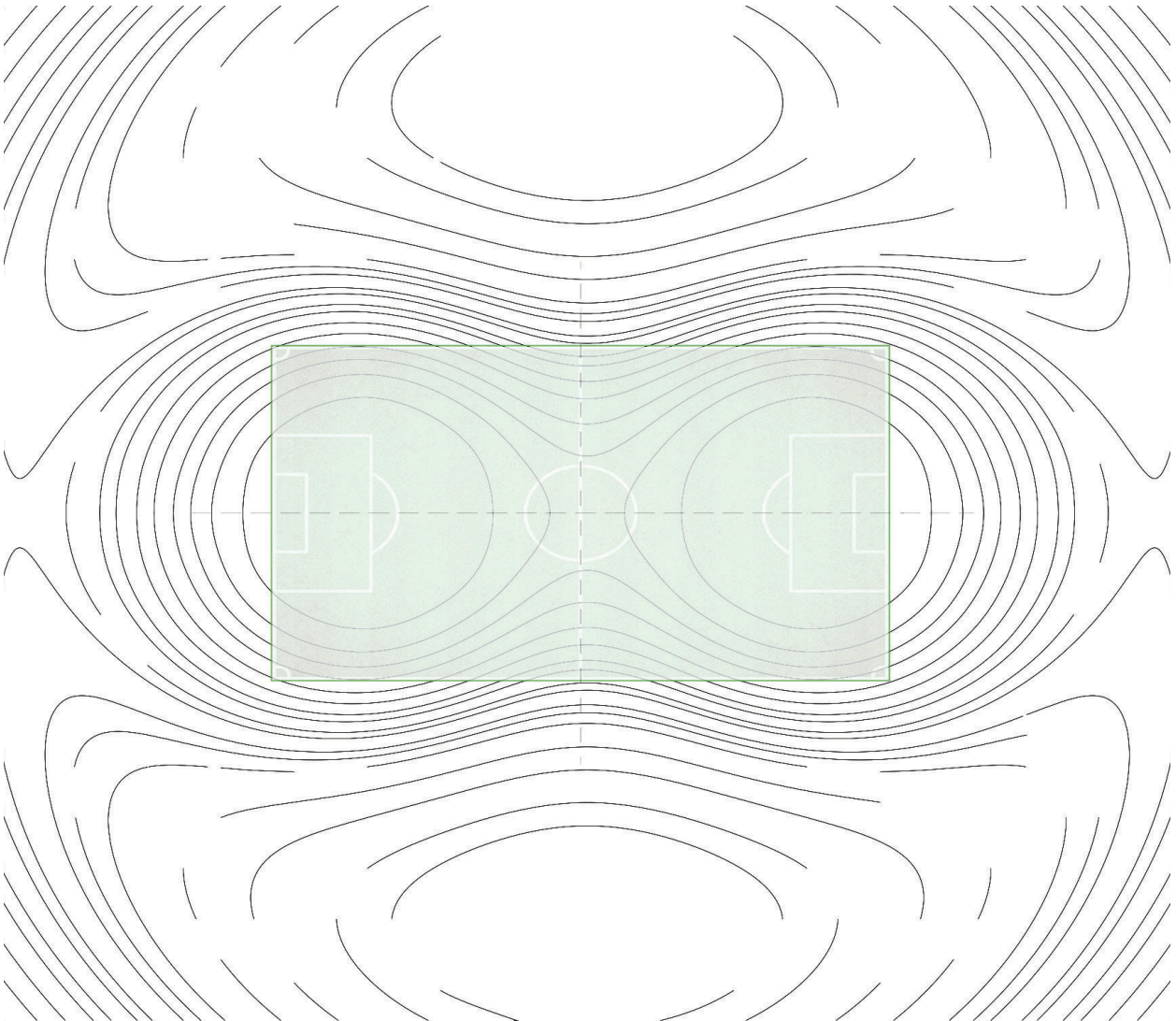


BUSCANDO LA MÁXIMA VISIBILIDAD
El *Stadio M* de Luigi Moretti



Autora: Mónica Lamuedra Viñuelas
Tutora: Eugenia Rosado María

ESTA PÁGINA SE HA DEJADO DELIBERADAMENTE EN BLANCO.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA



TRABAJO FIN DE GRADO

Mónica Lamuedra Viñuelas

*Buscando la Máxima Visibilidad
El Stadio M de Luigi Moretti*

BUSCANDO LA MÁXIMA VISIBILIDAD
EL *STADIO M* DE LUIGI MORETTI

Estudiante
Mónica Lamuedra Viñuelas
Expediente 10220

Tutora
Eugenia Rosado María
Departamento de Matemática Aplicada

Aula TFG 7
Eduardo Javier Gómez Pioz, *coordinador*
Pilar Horna Almazán, *adjunta*

Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Índice

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

1. ANTECEDENTES

2. METODOLOGÍA

3. ARQUITECTURA PARAMÉTRICA
Evolución del *Software*

4. LA FIGURA DE LUIGI MORETTI
Luigi Moretti
La XII Trienal de Milán
Método Lógico- Matemático

5. ANÁLISIS DE LOS ESTADIOS
Estadio de Fútbol. *Stadio M*
Estadio de Fútbol. *Stadio N*
Estadio de Natación. Modelo A
Estadio de Natación. Modelo B
Estadio de Tenis
Sala de Cine

6. ESTUDIO DE LOS MODELOS PARA EL ESTADIO DE FÚTBOL
Stadio M
Stadio N

CONCLUSIONES

ANEXOS

Programación del Algoritmo de Diseño con Grasshopper
Cálculos realizados en Maple

FUENTES

Bibliografía y recursos digitales
Procedencia de las ilustraciones

Resumen

El área de investigación en este trabajo es la arquitectura paramétrica, pero no entendida como una herramienta con la que generar diseños geométricos complejos y versátiles a partir de una serie de parámetros, sino como la definió Luigi Moretti, como un método que busca modelar la visibilidad a partir de un algoritmo. Dicho algoritmo define la forma más óptima que debe presentar la arquitectura para que los espectadores de un evento disfruten de éste en las mejores condiciones de visibilidad.

Es objeto de este trabajo comprender el método utilizado por Luigi Moretti para crear la forma de una serie de instalaciones deportivas y poder reproducir una de dichas instalaciones, en concreto el estadio de fútbol conocido como *Stadio M*.

Se seguirán las reglas detalladas por Moretti en su artículo *Ricerca Matematica in Architettura e Urbanistica* publicado en 1971 en la revista Moebius, para obtener las curvas de equivisibilidad que definen la forma de dicho estadio.

PALABRAS CLAVE

Stadio M · Luigi Moretti · Visibilidad
Arquitectura Paramétrica · Búsqueda de Forma · Curva Isóptica

Introducción

En los últimos años la arquitectura paramétrica ha ganado popularidad. La aparición de nuevas herramientas de diseño permite explorar multitud de soluciones a partir de un único modelo y crear arquitecturas orgánicas y complejas facilitando el proceso. Sin embargo, éste no era el objetivo del arquitecto Luigi Moretti cuando concibió este lenguaje.

Moretti, conocido por sus extensos escritos donde habla de esa nueva arquitectura a la que dió el nombre de arquitectura paramétrica, se apoyaba en las matemáticas y la informática para generar modelos físicos capaces de responder a cuestiones funcionales.

Todo proceso de diseño busca cubrir las necesidades de los futuros usuarios, lo que marca la diferencia entre la arquitectura que Moretti exigía y esa búsqueda de confort que presenta todo proceso de diseño, es el método llevado a cabo para definir la forma. Moretti planteaba las necesidades de los usuarios desde un punto de vista matemático, lo que le permitía obtener una función de la que abstraer la forma. Siguiendo esta metodología, además de obtener formas que responden objetivamente a las necesidades de los usuarios, se obtiene información de las zonas que responden mejor a dichas necesidades permitiendo descartar aquellas que presentan peores condiciones.

Moretti expuso sus investigaciones sobre arquitectura paramétrica en la XII Trienal de Milán, donde presentó una serie de instalaciones deportivas cuya forma estaba definida a partir de una expresión matemática. Son muchos los documentos que hablan de la figura de Moretti como precursor de esta tipología arquitectónica y nombran sus estadios como ejemplos de esa arquitectura resultante de un proceso que se apoya en las matemáticas. Sin embargo, es escasa la información en la que se detalla el proceso que le permite definir dichas formas a partir de una base matemática. Esta falta de documentación y el gran interés por conocer el proceso que permite definir formas a partir de algoritmos, ha sido la motivación principal para realizar este trabajo.

La forma de los estadios presentados por Moretti, responden a una misma necesidad, mejorar la visibilidad de los espectadores que acuden al evento. Conocer el proceso, no sólo permitirá generar arquitecturas con mejores condiciones de visibilidad sino que entendida la metodología, se podrá aplicar ésta a otros ámbitos y diseñar en base a las necesidades, analizando éstas de un modo matemático.

El fin de este trabajo no es sólo analizar y entender el proceso de diseño que Moretti llevó a cabo para dar forma a sus instalaciones deportivas,

sino también reproducir una de éstas para poner en práctica dicho proceso y dar veracidad a sus teorías.

El trabajo se divide para ello en 6 capítulos. El primero nos pone en contexto y muestra una visión general de lo que se va a desarrollar a lo largo de las páginas, el segundo plasma el procedimiento que ha permitido su desarrollo, el tercero muestra la evolución que ha tenido el concepto de arquitectura paramétrica desde 1940, año en el que Moretti concibió el nombre, hasta nuestros días y el resto de capítulos se centran en la figura y trabajo de Luigi Moretti, más concretamente en sus estadios deportivos, ejemplos prácticos de su teoría sobre la arquitectura paramétrica.

El capítulo 4 está formado por 3 subcapítulos, el primero nos permite conocer al arquitecto y sus intereses, en el segundo de habla de la exposición paramétrica llevaba a cabo en Milán en el año 1960 y en el tercero se especifican las bases establecidas por Moretti y que se deben considerar para diseñar de acuerdo al lenguaje que él definió como arquitectura paramétrica.

Mientras que estos capítulos previos presentan una base teórica, en los capítulos 5 y 6 se pone en práctica el proceso de diseño definido en el subcapítulo 4.3. En el capítulo 5 se detalla teórica y gráficamente la hipótesis que define el algoritmo de diseño de cada uno de los estadios presentados en Milán. El último capítulo se centra en la reconstrucción de las curvas de nivel de los estadios de fútbol. Siguiendo las reglas establecidas por Moretti y con ayuda de los programas informáticos Maple y Grasshopper, se busca la función visibilidad, se genera el algoritmo de diseño y se representan las curvas de equivisibilidad que definen la forma.

1 Antecedentes

Todo lo que sirve para distanciarnos del empirismo y la racionalización en el diseño debe ser aplaudido. [...] Un método paramétrico engloba las herramientas, los procedimientos y los objetivos, pero ¿con qué fin? Para estas preguntas apenas sirven los cerebros electrónicos, se necesitan cerebros. Para que la arquitectura paramétrica no quede como un brillante ejercicio intelectual, es indispensable que la investigación se sustente en una elevada inspiración moral. (Bruno Zevi, 1960)

El diseño asistido por algoritmos se ha vuelto un recurso habitual para diseñar estructuras complejas. La identificación de un conjunto de parámetros que se relacionan a través de una lógica asociativa permite desarrollar un modelo virtual. Dicho modelo le permite al diseñador explorar múltiples posibilidades a través de la variación de dichos parámetros y sus relaciones. Se puede decir que este lenguaje arquitectónico conduce a la mutación y evolución de la forma arquitectónica.

En 2011, el estudio Scott Tallon Walker Architects diseñó el Estadio Aviva, el primer estadio diseñado mediante modelado paramétrico. La clave del diseño se encontraba en la forma, se buscaba desarrollar una cobertura atractiva y una vez definida se adaptaría la estructura y la construcción a ella. Para generar dicha forma se utilizó el *software* Rhino a partir del cual pudieron explorar multitud de posibilidades mediante la modificación de los parámetros.



1.1 Fotografía de la fachada del Estadio Aviva

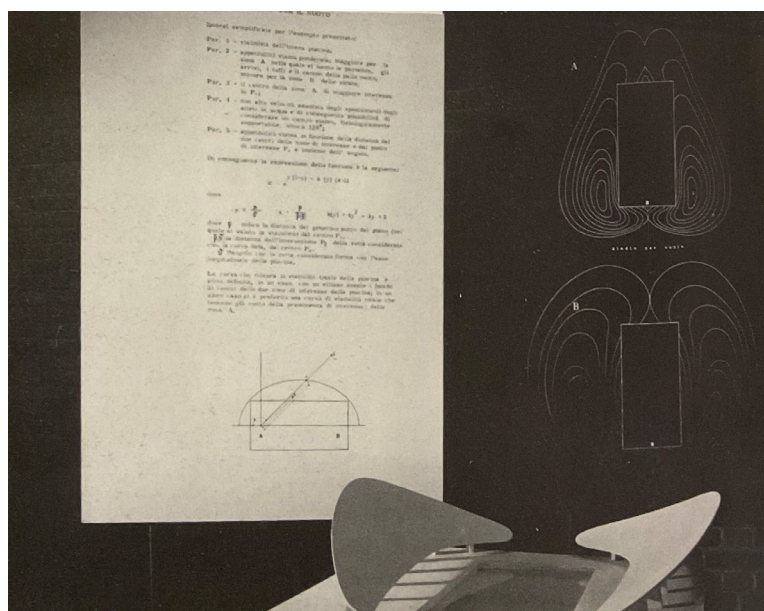
Este estadio es un claro ejemplo de cómo la arquitectura paramétrica permite desarrollar un modelo generativo que ayuda a definir la forma definitiva del proyecto.

Sin embargo, este lenguaje arquitectónico no surgió como una herramienta para facilitar el proceso creativo sino como un nuevo pensamiento arquitectónico cuyo objetivo era dar respuesta a las necesidades funcionales y así lo explicó Luigi Moretti a través de sus escritos.

«Cuando la informática era casi un espejismo, el arquitecto italiano utilizó la abstracción matemática para descubrir una nueva espacialidad connotada por una nueva figuratividad.»¹

A pesar de que se le atribuye a Luigi Moretti la concepción de esta nueva tipología arquitectónica, la información que tenemos de sus investigaciones al respecto son escasas. Son muchos los documentos que recogen la intervención que realizó Luigi Moretti en el Palacio Olímpico de Roma *Stadium* como el inicio de sus investigaciones en este nuevo campo, que dichas investigaciones fueron expuestas en 1960 en la XII Trienal de Milán aplicando el concepto de diseño no sólo en un estadio de fútbol, sino también en estadios para albergar una piscina o una pista de tenis. En dichos documentos se indica que el diseño de estas formas es resultado de 19 parámetros que buscan tanto optimizar la visibilidad del terreno de juego como reducir los costes del hormigón, sin embargo no se especifican dichos parámetros.

En la exposición mencionada, Moretti presentó modelos físicos cuya forma resulta de una expresión matemática basada en las relaciones entre los 19 parámetros ya nombrados. A través de las fuentes se conoce que fueron 6 los modelos de estadio expuestos con sus correspondientes ecuaciones, sin embargo las únicas referencias de la existencia de dichas ecuaciones son fotografías tomadas en la exposición.

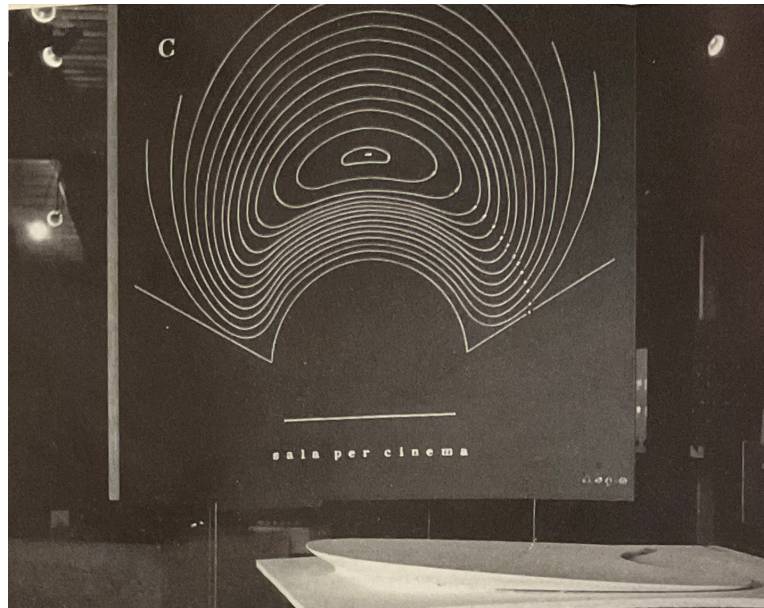


1.2 Fotografía de l modelo físico, las curvas de nivel y la hipótesis que da forma al estadio para una piscina

A pesar de que se expusieron 6 maquetas fueron 4 las temáticas que se trataron: estadio de fútbol, estadio de natación, estadio de tenis y sala de cine. Es decir, la expresión matemática que definía la forma para el estadio de fútbol, al igual que para el de natación, fue planteada a partir de 2 hipótesis diferentes, lo que resultó en 2 formas de estadio distintas.

1. Bianconi, Fabio; Buffi, Alessandro; Filippucci, Marco; Vitali, Luisa; «Morphological and visual optimization in stadium design: a digital reinterpretation of Luigi Moretti's stadiums», *Science Review*, 2019, pág. 195

1.3 Fotografía tomada en la XII Trienal de Milán. La imagen refleja las curvas de nivel y el modelo físico que definen la forma extraída de la ecuación matemática desarrollada para una sala de cine



El modo en el que el arquitecto aplica las matemáticas para desarrollar una forma que optimice ciertos aspectos de la arquitectura me resulta igual de relevante que la teoría de los cinco puntos desarrollada por Le Corbusier, la destrucción de la caja que propone Frank Lloyd Wright o las características de las villas palladianas, temas notables en la historia de la arquitectura y de los cuales se tiene gran información. En cambio, a pesar de que Moretti mostró una visión anticipada de una figura que resultaría fundamental para el desarrollo de la arquitectura hoy en día, como es el diseño computacional; la información que se tiene al respecto es limitada y general, siendo pocos los artículos que hablan sobre el método que aplicaba Moretti para abstraer la forma del estadio a partir de una ecuación paramétrica.

Que sean muchos los profesionales que se refieren a Luigi Moretti como el arquitecto que acuñó el término de arquitectura paramétrica y poca la información que se haya desarrollado referente a sus estadios paramétricos, me ha inspirado para desarrollar esta investigación.

Parece interesante que los ejemplos presentados en la exposición de Milán sean espacios que recogen a grandes masas de personas que acuden a presenciar un evento. Además de tener todos ellos ese aspecto en común, su forma esta diseñada para que los espectadores reciban la misma información. En el proceso de diseño de un espacio arquitectónico debemos pensar en los usuarios y a través del diseño garantizar su adecuado confort y que su experiencia sea placentera. Mediante la isóptica² podemos lograr la visibilidad total de varios objetos y conocer el espacio que deben ocupar las personas que están vislumbrando dichos objetos, por lo que su cálculo nos permitirá conocer la curva bajo la cual lograr la adecuada visibilidad del público en un determinado evento.

Desde la época griega, los establecimientos diseñados para acoger grandes masas presentaban una disposición circular, y todavía hoy la mayoría de estadios, cines o teatros se diseñan bajo esa forma, por repetición de las formas empíricas tradicionales y sin base a estudios que busquen implementar esos espacios.

2. La palabra isóptica tiene su origen en las palabras griegas Isos (igual) y Otikos (relativos a la vista). Por tanto, mediante el cálculo de la curva isóptica se puede lograr una visibilidad óptima en espacios destinados a eventos que concentran gran cantidad de espectadores. Si dicha curva se define horizontalmente se puede determinar la distribución de las butacas para que el espectador presencie el espectáculo con una visión lateral óptima. Con el trazo de la curva vertical se conocerá el escalonamiento que deben presentar las diferentes filas de asientos para que la visibilidad no se vea afectada por el espectador ubicado en la fila de delante.

A través de los ejemplos presentados por Moretti, el arquitecto parece cuestionar esas formas circulares y busca hechos objetivos a partir de los cuales desarrollar la forma que permita la más correcta visibilidad en cada una de las instalaciones. Para lograr esto, parece inteligente calcular la curva isóptica en cada situación y a través de la informática abstraer la forma más óptima.

Con el análisis realizado para este trabajo se consigue entender la metodología que Luigi Moretti aplicó en los estadios para definir su forma y determinar las áreas desde las cuales ver el terreno de juego en mejores condiciones, el procedimiento analizado se puede aplicar a otras situaciones con el fin de diseñar arquitecturas que respondan objetivamente a las necesidades de los usuarios.

2 Metodología

El objeto de este trabajo es entender el proceso a partir del cual Luigi Moretti diseña sus ejemplos de arquitectura paramétrica y reproducirlo con el objetivo de reconstruir la forma presentada para el estadio de fútbol.

Como se verá en los siguientes capítulos y se ha anticipado en el capítulo 1, la forma del estadio resulta de un algoritmo basado en parámetros de visibilidad. A partir de dicho algoritmo y con la ayuda de Maple y Grasshopper, programas informáticos de cálculo matemático y diseño, se obtienen las curvas de equivisibilidad y a partir de dichas curvas se genera la forma más óptima.

Por lo tanto, el primer paso es definir la ecuación que determina el diseño como si de un problema matemático se tratara. Como ya se ha indicado, los libros que recogen la biografía de Luigi Moretti o sus obras, hacen mención a sus estadios paramétricos sin dar mayor información. Los artículos de Moretti con títulos: *Struttura come Forma* y *Ricerca matematica in architettura e urbanistica*, recogen las hipótesis que definen la ecuación a partir de la cual se obtiene la forma de los diferentes estadios.

Gracias al préstamo interbibliotecario, la biblioteca de la ETSAM nos facilitó el artículo *Ricerca matematica in architettura e urbanistica*, escrito por Luigi Moretti en 1971 para la revista Moebius.

Dicho artículo ha sido la referencia básica para desarrollar este trabajo. En dicho artículo se explica el proceso de diseño que utiliza Moretti y muestra las curvas de cada uno de los estadios así como las maquetas presentadas en la exposición de arquitectura paramétrica celebrada en 1960.

Saber la hipótesis asumida por Moretti y conocer la función que define el diseño será el punto partida para poder reconstruir las curvas que definen la forma del estadio de fútbol. Como ya se ha indicado, dicha hipótesis se tratará como un problema matemático que nos permitirá identificar los parámetros y sus relaciones, y definir la función. Para analizar las funciones propuestas por Moretti se han tenido que tener en cuenta las coordenadas cartesianas, las polares y unas nuevas coordenadas en las que aparece el arco capaz.

A medida que se va desgranando la hipótesis en la búsqueda del algoritmo, se usa el programa Maple como soporte para realizar ciertos cálculos y representar las diferentes funciones.

Conseguida la función, se planteará el algoritmo de diseño en Grasshopper para reproducir las curvas de equivisibilidad.

3 Arquitectura Paramétrica

Luigi Walter Moretti, en 1971 expresó la necesidad de desarrollar una nueva tipología arquitectónica, basada en la investigación objetiva y científica de la realidad.

La arquitectura y el urbanismo, se expresan todavía hoy, siguiendo estructuras de pensamiento puramente empíricas. Parecen ignorar, y de hecho ignoran, la riqueza del pensamiento científico moderno entendido tanto en las extraordinarias posibilidades instrumentales que ofrece (y de las que los nuevos materiales y tecnologías afines son sólo un fragmento) como, sobre todo, en su estructura característica como ritmo lógico, conceptual, espiritual, específico y novedoso. (Luigi Moretti, 1971, pág. 34)

El arquitecto italiano tenía un gran interés por las matemáticas y la ciencia moderna, disciplinas que se presentan como pilares de su obra arquitectónica y urbanística. La combinación de matemáticas y arquitectura le permitió abordar «cada problema desde cero mediante el examen de los hechos objetivos»¹, en una época en la que cualquier problema que estuviera más allá del formalismo social no era considerado en el proceso de diseño, la teoría de la arquitectura paramétrica surge como herramienta para aclarar el proceso de diseño arquitectónico.

