica: Una teselación donde cada tesela es isométrica con un conjunto fijo S , denominado prototesela del teselado.

Definición obtenida en la página 951 de Grünbaum, Branko y Shephard, G. C. Tilings with congruent tiles. Boletín de The American Mathematical Society. Volumen 3, Número 3, noviembre 1980

Teselación isométrica: Una teselación donde la figura inicial y la figura final, pues, son geométricamente congruentes y semejantes.

Problema Einstein: Busca encontrar una prototesela capaz de teselar aperiódicamente el plano.

Número áureo: una relación proporcional que es inherente al pentágono y al decágono y, por lo tanto, al sistema quintuple de generación de patrones. $\phi = 1 + \sqrt{5} = 1,618033987\dots$

Condiciones locales o reglas de concordancia: Serie de condiciones de diseño y orientación que fuerzan una estructura jerárquica para que se cumpla la aperiodicidad.

Bibliografía

1. Libros

- Adams, Colins. *The Tiling Book*. (Providence; American Mathematical Society, 2022). 298 páginas.
- Bonner, Jay. *Islamic Geometric Patterns*. (Nueva York; Springer, 2017). 500 páginas.
- Crane, Howard. *Risāle-i mi'māriyye: an early-seventeenth-century Ottoman treatise on architecture : facsimile with translation and notes*. Leiden: E.J. Brill, 1987. 126 páginas
- Conway, John H. *The Symmetries of Things*. (Boca Ratón; CRC Press, 2008). 421 páginas.
- Günbaum, Branko. *Tilings and Patterns* (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987). 700 páginas.

2. Artículos

- Ammann, Robert. Grünbaum, Branko. Shephard, G. C. Aperiodic Tiles. *Discrete Comput Geom* 8. páginas 1-25, 1992.
- Azizpour Shoubi, Aref. Nejad Ebrahimi, Ahad. Shahbazi, Yaser. Modularity and Symmetry in Girih: A Case Study of the Blue Mosque in Tabriz-Iran. *Nexus Netw J*, 19 páginas, 2023.
- Gardner, Martin. Penrose Tiles and Aperiodic Tessellations. *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*. páginas 1-12, 1988.
- Goodman-Strauss, Chaim. Aperiodic Hierarchical Tilings. *NSSE*, volume 354, páginas 481-496, 1999.
- Goodman-Strauss, Chaim. Matching rules and substitution tiling. *Annals of Mathematics Second Series*, Vol. 147, páginas 181-223, 1998
- Goodman-Strauss, Chaim. «Tessellations». *La Matematica (Turin)*, páginas 249-285, 2011.
- Grünbaum, Branko. Shephard, G. C. Tilings with congruent tiles. *Boletín de The American Mathematical Society*. Volumen 3, Número 3, páginas 951-973, noviembre 1980.
- Hely, Seyed Ali-Akbar. Girih and Arch in islamic Architecture. 25 páginas, 1986.
- Lidin, Sven. The Discovery of Quasicrystals, Scientific Background on the Nobel Prize in Chemistry. 11 páginas, 2011.
- Lu, Peter J. Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. *Science* 315, páginas 1106-1110, 2007.
- Toshiaki Matsushima¹, Yoshihiro Mizoguchi², and Alexandre Derouet-Jourdan³, Verification of a brick Wang tiling algorithm, *EPiC Series in Computing*, Volume 39, páginas 107-116, 2016.
- Smith, David, Samuel Myers, Joseph, Kaplan, Craig S. y Goodman-Strauss, Chaim. An Aperiodic Monotile. 89 páginas, 2023.

van Schaik, Jan. Bruegelage. School of Architecture & Design, RMIT University, 166 páginas, 2015.

Wrinkler, Mike. Generating non-periodic tilings in the form of a spiral by using a decorated monotile. 15 páginas, 2019.

3. Páginas Web

ArchDaily - <https://www.archdaily.com/356982/transbay-transit-center-in-san-francisco-pelli-clarke-pelli>

<https://www.archdaily.cl/cl/883186/louvre-abu-dhabi-ateliers-jean-nouvel>

Arm Architecture - <https://armarchitecture.com.au/projects/rmit-storey-hall-and-green-brain/>

A Very Peculiar Storey - https://www.qedcat.com/archive_cleaned/105.html

Dividing a Square into 7 Similar Rectangles - <https://johncarlosbaez.wordpress.com/2023/03/06/dividing-a-square-into-7-similar-rectangles/>

Europa Press - <https://www.europapress.es/sociedad/noticia-islam-no-admite-dibujar-ala-mahoma-personas-animales-2015011123721.html>

Fundación Descubre - <https://clickmica.fundaciondescubre.es/conoce/descubrimientos/la-cristalografia/#::~:~:text=El%20primer%20uso%20del%20t%C3%A9rmino,fuerzas%20de%20enlace%20entre%20estos.>

GeoGebra - <https://www.geogebra.org/m/garayxgb>

Kolbe Times - <https://www.kolbetimes.com/beauty-in-math/>

Newtecnic - <https://newtecnic.com/federation-square-melbourne-australia>

Nexus Network Journal - <https://www.nexusjournal.com/the-nexus-conferences/nexus-1998/112-michael-j-ostwald-aperiodic-tiling-penrose-tiling-and-the-generation-of-architectural-forms.html>

Nist and the Nobel - <https://www.nist.gov/nist-and-nobel/dan-shechtman/prizes-legacy-dan-shechtman>

Penrose Tiling Online Generator - <https://misc.oooo.org/penrose/>

Periodic and Non Periodic Tiling - <https://grahamshawcross.com/2012/10/12/periodic-and-non-periodic-tiling/>

Peter J. Lu - <https://peterlu.org/>

Pladecor - <https://www.plasdecor.com/es/actualidad/la-transformacion-digital-en-la-industria-ceramica>

Prehорquisa - <https://www.prehорquisa.com/es/noticias-prehорquisa/426-arata-isozaki,-premio-pritzker-2019.html>

Premios Arquitectura - <https://www.premiosdearquitectura.es/es/premios/34-premios-avs-2016/obras-presentadas/651-carabanchel-21-148-viviendas-proteccion-publica-en-alquiler-garajes-y-trasteros>

Science Alert - <https://www.sciencealert.com/one-of-the-rarest-crystals-on-earth-has-been-found-in-a-russian-meteorite>

The Nobel Prize - <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/2011/shechtman/facts/>

The Times - <https://www.thetimes.co.uk/article/retired-yorkshireman-solves-elusive-einstein-tile-maths-problem-vqw7xgt3p>

Tilings Encyclopedia - <https://tilings.math.uni-bielefeld.de/>

-
- Transbay Program- <https://tjpa.org/media-gallery/image-gallery/transit-center-architecture>
- Two algorithms for randomly generating aperiodic tilings - <https://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/quasiblog/aperiodic-tilings/>
- Uncube Magazine. LOCAL HEROES AUSTRALIAN-NESS MADE IN MELBOURNE - <https://www.uncubemagazine.com/sixcms/detail.php?id=14817757>
- Whytile.com - <https://whytile.com/tile-history/islamic-tile-history-and-inspiration/>
- Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gummelt_decagon.svg
- Wikipedia - <https://es.wikipedia.org/wiki/Cuasicristal>
- Wolfram Mathworld - <https://mathworld.wolfram.com/MonohedralTiling.html>

Procedencia de las ilustraciones

- Fig. I.1 Elaboración propia a partir un original tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 1.2.1, página 21.
- Fig. I.2 Elaboración propia a partir un original tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 1.2.1, página 21
- Fig. I.3 Elaboración propia a partir un original tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 1.2.1, página 21.
- Fig. I.4 Tomado de WRINKLER, Mike. Generating non-periodic tilings in the form of a spiral by using a decorated monotile (Bochum, 2019).
- Fig. I.5 Elaboración propia usando la página <https://misc.oooo.org/penrose/>
- Fig. 1.1 Tomado de <https://www.sciencealert.com/one-of-the-rarest-crystals-on-earth-has-been-found-in-a-russian-meteorite>; Consultado el 16.05.2023.
- Fig. 1.2 Tomado de The Beauty in Math, <https://www.kolbetimes.com/beauty-in-math/>; Consultado el 18.03.2023.
- Fig. 1.3 Tomado de <https://www.archdaily.cl/cl/883186/louvre-abu-dhabi-ateliers-jean-nouvel>; Consultado el 24.05.2023.
- Fig. 1.4 Tomado de <https://www.archdaily.cl/cl/883186/louvre-abu-dhabi-ateliers-jean-nouvel>; Consultado el 24.05.2023.
- Fig. 2.1 Tomado de Toshiaki Matsushima¹, Yoshihiro Mizoguchi², and Alexandre Derouet-Jourdan³, Verification of a brick Wang tiling algorithm (Kyūshū, 2016).
- Fig. 2.2 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.2.1, página 525.
- Fig. 2.3 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.2.2, página 526.
- Fig. 2.4 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.2.8, página 529.
- Fig. 2.5 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.3.1, página 531.
- Fig. 2.6 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.3.2, página 531.
- Fig. 2.7 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.3.4, página 533.
- Fig. 2.8 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.3.3, página 532.
- Fig. 2.9 Elaboración propia a partir de RITTER, Alexander. Oxford masterclass in geometry, 2014.

- Fig. 2.10 Elaboración propia a partir de RITTER, Alexander. Oxford masterclass in geometry, 2014.
- Fig. 2.11 Elaboración propia a partir de RITTER, Alexander. Oxford masterclass in geometry, 2014.
- Fig. 2.12 Elaboración propia a partir de RITTER, Alexander. Oxford masterclass in geometry, 2014.
- Fig. 2.13 Elaboración propia usando la página <https://misc.oooo.org/penrose/>
- Fig. 2.14 Tomado de <https://artofislamicpattern.com/online-classes/online-series-archive-richard-henry/new-series-patterns-from-the-topkapi-scroll/#/1>: Consultado del 08.05.2023.
- Fig. 2.15 Tomado de LU, Peter J. Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, Figura 1F, página 1107.
- Fig. 2.16 Tomado de LU, Peter J. Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, Figura 1G, página 1107.
- Fig. 2.17 Tomado de LU, Peter J. Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, Figura 4, página 1110.
- Fig. 2.18 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.4.1, página 550.
- Fig. 2.19 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.4.3, página 551.
- Fig. 2.20 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.4.7, página 554.
- Fig. 2.21 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.4.8, página 555.
- Fig. 2.22 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.4.11, página 555.
- Fig. 2.23 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.4.12, página 556.
- Fig. 2.24 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.4.14, página 556.
- Fig. 2.25 Tomado de GÜMBAUM, Branko. Tilings and Patterns (Nueva York; W. H. Freeman and Company, 1987), figura 10.4.15, página 557.
- Fig. 2.26 Elaboración propia a partir de ADAMS, Colins. The Tiling Book. (Providence, American Mathematical Society, 2022).
- Fig. 2.27 Elaboración propia a partir de ADAMS, Colins. The Tiling Book. (Providence, American Mathematical Society, 2022).
- Fig. 2.28 Elaboración propia a partir de ADAMS, Colins. The Tiling Book. (Providence, American Mathematical Society, 2022).
- Fig. 2.29 Elaboración propia a partir de ADAMS, Colins. The Tiling Book. (Providence, American Mathematical Society, 2022).
- Fig. 2.30 Edición de los colores a partir de ADAMS, Colins. The Tiling Book. (Providence, American Mathematical Society, 2022), figura 3.39, página 203.
- Fig. 2.31 Edición de los colores a partir de ADAMS, Colins. The Tiling Book. (Providence, American Mathematical Society, 2022), figura 3.40, página 204.
- Fig. 2.32 Edición de los colores a partir de la imagen tomada de https://en.wikipedia.org/wiki/Socolar-Taylor_tile#; consultado el 20.05.2023

- Fig. 2.33 Edición de los colores a partir de la imagen tomada de https://en.wikipedia.org/wiki/Socular-Taylor_tile#; consultado el 20.05.2023
- Fig. 2.34 Edición de los colores a partir de la imagen tomada de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gummelt_decagon.svg; consultado el 20.05.2023
- Fig. 2.35 Elaboración propia a partir de David Smith¹, Joseph Samuel Myers², Craig S. Kaplan³, and Chaim Goodman-Strauss⁴, An aperiodic monotile, 2023, figura 1.1, página 2.
- Fig. 2.36 Tomado de David Smith¹, Joseph Samuel Myers², Craig S. Kaplan³, and Chaim Goodman-Strauss⁴, An aperiodic monotile, 2023, figura 2.1, página 10.
- Fig. 3.1 Tomado de Chris Cambré, <https://www.geogebra.org/m/garayxgb>; consultado el 24.05.2023
- Fig. 3.2 Tomado de [https://en.wikipedia.org/wiki/Tomb_of_Hafez#/media/File:The_tombs_of_Hazif_and_Saadi_\(1906\)_\(14595661299\).jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Tomb_of_Hafez#/media/File:The_tombs_of_Hazif_and_Saadi_(1906)_(14595661299).jpg); consultado el 26.05.2023
- Fig. 3.3 Tomado de The Beauty in Math, <https://www.kolbetimes.com/beauty-in-math/>; Consultado el 18.03.2023.
- Fig. 3.4 Tomado de LU, Peter J. Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, Figura 3, página 1109.
- Fig. 3.5 Tomado de <https://armarchitecture.com.au/projects/rmit-storey-hall-and-green-brain/>; consultado el 22.05.2023
- Fig. 3.6 Tomado de https://www.qedcat.com/archive_cleaned/105.html; consultado el 22.05.2023
- Fig. 3.7 Tomado de https://www.qedcat.com/archive_cleaned/105.html; consultado el 22.05.2023
- Fig. 3.8 Tomado de https://www.qedcat.com/archive_cleaned/105.html; consultado el 22.05.2023
- Fig. 3.9 Tomado de https://www.qedcat.com/archive_cleaned/105.html; consultado el 22.05.2023
- Fig. 3.10 Tomado de https://www.qedcat.com/archive_cleaned/105.html; consultado el 22.05.2023
- Fig. 3.11 Tomado de https://www.qedcat.com/archive_cleaned/105.html; consultado el 22.05.2023
- Fig. 3.12 Tomado de <https://newtecnic.com/federation-square-melbourne-australia>; consultado el 20.05.2023
- Fig. 3.13 Elaboración propia a partir de ADAMS, Colins. (Providence, American Mathematical Society, 2022).
- Fig. 3.14 Tomado de <https://www.istockphoto.com/es/foto/fachada-de-edificio-gm178367640-20302037>; consultado el 17.03.2023
- Fig. 3.15 Tomado de <https://www.prehorquisa.com/es/noticias-prehorquisa/426-arata-isozaki,-premio-pritzker-2019.html>; consultado el 10.03.2023
- Fig. 3.16 Tomado de <https://www.prehorquisa.com/es/noticias-prehorquisa/426-arata-isozaki,-premio-pritzker-2019.html>; consultado el 10.03.2023
- Fig. 3.17 Tomado de <https://tjpa.org/media-gallery/image-gallery/transit-center-architecture>; consultado el 20.05.2023
- Fig. 3.18 3.16 Tomado de <https://tjpa.org/media-gallery/image-gallery/transit-center-architecture>; consultado el 20.05.2023

Nombre: Ammann Chair

Regla de Sustitución

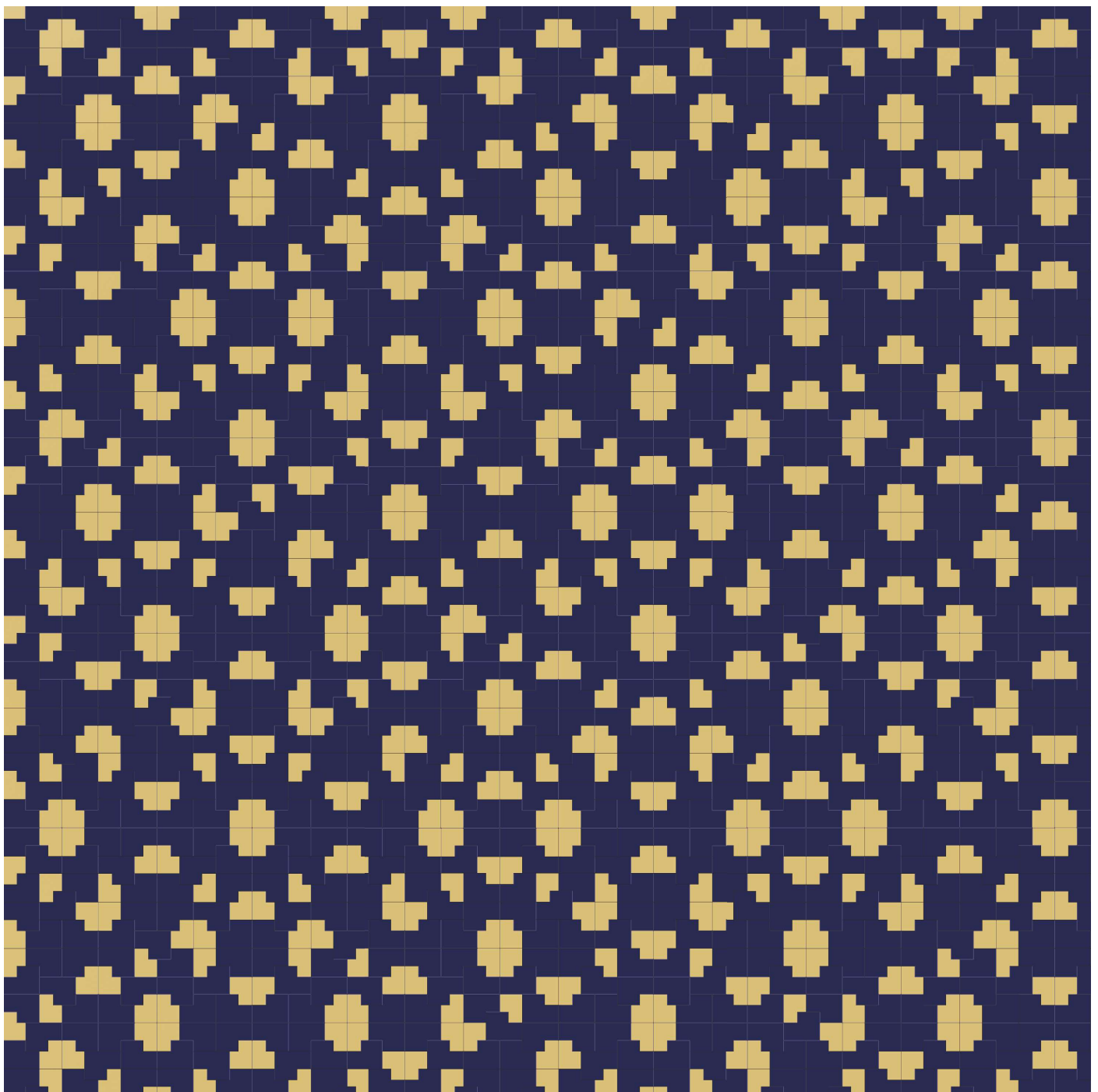
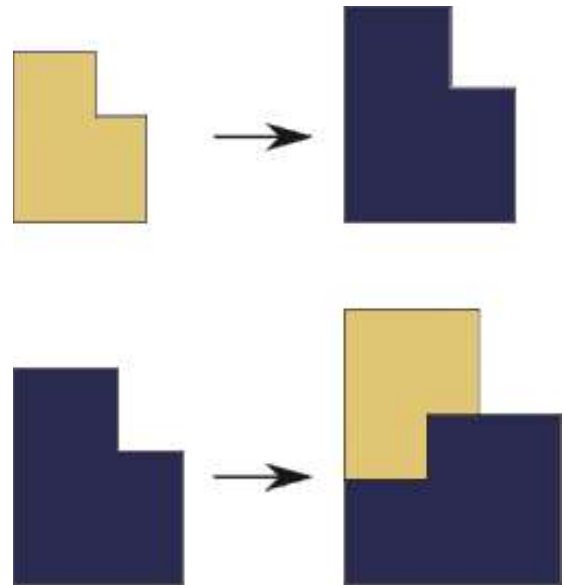
Descubierto por: Ammann, Robert

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: No Convexa

Información: El factor de inflación de esta sustitución es bastante pequeño. Es la raíz cuadrada de la proporción áurea, aproximadamente 1,272. Las reglas de emparejamiento de los teselas Ammann pueden expresarse mediante barras de Ammann. Las baldosas son rep-tiles en un sentido más general: Por ejemplo, cada una de las dos baldosas, T, puede diseccionarse en copias similares de T, pero de distinto tamaño.



Nombre: Ammann A₃

Regla de Sustitución

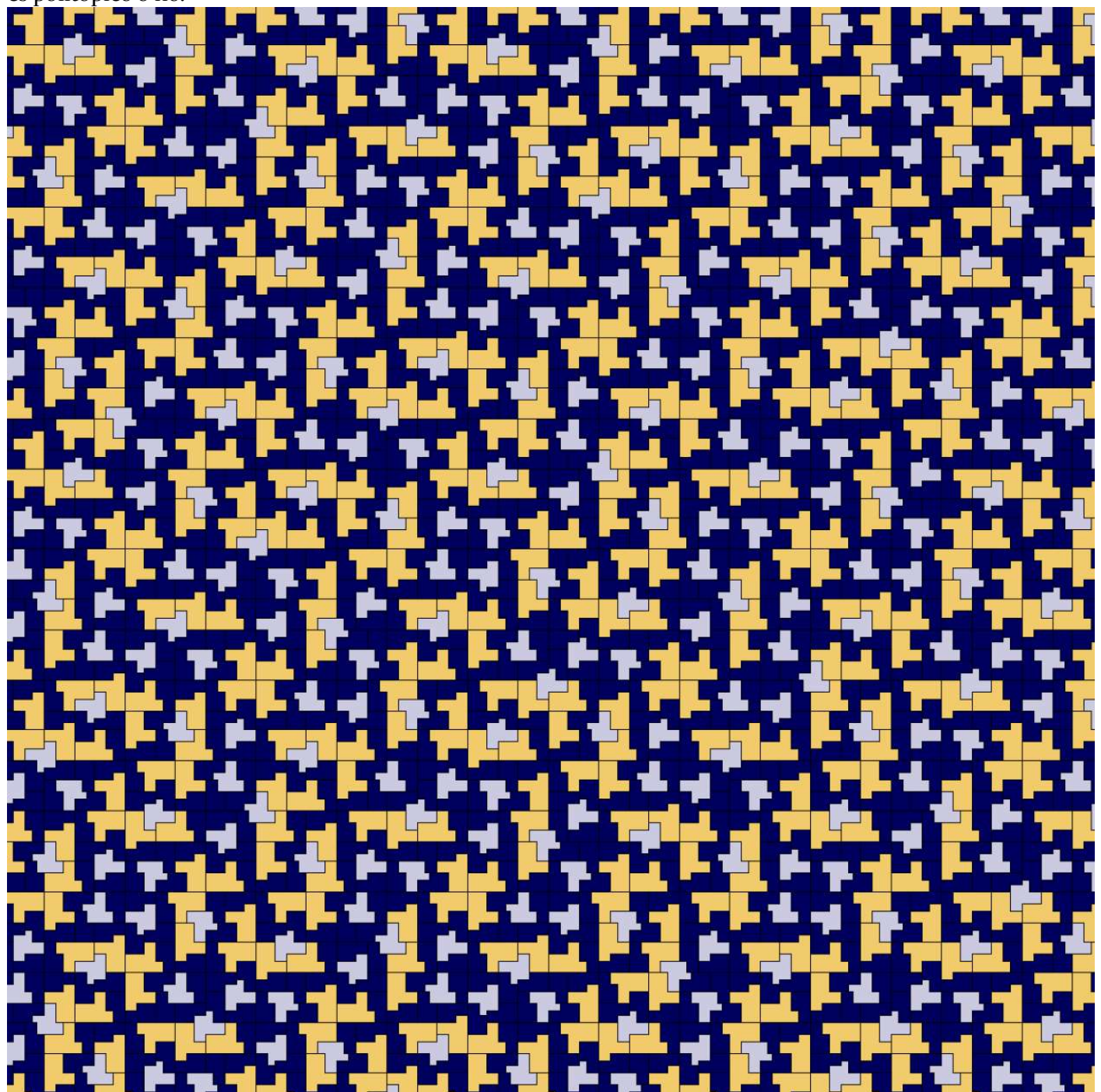
Descubierto por: Ammann, Robert

Nº de Teselas: 3

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: No Convexa

Información: En 1977 Robert Ammann descubrió una serie de conjuntos de prototeselas aperiódicos, es decir, teselas con reglas de emparejamiento que obligan a realizar teselas no periódicas. La sustitución de éste utiliza la proporción áurea como factor de inflación. Es cierto que se trata de un teselado de corte y proyección, pero que sepamos, nadie se ha molestado en calcular la ventana del mismo hasta ahora. Así que no sabemos si es politópico o no.



Nombre: Ammann A₄

Regla de Sustitución

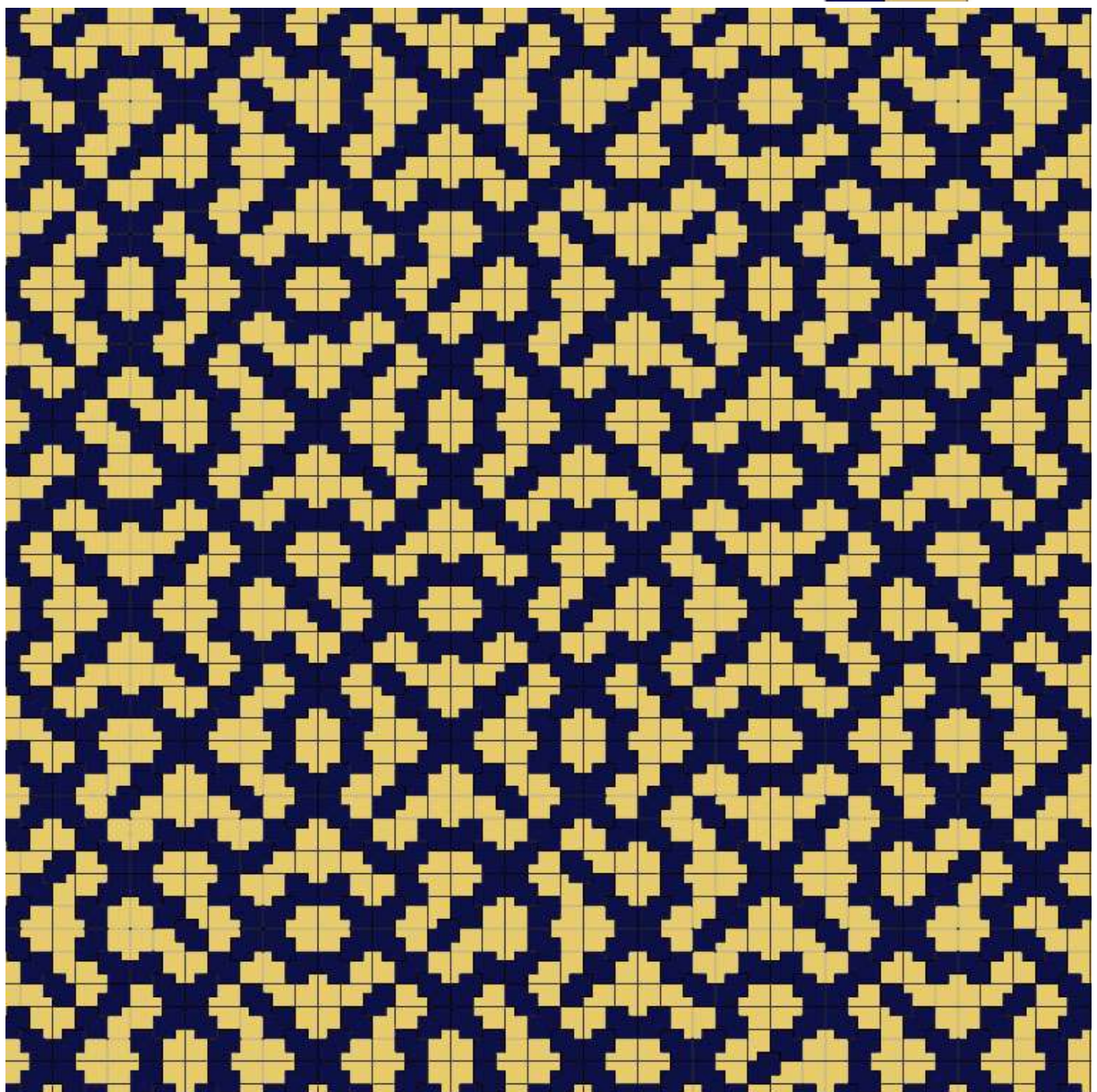
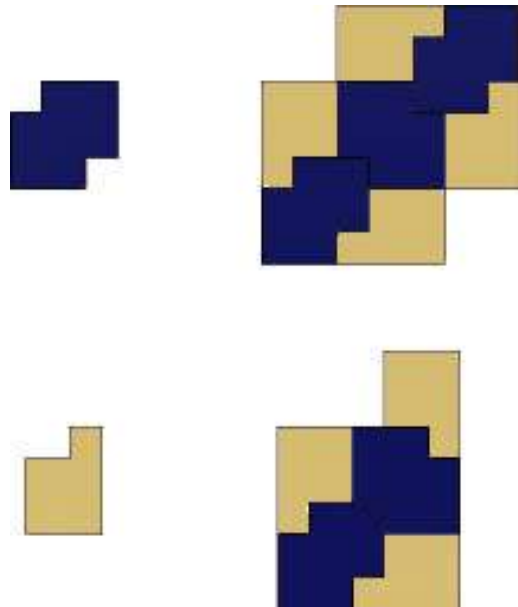
Descubierto por: Ammann, Robert