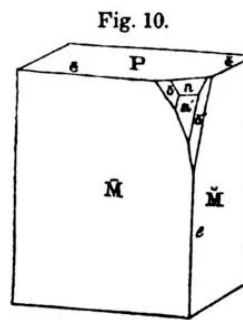
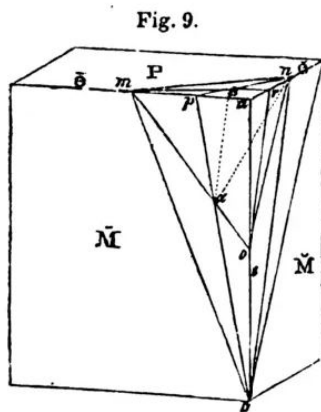
Por los escritos que se recogen en revistas como *Moebius* o *Spazio*, son muchos los arquitectos como Robert Stiles, que sostienen que la verdadera procedencia del término arquitectura paramétrica fue acuñado por el arquitecto Luigi Moretti en los años 40; quien la definió como «el estudio de sistemas de arquitectura con el objetivo de definir las relaciones entre las dimensiones dependientes de diversos parámetros»²

Si bien es cierto que Luigi Moretti escribió extensamente sobre arquitectura paramétrica, el diseño paramétrico tiene una larga historia en matemáticas. Ya en 1837, James Dana en su escrito *On the Drawing of Figures of Crystals*, enumeraba los pasos que permitían dibujar una serie de cristales y sus posibles variaciones a través de un lenguaje basado en parámetros y relaciones (véase imagen 3.1). John Leslie, autor del libro *Elements of Geometry, Geometrical Analysis, and Plane Trigonometry* (1809); demuestra como a partir de círculos paramétricos se pueden realizar curvas catenarias. Para el diseño de los techos abovedados y arcos de la iglesia de la Colonia Güell, proyectada por el arquitecto Antonio Gaudí, se recurrió a un modelo de cuerdas lastradas con perdigones de manera que modificando la longitud de la cuerda y los pesos de los perdigones, la forma de los arcos iba variando (véase imagen 3.2). A través de estos ejemplos podemos ver que el

1. Moretti, Luigi, "Ricerca matematica in architettura e urbanistica", *moebius unita' della cultura*, Architettura urbanistica arte, anno IV- 1971/72- n. 1, 34.

2. Moretti, Luigi, "Strutture camme Forme", *Spazio*, 1953- n. 6, 207.

uso del diseño paramétrico es anterior a los escritos de Moretti, pero mientras que ingenieros, arquitectos y matemáticos se apoyaban en las ecuaciones paramétricas para definir la geometría, Luigi Moretti utilizaba los parámetros como una herramienta que le permitía explorar las posibilidades ofrecidas por el modelo. Mediante la modificación de los parámetros de los que depende el modelo y sus relaciones, podía observar las múltiples soluciones que el modelo le ofrecía.



perimeters of the planes npb ($4P2$) and nmo (P) intersect one another in the points n and a ; consequently the line of intersection, between these two planes must be situated between these points, and therefore the direction of the intersection of P and $4P2$ is na .

The planes nmb ($2P$) and npb ($4P2$) intersect in the line nb , and therefore the intersection of $2P$ and $4P2$ is in the direction of nb .

3.1 Imagen que muestra uno de los pasos que enumeraba James Dana en su artículo «*On the Drawing of Figures of Crystals*» para dibujar las posibles variaciones de una serie de cristales.



3.2 Maqueta de fuerza invertida de la Sagrada Familia, Museo de la Sagrada Familia

Maqueta que refleja el uso de cuerdas y perdigones con los que Gaudí proyectó los techos abovedados y arcos de la iglesia.

En el sentido de Moretti, la arquitectura paramétrica es aquella que describe el proceso de diseño en términos de relaciones matemáticas. Para ello, el primer paso es realizar una rigurosa investigación de los parámetros de los que depende el diseño. Para definir dichos parámetros y sus relaciones

debe realizarse un análisis cualitativo del esquema arquitectónico que permita generar un algoritmo de diseño que dé como resultado la forma paramétrica buscada.

Si el diseñador establece una expresión matemática basada en parámetros cuantitativos y sus concatenaciones recíprocas (como las cualidades de los materiales), el concepto estará claramente indicado por la solución. Desde este punto de vista, la solución obliga al diseñador a explorar, con rigor científico, su forma y sus alternativas como oscilaciones mínimas del diseño del propio concepto. (Piermaria Caponi, 2019, pág. 3)

A pesar de que Moretti reflejó en sus escritos que la arquitectura debe rechazar cualquier forma libre, y esa es la principal característica de su teoría de la arquitectura paramétrica, actualmente el término presenta una connotación completamente opuesta. Utilizando el mismo proceso de diseño, basado en «establecer unas relaciones entre las partes, construir un diseño a partir de esas relaciones y modificar esas relaciones a partir de la evaluación y selección de los resultados obtenidos»³; Luigi Moretti desarrolla un método de diseño basado en parámetros lógico- matemáticos en los que la forma y función se relacionan de manera objetiva y científica, mientras que otros arquitectos usan el término para referirse a una «corriente que nace en respuesta a la necesidad de la singularidad y diversidad en el diseño y la arquitectura»⁴. Esta forma de proyectar basada en algoritmos matemáticos que busca incrementar la creatividad durante el modelado y mejorar la diversidad de diseños, hace referencia a un proceso creativo cuyo único fin es la búsqueda de una forma. Este modo de diseño dista mucho de la definición racional bajo la cual Moretti acuñó el término de arquitectura paramétrica.

Arquitectura donde la evaluación de los múltiples parámetros combinados, exalta una lógica de búsqueda de forma que no se cuadra en un proceso creativo, sino que intenta dar respuesta a las necesidades funcionales escénicas que la arquitectura debe garantizar siempre. (Fabio Bianconi, Marco Filippucci, Alessandro Buffi, Luisa Vitali, 2020, Pág. 194)

Debemos distinguir entonces entre diseño paramétrico y arquitectura paramétrica. A pesar de que ambas corrientes prometen ilimitadas opciones mediante la modificación de variables, la arquitectura paramétrica «pretende encontrar principios comprensibles y transmisibles racionalmente»⁵, mientras que el diseño paramétrico tiene como único fin la obtención de una forma singular.

3. Navarrete, Sandra, *Diseño paramétrico. El gran desafío del siglo XXI*, El campo disciplinar del diseño. Perspectivas y enfoques, 2014, 64

4. Lukuona, Aitor; Domínguez, Manuel; Espinosa, María del Mar, "El diseño paramétrico como herramienta creativa en diseño de producto", 2021

5. Navarrete, Sandra, "Diseño paramétrico. El gran desafío del siglo XXI", El campo disciplinar del diseño. Perspectivas y enfoques, 2014, 65

3.1 Evolución del *Software*

El modelado paramétrico se ha convertido en el recurso más común para el diseño de arquitecturas complejas. Este tipo de modelado está basado en una serie de cálculos físico- matemáticos complejos que ciertos programas informáticos ayudan a resolver. Podemos decir, que para el modelado paramétrico la informática se ha convertido en una herramienta esencial y la cual facilita el proceso de diseño.

Todo modelado paramétrico tiene su origen en la definición de un algoritmo basado en un sistema de relaciones definidas a través de una expresión matemática. Es decir, el uso de programas informáticos facilita el proceso de diseño pero no desarrolla la expresión matemática que define el modelo, ésta debe ser definida por el diseñador. Para modelar paramétricamente, el diseñador debe aplicar una lógica matemática lo que se traduce en un cambio en el modo de hacer arquitectura. Aplicando la parametrización, el arquitecto no diseña un edificio sino un proceso de diseño que le permite explorar varias soluciones a partir de un mismo modelo.

Las herramientas informáticas, además de facilitar los cálculos, son capaces de modificar la geometría a medida que se varían los parámetros y relaciones que la definen.

Aunque los programas informáticos facilitan el proceso de diseño paramétrico, éste modo de hacer arquitectura no surge con la aparición de la informática. Arquitectos como Gaudí y Otto utilizaban este lenguaje cuando las herramientas informáticas todavía eran un espejismo. Para enfrentarse al cálculo de complejas ecuaciones, se apoyaban en las leyes físicas. No fue hasta 1950 cuando Ivan Sutherland utilizó las múltiples posibilidades que ofrecía el ordenador para facilitar el proceso de cálculo de cualquier ecuación. Con la creación del programa Sketchpad cualquier variación de los parámetros que definían el algoritmo se trasladaba a la geometría automáticamente. En esa época los costes de los ordenadores eran demasiado altos y los estudios de arquitectura no se podían permitir esta tecnología, por lo que este tipo de diseño quedó reservado para compañías aeronáuticas y del sector automovilístico.

El lanzamiento de AutoCad se produjo en un momento en el que el precio de los ordenadores había bajado y estaban al alcance de muchos profesionales. Con este programa fueron muchas las mesas de dibujo que se reemplazaron por ordenadores. Sin embargo, este programa no implementó el desarrollo de la arquitectura paramétrica, ya que a diferencia de Sketchpad este programa no generaba formas a partir de una expresión matemática sino que servía como soporte en la redacción y definición de los diferentes planos que se requerían para definir el proyecto.

En 1985, el profesor matemático Samuel Geisberg lanzó Pro/Engineer, la base de este programa era la misma que Sketchpad, desarrollar geometrías bajo una base matemática. La novedad que introdujo el *software* Pro/Engineer es que la geometría se podía representar en un espacio tridimensional en lugar de bidimensional

En 1993, Dassault Systèmes incorporó muchas de las características paramétricas, que ya presentaba Pro/Engineer, al programa CATIA v4. Aparecía así un nuevo *software* de modelado paramétrico.

No fue hasta el año 2004 cuando se lanzó Digital Project, diseñado por la empresa Gehry Technology. Digital Project se desarrolló en base al *software* Catia v5 y su uso estaba enfocado al desarrollo de edificios.

Actualmente son muchos los *software* que facilitan el modelado paramétrico, siendo uno de los más usados Grasshopper.

4 La figura de Luigi Moretti

4.1 Luigi Moretti

Luigi Walter Moretti (1907- 1973) es reconocido como un gran arquitecto y teórico que destaca por el modo de tratar la forma y el espacio en sus obras. En ellas muestra un enfoque original al crear paradigmas arquitectónicos basados en cuestiones científicas.



4.1. El arquitecto Luigi Moretti en su estudio

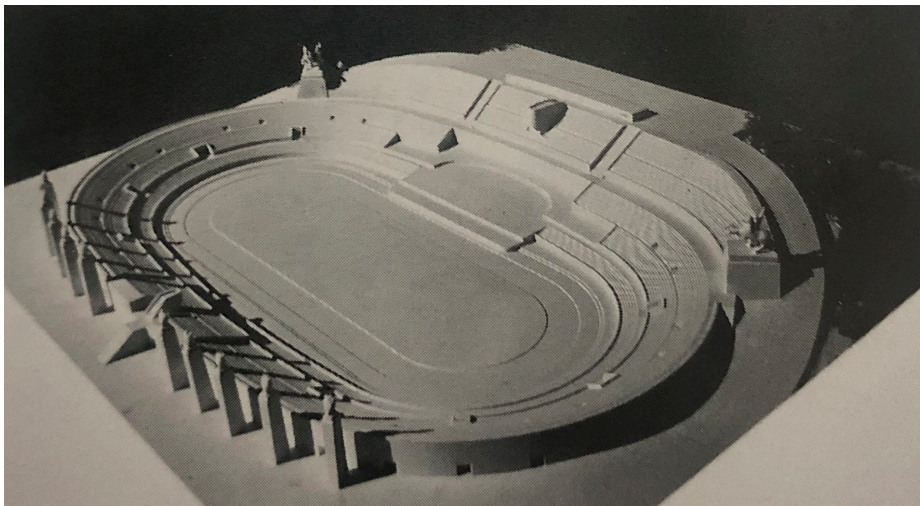
Durante su trayectoria como arquitecto, realizó 46 obras entre las que destacan: La Villa Saracena (1954), el complejo Watergate en Washington (1960-1965), las Cúpulas Prefabricadas del Aparcamiento de Villa Borghese (1966-1972) o el complejo termal de las Fonti Bonifacio VIII (1966-1970).





Sin embargo, la obra que dió sentido a toda su trayectoria fue la intervención que llevo a cabo en el Palacio Olímpico de Roma *Stadium* (1936-1937), obra en la que comenzó a aplicar las matemáticas como soporte de la arquitectura. Las investigaciones realizadas para esta intervención, serían presentadas 20 años después en la XII Trienal de Milán (1960) y darían lugar a un nuevo lenguaje arquitectónico.

- 4.2. Alzado La Villa Saracena
- 4.3 El complejo Waterghate en Washington
- 4.4 Cúpulas Prefabricadas del Aparcamiento de Villa Borghese
- 4.5 Vista del complejo termal de las Fonti Bonifacio VIII



4.6 Maqueta de la intervención llevada a cabo en el Palacio Olímpico de Roma Stadium

Por ende, la relevancia de Moretti no se debe únicamente a sus obras, sino también a sus extensos escritos donde teorizó sobre la arquitectura a la que denominó paramétrica. En un marco arquitectónico caracterizado por el empirismo, Luigi Moretti reclama una arquitectura racionalista basada en un orden técnico y funcional.

Una obra de arquitectura es en cada punto realidad y representación, es decir, cada punto tiene que satisfacer idénticamente dos categorías de demandas. Cada punto es, por tanto, una cuestión de orden técnico

y funcional, que se encuentra bajo las imposiciones paramétricas de la realidad y la técnica, y un hecho expresivo. (Luigi Moretti, 1952, pág. 21-30)

Su actividad teórica, motivada por su formación humanista y su interés en las matemáticas y la ciencia moderna, plasmaban una visión anticipada de la necesidad de operación a la que se debía responder con diseño computacional. A pesar de que su trabajo se ha visto desvirtuado por su relación con el fascismo, no se debe pasar por alto que en los años 40 anticipó la necesidad que tenía la arquitectura de apoyarse en instrumentos digitales y algoritmos, herramientas que revolucionarían el sector años más tarde.

En 1950- 1953, fundó la revista *Spazio*, un manifiesto personal compuesto de 7 volúmenes en los que plasmó sus ideas sobre el modo en el que las artes podían interaccionar con teorías científicas a través de la tecnología.

Los parámetros y sus relaciones se convierten en la expresión, el código del lenguaje arquitectónico en la estructura, en el sentido original y riguroso de la palabra; y las formas y sus ligamentos responderán a funciones dadas. A la determinación de los parámetros y sus relaciones deben colaborar las técnicas e instrumentos más actuales del pensamiento científico; en particular la lógica- matemática, la investigación operativa y las computadoras, especialmente éstas por las posibilidades que brindan de expresar en series cíclicas autorreactivas las soluciones probables de los valores de los parámetros y sus relaciones (Luigi Moretti, 1952, pág. 21-30)

No es hasta el sexto número de la revista *Spazio* cuando habla extensamente sobre arquitectura paramétrica. Las investigaciones que en ella se tratan, también fueron presentadas en la revista *United States Lines Paris Review* (1952) bajo el título *Structure comme Forme*, y a partir de las cuales definió ese nuevo lenguaje al que dió nombre.

La enumeración de los parámetros, la investigación científica, el análisis matemático cuantitativo de estos parámetros, constituyen una tarea que debe abordar la arquitectura en todos los casos. Así, nacerá esa arquitectura que tanto he demandado, y a la que di el nombre de paramétrica. Su ineluctable carácter geométrico, la rigurosa interconexión de sus formas, la absoluta libertad de la propia fantasía que puede brotar donde las ecuaciones no pueden fijar sus propias raíces. (Luigi Moretti, 1952, pág. 21-30)

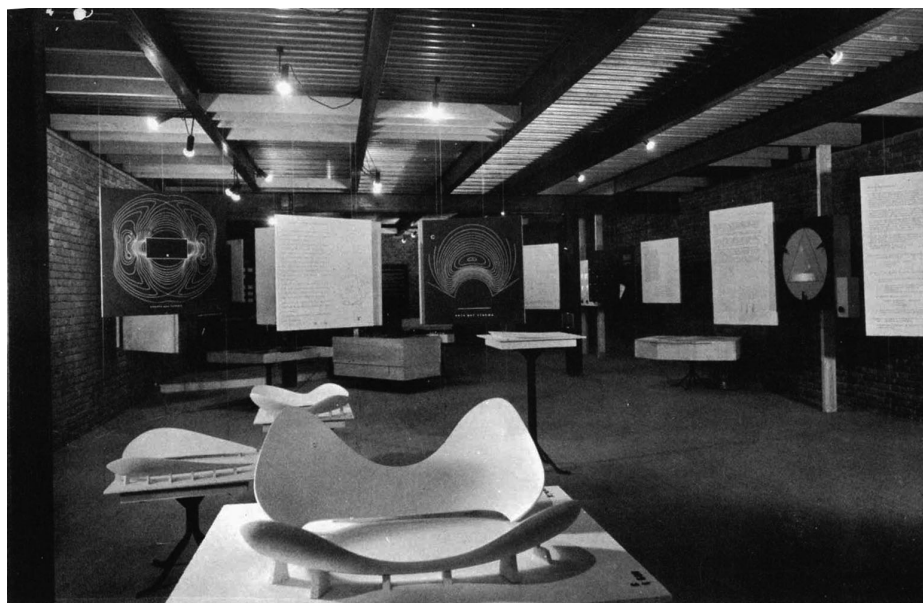
En 1957, participa en las actividades del Instituto Nacional de Investigación Matemática y Operativa para el Urbanismo (IRMOU) donde junto con varios científicos trabaja sobre aspectos operativos de la teoría paramétrica. Estas actividades se centraron en el diseño urbano; su objetivo era moderar la subjetividad modelando la planificación a través de ecuaciones paramétricas del mismo modo que lo había hecho años antes en el diseño arquitectónico.

Como se puede observar a través de sus escritos, Moretti refleja una visión puramente contemporánea que revolucionaría no sólo la disciplina de la arquitectura, también la del urbanismo.

4.2 XII Trienal de Milán

En el año 1960, 20 años después de que Moretti aplicará las matemáticas por primera vez como soporte de la arquitectura, se celebra una exposición de modelos urbanísticos y arquitectónicos definidos a través de las matemáticas.

Para esta exposición, Luigi Moretti junto con Sergio Bertuglia, Anna Cuzzer, Giovanni Cordella y el matemático italiano Bruno de Finetti, presentó 6 casos de estudio sobre visibilidad. Para cada caso se expuso tanto el algoritmo de diseño como el modelo físico resultante de dicho algoritmo. El objetivo de diseño en estas instalaciones era crear «un espacio estructurado para albergar un cierto número de personas que recibieran la información del terreno de juego bajo unas condiciones de visibilidad óptimas»¹. A través de estos ejemplos se definía la fórmula destinada a conectar la percepción con la morfología arquitectónica y la proporción.



4.7 Imagen tomada de la exposición desarrollada en Milán en el año 1960.

Gracias a la exposición, Moretti pudo mostrar sus investigaciones sobre ese nuevo lenguaje arquitectónico al que había dado el nombre de arquitectura paramétrica. Ese nuevo lenguaje no era más que una forma primaria de definir la forma a partir de una ecuación matemática dependiente de multitud de parámetros y dar así «mejor respuesta a las funciones que están llamadas a absolver, frente a aquellas formas realizadas por inercia»².

Además de las ecuaciones y los modelos físicos, «algunas de las estructuras podían ser analizadas en tiempo real con la ayuda de la computadora IBM610 Auto Point, lo que permitía a los asistentes modificar las formas en la que se proyectaban los estadios, en base a unas modificaciones (parámetros) que el visitante podría establecer según su criterio»³. Se mostraba

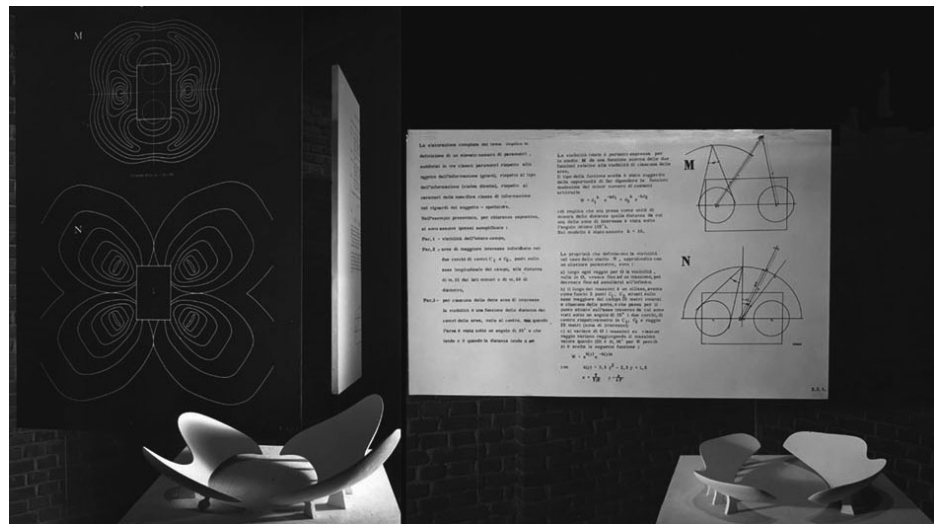
1. Moretti, Luigi (1960), *Morphological and visual optimization in stadium design*, 2020, 198.

2. Moretti, Luigi, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius*, anno IV- 1971/72- n. 1, 31.

3. Moretti, Luigi, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius*, anno IV- 1971/72- n. 1, 31.

así un nuevo enfoque en el proceso de diseño arquitectónico y urbanístico en el que la forma, la lógica matemática y la informática están llamadas a colaborar.

Para las seis instalaciones expuestas el tema de diseño era el mismo: la forma se deducía de la selección de superficies con propiedades visuales equivalentes que recibieron el nombre de superficies de equivisibilidad. Uno de los asistentes a la exposición, Sergio Bertuglia, afirmó que «los modelos permiten el cálculo de los valores de atractivo o información visual para cada punto del espacio fuera del ámbito en el que se desarrolla la actividad. Sobre esta base es posible identificar los espacios que, para el espectador, son de bajo rendimiento visual; espacios que, como tales, deben ser excluidos siendo los espacios que quedan los que pueden ser utilizados por los espectadores. Dentro de estos últimos espacios se identifican las superficies de equivisibilidad»⁴. Las palabras de Bertuglia expresan a la perfección el nuevo enfoque utilizado por Moretti para hacer arquitectura.



4.8 Imagen tomada la XII Trienal de Milán (1960)

La imagen muestra los modelos físicos, las curvas de equivisibilidad y un panel que describe la hipótesis asumida por Moretti para obtener las curvas.

4.3 Método Lógico- Matemático

Los apartados anteriores nos permiten conocer el interés que presentaba Moretti por las matemáticas y el cual le llevó a desarrollar un marco teórico novedoso basado en la combinación de matemáticas y arquitectura. Sus investigaciones fueron presentadas en 1960 en la exposición que se desarrolló en Milán. Los asistentes pudieron comprobar como, mediante la fijación de un tema respecto al cual se va a generar el diseño, con el uso de las matemáticas se puede optimizar la forma. En los ejemplos presentados en la exposición la forma es resultado de una expresión paramétrica que permite identificar las zonas bajo las cuales el terreno de juego se ve en mejores condiciones. El arquitecto se basaba en métodos lógicos y matemáticos para dar forma a sus obras, pero para entender su trabajo se deben conocer los principios de la arquitectura paramétrica e ilustrar el proceso analítico. «Mientras que la arquitectura moderna ha sido definida casi exclusivamente en aspectos formalistas y voluntades declaradas»⁵ Moretti presenta

4. Bertuglia, Sergio. *Modello per l'organizzazione di un comprensorio*, Guida Editori, 1975, pág. 36

5. Moretti, Luigi, «Ricerca matematica in architettura e urbanistica», *Moebius*, anno IV- 1971/72- n. 1, 34.

un nuevo lenguaje arquitectónico donde la estructura se define desde una perspectiva lógico- matemática.

A través de su artículo en la revista Moebius, Moretti detalló la metodología que se debe llevar a cabo para diseñar de acuerdo a la arquitectura paramétrica.