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: No Convexa

Información: Uno de los teselados descubiertos R. Ammann en 1977, cuando encontró varios conjuntos de prototeselas aperiódicos, es decir, prototeselas con reglas de emparejamiento que forzaban teselados no periódicos. Los teselados A₄ son mld a los conocidos teselados Ammann Beenker. Por tanto, comparten la mayoría de sus propiedades con estos últimos. Para más información, véase Ammann-Beenker.



Nombre: Ammann A₅ / Ammann-Beenker

Regla de Sustitución

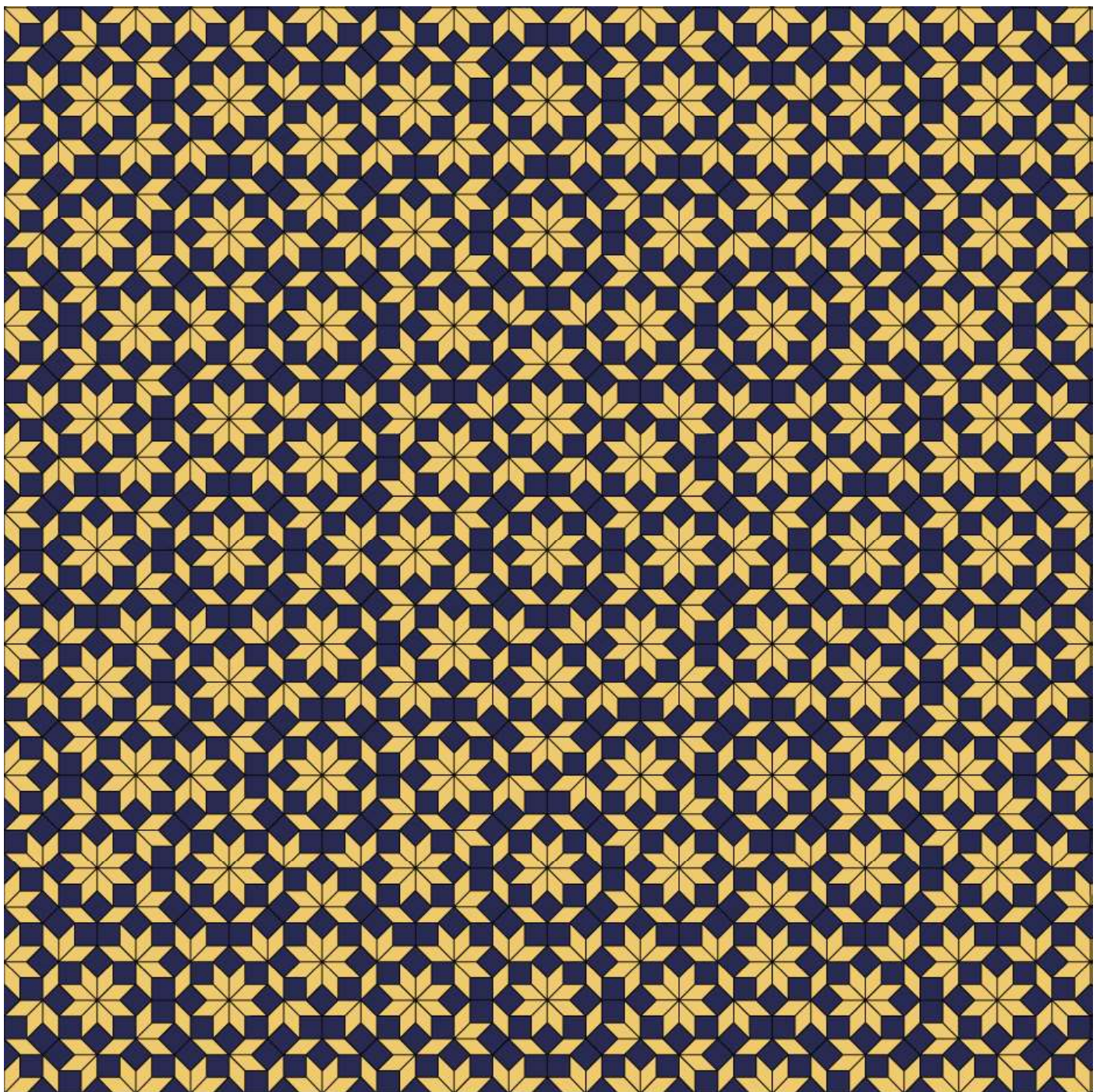
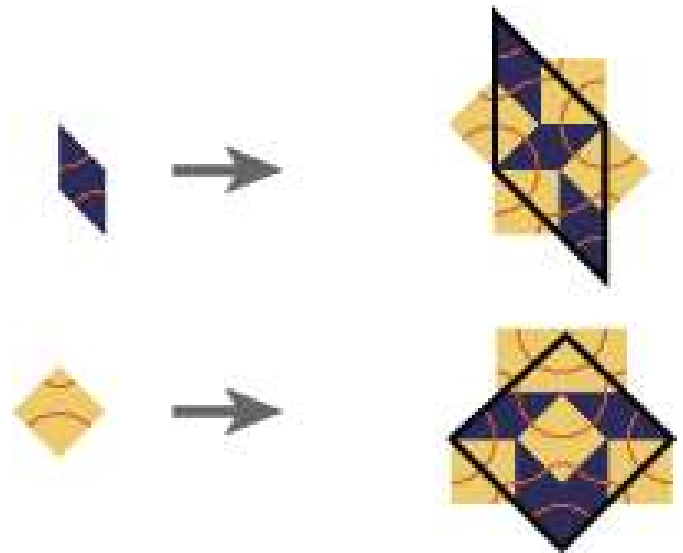
Descubierto por: Ammann, Robert y Beenker, F

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: Permite teselaciones con simetría óctuple perfecta. El factor de sustitución es $1+\sqrt{2}$, a veces llamado “media de plata”, que fue el primer factor de inflación irracional conocido que no está relacionado con la media de oro. En 1982 F. Beenker describió sus propiedades algebraicas, esencialmente cómo obtenerlo por el método de proyección. Estos mosaicos permiten una decoración mediante las llamadas barras de Ammann.



Nombre: Ammann-Beenker rhomb triangle

Regla de Sustitución

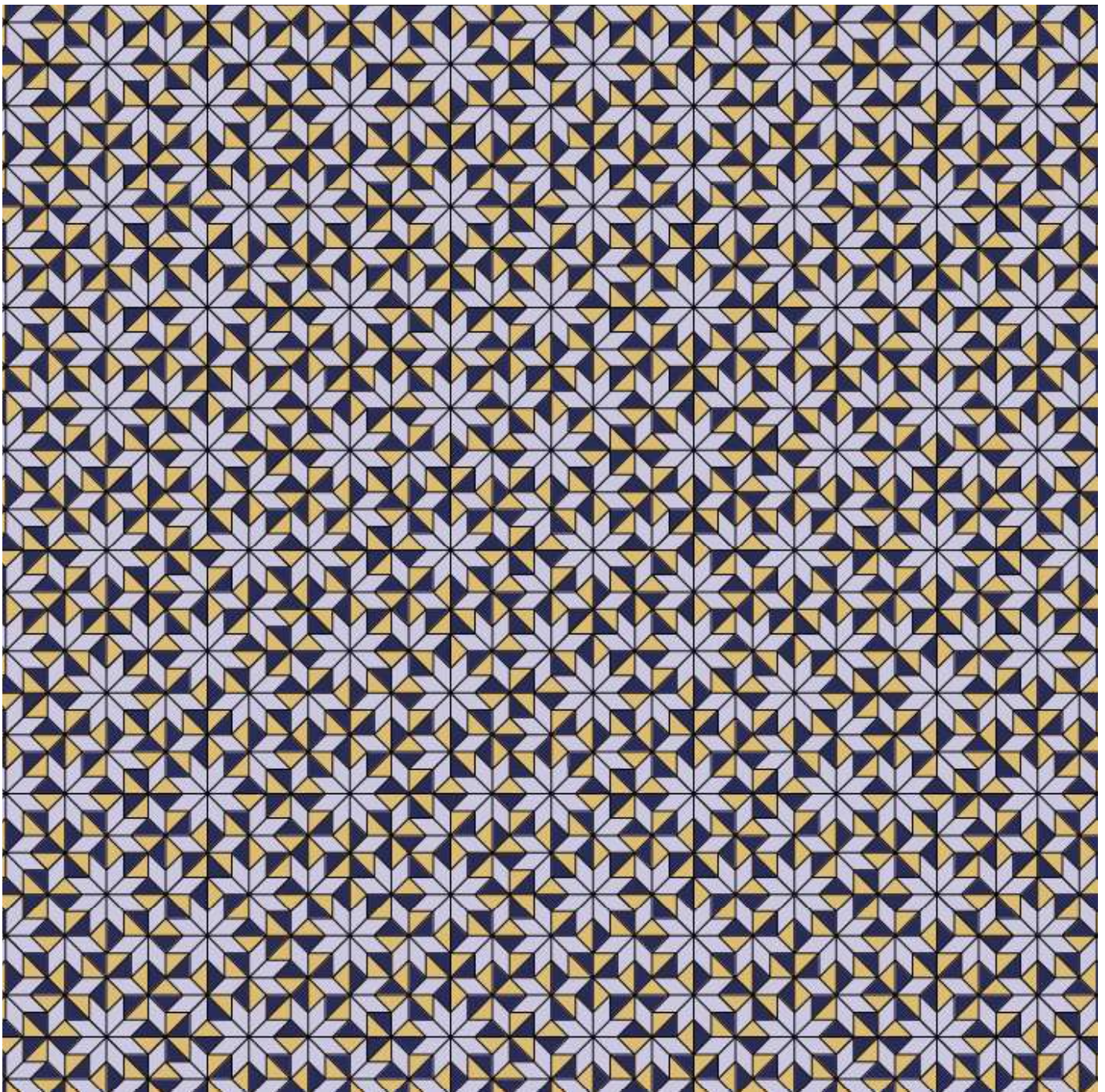
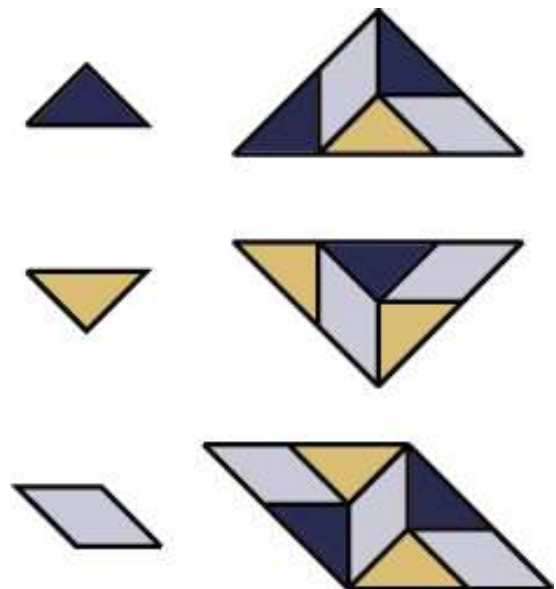
Descubierto por: Ammann, Robert

Nº de Teselas: 3

Dibujo Interior: No

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: Una versión similar del mosaico de Ammann-Benker. Los colores de los triángulos en la imagen de la regla indican la orientación de los triángulos: el triángulo azul no es más que el triángulo ocre reflejado. Por tanto, la suertesela romboidal tiene dos ejes de simetría especular.