La arquitectura paramétrica se define como un lenguaje arquitectónico que se apoya en bases científicas para su desarrollo. Por ello, Moretti establece los siguientes puntos:

- 1) Rechazar las decisiones empíricas o tomadas por repetición de métodos tradicionales.
- 2) Valorar los fenómenos tradicionales como hechos objetivos.
- 3) Definir el tema que va marcar el proceso de diseño.
- 4) Identificar los fenómenos que interfieren en el tema, y que recibirán el nombre de parámetros, y atribuirles un valor cuantitativo.
- 5) Relacionar los diferentes parámetros.
- 6) Recurrir a metodologías científicas que permitan definir los condicionantes de diseño como expresiones matemáticas.
- 7) Aceptar la libertad de decisión y expresión del arquitecto siempre y cuando ésta no contradiga a las características estructurales determinadas por el tema.
- 8) La forma definitiva de la arquitectura resultará de las relaciones que componen su estructura.

Lo que se puede resumir en:

- 1) Definición del tema.
- 2) Identificación de los parámetros que participan en el tema.
- 3) Detallar las relaciones entre parámetros.

Los estadios presentados en la exposición de arquitectura paramétrica de 1960, fueron diseñados de acuerdo a esta metodología. Moretti identificó como tema principal de diseño la percepción visual, y para dicha temática el arquitecto describió 19 parámetros que se pueden clasificar en cuatro grupos no necesariamente disjuntos:

Grupo 1: Parámetros asociados al fenómeno que se va a contemplar.

Parámetro 1- Los fenómenos que ocurren en el terreno de juego y el lugar del campo en el que estos se desarrollan.

Parámetro 1a- Ponderación de los fenómenos en función de su relevancia en el juego.

Parámetro 2- Determinar las áreas de interés. Para ello, se evalúa de un modo cuantitativo los factores topográficos, climatológicos y las condiciones fotométricas predominantes.

Grupo 2: Parámetros relativos a los espectadores.

Parámetro 3- La cantidad de espectadores que acudirán al estadio.

Parámetro 4- Analizar las capacidades visuales del espectador en relación a cada uno de los fenómenos y establecer los valores que permiten disfrutar de la competición en unas condiciones óptimas de visibilidad.

Parámetro 4a- El ángulo de desplazamiento máximo admisible por la cabeza del espectador evaluando la frecuencia del desplazamiento en relación a la velocidad a la que se desarrollan los fenómenos en el campo.

Parámetro 4b- El ángulo óptimo de visión para un escenario en el que los fenómenos se suceden siguiendo una secuencia predefinida.

Parámetro 4c- El ángulo de visión óptimo para variaciones de mayor entidad que no se pueden prever.

Parámetro 5- Ángulo azimutal visual óptimo que permite transferir la información extraída del campo de un modo objetivo y definir las áreas de interés.

Parámetro 6- Ángulo de latitud óptimo que nos permita, al igual que el parámetro 5, transferir la información que se sucede en el campo a unas áreas de interés.

Grupo 3: Parámetros asociados tanto al fenómeno como al espectador.

Parámetro 7- Sectorizar el espacio reservado para los espectadores en relación a la información que recibe el espectador.

Parámetro 8- Identificar los elementos constructivos, como pilares, que impiden la correcta visibilidad del terreno de juego.

Parámetro 8a- Seguridad de los espectadores.

Parámetro 8b- Que la visibilidad de un receptor no se vea obstaculizada por la presencia de otro espectador.

Parámetro 8c- Identificar los diferentes espacios que requiere el área reservada para los espectadores como pasillos, servicios o escaleras.

Parámetro 8d- Determinar los espacios que no son necesarios en el estadio y por lo tanto se pueden excluir del diseño.

Parámetro 8e- Seguridad de los dos parámetros anteriores.

Parámetro 8f- Aceptar el espacio personal que requiere cada uno de los espectadores.

Grupo 4: Parámetros relacionados al campo económico.

Parámetro 9- Ponderar todos los parámetros enumerados y establecer el coste económico de las estructuras de hormigón requeridas para la materialización del diseño.

Parámetro 3- El número de espectadores que acudirá al estadio.

El concepto de parámetro determina que estas variables son susceptibles a cambios cuantitativos motivados por investigaciones más rigurosas o por posibles cambios en los fenómenos que se van a desarrollar en el terreno de juego.

Definido el tema e identificados los parámetros se desarrolla el algoritmo de diseño. El algoritmo de diseño pondrá en relación los diferentes parámetros y generará unas curvas que dividirán el espacio en superficies con las mismas propiedades. Para poder ver dichas curvas debemos recurrir a un *software* de diseño computacional que genere la representación de la función.

El siguiente capítulo presenta un análisis de cada uno de los estadios donde se pone en práctica el método lógico- matemático explicado. Como se podrá ver, en dicho análisis no se consideran los 19 parámetros identificados, sino que para simplificar el proceso de diseño, sólo se consideran los parámetros 1, 1a, 2, 4a, 4b, 4c, 5 y 6 y, en función de estas variables, se desarrolla la expresión paramétrica que determina el diseño.

5 Análisis de los estadios

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, Luigi Moretti mostró sus ejemplos de arquitectura paramétrica en la XII Trienal de Milán. En la exposición presentó una serie de modelos físicos junto a las hipótesis, ecuaciones matemáticas, análisis gráficos y curvas de equivisibilidad que definían la forma de dichos modelos. Este capítulo recoge dicha documentación y se amplía con un análisis gráfico que muestra los parámetros que definen la función y sus relaciones, y una imagen que muestra la curva definida por los puntos de máxima visibilidad, en dicha imagen se puede ver que la curva es perpendicular en cada uno de sus puntos a las curvas de equivisibilidad resultantes de la función.

Como se ha detallado anteriormente, el tema de diseño es común en todos los ejemplos, se busca diseñar un espacio para los espectadores que presente buenas condiciones visuales. Para ello se identifican en cada caso las áreas de interés para posteriormente identificar las zonas de mayor visibilidad y descartar aquellas que presenten bajo rendimiento visual.

A pesar de que el tema es común, cada uno de los estadios resulta de una función diferente ya que el algoritmo de diseño depende de las áreas de interés, los fenómenos que se suceden en el campo, la velocidad a la que se desarrollan estos fenómenos y el lugar desde el cual el espectador los ve. Estos condicionantes se relacionan a partir de unos parámetros y estos parámetros y sus relaciones son distintos para cada uno de los deportes.

Por tanto, es objeto de este capítulo detallar los parámetros que intervienen en cada uno de los diseños, los condicionantes de la función que determina las curvas de visibilidad y la función descrita por Moretti para cada uno de los espacios.

En las imágenes de elaboración propia, se representa en rojo las curvas y los puntos donde se encuentran los valores de máxima visibilidad, en amarillo se marcan las áreas de mayor atractivo visual y en azul aquellas zonas donde la visibilidad es nula.

Como veremos a continuación, a pesar de que en su método lógico-matemático Moretti indica que la forma de los estadios viene determinada por 19 parámetro, «por sencillez explicativa los parámetros se limitan a los esenciales»¹

1. Moretti, Luigi, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», Moebius, anno IV- 1971/72- n. 1, 42

5.1 Estadio de Fútbol. *Stadio M*

Para determinar la forma del *Stadio M*, Moretti asume la siguiente hipótesis (véase imagen 5.2):

- a) Visibilidad de todo el campo.
- b) Las áreas de mayor interés se concentran en dos círculos de centros C_1 y C_2 ubicados en el eje longitudinal del campo a 15m de distancia de los lados menores del terreno de juego y que presentan un diámetro de 50m.
- c) La función de máxima visibilidad se expresa como la suma de dos funciones relativas a la visibilidad desde un punto del graderío a cada una de las áreas de interés.

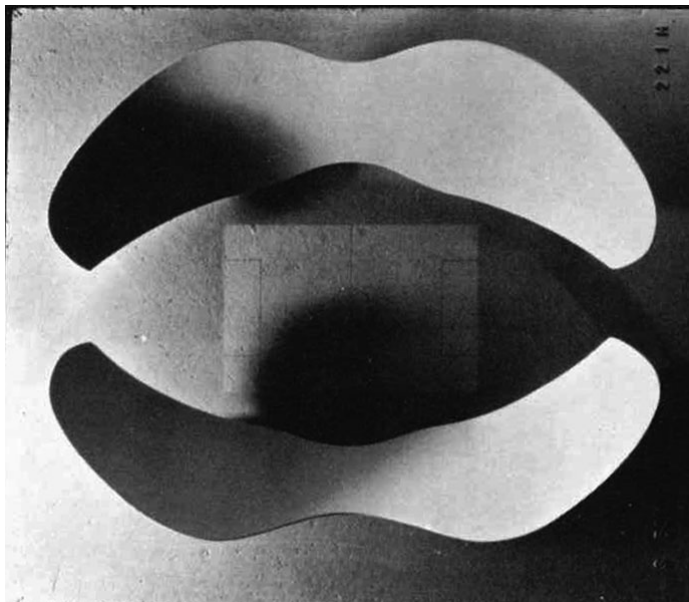
$$W(d_1, d_2) = d_1^k e^{-kd_1} + d_2^k e^{-kd_2} \text{ con } k > 0,$$

Para cada una de dichas áreas, la función depende de la distancia (d_i) de un punto P al centro C_i de dicha área y debe cumplir las siguientes condiciones:

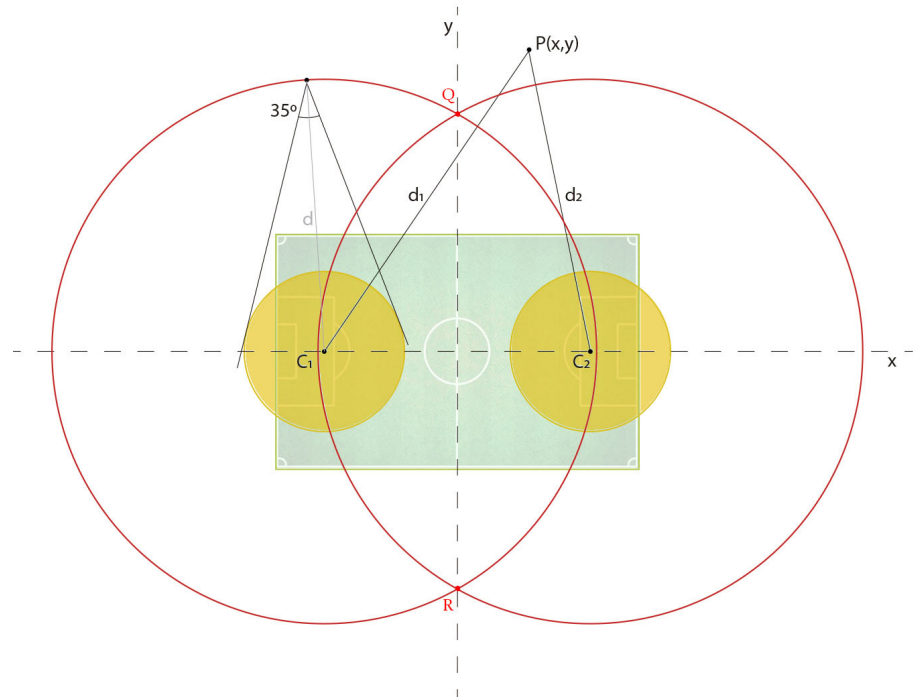
- En el origen de coordenadas, la función debe ser 0.
- La visibilidad es máxima cuando el área se ve bajo un ángulo de 35°
- Cuando la distancia tiende a infinito, la función es 0.

El lugar geométrico que permite ver las áreas de interés bajo un ángulo de 35° es una circunferencia con centro en C_i y radio d . Dichas circunferencias están compuestas por los puntos desde los cuales la visibilidad es máxima siendo los puntos de intersección de ambas circunferencias los puntos de máximo valor (Q y R).

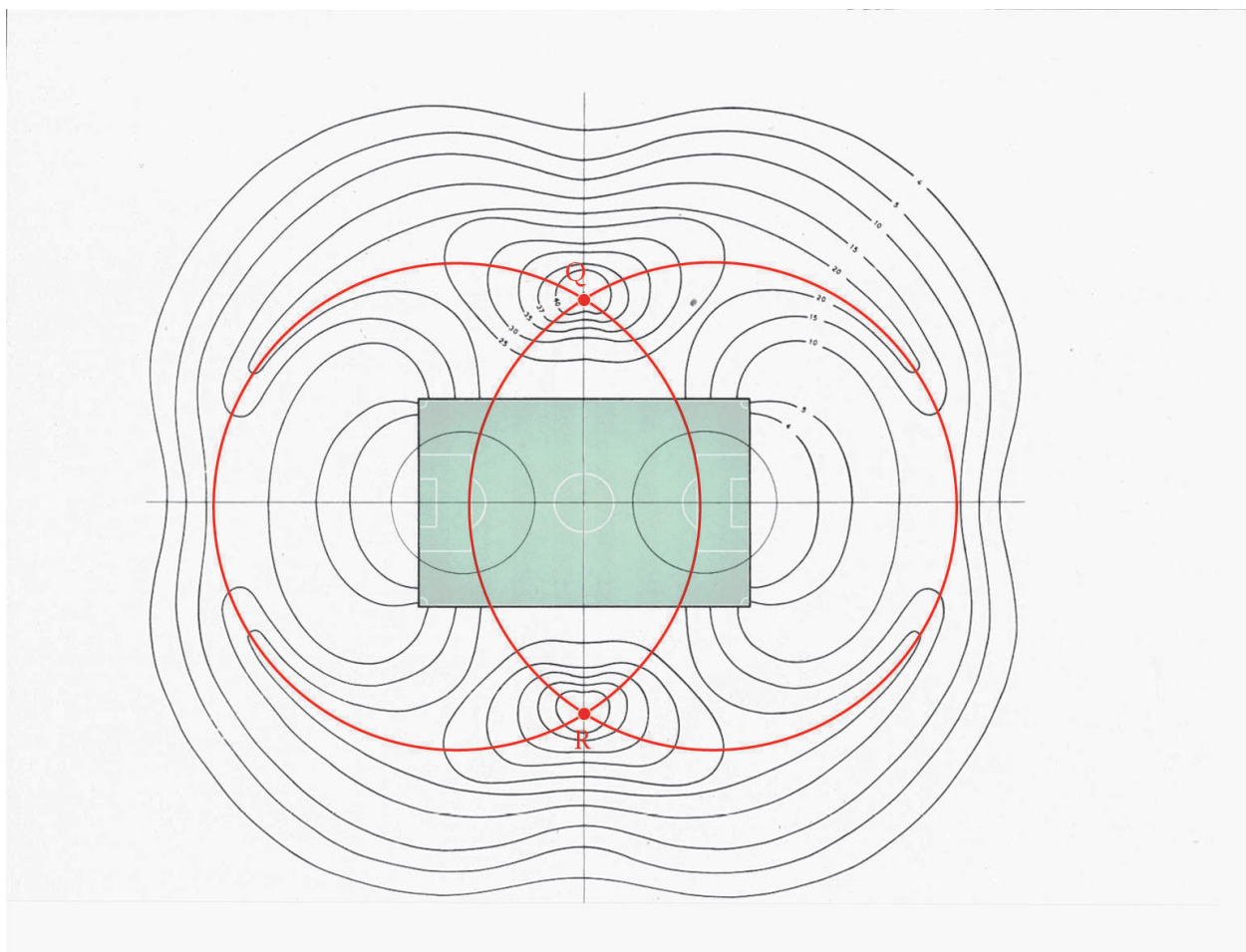
Como hemos mencionado en la introducción del capítulo, en la imagen 5.3 se puede ver como las dos circunferencias formadas por los puntos donde se alcanzan los valores de máxima visibilidad son perpendiculares en cada uno de sus puntos a las curvas de equivisibilidad resultantes de la función.



5.1 Maqueta vista desde arriba del *Stadio M*. La maqueta fue presentada por Moretti en la XII Trienal de Milán



5.2 Representación gráfica de los parámetros y sus relaciones según la hipótesis asumida por Moretti para el *Stadio M*
(Elaboración propia)



LEYENDA

- Curva geométrica de valores máximos
- Puntos donde se alcanzan los valores máximos
- Áreas de mayor atractivo visual

5.3 Representación de la curva de máximos visuales y los puntos de mayor valor
(Elaboración propia)

5.2 Estadio de Fútbol. *Stadio N*

La función visibilidad que define la forma del *Stadio N* depende de una distancia y un ángulo y sus propiedades son (véase imagen 5.6):

- La visibilidad del rayo OP, siendo P un punto del espacio, es 0 en el origen, aumenta hasta un máximo y decrece hasta desaparecer en el infinito.
- El lugar geométrico de los máximos es una elipse que tiene como focos los puntos C_1 y C_2 , puntos ubicados en el eje mayor del campo a 15m de distancia de cada una de las porterías; y que pasa por un punto ubicado en el eje de ordenadas bajo el cual las áreas de interés se ven bajo un ángulo de 35° (véase imagen 5.7). Al igual que en el caso anterior, las áreas de interés son dos circunferencias con centros C_1 y C_2 y radio de 25m.
- Los valores máximos de cada rayo varían alcanzando el máximo valor en $\theta=36^\circ$.

La función visibilidad queda definida por la siguiente expresión:

$$W(x, y) = x^{k(y)} e^{-k(y)x}$$

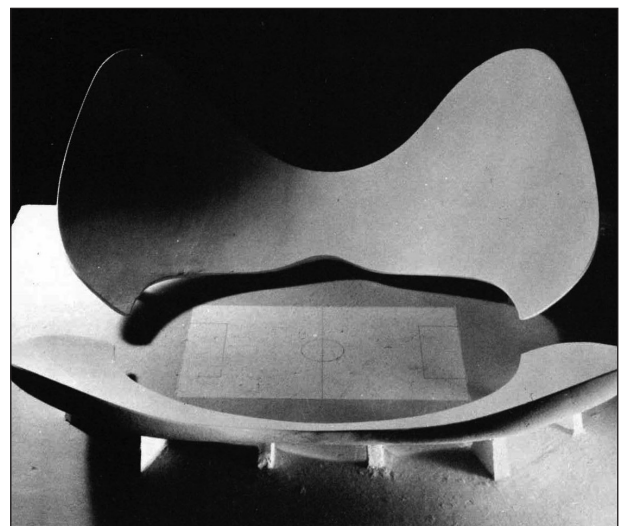
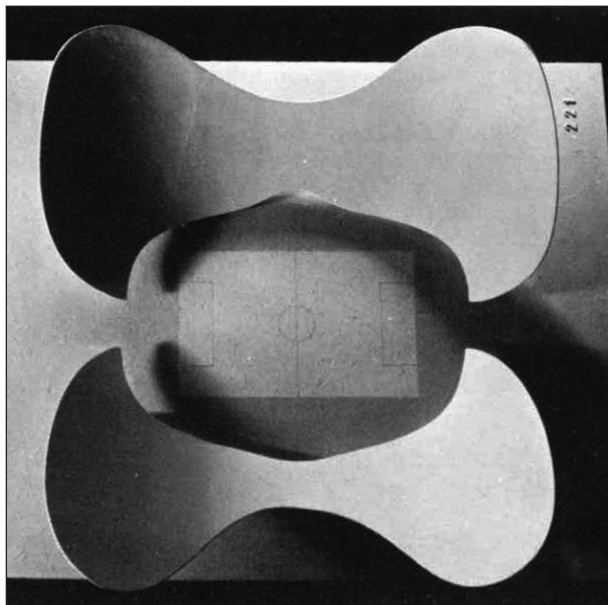
$$k(y) = 3,5y^2 - 2,5y + 1,5$$

$$x = \frac{\rho}{\dot{\rho}(\theta)}$$

$$y = \frac{2\theta}{\pi}$$

Siendo x la distancia entre un punto P del espacio y el centro del área de interés, y el parámetro y el ángulo que forma el rayo OP con el eje de ordenadas.

La función k depende del parámetro y . Su expresión matemática describe una parábola y sus términos son los coeficientes que Moretti determinó para los fenómenos que se suceden en el campo de juego.

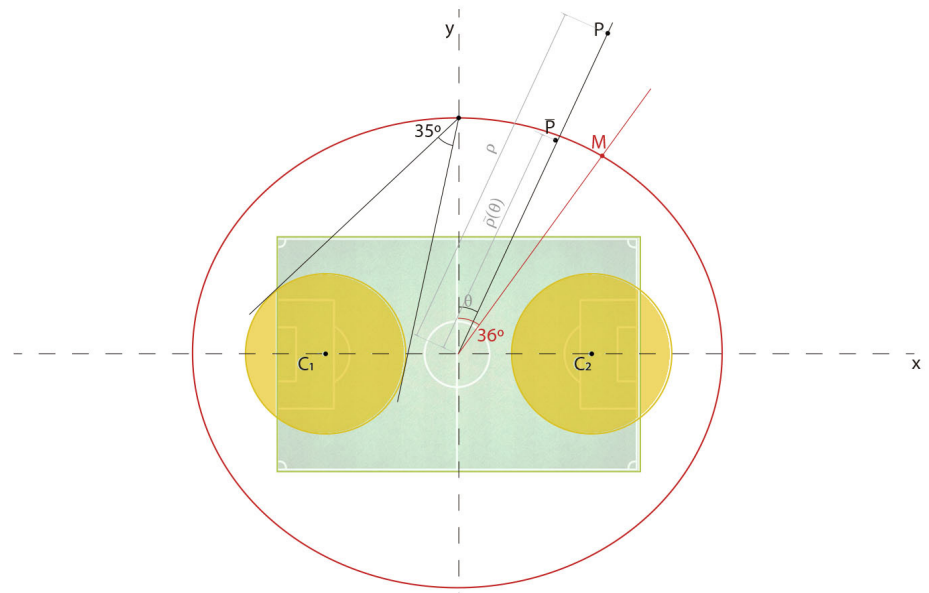


5.4 Maqueta vista desde arriba del *Stadio N*

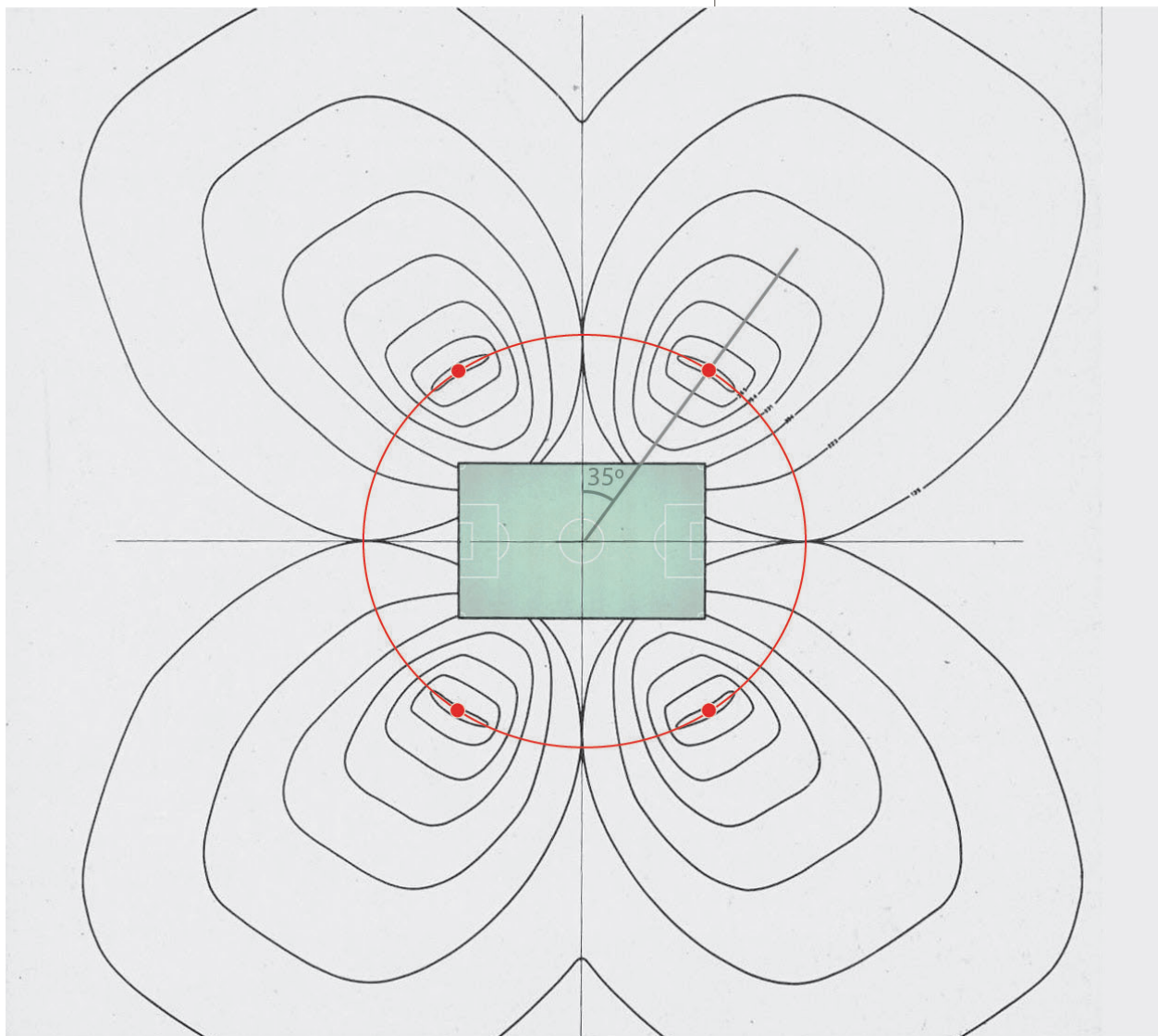
5.5 Fotografía del modelo físico del *Stadio N* visto en perspectiva.