Nombre: Armchair

Regla de Sustitución

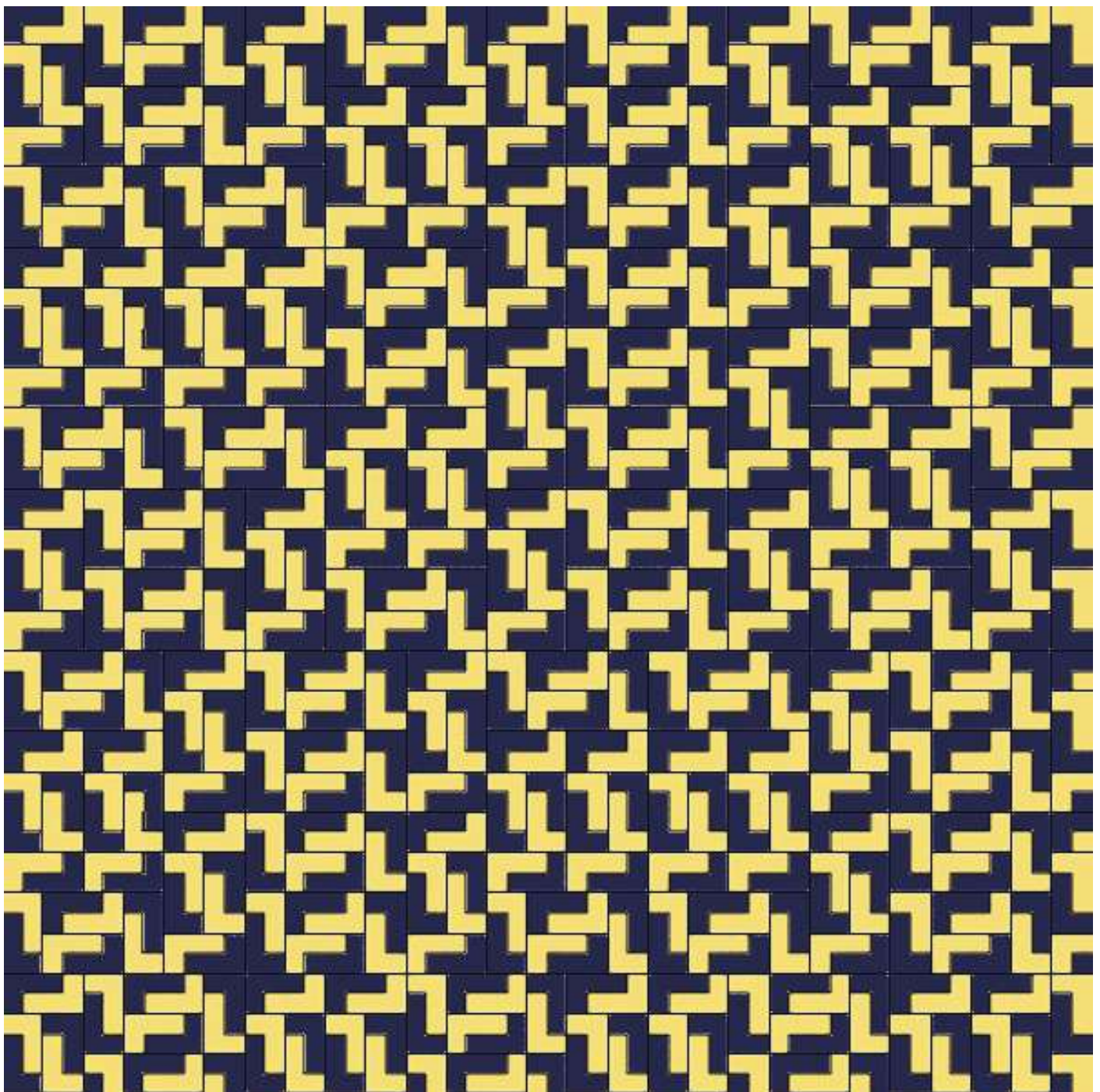
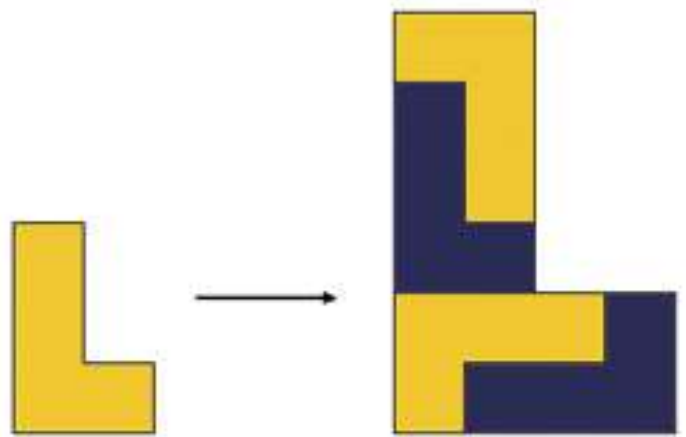
Descubierto por: Desconocido

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: No

Convexa / No Convexa: No Convexa

Información: Una regla de sustitución simple con una prototesela en forma de L. Los teselados son mld. a los teselados de dominó.



Nombre: Bowtie-Hexagon

Regla de Sustitución

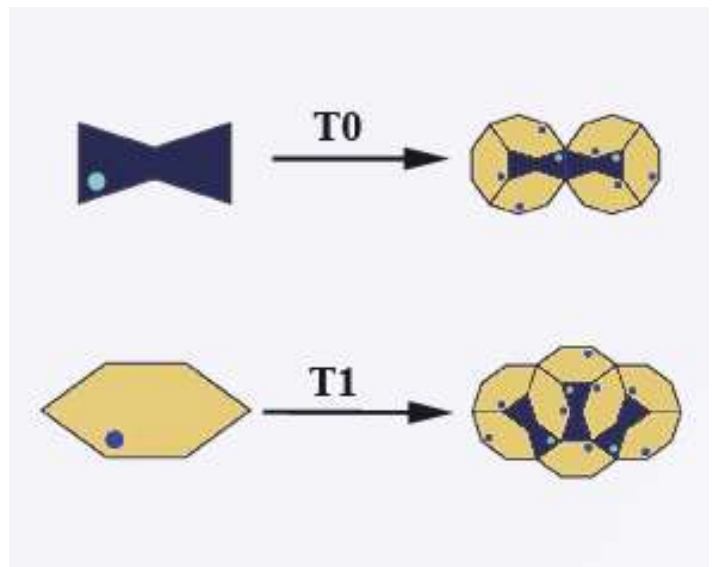
Descubierto por: Andritz, L.

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Ambas

Información: Uno de los varios teselados por sustitución encontrados y presentados en febrero de 2016 por L. Andritz con simetría quíntuple utilizando azulejos inspirados en patrones islámicos Girih. A pesar de las similitudes, el mosaico es diferente del mosaico "Tie and Navette".



Nombre: Bowtie-Hexagon-Decagon

Regla de Sustitución

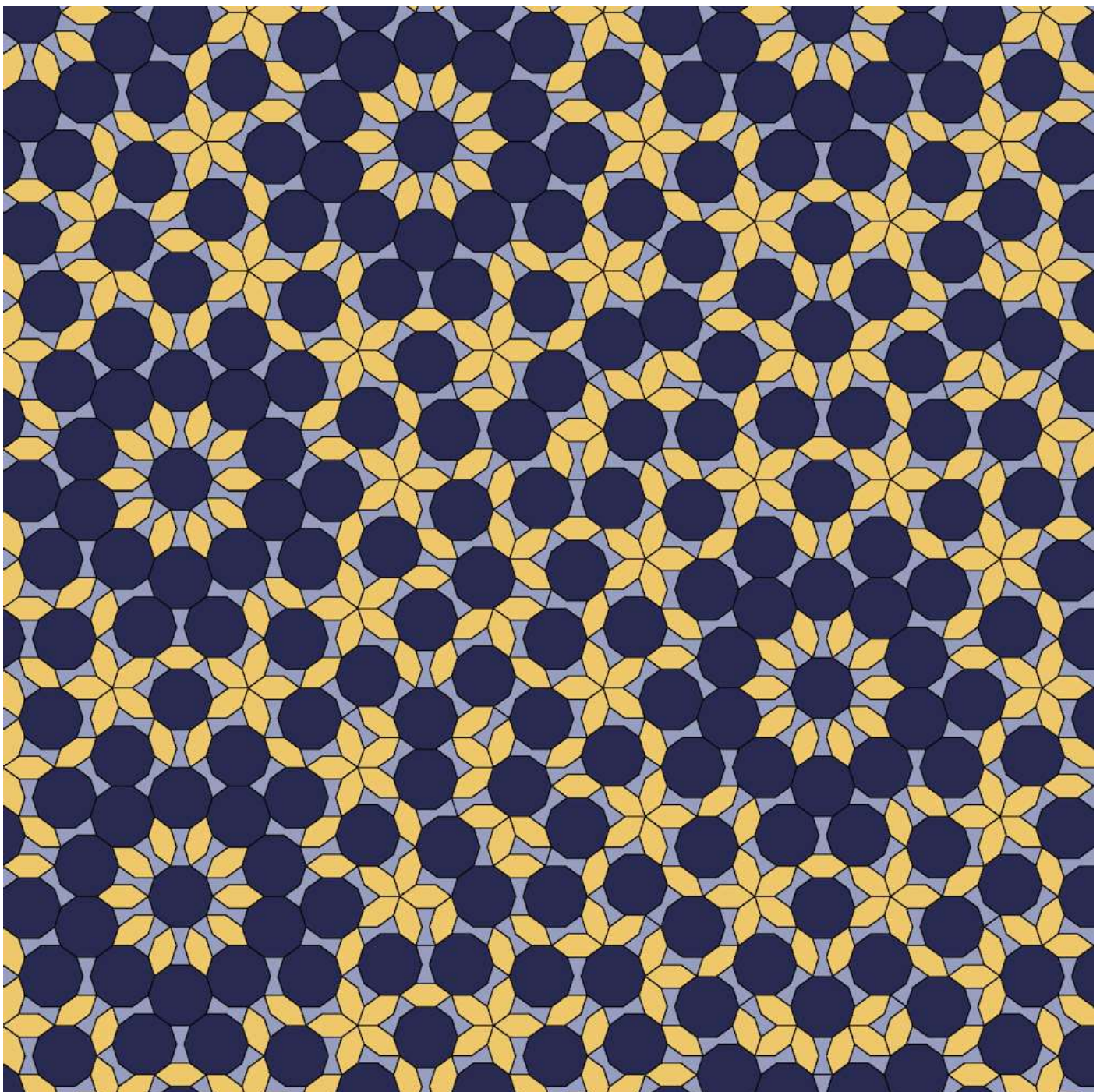
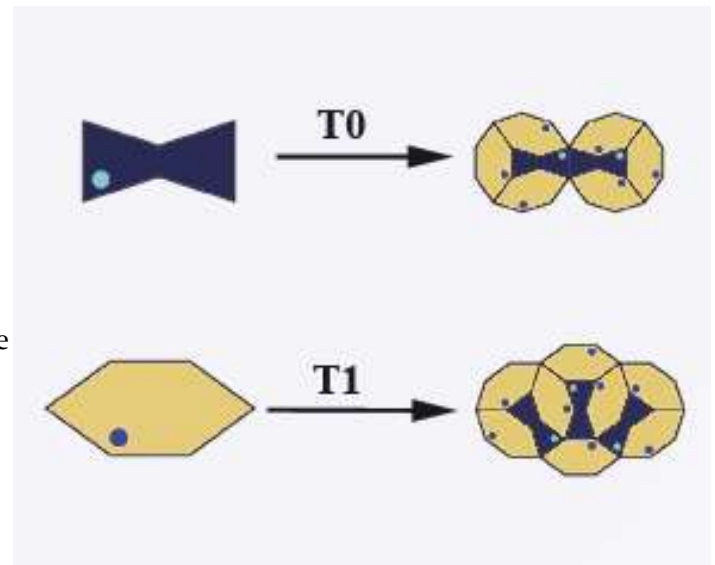
Descubierto por: Andritz, L.

Nº de Teselas: 3

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Ambas

Información: Uno de los varios teselados por sustitución encontrados por L. Andritz con simetría quíntuple utilizando azulejos inspirados en patrones islámicos Girih.



Nombre: Cromwell Kite-Rhombus-Trapezium

Regla de Sustitución

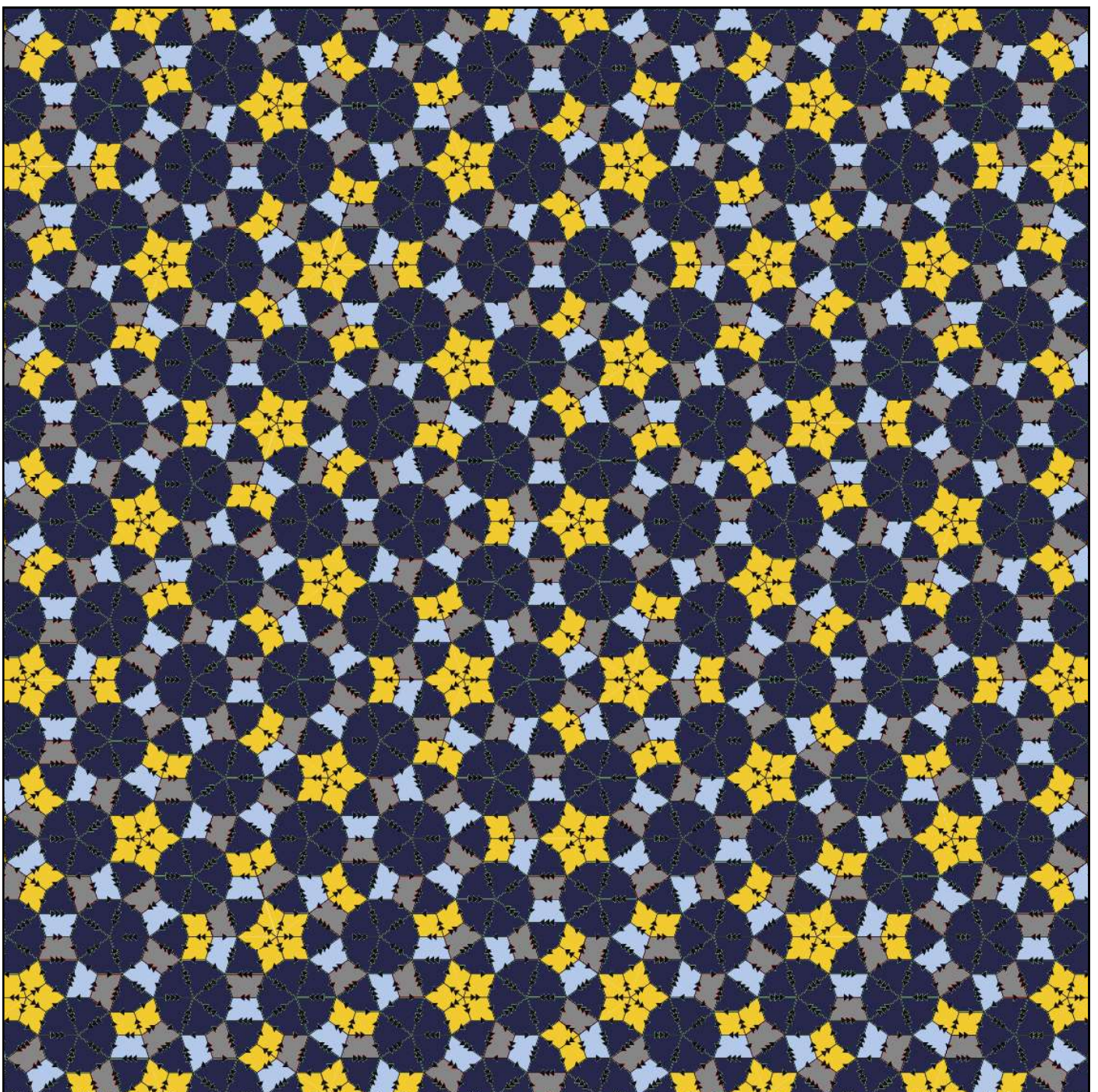
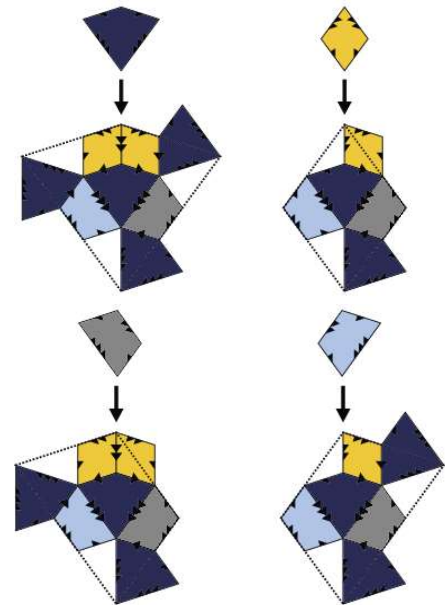
Descubierto por: Cromwell, Peter

Nº de Teselas: 4

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: El mosaico comparte una clase mld con los mosaicos de Penrose, por ejemplo Penrose Rhomb, Penrose kite-dart y Penrose Pentagon boat star). El factor de inflación es el cuadrado de la media áurea ($\sqrt{5}/2 + 1/2$)² = $\sqrt{5}/2 + 3/2 = 2,618033988...$. A diferencia de las teselas de Penrose los ángulos interiores de las prototeselas son mayores que 36



Nombre: Ammann Chair

Regla de Sustitución

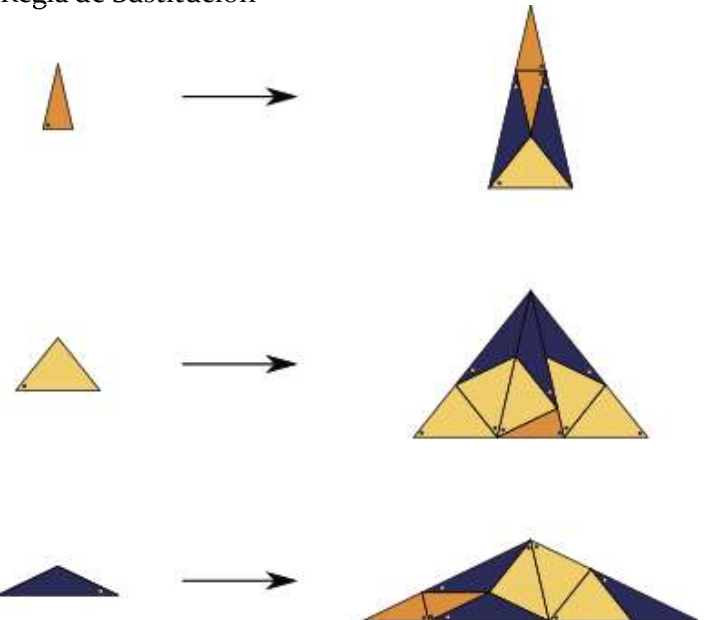
Descubierto por: Danzer, Ludwig

Nº de Teselas: 3

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: Un mosaico de sustitución con tres triángulos como prototeselas, basado en la simetría séptuple. Las cuatro longitudes de arista son $\sin(\pi/7)$, $\sin(2\pi/7)$, $\sin(3\pi/7)$, $\sin(2\pi/7)+\sin(3\pi/7)$. El factor de inflación es $1+\sin(2\pi/7)/\sin(\pi/7)$ que no es un número PV. Hay reglas de correspondencia sencillas para el embaledado. De hecho, la lista de todas las estrellas de vértice que aparecen en el mosaico de sustitución sirve como una.



Nombre: Equithirds

Regla de Sustitución

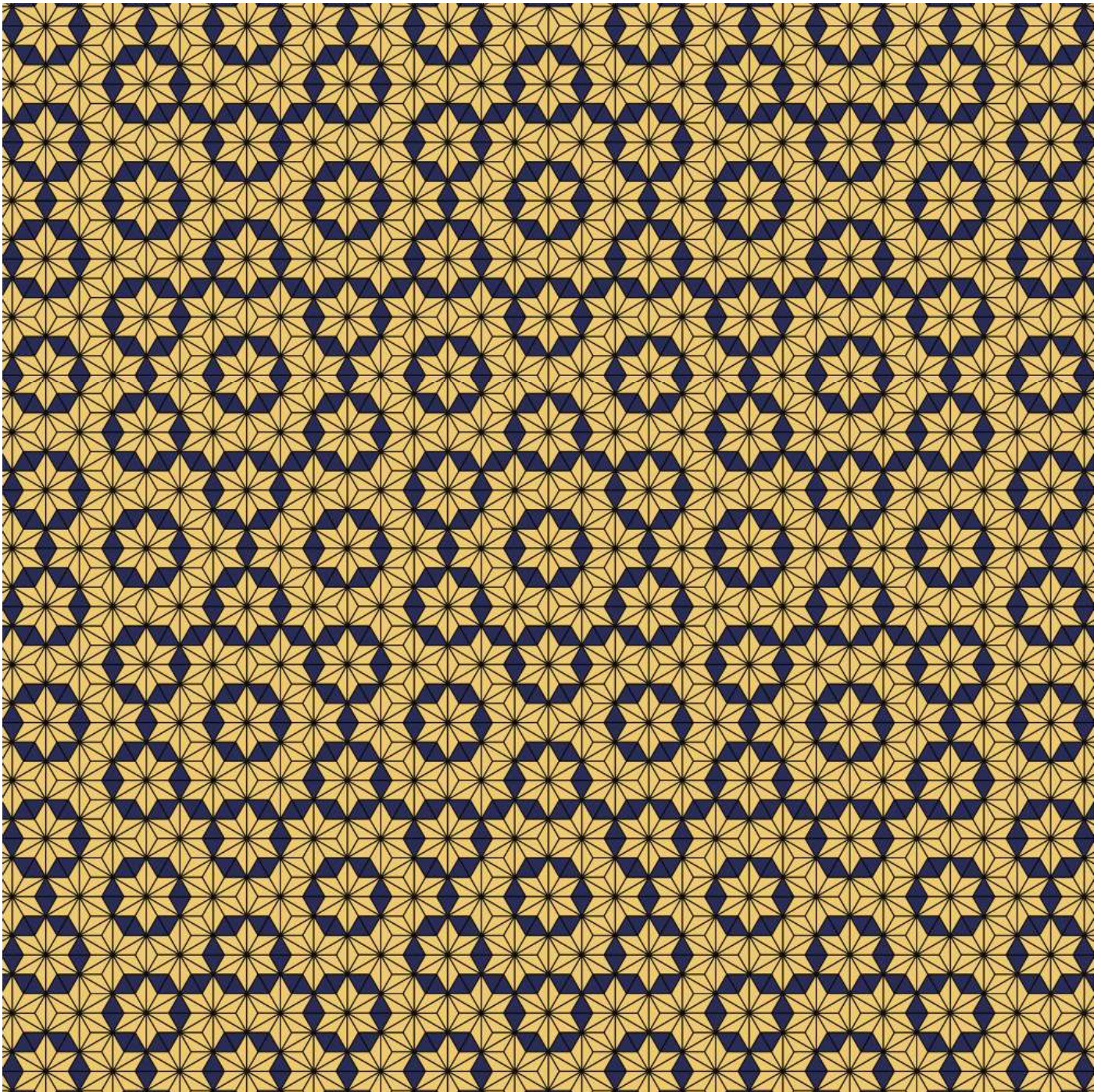
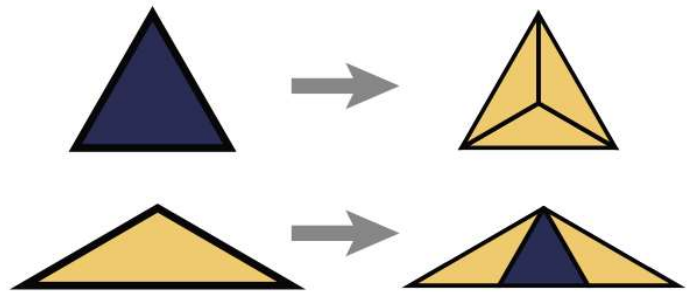
Descubierto por: Kalahurka, B

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: Un mosaico de sustitución encontrado por Bill Kalahurka, Texas, en 2009. Es mld a T2000 por L. Danzer en 2000.



Nombre: Hat Polykite

Regla de Sustitución

Descubierto por: Smith, David

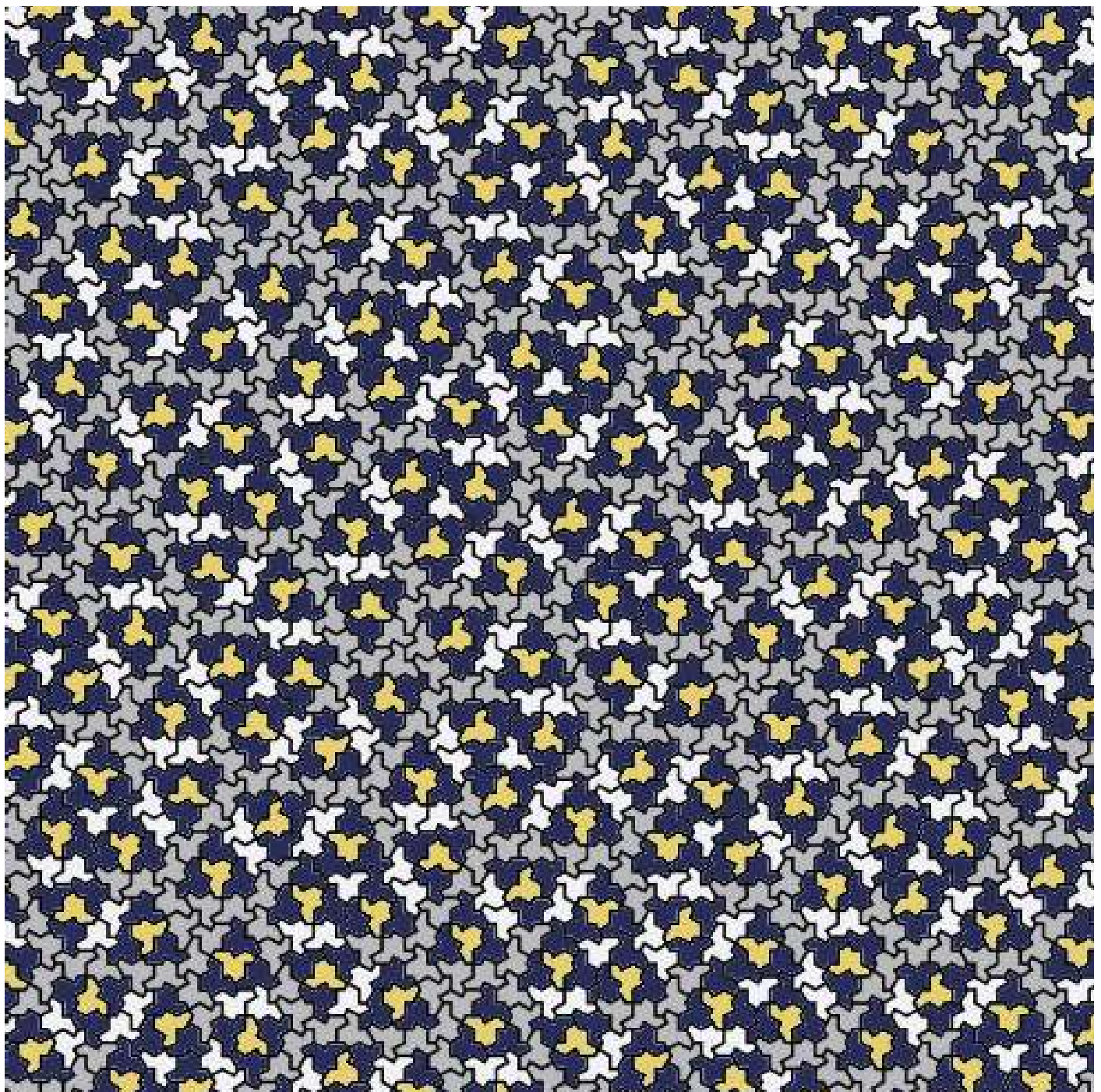
No tiene

Nº de Teselas: 1

Dibujo Interior: No

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: Una monotesela aperiódica bastante simple encontrada en 2022. La forma por sí sola garantiza que todos los mosaicos del plano que se puedan construir a partir de esta tesela serán aperiódicos. Éste no es realmente un mosaico de sustitución. Sin embargo, sus propiedades se deducen de los mosaicos de sustitución relacionados. Las relaciones exactas son bastante complicadas en este caso concreto.