Ambas fotografías fueron tomadas en la XII Trienal de Milán

5.6 Representación gráfica de los parámetros y sus relaciones según la hipótesis asumida por Moretti para el *Stadio N*
(Elaboración propia)



5.7 Representación de la elipse de máximos y los puntos de mayor valor, ubicados en el rayo que OP , rayo que forma un ángulo de 36° con el eje de ordenadas
(Elaboración propia)



LEYENDA

- Curva geométrica de valores máximos
- Puntos donde se alcanzan los valores máximos
- Áreas de mayor atractivo visual

5.3 Estadio de Natación. Modelo A

Para diseñar el graderío de la piscina Moretti plantea (véase imagen 5.9):

- a) Visibilidad de toda la piscina
- b) En una competición de natación, la zona de mayor interés es en la que se llevan a cabo las salidas y las llegadas, área denotada como A_1 ; la zona en la que se realizan los volteos y virajes, presenta un interés menor, dicha área se denomina A_2 . En un partido de waterpolo ambas zonas presentan el mismo interés ya que en ellas se ubican las porterías.
- c) Los movimientos de los atletas en el agua no presentan gran velocidad, por lo que se considera un campo visual de 120°
- d) Una curva con centro en P_0 y radio r define el área de mayor interés. La visibilidad aumenta de 0 a un valor máximo que depende del ángulo θ , ángulo que forma el radio con el eje longitudinal de la piscina. Cuando la distancia desde P_0 tiende a infinito, la visibilidad decrece hasta 0.
- e) El máximo de un radio $M(\theta)$
 - es mínimo para $\theta = 0$
 - crece hasta $\theta < \pi/2$
 - decrece hasta que vuelve a subir para $\theta = \pi$, donde vuelve a adquirir el mismo valor que tenía para $\theta = 0$
- f) El lugar geométrico de máximos es una curva que tiene en cuenta la diferencia de atractivo visual entre el área A_1 y A_2 (véase imagen 5.10)

La expresión que define la forma es la siguiente:

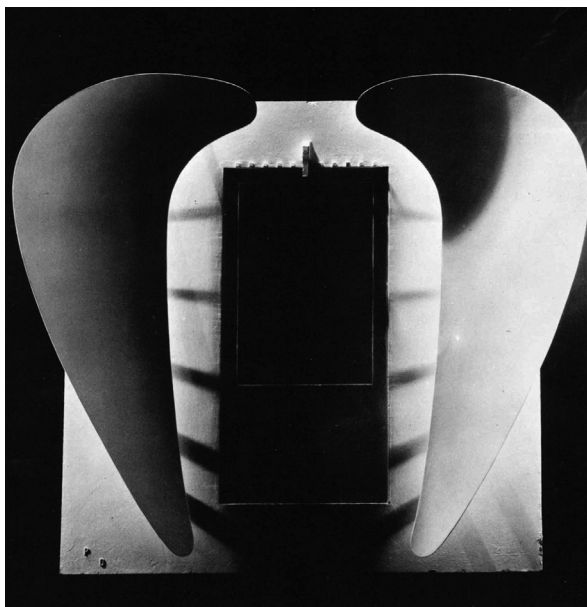
$$W(x, y) = e^{y(1-y) - k(y)(x - \log x)}$$

$$k(y) = 4y^2 - 4y + 2$$

$$x = \frac{\rho}{\rho(\theta)}$$

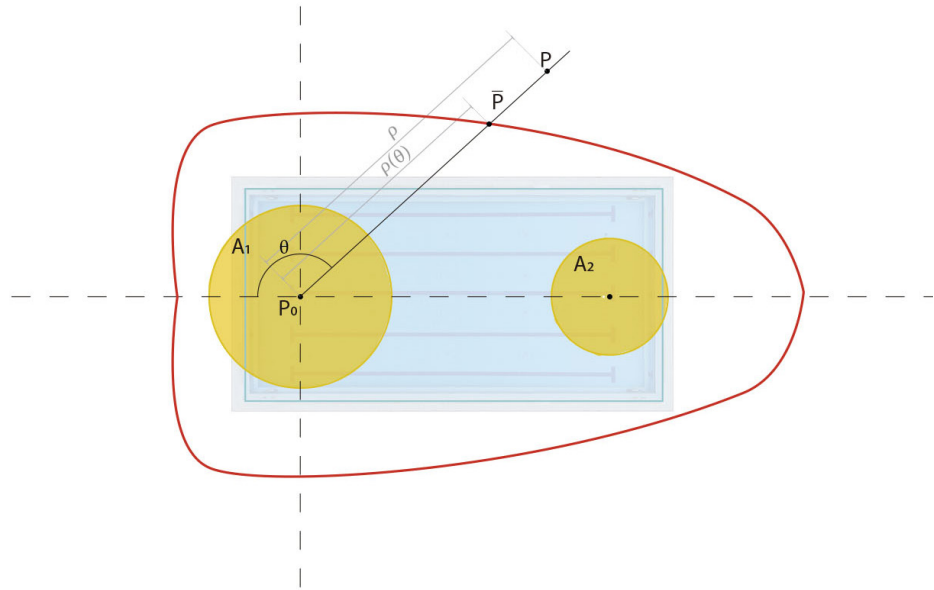
$$y = \frac{\theta}{\pi}$$

De nuevo, como en el caso anterior, el parámetro x representa una distancia mientras que y define un ángulo.

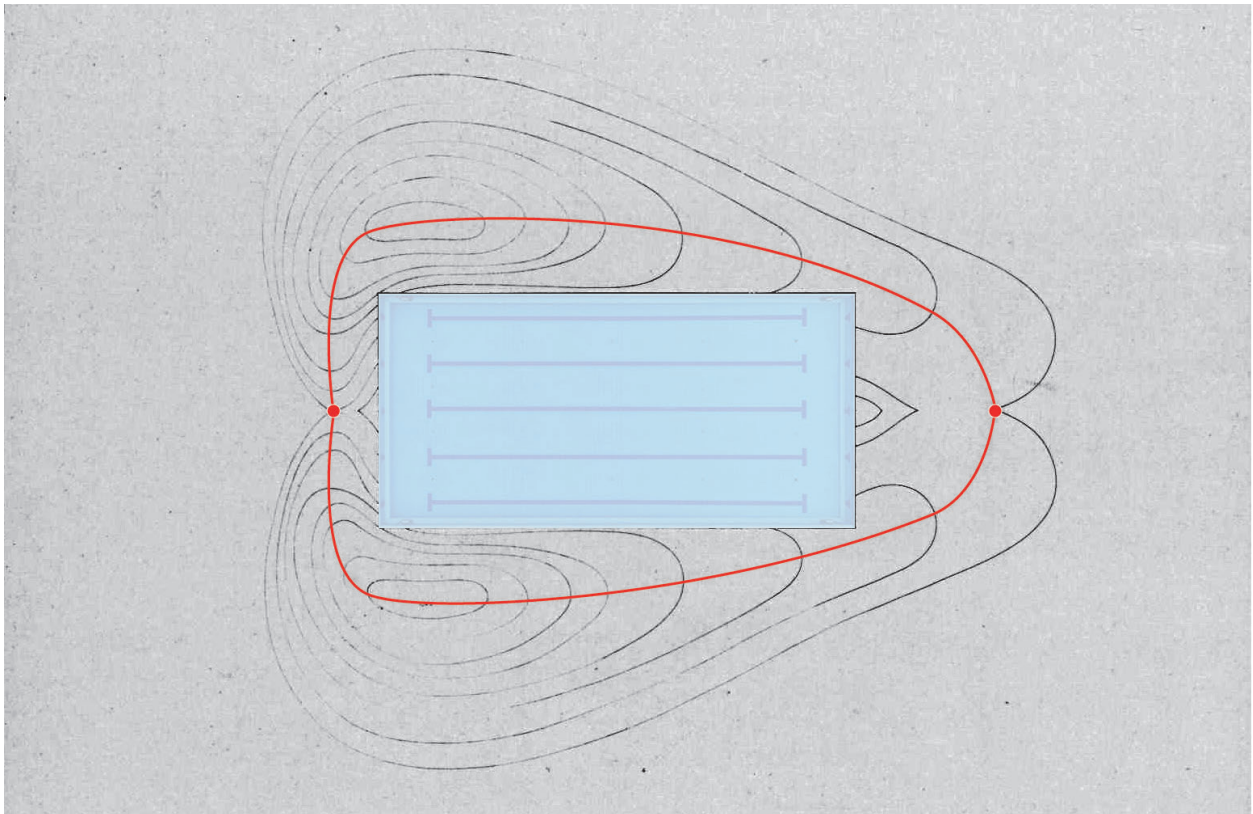


5.8 Maqueta vista desde arriba del estadio para la piscina siguiendo la hipótesis planteada para el caso A.

Fotografía tomada en la exposición de Milán en el año 1960



5.9 Representación gráfica de los parámetros y sus relaciones según la hipótesis asumida por Moretti para el caso A del estadio de natación (Elaboración propia)



5.10 Representación de la curva de máximos (Elaboración propia)

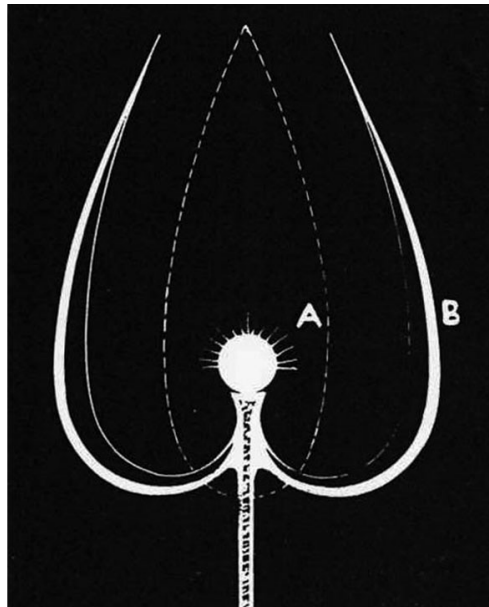
LEYENDA

- Curva geométrica de valores máximos
- Puntos donde se alcanzan los valores máximos
- Áreas de mayor atractivo visual

5.4 Estadio de Natación. Modelo B

La función que define la forma para este segundo estadio de natación es la misma que la descrita para el ejemplo anterior, la función que define las curvas de equivisibilidad es la misma y depende de los mismos parámetros. La diferencia entre ambos casos se encuentra en la determinación de las áreas de interés, mientras que el caso A da mayor importancia al área A_1 respecto al área A_2 ; el modelo B da la misma importancia a ambas áreas (véase imagen 5.12). Por lo que, mientras que la curva de máximos en el caso A es una curva que refleja un mayor atractivo visual entorno al área A_1 , la curva de máximos para el caso B es una elipse con focos en los centros de ambas zonas de interés (véase imagen 5.13).

Junto con las curvas de equivisibilidad y los modelos físicos presentados para los estadios de natación, el arquitecto mostró un esquema de un organismo vegetal que presenta gran similitud con las curvas resultantes de la función.



5.11 Representación gráfica de un organismo vegetal que presenta gran similitud con las curvas de equivisibilidad que dan forma a los estadios de natación.

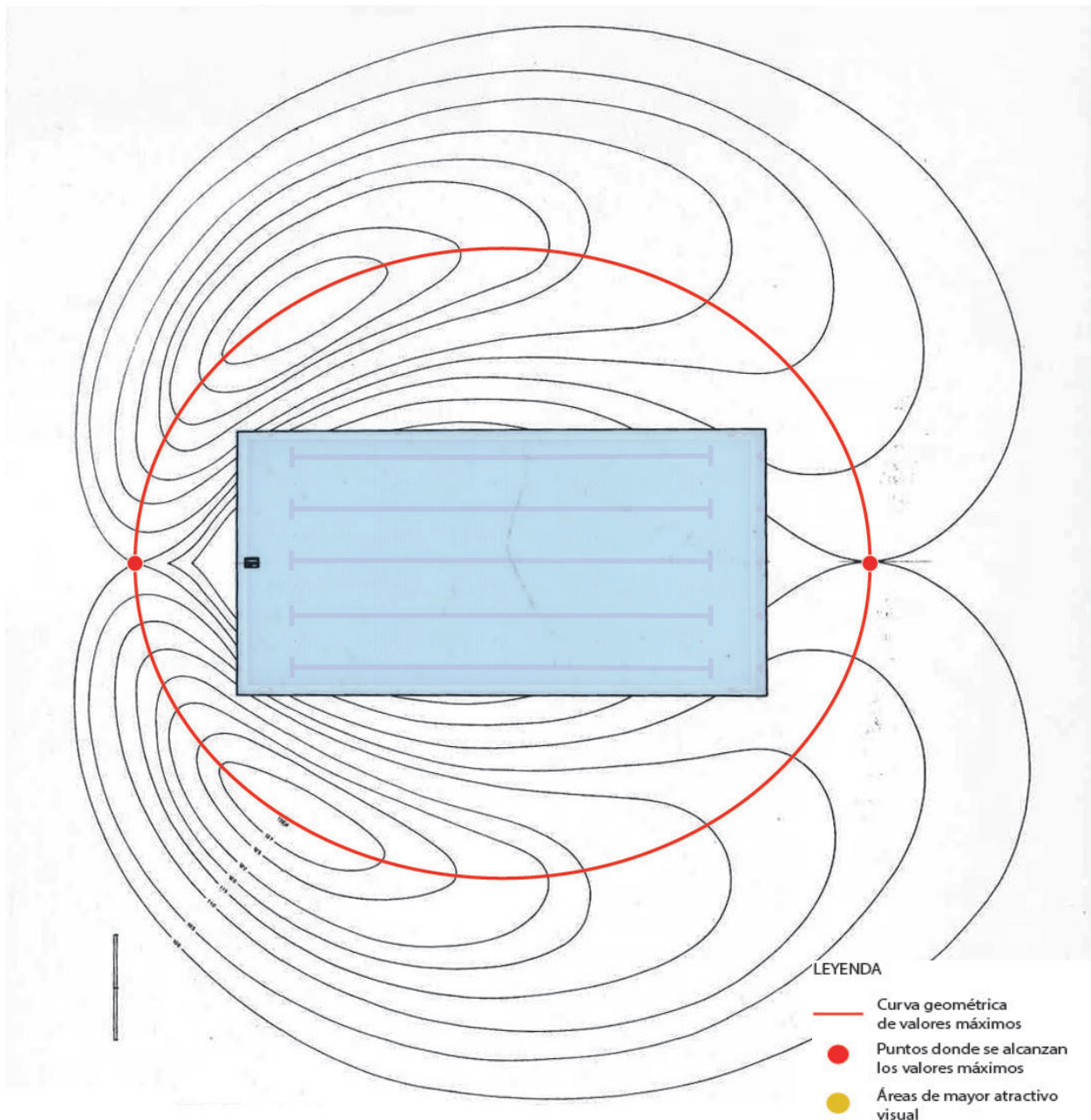
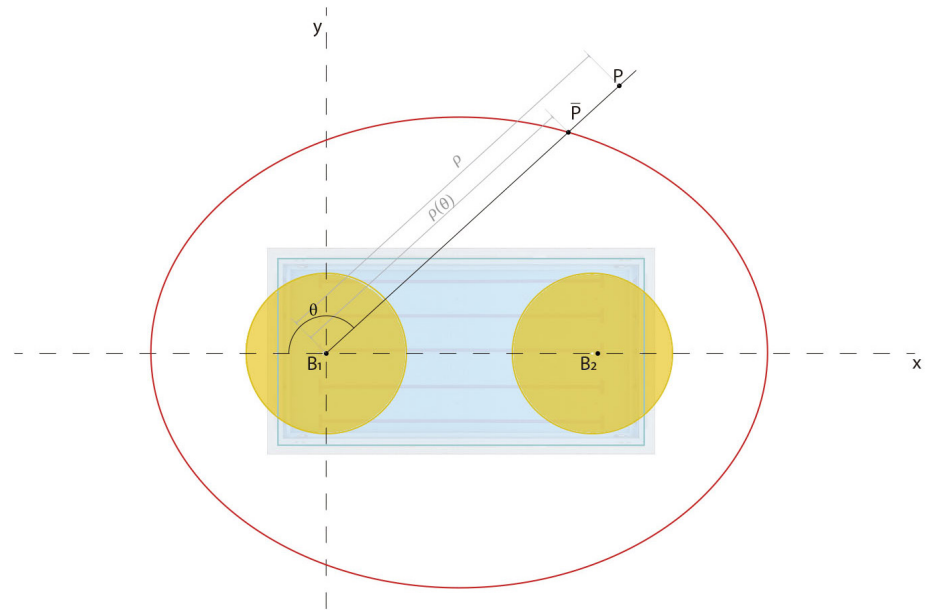
El planteamiento de diseño de este ejemplo es similar al visto en el apartado 5.2 para el *Stadio N* con la diferencia de que en este caso el eje de ordenadas se encuentra desplazado y el ángulo θ es el ángulo que forma el rayo con el eje de abscisas.

5.12 Representación gráfica de los parámetros y sus relaciones según la hipótesis asumida por Moretti para el caso B del estadio de natación

(Elaboración propia)

5.13 Representación de la elipse definida por los puntos de mayor valor visual.

(Elaboración propia)



5.5 Estadio de Tenis.

La forma del estadio de tenis viene determinada por una función que resulta de la siguiente hipótesis (véase imagen 5.16):

- a) Como en el resto de ejemplos, se busca la visibilidad de todo el campo
- b) El área de mayor atractivo visual se concentra en un área particular del campo determinado por la trayectoria de la pelota
- c) La pelota se desplaza por la pista de tenis a gran velocidad. El campo visual que permite seguir la trayectoria de la pelota de un modo cómodo es de 100°
- d) El atractivo visual depende de la distancia desde un punto del estadio al centro del campo y del ángulo bajo el cual se ve el área de interés.

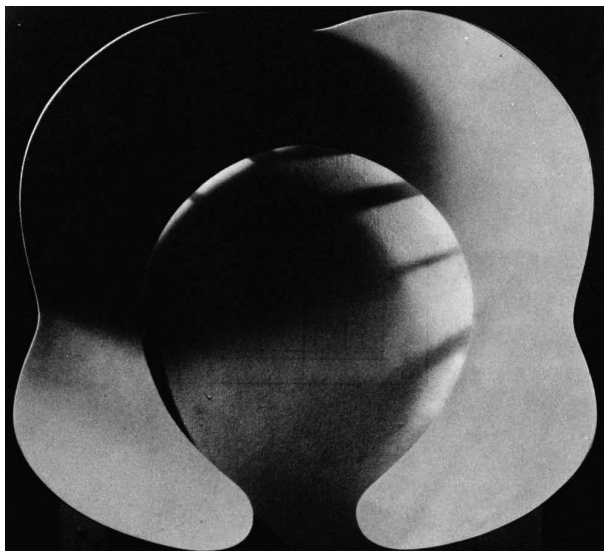
La función máxima es el producto de las dos funciones anteriormente mencionadas:

- la función dependiente del ángulo bajo el cual se ve el área de interés
- la función distancia.

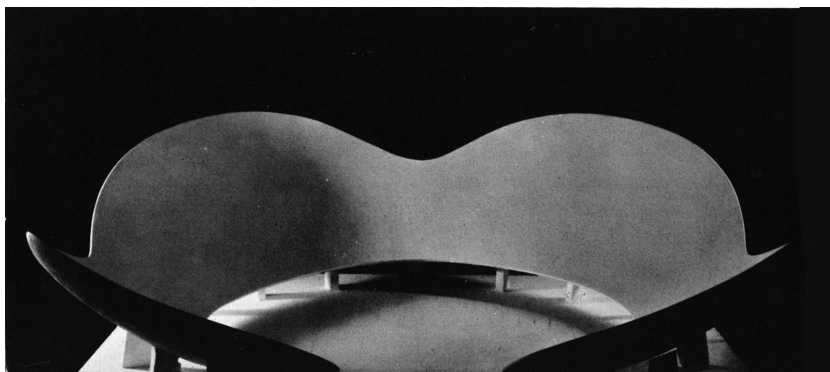
Por lo tanto, la función máxima se define por la siguiente expresión:

$$W(x, y) = x^k e^{-kx} e^{-hd}$$

Siendo x el parámetro que define el ángulo, d el parámetro distancia, $k=4,5$; y $h=1$.