Nombre: Hexagonal Aperiodic Monotile

Regla de Sustitución

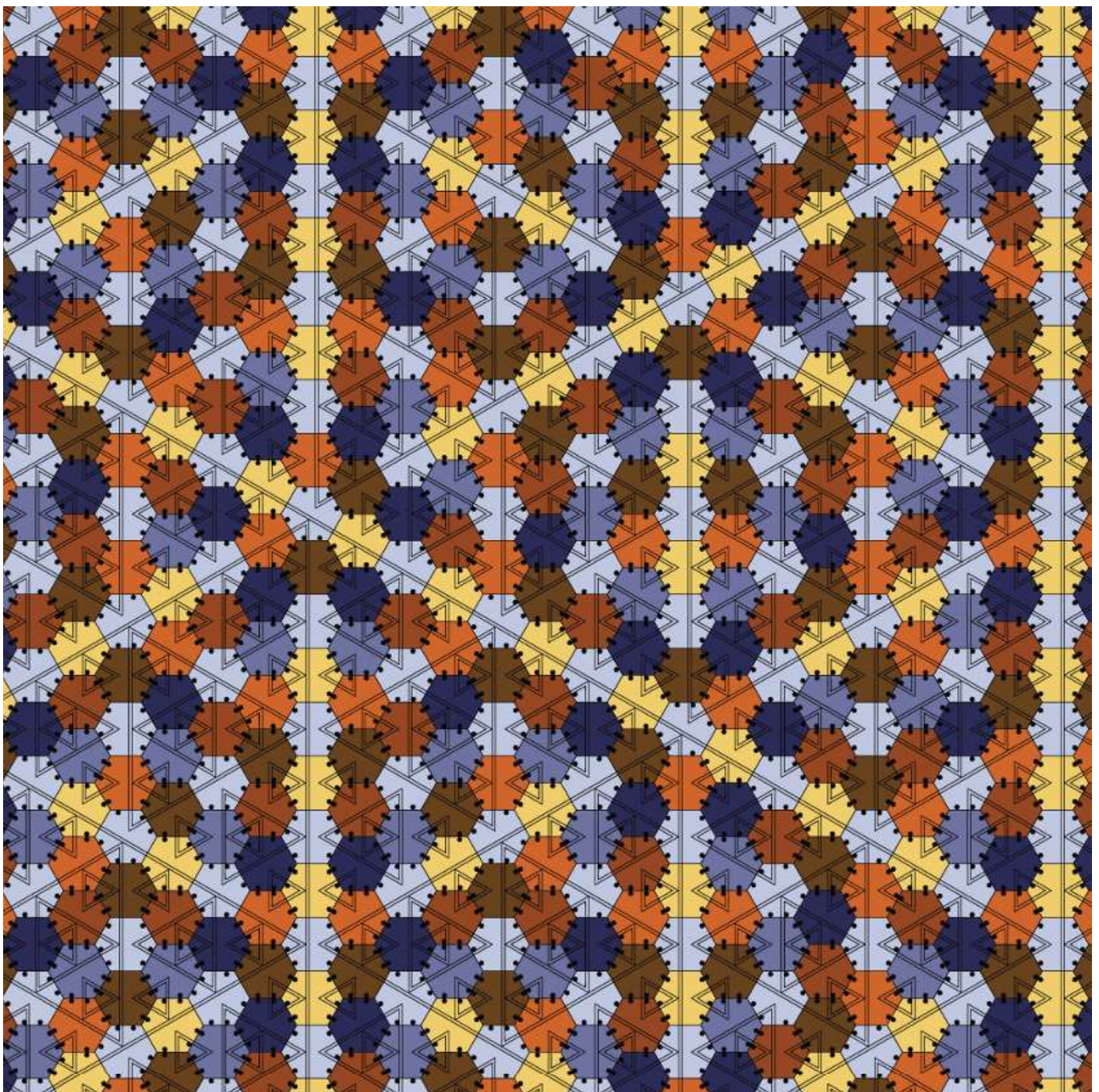
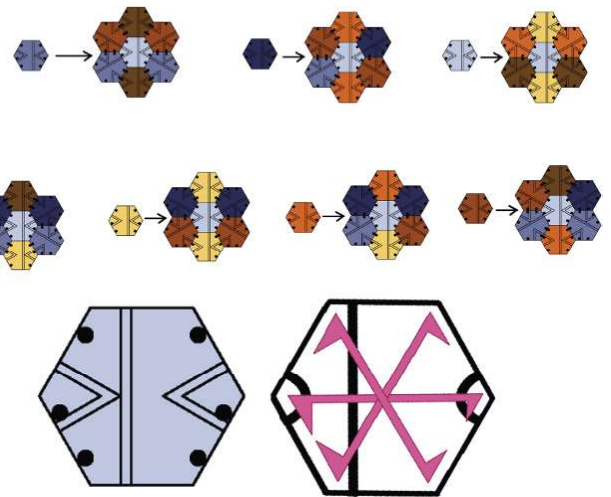
Descubierto por: Taylor, Joan

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: No Convexa

Información: En 2009, Joan Taylor (Burnie, Tasmania) encontró una decoración del hexágono que, junto con unas pocas reglas de emparejamiento local, sólo permite teselaciones aperiódicas del plano. Hasta el año 2022, era una de las pocas teselas que se consideraba una Einstein.



Nombre: Penrose Kite Dart

Regla de Sustitución

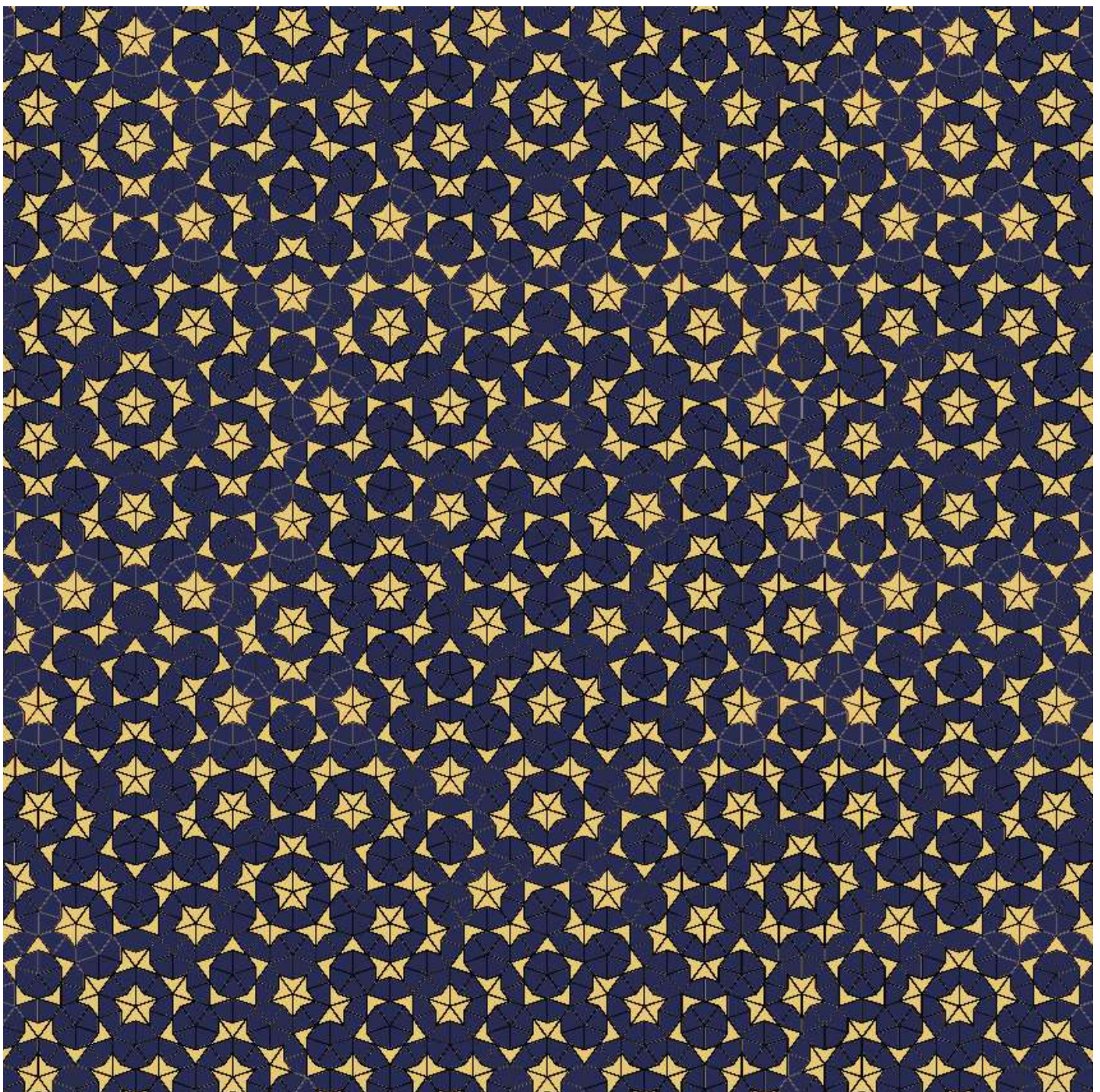
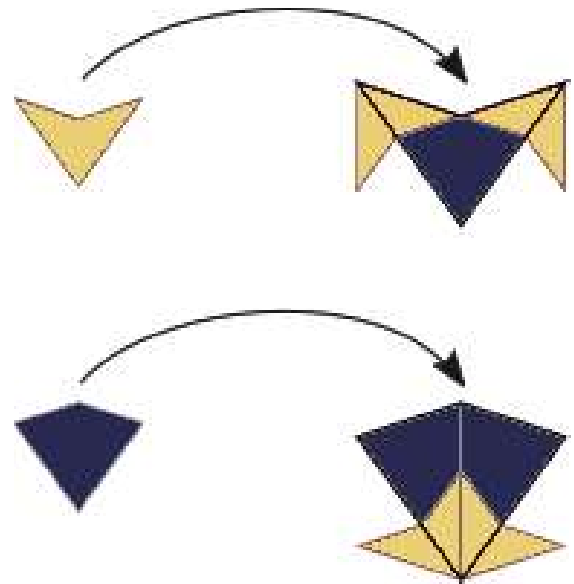
Descubierto por: Penrose, Roger

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: No

Convexa / No Convexa: Ambas

Información: Un clásico, que utiliza una cometa (azul) y un dardo (amarillo) como prototiles. Véase Penrose Rhomb para más detalles.



Nombre: Penrose Pentagon Boat Star

Regla de Sustitución

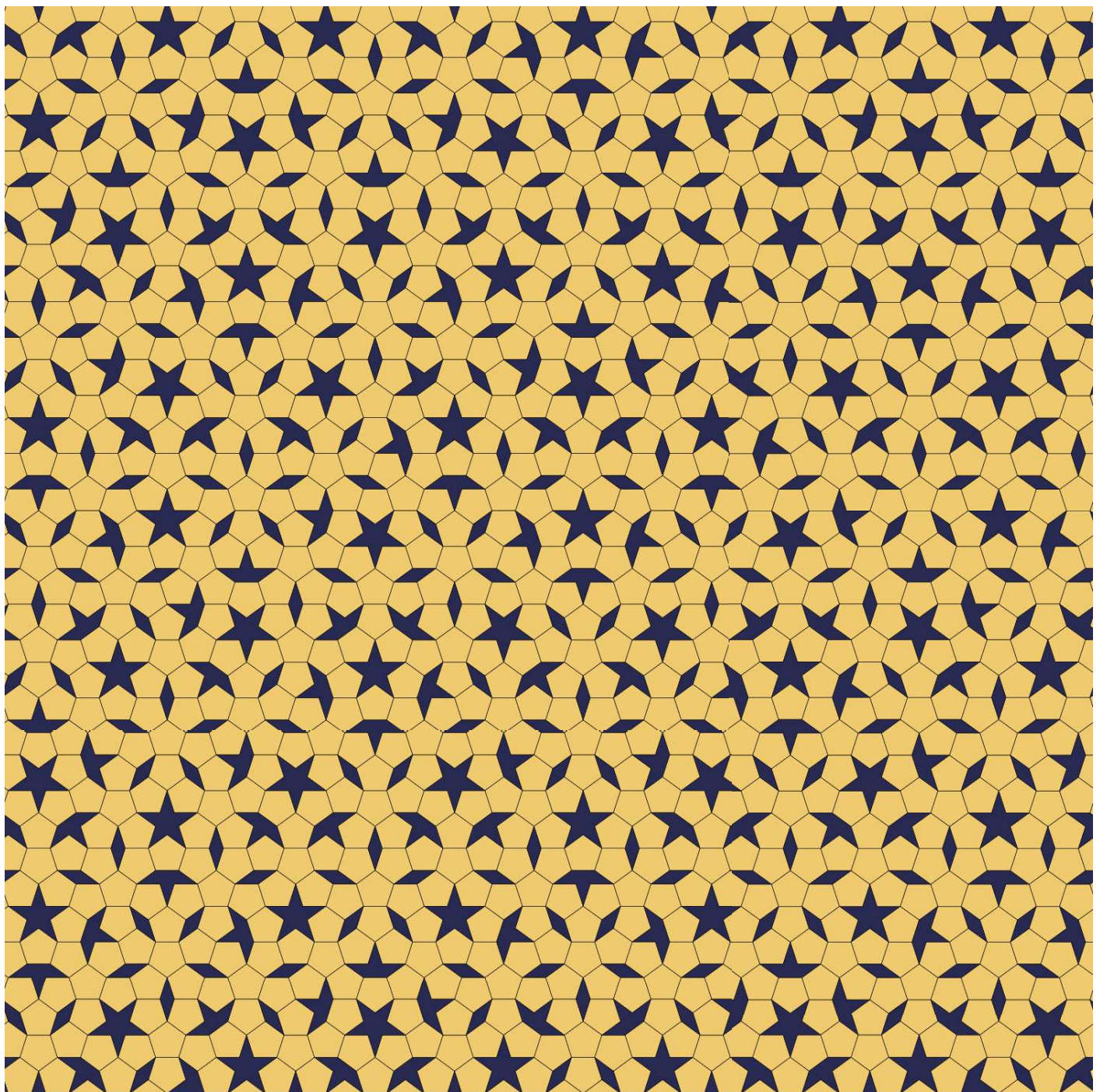
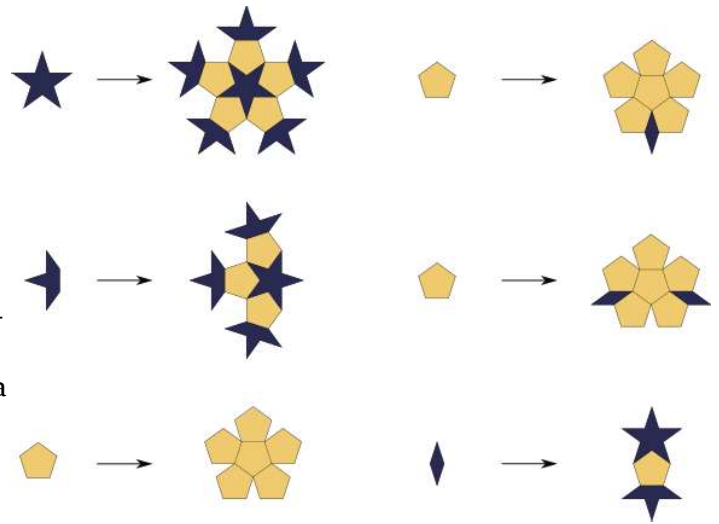
Descubierto por: Penrose, Roger

Nº de Teselas: 3

Dibujo Interior: No

Convexa / No Convexa: Ambas

Información: Una manifestación de los famosos teselados de Penrose. De hecho, esta es la primera manifestación encontrada por Penrose, el rombo de Penrose, la cometa-dardo de Penrose y los triángulos de Robinson son refinamientos de esta. Sus propiedades se discuten en la página del rombo de Penrose.



Nombre: Penrose Rhomb

Regla de Sustitución

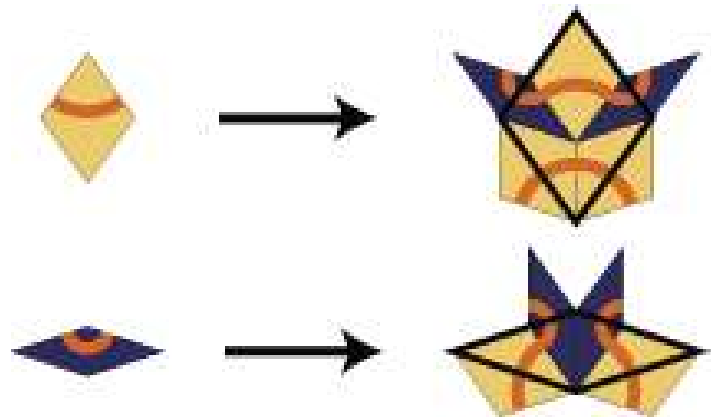
Descubierto por: Penrose, Roger

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: Las tres generan la misma clase mld. Allí se puede encontrar mucha información. La regla de correspondencia para el rombo de Penrose es bastante simple: utilizando los arcos rojos que se muestran en la regla, la regla de correspondencia viene dada por la condición de que las baldosas tienen que encontrarse de forma que los arcos de cada baldosa estén conectados con los arcos de las baldosas vecinas. El factor de inflación es la media áurea $\sqrt{5}/2+1/2=1,618033988...$



Nombre: Penrose Triangle

Regla de Sustitución

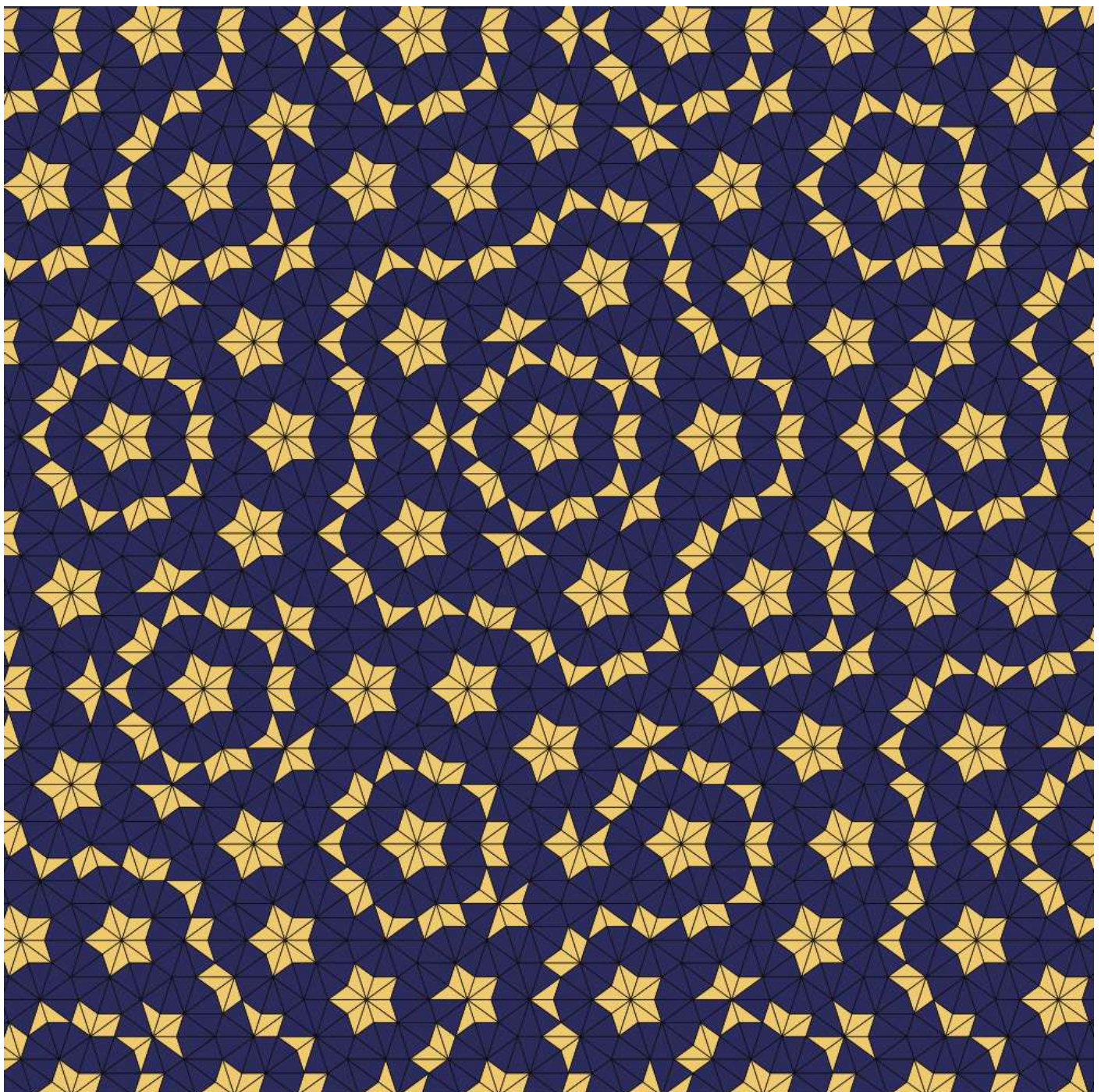
Descubierto por: Penrose, Roger

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: He aquí un ejemplo en el que el triángulo obtuso es el prototilo más pequeño y el triángulo agudo es el más grande. Algunas de ellas generan los mismos mosaicos, otras difieren. Los diferentes mosaicos pueden o no ser mdl (mutuamente derivables localmente). Los triángulos de Robinson son, de entre todas estas posibilidades, los que son mdl de los rombos de Penrose originales.



Nombre: Rhomb Square Octagon

Regla de Sustitución

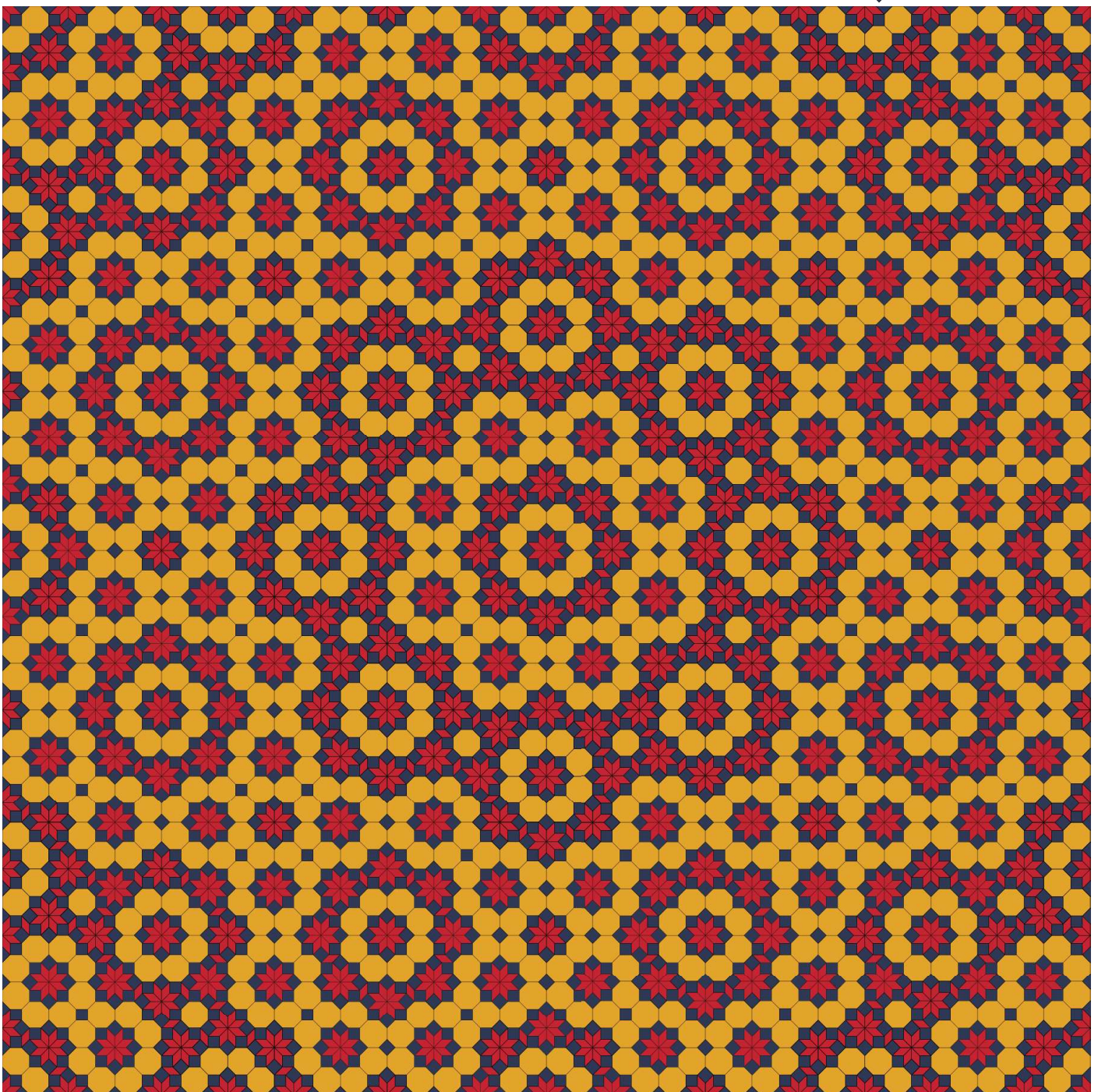
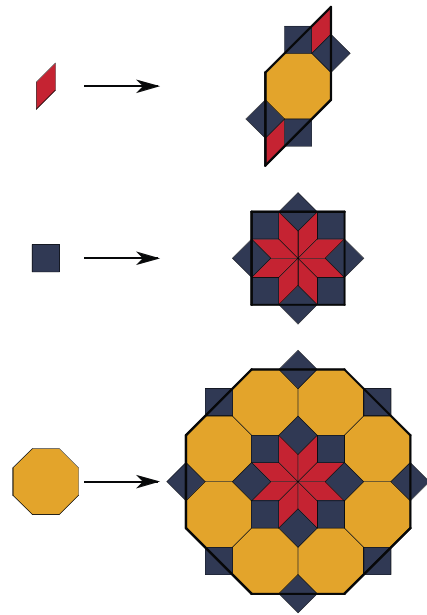
Descubierto por: Desconocido

Nº de Teselas: 3

Dibujo Interior: No

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: No se tiene una descripción formal.