5.14 Modelo físico del estadio de tenis visto de arriba

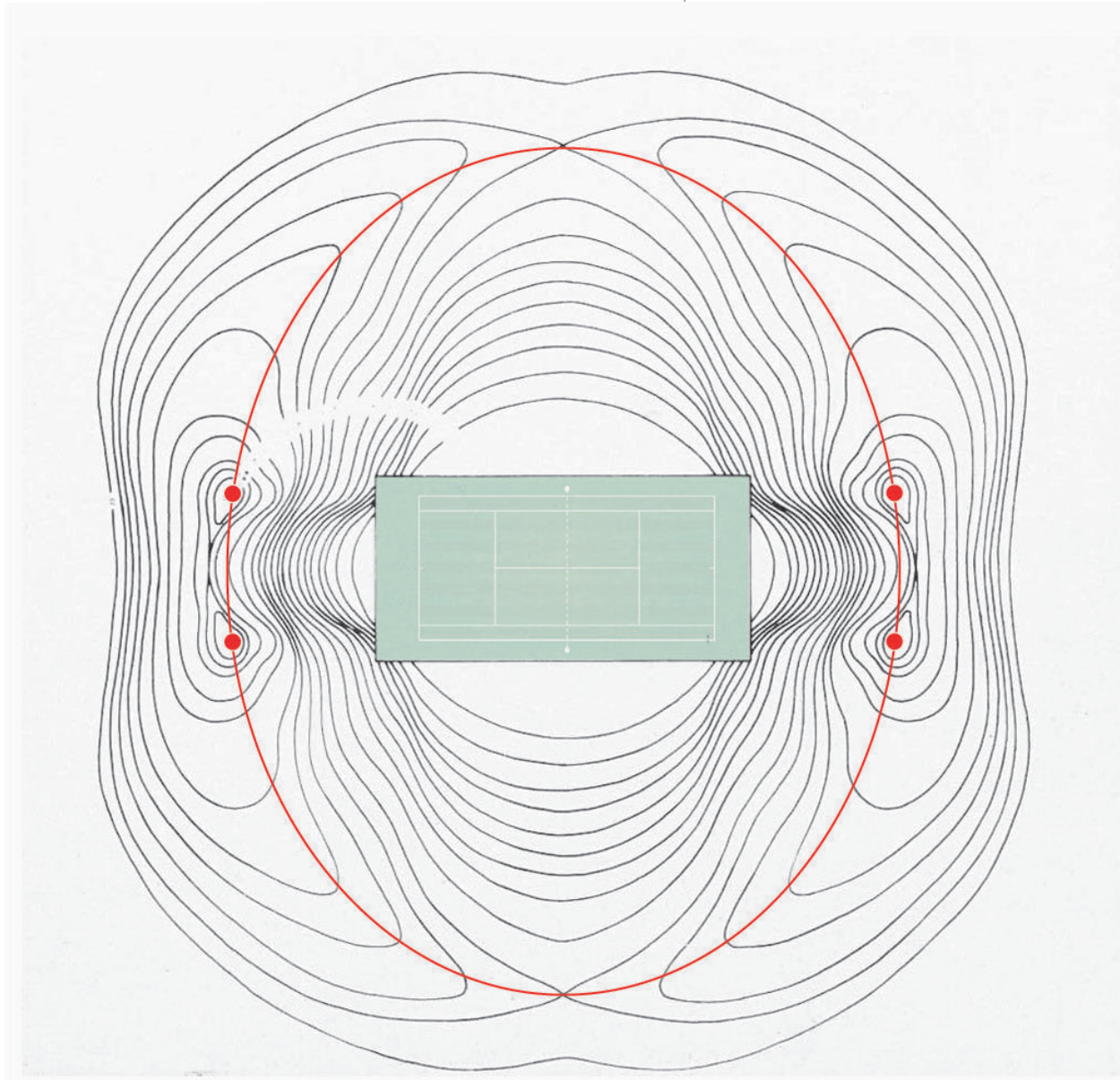
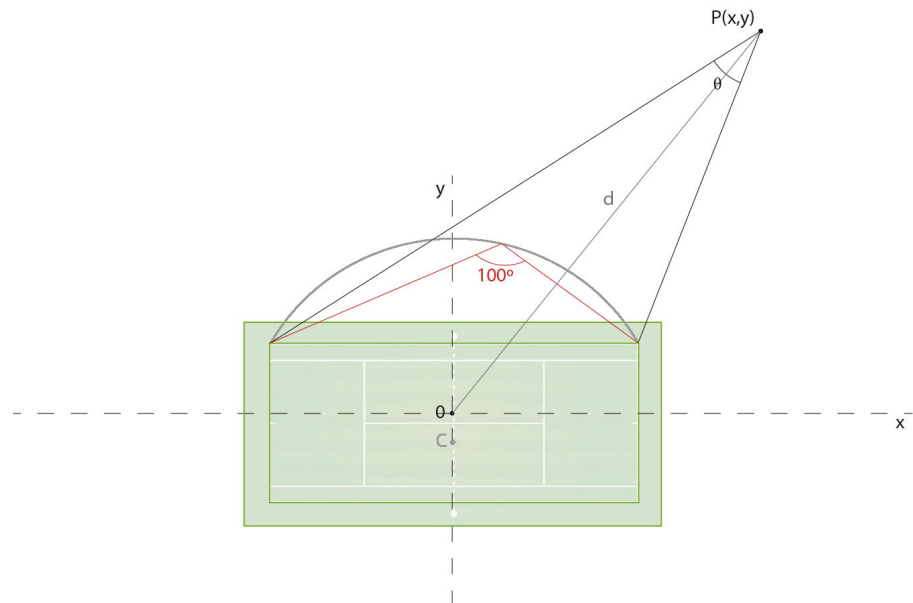


5.15 Imagen en perspectiva del modelo físico que refleja la forma del estadio de tenis.

Amabas fotografías fueron tomadas del modelo presentado en la Trienal de Milán del año 1960.

5.16 Representación gráfica de los parámetros y sus relaciones según la hipótesis asumida por Moretti para el estadio de tenis (Elaboración propia)

5.17 Representación de la elipse que refleja los puntos de máxima visibilidad para el estadio de tenis. (Elaboración propia)



LEYENDA

- Curva geométrica de valores máximos
- Puntos donde se alcanzan los valores máximos

5.6 Sala de Cine

En una sala de cine, el área de interés se limita al plano normal a la pantalla. La hipótesis descrita por Moretti para este caso es la siguiente (véase imagen 5.19):

- a) La visibilidad del rayo que pasa por el centro de la pantalla es 0 en el centro
- b) La visibilidad de la circunferencia descrita por los puntos bajo los cuales la pantalla se ve bajo un ángulo de 60° es 0 tanto en el perímetro como en el interior de ésta.
- c) La visibilidad del rayo aumenta hasta llegar a la circunferencia Γ , circunferencia que permite ver la pantalla bajo un ángulo de 40° , y luego disminuye hasta desaparecer en el infinito.
- d) El valor de máxima visibilidad se localiza en el punto M, punto de intersección entre la circunferencia Γ y el eje de ordenadas. Alcanzado el valor de máxima visibilidad, ésta decrece a ambos lados del rayo OM hasta anularse en los rayos que forman un ángulo de 30° con la pantalla

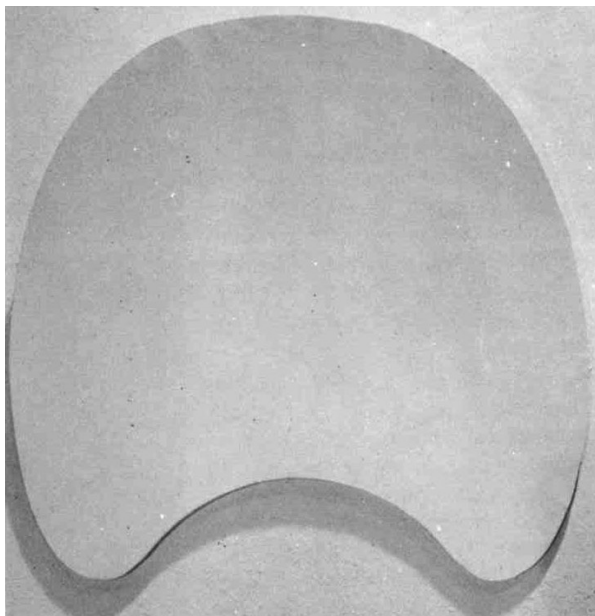
La traducción de estas propiedades se expresa a partir de la siguiente expresión:

$$W(x, y) = y(1 - y)x^{k-kx}$$

$$x = \frac{\rho}{\bar{\rho}(\theta)}$$

$$y = \frac{3\theta}{\pi}$$

De nuevo, la función depende de dos parámetros, un ángulo y una distancia. El ángulo se define a través del parámetro x y la distancia por el parámetro y .

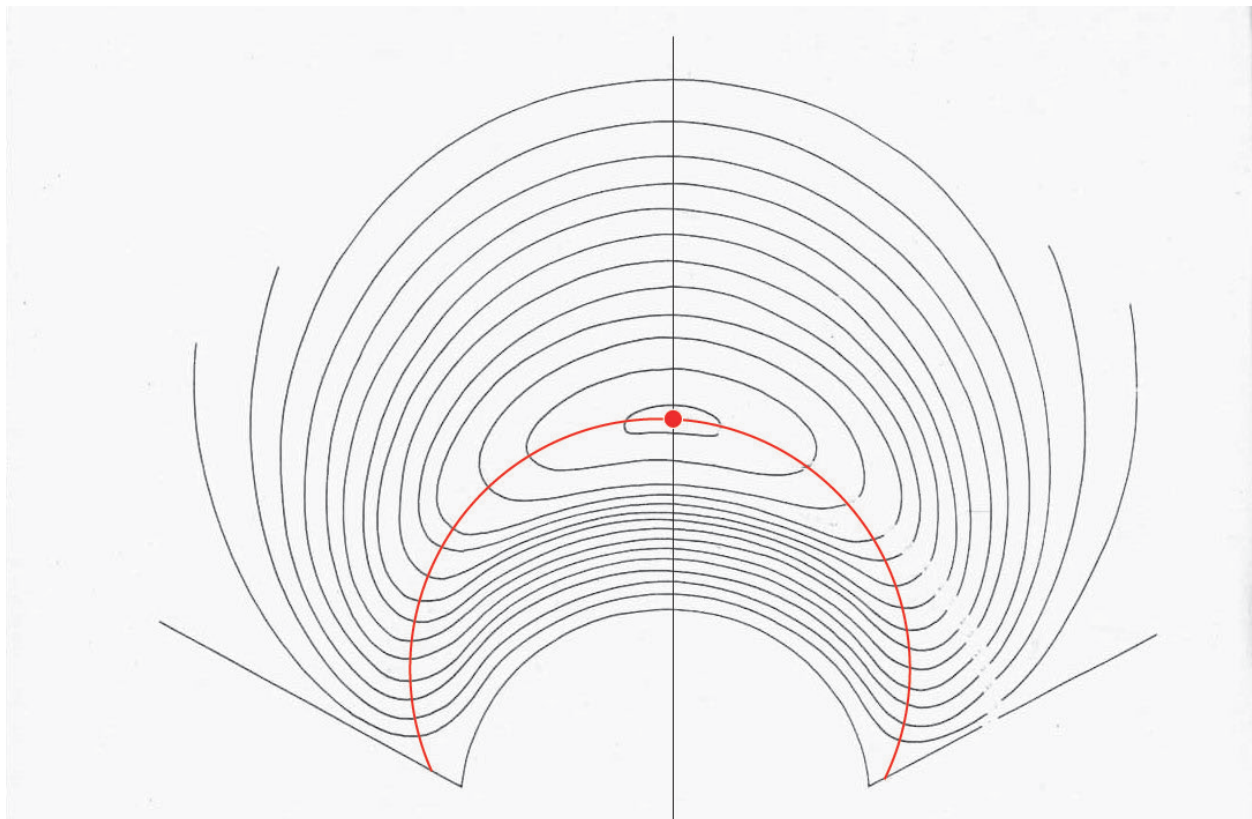
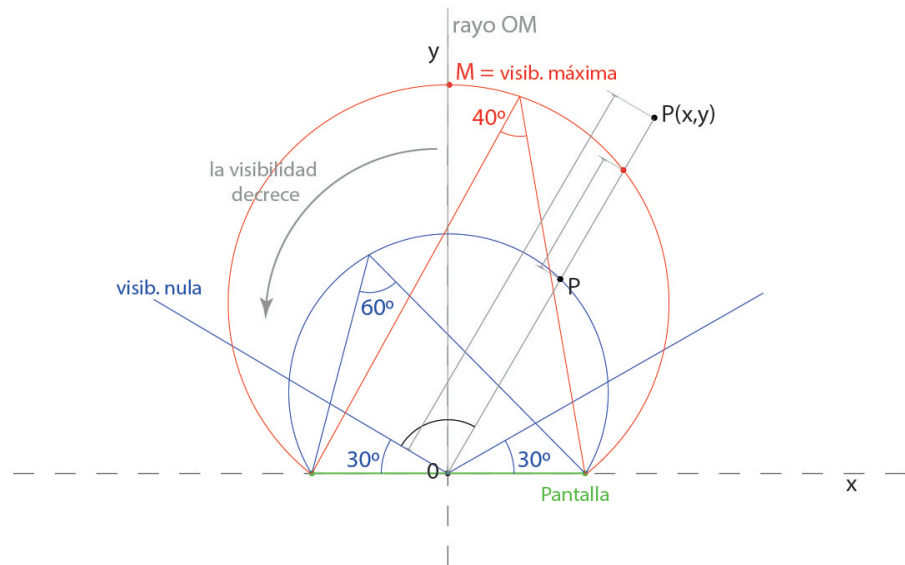


5.18 Modelo físico que representa la forma establecida para una sala de cine

La imagen fue sacada de la exposición de arquitectura paramétrica celebrada en Milán en el año 1960.

5.19 Representación gráfica de los parámetros y sus relaciones según la hipótesis asumida por Morretti para la forma de una sala de cine

(Elaboración propia)

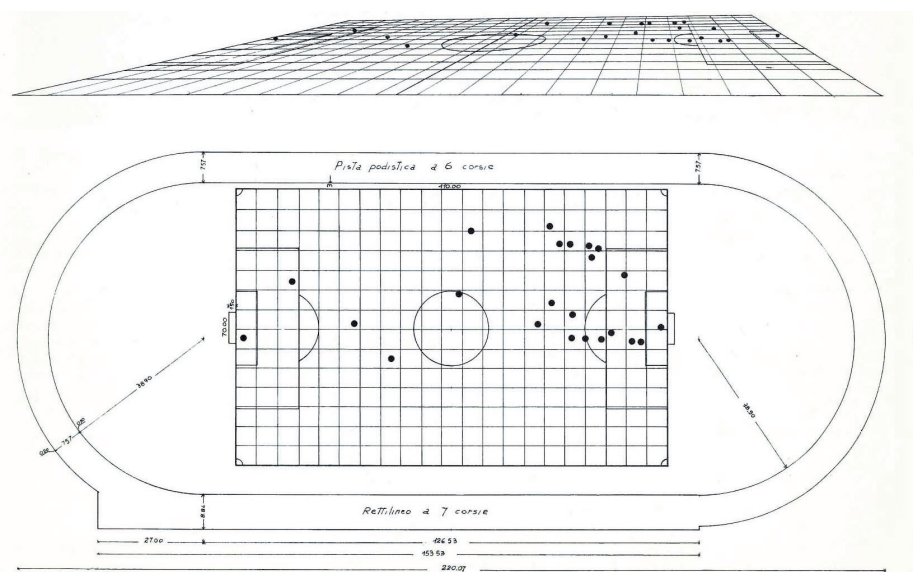


LEYENDA

- Curva geométrica de valores máximos
- Puntos donde se alcanzan los valores máximos
- Zonas de visibilidad nula

5.20 Representación gráfica de la curva donde se concentran los puntos de máxima visibilidad

(Elaboración propia)



El segundo método se centra en la estrategia de juego. Conociendo los diferentes fenómenos que se suceden en el campo y el lugar en los que éstos se desarrollan; se establece una ponderación del espacio en función de la relevancia del fenómeno que se lleva a cabo en él.

En el caso del estadio de fútbol, el arquitecto fija para la zona involucrada directamente en el tiro a puerta, un coeficiente de interés de 2,5 a 3,5; habiéndose fijado un coeficiente = 1,5 para el centro del campo; y para los bordes laterales centrales un coeficiente= 1.2 (Luigi Moretti, 1971/1972, pág. 41)

Por el primer método se consigue una forma de estadio a la que Luigi Moretti definió en sus investigaciones como *Stadio M*. Del segundo se obtiene otra forma de graderío conocido como *Stadio N*.

Fijados los métodos, Luigi Moretti define unas hipótesis con las que determina una función paramétrica. Resultado de esa función, se obtienen unas curvas que definen las áreas desde las cuales el terreno de juego se ve bajo las mismas condiciones visuales, dichas curvas reciben el nombre de curvas de equivisibilidad. La forma resultante del estadio se deducirá de una selección de dichas curvas.

El objetivo de este capítulo es conseguir la función paramétrica que define las curvas de equivisibilidad de los *Stadios M* y *N*, y reproducir dichas curvas con la ayuda de Maple y Grasshopper, programas informáticos orientados a la resolución de problemas matemáticos y de diseño computacional, respectivamente. Para conseguirlo, me he apoyado en el artículo «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*» escrito por Luigi Moretti en 1971 para la revista Moebius.

6.1 *Stadio M*

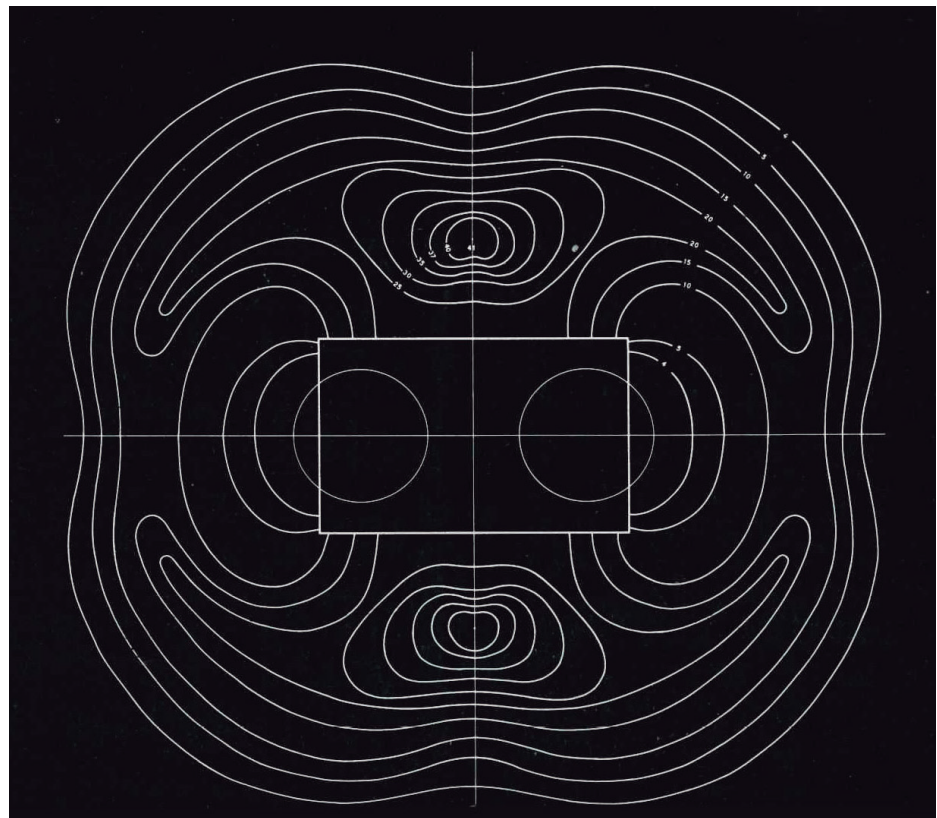
Como se ha mencionado anteriormente, la forma del *Stadio M* resulta del primer método a través del cual se localizan aquellos puntos del espacio que recogen mayor información.

En este apartado se busca obtener la función visibilidad que permite representar las curvas de equivisibilidad planteadas por Moretti.

La visibilidad total para el *Stadio M* se expresa por la función suma de las dos funciones relativas a la visibilidad de cada una de las áreas. [...] Se toma como unidad de medida la unidad de distancia desde la que se ve una de las áreas de interés bajo el ángulo óptimo (35°). (Luigi Moretti, 1971/1972, pág. 42)

$$W(d_1, d_2) = d_1^k e^{-kd_1} + d_2^k e^{-kd_2} \text{ con } k > 0,$$

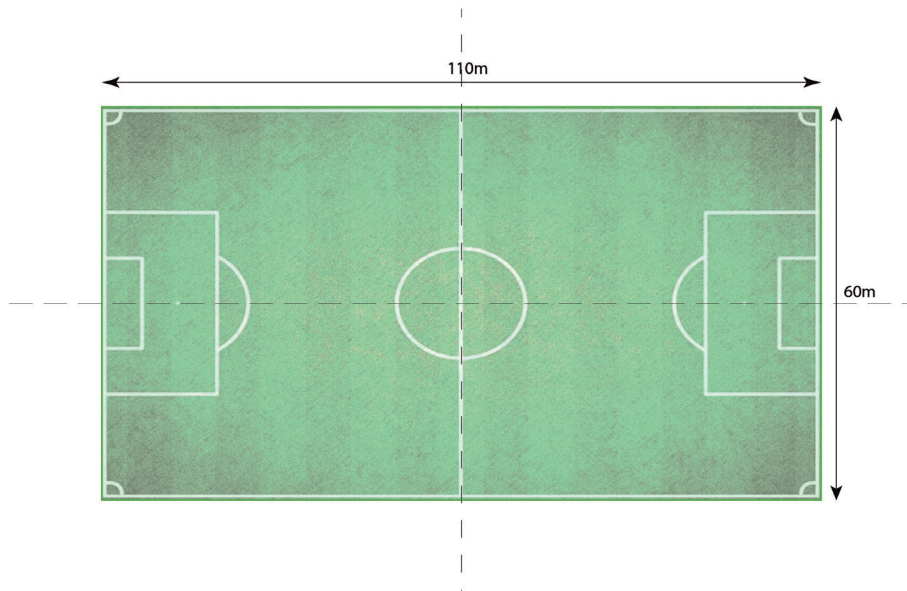
Siendo d_1 (resp. d_2) la distancia de un punto P al centro C_1 (resp. distancia de P a C_2).



6.3 Gráfico de las *curve di equivisibilità* del *Stadio M*.

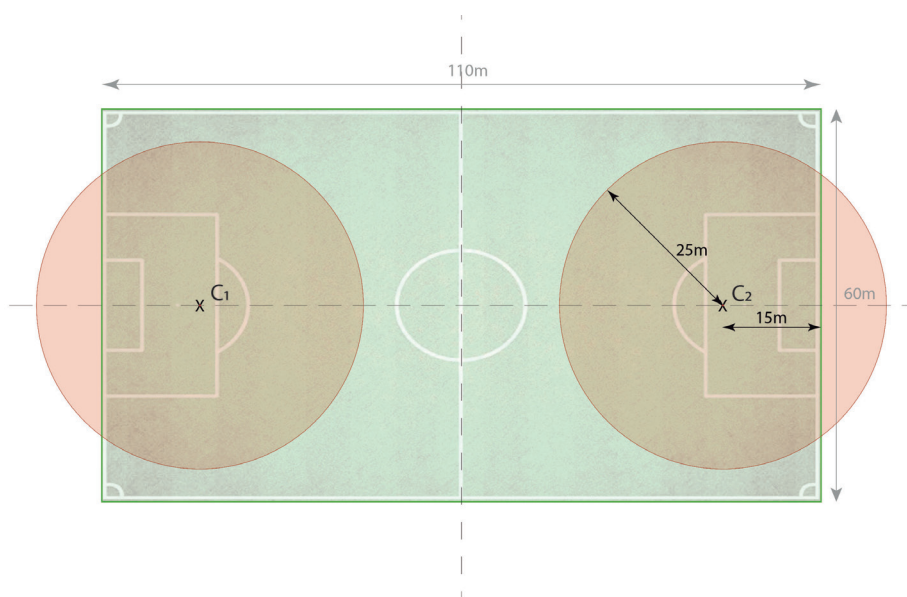
Para obtener las curvas de equivisibilidad que dan forma al estadio de fútbol en función de las áreas en las que se concentran los fenómenos de mayor interés, Luigi Moretti asume la siguiente hipótesis:

a) Visibilidad de todo el campo de juego. Luigi Moretti, plantea un área de juego de 110m x 60m



6.4 Esquema gráfico de las características del estadio de fútbol planteado por Moretti para la investigación del *Stadio M*.
(Elaboración Propia)

b) Las áreas de juego de mayor interés se identifican en dos círculos de centros C_1 y C_2 ubicados en el eje longitudinal del terreno de juego. Estas áreas de mayor interés presentan un diámetro de 50m y sus centros están colocados a una distancia de 15m de los lados menores del campo.