Nombre: Robinson Triangle

Regla de Sustitución

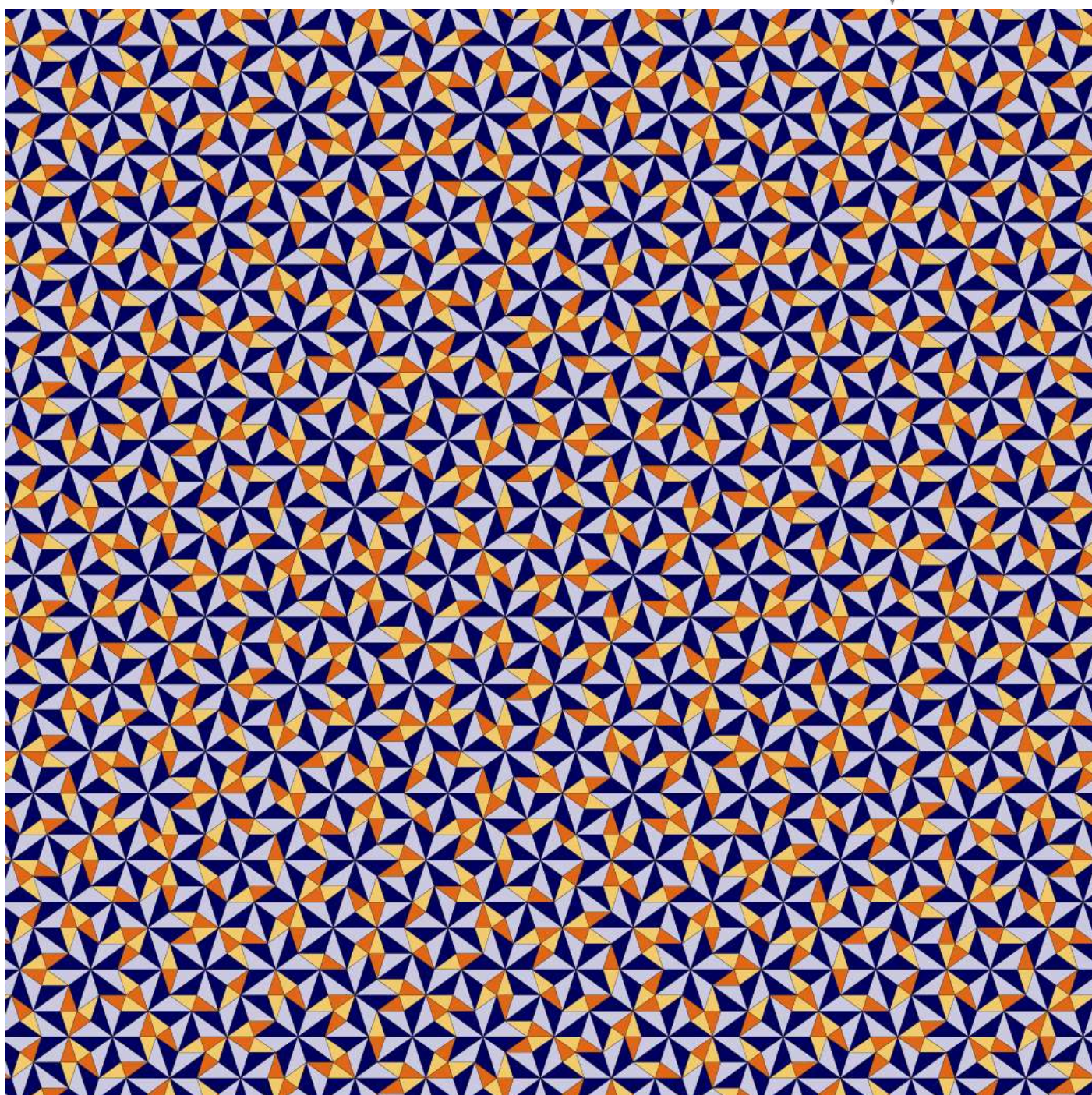
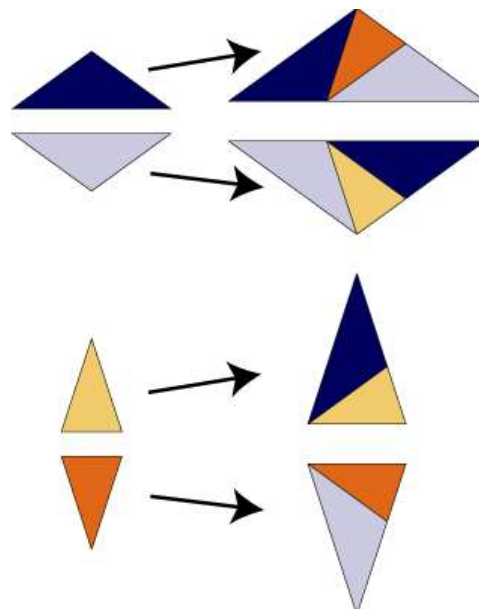
Descubierto por: Robinson, Raphael

Nº de Teselas: 2

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: Una variación de los rombos de Penrose, sugerida por R. M. Robinson. Los rombos se cortan en triángulos, con lo que el volumen de sustitución es jerárquico. Así, éste es obviamente mld con los otros teselados de Penrose. Cada triángulo es zurdo o diestro, lo que se indica por los distintos colores. Esta distinción es importante, ya que los triángulos en sí son simétricos, pero sus primeras sustituciones no lo son.



Nombre: Shield

Regla de Sustitución

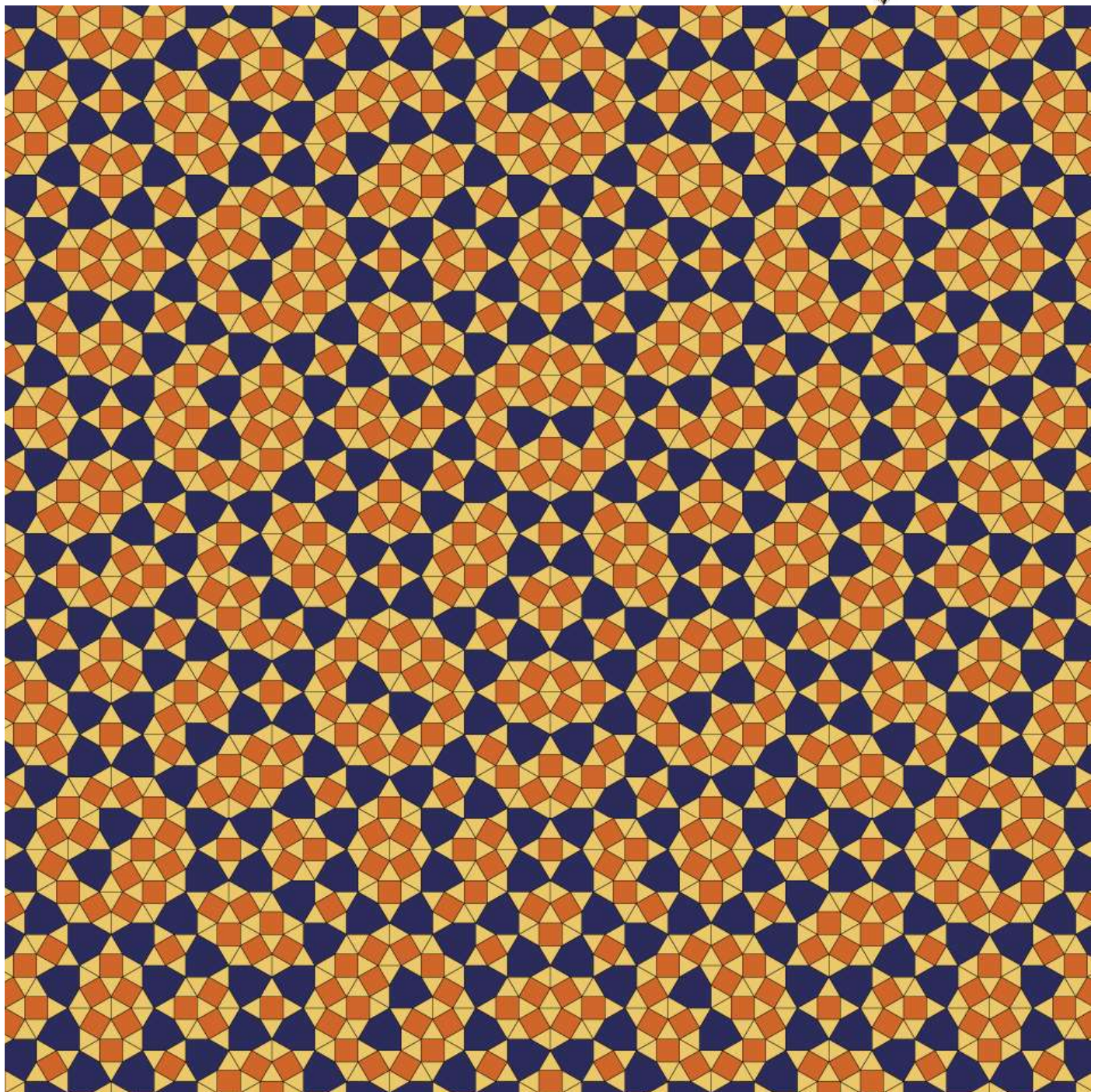
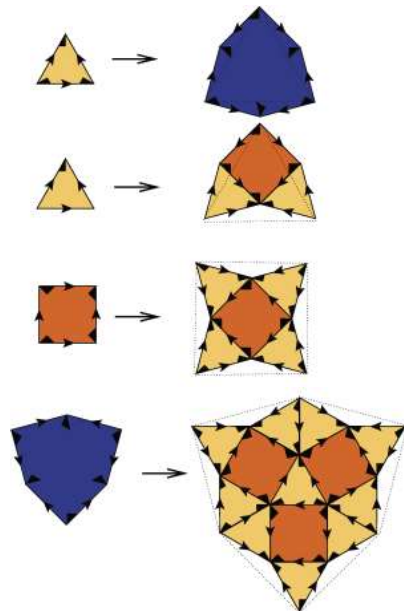
Descubierto por: Gähler, Franz

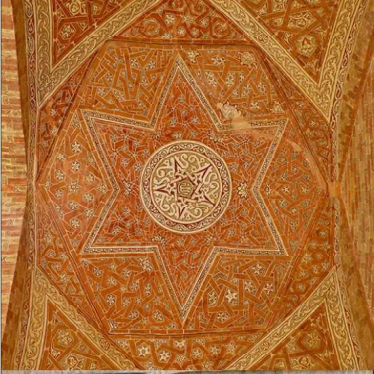
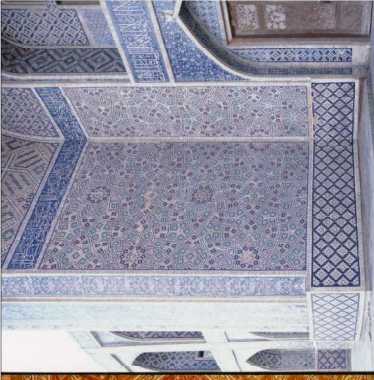
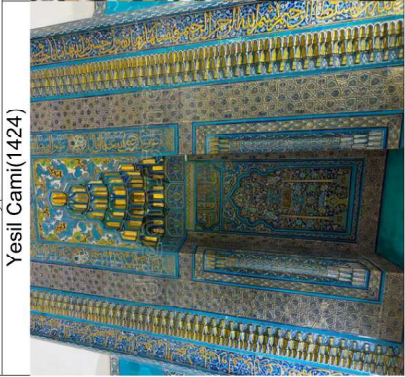
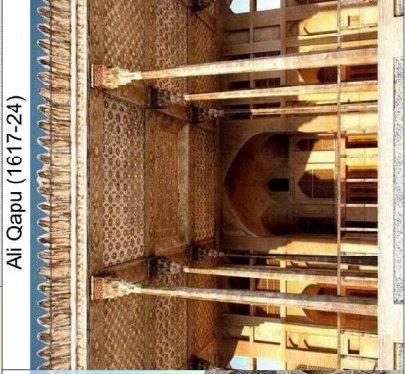
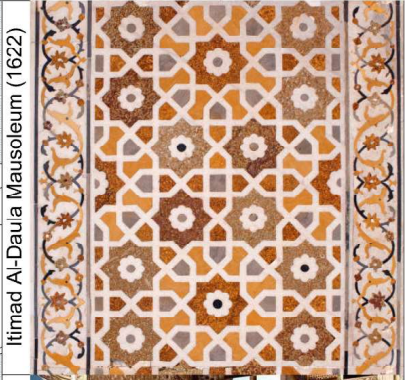
Nº de Teselas: 4

Dibujo Interior: Sí

Convexa / No Convexa: Convexa

Información: En relación con los cuasicristales físicos, las teselaciones de 2dim más interesantes se basan en la simetría rotacional de 5, 8, 10 y 12 pliegues. F. Gähler estudió este mosaico de 12 pliegues, en particular su esquema de corte y proyección, las reglas de emparejamiento local y las propiedades de difracción.



					
Gunbad-i Kabud (1197)	Mama Hatun Mausoleum (1200)	Great Mosque (1200)	Al-Mustansiriya Madrasa (1227)	Mausoleum of Uljaytu (1304)	Friday Mosque (1364-1470)
					
Yesil Cami (1424)	Darb-i Imam Shrine (1453)	Masjid-i Darb-i Kushk (1496)	Abdullah Khan Madrasa (1588)	Ali Qapu (1617-24)	Itimad Al-Daula Mausoleum (1622)