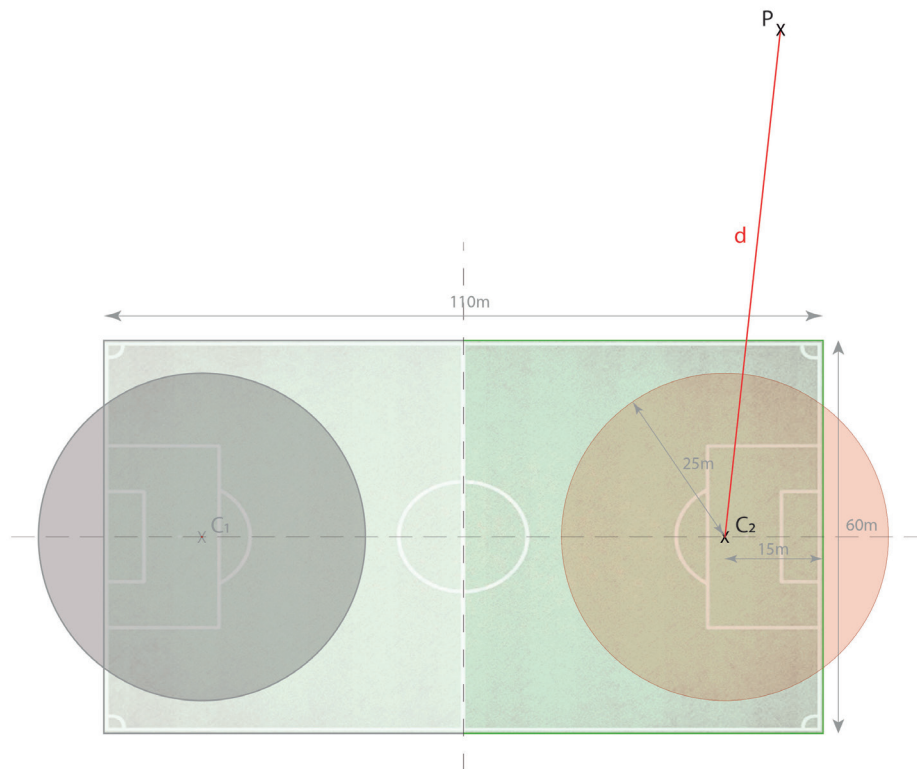


6.5 Esquema gráfico de las áreas de interés del estadio de fútbol planteado por Moretti para la investigación del *Stadio M*.
(Elaboración Propia)

c) Suponiendo que x es la distancia de un punto del estadio al centro del campo, buscamos una función $f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

1. La visibilidad es función de la distancia desde un punto del estadio al centro de las áreas de interés.

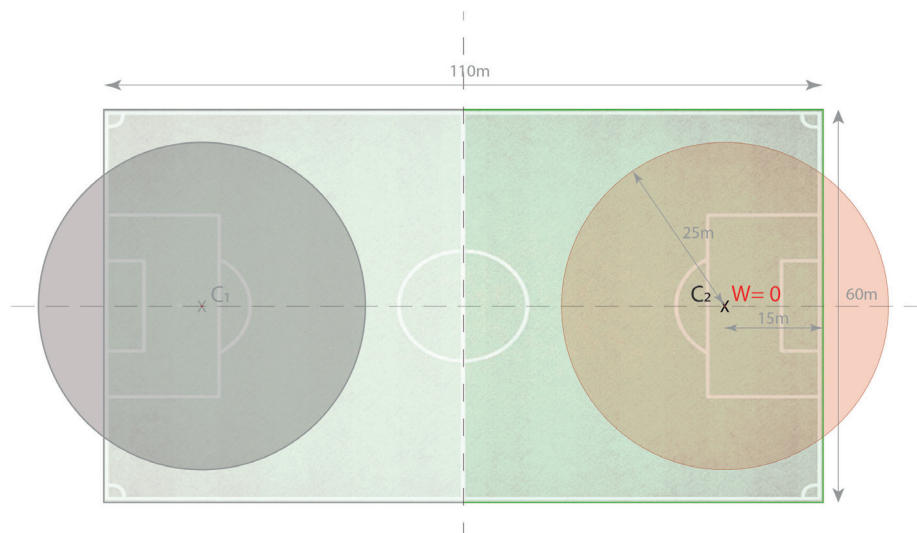
$$W(P_i) = f(x)$$



6.6 Esquema gráfico de la condición 1 que debe cumplir la función visibilidad
(Elaboración Propia)

2. La visibilidad en el centro de dichas áreas, es cero.

$$f(c) = 0$$



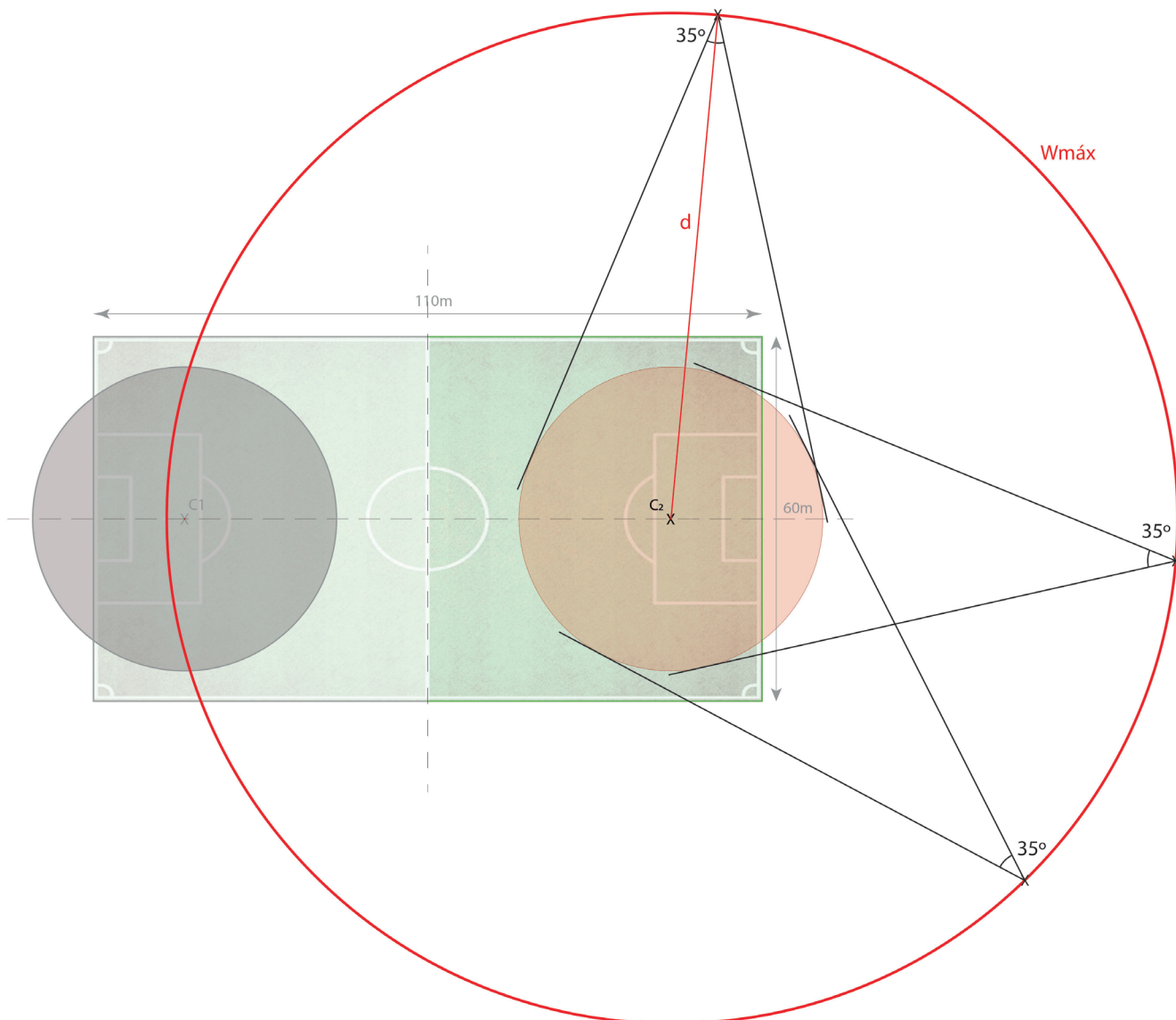
6.7 Esquema gráfico de la condición 2 que debe cumplir la función visibilidad
(Elaboración Propia)

3. La visibilidad es máxima cuando el área de interés se ve bajo un ángulo de 35° .

El máximo valor de f se alcanza en un valor de x prefijado y que denotaremos $x_{\max}$.

$$f(x_{\max}) = 1$$

$x_{\max}$ se localiza en un punto de la curva isóptica. Dicha curva es una circunferencia con centro C_i y radio d .



4. La visibilidad tiende a 0 cuando la distancia real tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

6.8 Esquema gráfico de la condición 3 que debe cumplir la función visibilidad
(Elaboración Propia)

Planteadas las condiciones que debe cumplir la función visibilidad, generamos el algoritmo de diseño que nos permita obtener las curvas de máxima visibilidad. Para ello, el primer paso será conocer la curva isóptica que permita ver el área de interés bajo un ángulo de 35° .

- Cálculo de la curva isóptica de ángulo α del área de interés

Para obtener el radio de la curva isóptica(d) conocemos los siguientes datos:

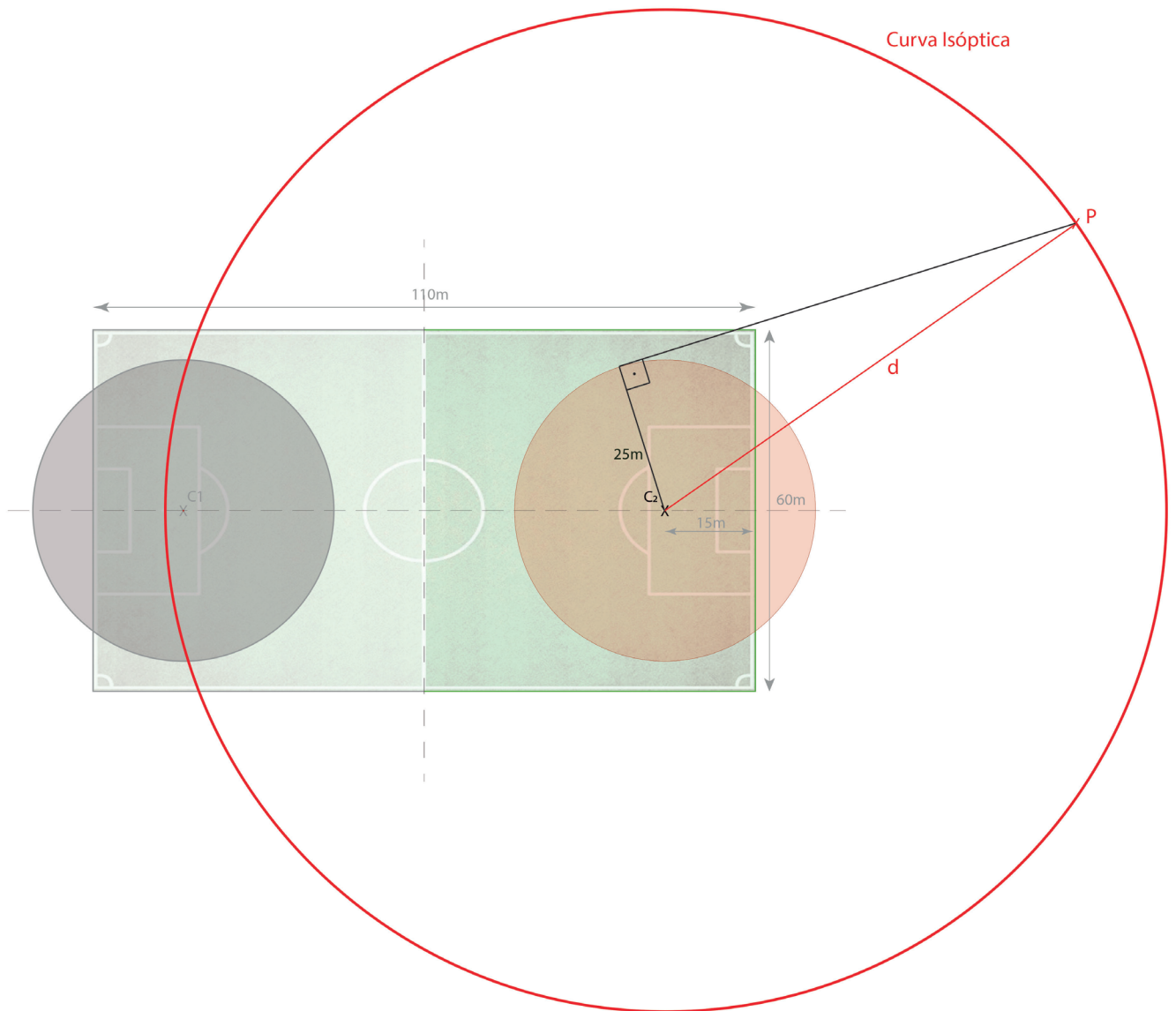
$$\alpha = 35^\circ$$

$$r = 25\text{m}$$

Por trigonometría se consigue la siguiente relación:

$$d = \frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

6.9 Esquema gráfico de la obtención de la curva isóptica
(Elaboración Propia)



Calculado el radio de la curva isóptica (d), buscamos la función visibilidad que cumpla las condiciones anteriormente planteadas. Hasta llegar a la función que cumple todas las condiciones, se hace un análisis de posibles candidatas. Dicho análisis se detalla a continuación:

- CANDIDATA 1 (véase imagen 6.10)

$$f(x) = e^{-x}, \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \\ f(c) \neq 0 \end{cases}$$

- CANDIDATA 2 (véase imagen 6.11)

$$f(x) = xe^{-x}, \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \\ f(c) = 0 \\ \text{no cumple que el máximo de } f \text{ se alcance en } x_{\max} \end{cases}$$

- CANDIDATA 3 (véase imagen 6.12)

$$f(x) = xe^{-\frac{x}{x_{\max}}}, \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \\ f(c) = 0 \\ \text{el máximo de } f \text{ se alcance en } x_{\max} \\ f(x_{\max}) \neq 1 \end{cases}$$

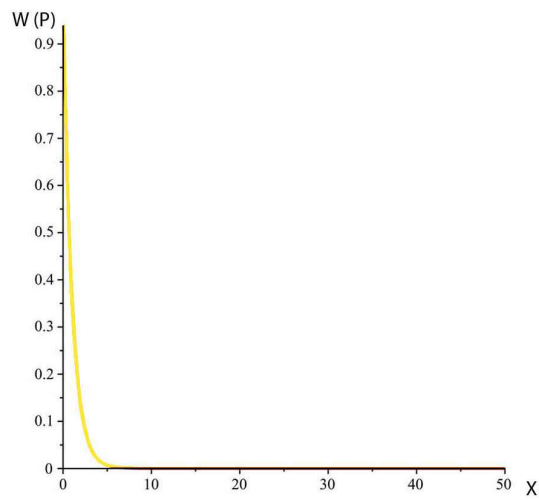
- CANDIDATA 4 (véase imagen 6.13)

$$f(x) = \frac{x}{x_{\max}} e^{-\frac{x}{x_{\max}}}, \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \\ f(c) = 0 \\ \text{el máximo de } f \text{ se alcance en } x_{\max} \\ f(x_{\max}) = 1 \end{cases}$$

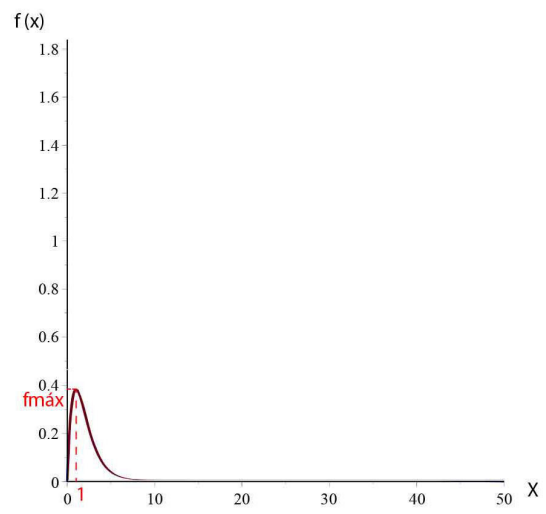
Tras el análisis, podemos definir la función visibilidad, respecto a una de las áreas de interés, como:

$$W(d) = \frac{d}{d_{\max}} e^{-\frac{d}{d_{\max}}}$$

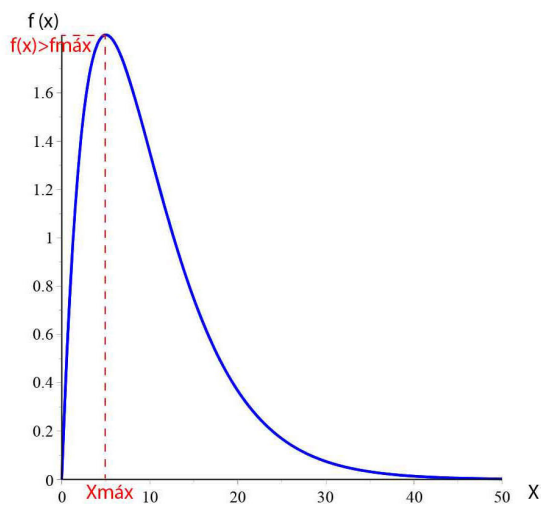
Siendo d la distancia de un punto P al centro del área A_2 y $d_{\max}$ la distancia del punto de intersección de la isóptica de ángulo $\alpha=35^\circ$ del área A_2 con el rayo OP



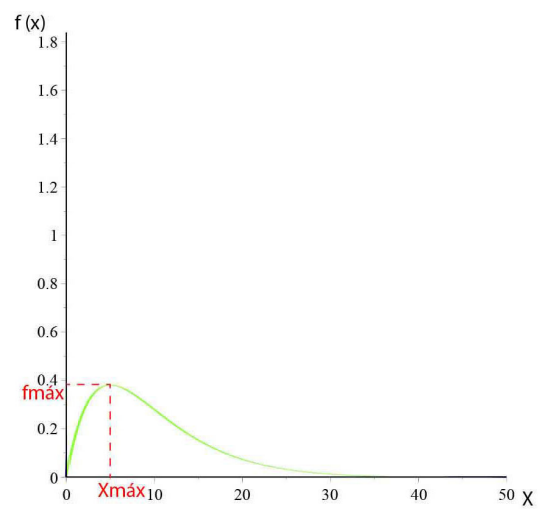
(6.10)



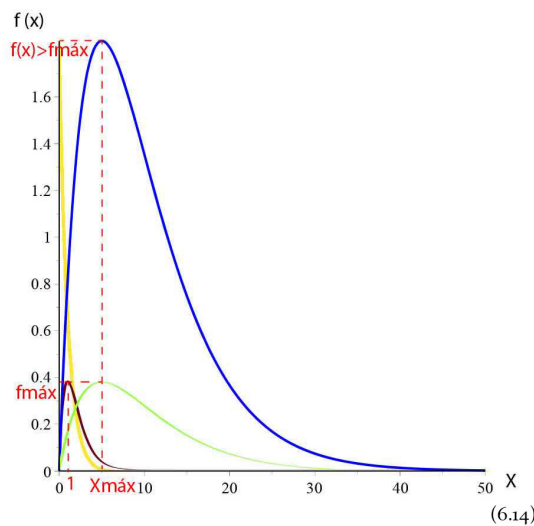
(6.11)



(6.12)



(6.13)



(6.14)

6.10 Gráfica $f(x)=e^{-x}$
 6.11 Gráfica $f(x)=xe^{-x}$
 6.12 Gráfica $f(x)=xe^{-x/(máx)}$

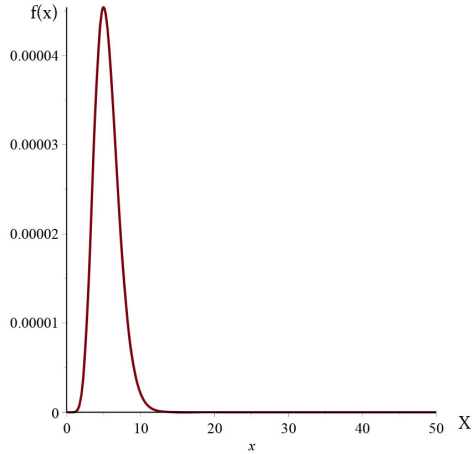
6.13 Gráfica
 $f(x)=x/(máx)e^{-x/(máx)}$

6.14 Gráfica en la que se muestran todas las funciones, se puede ver las diferencias existentes entre todas ellas.

(Elaboración Propia, gráficas obtenidas de Maple)

Si incluimos el parámetro K en la ecuación como plantea Luigi Moretti, podemos ver a través de la gráfica 6.15, que las condiciones anteriormente mencionadas no se cumplen.

$$W(d_1, d_2) = d_1^k e^{-k d_1}$$



6.15 Gráfica que muestra la función aplicando la constante K que indica Moretti en sus manuscritos

(Elaboración Propia, gráficas obtenidas de Maple)

Tras el análisis, la función que define la visibilidad total es la siguiente:

$$W(d_1, d_2) = \frac{d_1}{d_{1 \max}} e^{-\frac{d_1}{d_{1 \max}}} + \frac{d_2}{d_{2 \max}} e^{-\frac{d_2}{d_{2 \max}}}$$

- Cálculo de la distancia (d) de un punto P al centro del área de interés C_i

c es la distancia del origen de coordenadas a los respectivos centros del área de interés. Desde un punto P del estadio, con coordenadas $P=(x,y)$; las distancias d_i a cada uno de los centros son:

$$d_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Siendo $c=40m$

Se obtiene como resultado la siguiente función visibilidad:

$$W(x, y) = \frac{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}{d_{1 \max}} e^{-\frac{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}{d_{1 \max}}} + \frac{\sqrt{(x + c)^2 + y^2}}{d_{2 \max}} e^{-\frac{\sqrt{(x + c)^2 + y^2}}{d_{2 \max}}}$$

Para definir las curvas de equivisibilidad debemos conocer el valor que toma la visibilidad máxima. Conocido dicho valor sabremos la altura a la que colocar los diferentes planos y así obtener las distintas curvas. El valor máximo se localiza en los puntos de intersección de las curvas isópticas.

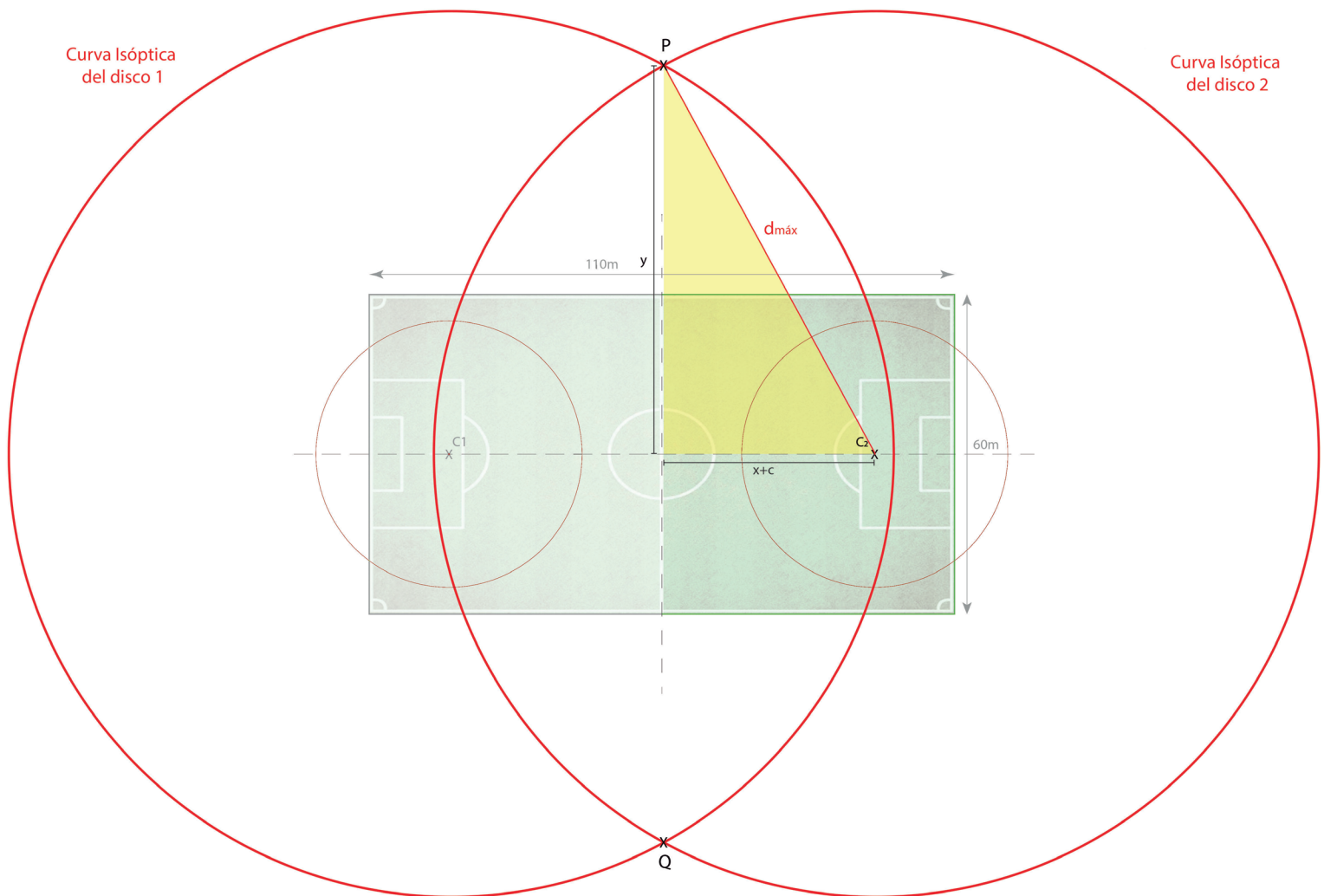
Los puntos P y Q son los puntos de intersección y se ubican en las coordenadas:

$$\begin{cases} (x+c)^2 + y^2 = d_{2\max}^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = d_{2\max}^2 - c^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

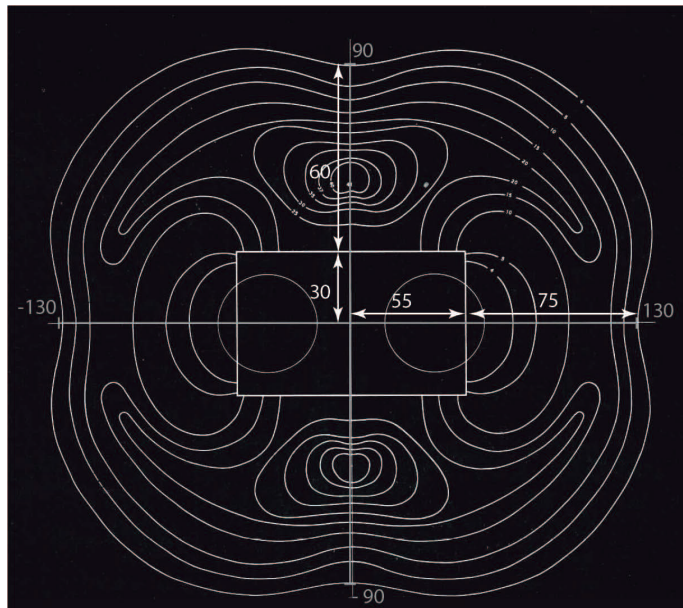
6.16 Esquema gráfico que muestra los datos con los que obtener $d_{\max}$
(Elaboración Propia)

$$P = (0, \sqrt{d_{2\max}^2 - c^2})$$

$$Q = (0, -\sqrt{d_{2\max}^2 - c^2})$$



Queda determinar el espacio reservado para los espectadores, para ello se define el dominio tomando como referencia las curvas de equivisibilidad planteadas por Moretti.



6.17 Esquema de proporción sobre las curvas de visibilidad desarrolladas por Moretti.

Dicha proporción nos permite fijar el dominio de las variables x, y
(Elaboración Propia)

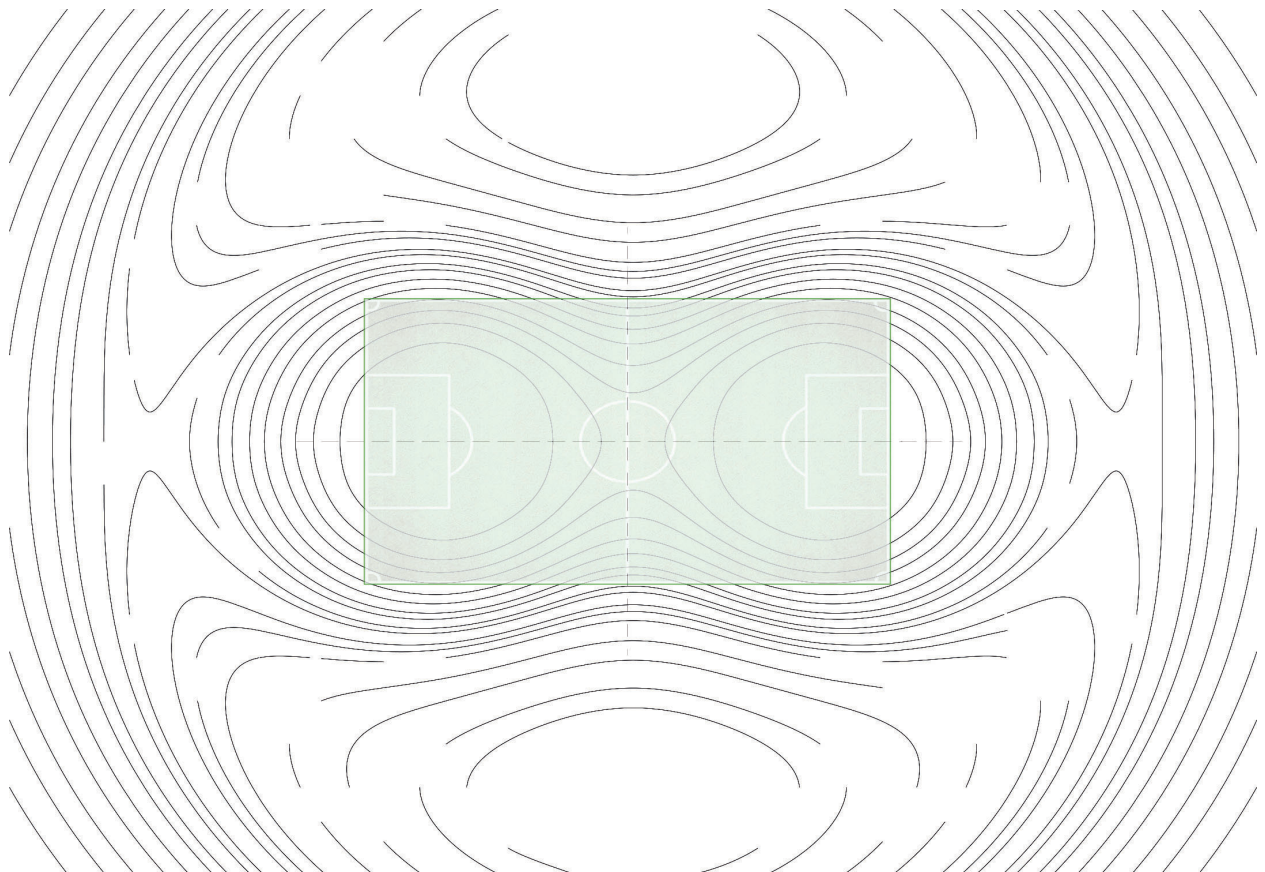
Se define un dominio:

$$-130 \leq x \leq 130$$

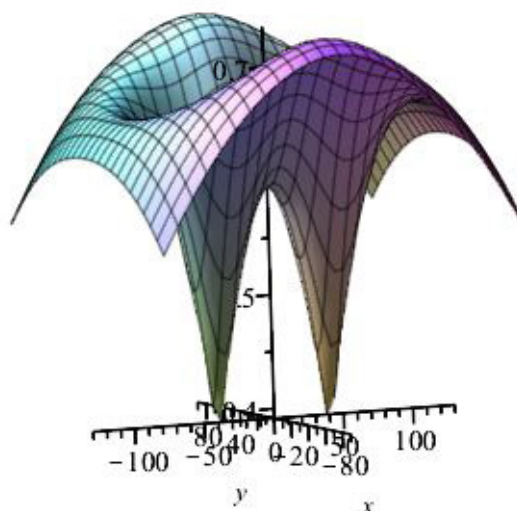
$$-90 \leq y \leq 90$$

Definidos los parámetros y la función que los relaciona, se representan las curvas de equivisibilidad usando el programa Grasshopper.

6.18 Curvas de equivisibilidad obtenidas a través de grasshopper siguiendo la hipótesis de Luigi Moretti para el *Stadio M*
(Elaboración Propia)



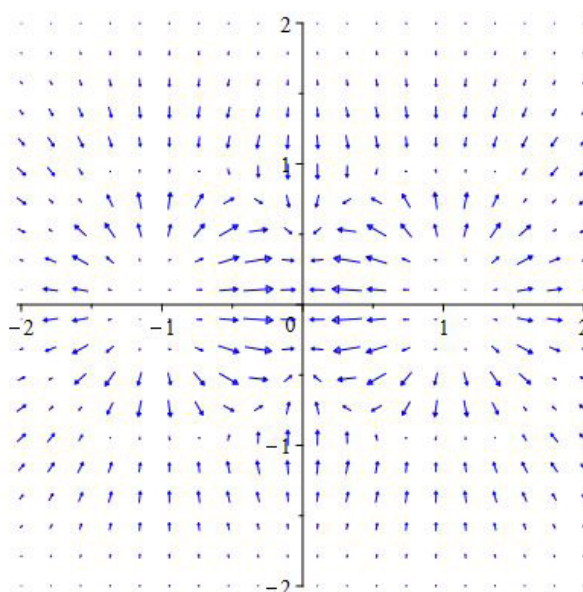
La siguiente imagen muestra la superficie que define la función visibilidad.



6.19 Superficie asociada a la función visibilidad que determina la forma del *Stadio M*
(Elaboración Propia)

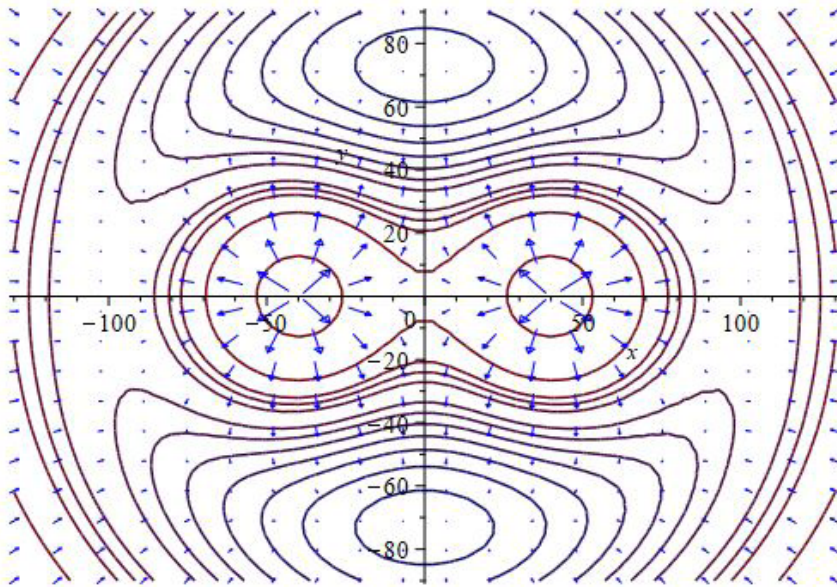
De la intersección de dicha superficie con planos perpendiculares a ella y ubicados a diferentes alturas se obtienen las curvas de equivisibilidad que se detallan en la imagen 6.18.

El vector gradiente de una función indica la dirección en la que aumentan los valores del campo. Es decir, cualquier punto X del espacio lleva asociado un vector gradiente que marca la trayectoria hacia los puntos de mayor valor. La siguiente imagen muestra el campo gradiente asociado a la función visibilidad del *Stadio M*.



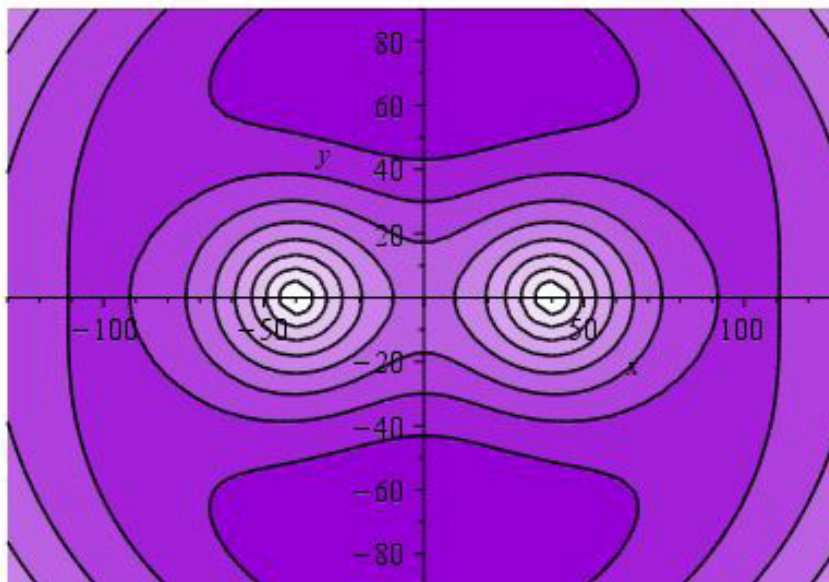
6.20 Campo gradiente de la función visibilidad del *Stadio M*
(Elaboración Propia)

Si se superponen los vectores a las curvas de equivisibilidad, se puede ver como el campo de gradientes de la función es perpendicular a las curvas de nivel.



6.21 Campo gradiente superpuesto a las curvas de equivisibilidad que definen la forma del *Stadio M*
(Elaboración Propia)

La siguiente imagen fija en blanco las áreas que presentan los valores de visibilidad más bajos. Por el contrario, el color morado se va intensificando en las áreas que van tomando valores más altos.



6.22 Gráfico que marca en blanco las superficies con valores más bajos de visibilidad y en morado aquellas de mayor valor.
(Elaboración Propia)

Esta última imagen da veracidad a la definición de campo gradiente y por lo tanto a la imagen 6.21.

6.2 *Stadio N*

La forma del *Stadio Nes* resultado de la ponderación del espacio en función de la relevancia que tienen las acciones que se desarrollan en el terreno de juego.

Al igual que en el apartado anterior se busca hallar la función visibilidad y con el programa informático Grasshopper representar las curvas de equiavisibilidad.

Para este segundo caso, la función visibilidad depende no sólo de la distancia entre un punto P del espacio y el centro del área de interés, también del ángulo que forma el rayo que contiene al punto P con el eje de ordenadas.

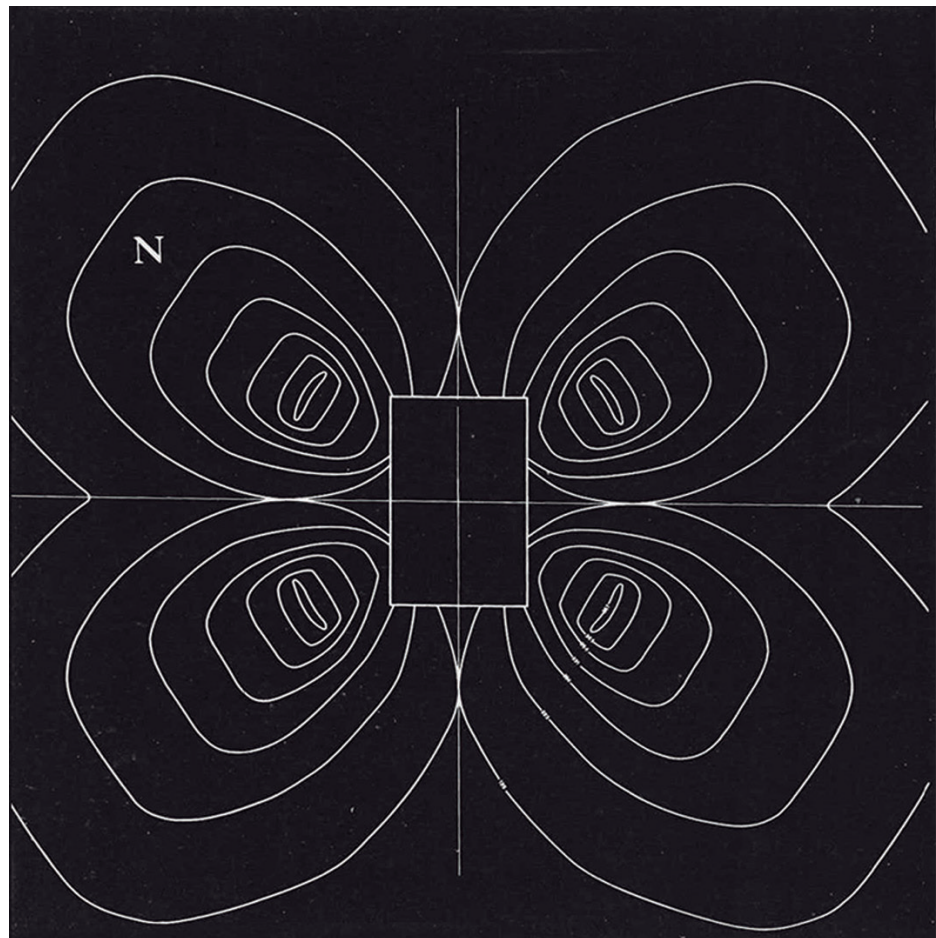
Para este segundo caso, Moretti define la siguiente función:

$$W(x, y) = x^{k(y)} e^{-k(y)x}$$

$$k(y) = 3,5y^2 - 2,5y + 1,5$$

$$x = \frac{\rho}{\rho(\theta)} \quad y = \frac{2\theta}{\pi}$$

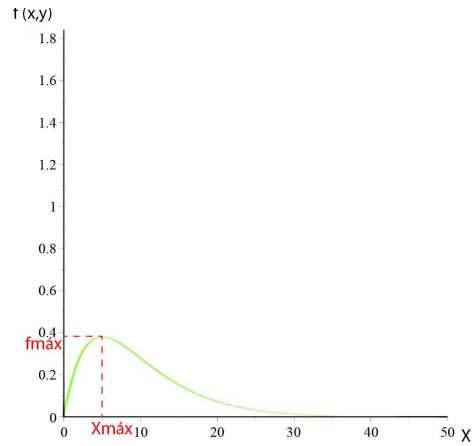
Siendo x el parámetro que define la distancia e y el que define el ángulo que forma el rayo con el eje de ordenadas



6.23 Gráfico de las curvas de equiavisibilidad del *Stadio N*.

Para obtener las curvas de visibilidad asociadas a la estrategia de juego, Luigi Moretti define las siguientes propiedades:

a) La visibilidad en cada rayo, que tiene su origen en el origen de coordenadas, es cero en el origen, aumenta hasta un máximo, y decrece hasta desaparecer en el infinito



6.24 Gráfica que muestra la función visibilidad de cada rayo.

(Elaboración Propia, gráficas obtenidas de Maple)

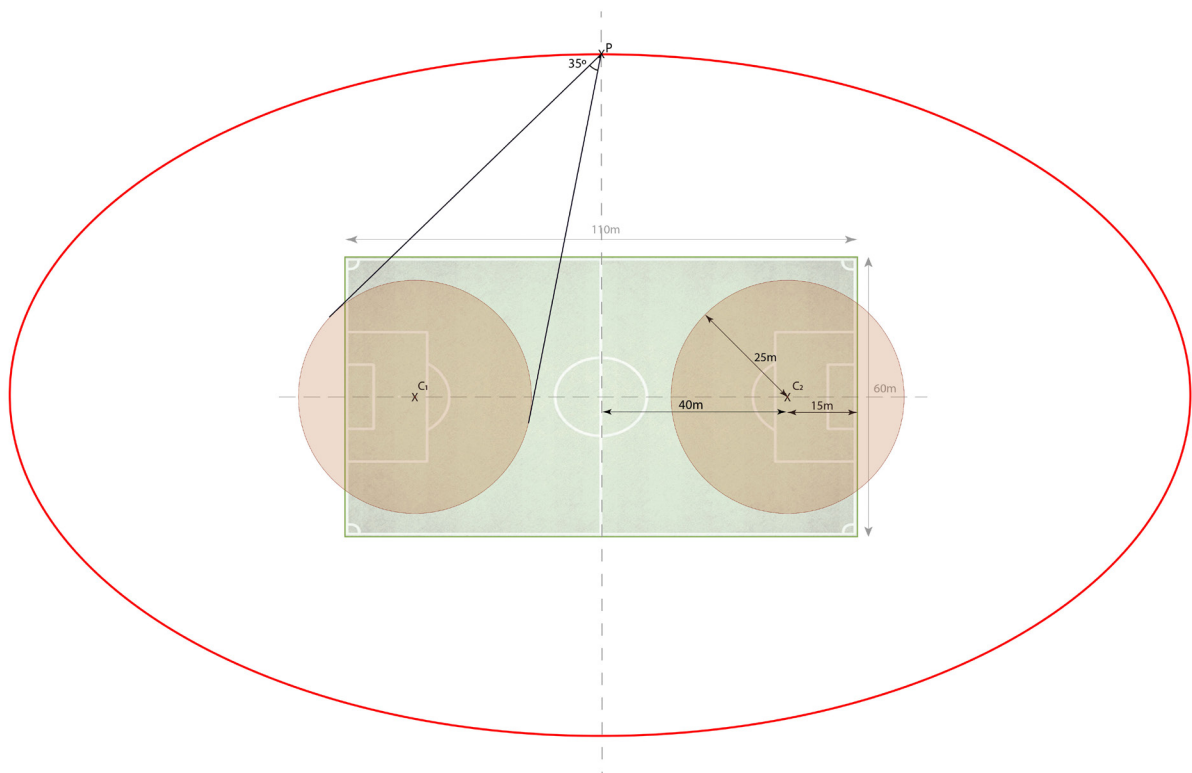
b) El lugar geométrico de los valores de máxima visibilidad, es una elipse con focos C_1 y C_2 ubicados en el eje mayor del campo, a 15m de distancia de cada una de las porterías y que pasa por un punto ubicado en el eje de ordenadas desde donde se ven las áreas de interés bajo un ángulo de 35° . Las áreas de interés al igual que para el *Stadio M*, son 2 circunferencias de diámetro 50m y centros C_1 y C_2 .

$$r=25\text{m}$$

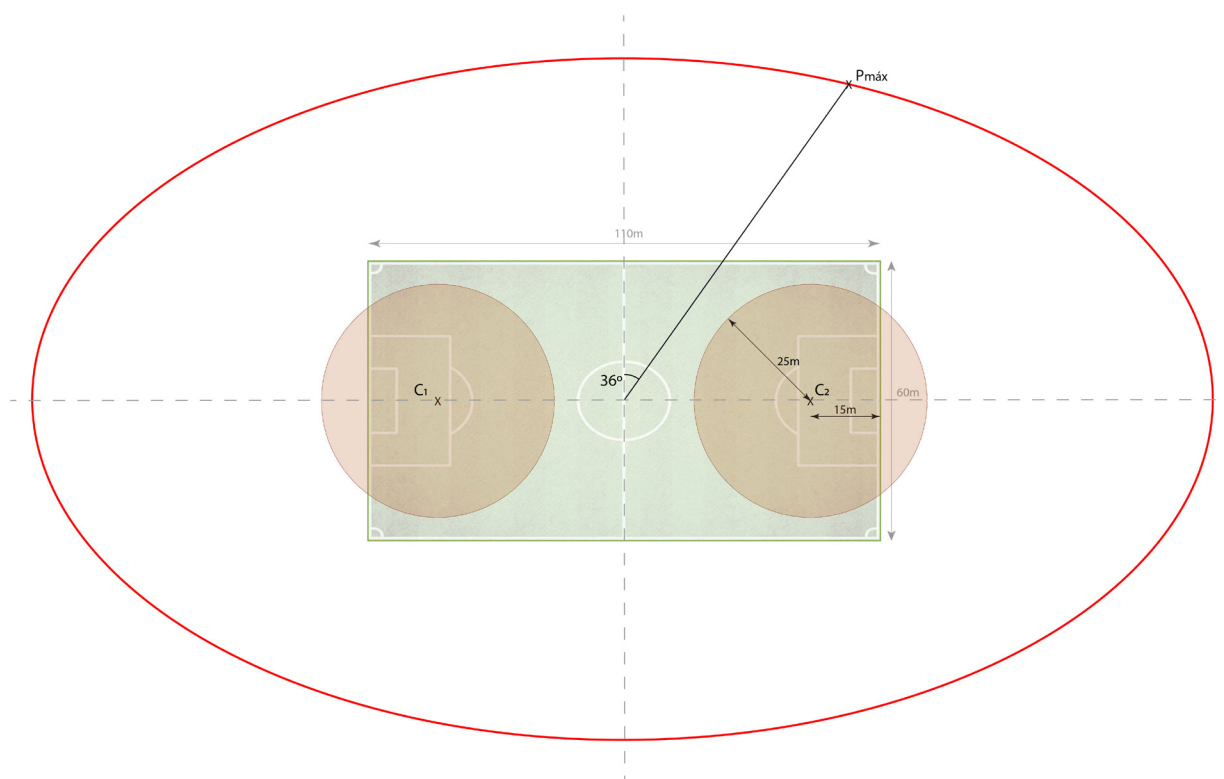
$$d(0, C_2)=40\text{m}$$

6.25 Representación de la elipse donde se ubican los valores de máxima visibilidad.

(Elaboración Propia)



c) El ángulo θ define la ubicación del rayo respecto al eje de ordenadas. Como θ varía, los máximos en cada rayo varían alcanzando el valor máximo para el ángulo $\theta=36^\circ$.



6.26 Representación del rayo que depende del ángulo θ .

Representación del rayo con $\theta=36^\circ$, rayo donde se alcanza el valor de máxima visibilidad.

(Elaboración Propia)

- Cálculo de la elipse de máxima visibilidad

Para definir la función visibilidad que cumpla estas condiciones, debemos calcular la elipse con focos C_1 y C_2 y que contenga al punto, P , del eje de ordenadas bajo el cual las áreas de interés se ven con un ángulo de 35° .

La elipse se define como el lugar geométrico formado por los puntos cuya suma de distancias respecto a dos puntos fijos es constante. Esta figura geométrica queda definida por dos ejes perpendiculares y desiguales y su ecuación es la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor.

Por tanto, para calcular la elipse se debe conocer el valor que toman dichos semiejes.

Por la definición de la elipse, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a cada uno de los centros de las áreas de interés es constante. Siendo X un punto de la elipse, se cumpla la siguiente relación (véase imagen 6.27):

$$d(X, C_1) + d(X, C_2) = \text{cte}$$

Por tanto, llamando $d = d(P, C_i)$ para $i = 1, 2$; se obtiene la siguiente expresión:

$$d(P, C_1) + d(P, C_2) = 2d$$

Por trigonometría, se deduce:

$$d^2 = a^2 + c^2 \implies a = \sqrt{d^2 - c^2}$$

$$P = (0, \sqrt{d^2 - c^2})$$

$$A = (x, 0)$$

Teniendo en cuenta que (véase imagen 6.28):

$$d(A, C_1) = x - c$$

$$d(A, C_2) = x + c$$

Se deduce:

$$2d = d(A, C_1) + d(A, C_2) = 2x$$

Se hallan de este modo las coordenadas del punto $A = (d, 0)$ y la ecuación cartesiana de la elipse es:

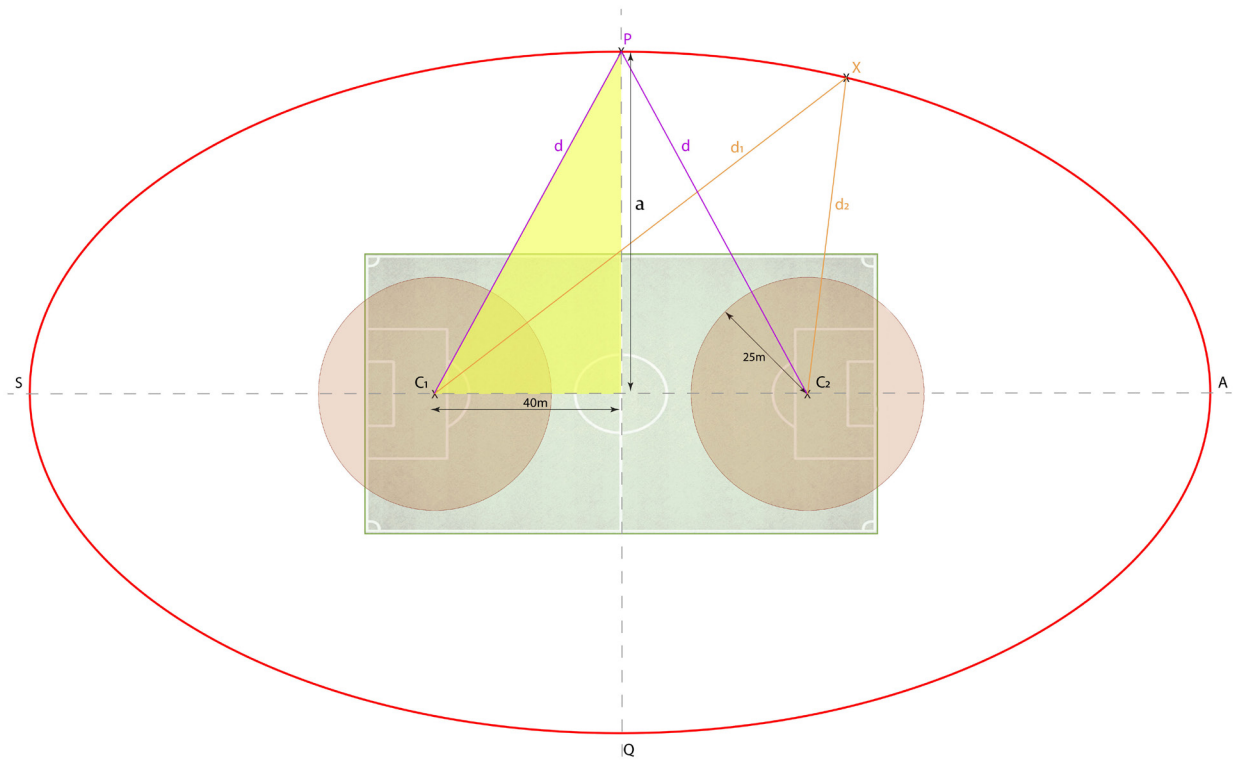
$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2 - c^2} = 1$$

Siendo:

$$d = \frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

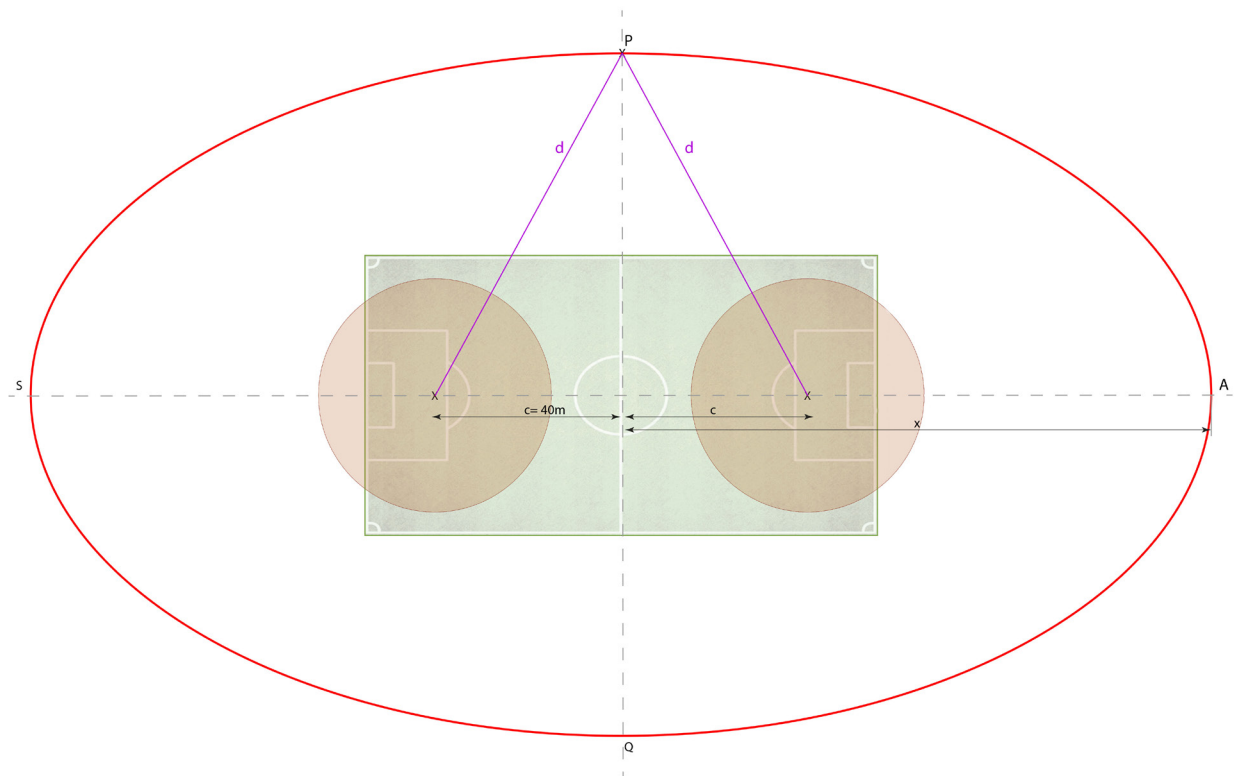
$$r = 25 \text{ m}$$

$$\alpha = 35^\circ$$



6.27 Representación gráfica para obtener la medida del eje menor de la elipse.

(Elaboración Propia)



6.28 Representación gráfica del modo de hallar la coordenada A.

(Elaboración Propia)

Como se muestra en la imagen 6.29, sea $X = (x, y)$ un punto cualquiera de las gradas y considerando:

$$\rho = d(X, O)$$

θ el ángulo formado por eje de ordenadas con el rayo OX

Se tiene:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

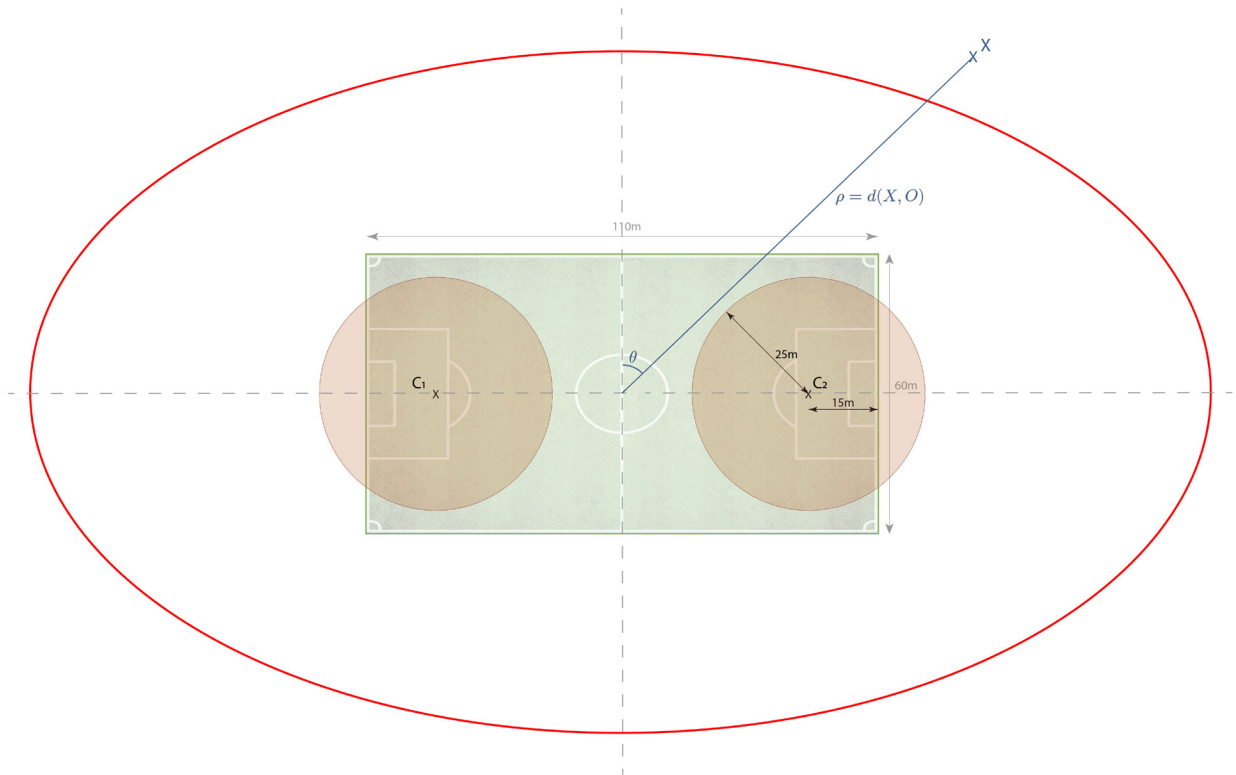
- Calculamos $\bar{\rho}(\theta)$ (véase imagen 6.30)

Para cada θ vamos a calcular la distancia $\bar{\rho}(\theta)$ para el cual el punto $(\bar{\rho}(\theta)\cos\theta, \bar{\rho}(\theta)\sin\theta)$ es un punto de la elipse. Por tanto,

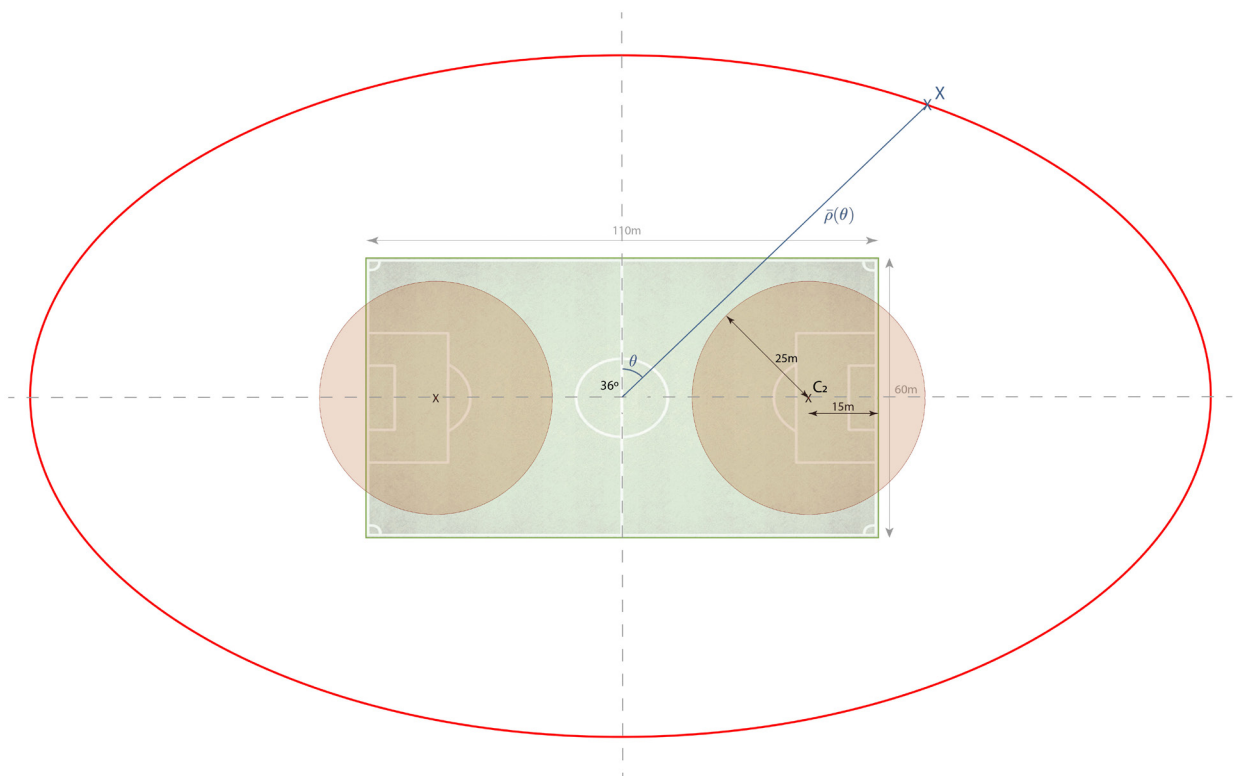
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\bar{\rho}(\theta)^2 \cos^2 \theta}{d^2} + \frac{\bar{\rho}(\theta)^2 \sin^2 \theta}{d^2 - c^2} \\ &= \bar{\rho}(\theta)^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{d^2} + \frac{\sin^2 \theta}{d^2 - c^2} \right) \\ &= \bar{\rho}(\theta)^2 \frac{d^2 \cos^2 \theta - c^2 \cos^2 \theta + d^2 \sin^2 \theta}{d^2 (d^2 - c^2)} \\ &= \bar{\rho}(\theta)^2 \frac{d^2 - c^2 \cos^2 \theta}{d^2 (d^2 - c^2)} \end{aligned}$$

De la ecuación, se deduce:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\theta) &= d \sqrt{\frac{d^2 - c^2}{d^2 - c^2 \cos^2 \theta}} \\ \begin{cases} x = \bar{\rho}(\theta) \cos \theta \\ y = \bar{\rho}(\theta) \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$



6.29 Representación gráfica
 $\rho = d(X, O)$.
 (Elaboración Propia)



6.30 Representación gráfica
 $\rho(\theta)$.
 (Elaboración Propia)

La función visibilidad que define el diseño es:

$$W(x, y) = x^{k(y)} e^{-k(y)x}$$

Para los parámetros:

$$x = \frac{\rho}{\bar{\rho}(\theta)} \quad \text{siendo} \quad \bar{\rho}(\theta) = d \sqrt{\frac{d^2 - c^2}{d^2 - c^2 \cos^2 \theta}}$$

$$y = \frac{2\theta}{\pi}$$

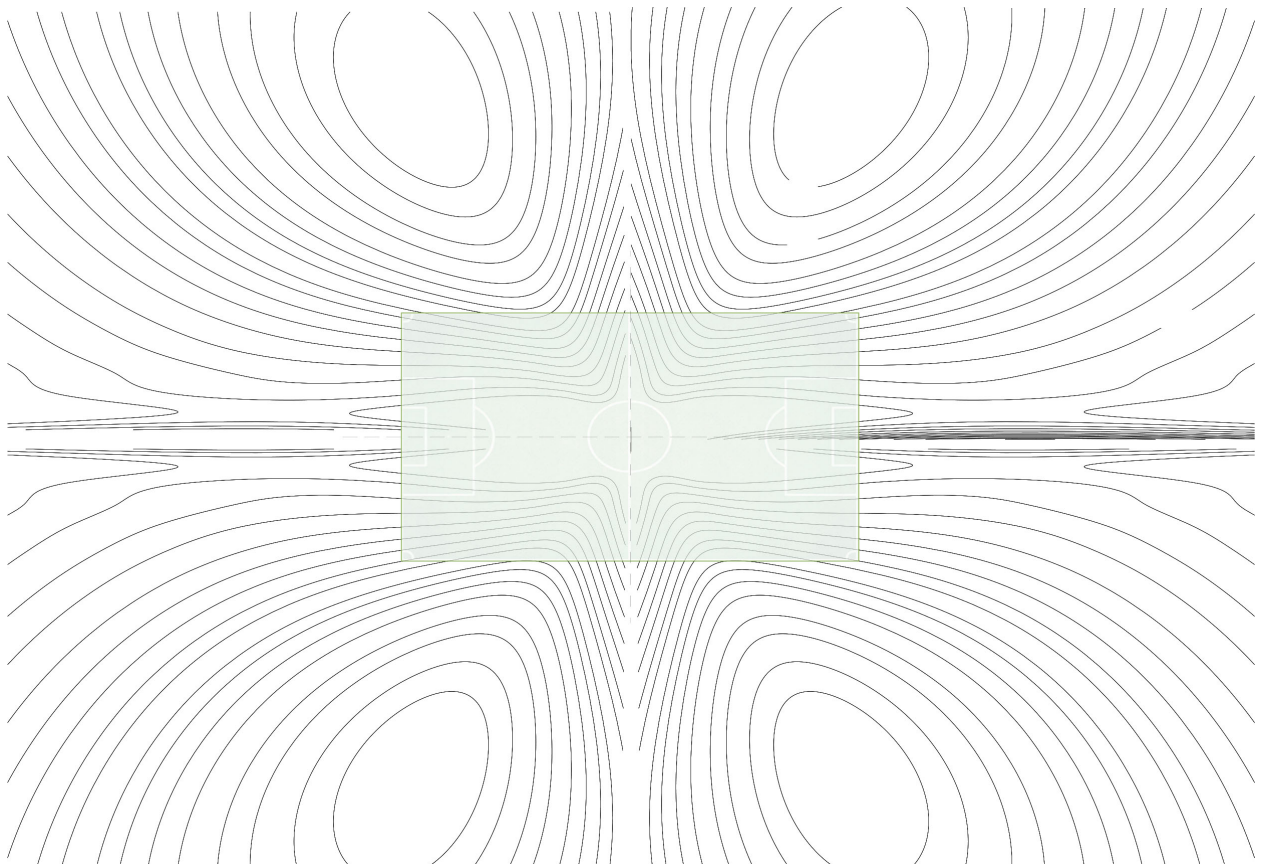
Y la constante k :

$$k(y) = 3,5y^2 - 2,5y + 1,5$$

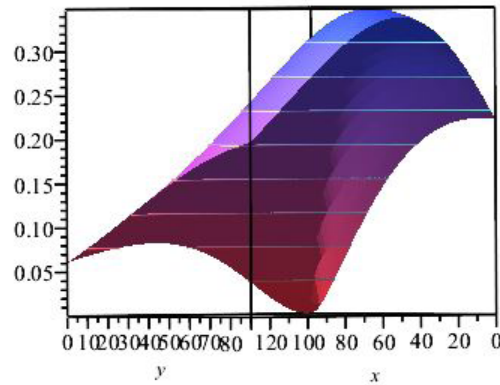
Cuya expresión viene definida por la función de una parábola. Los coeficientes que estableció Moretti en relación a la estrategia de juego y los cuales se encuentran descritos al inicio de este apartado, cuando se explica el método 2, establecen los términos de la expresión.

Conocida la función y con ayuda de Grasshopper, se representan las curvas de equivisibilidad.

6.31 Curvas de equivisibilidad obtenidas a través de grasshopper siguiendo la hipótesis de Luigi Moretti para el *Stadio N*.
(Elaboración Propia)



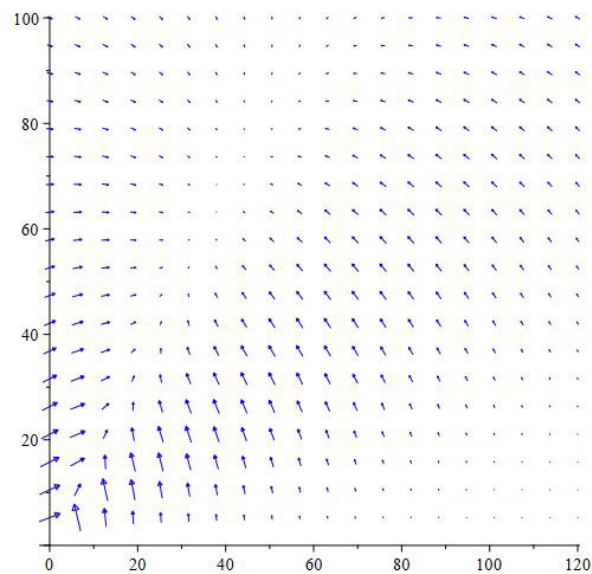
La siguiente imagen muestra 1/4 de la superficie que define la función visibilidad.



6.32 Superficie asociada a la función visibilidad que determina la forma del *Stadio N*.

(Elaboración Propia)

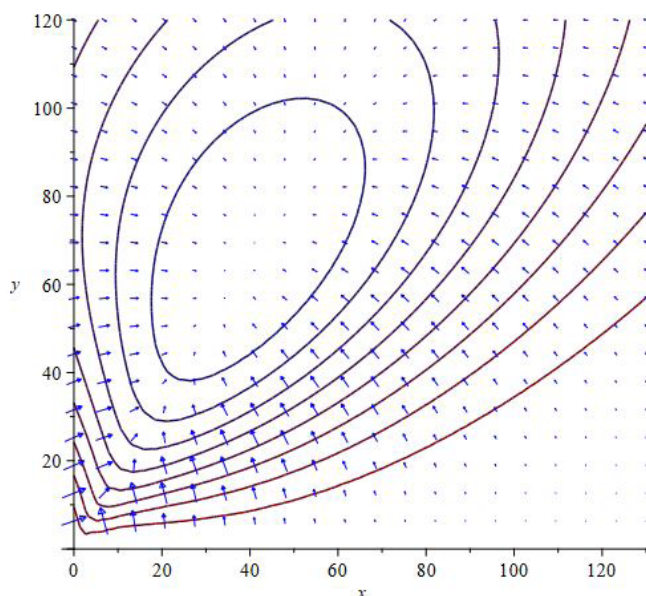
El campo de gradientes en ese cuarto de la función es:



6.33 Campo gradiente de la función visibilidad del *Stadio N*.

(Elaboración Propia)

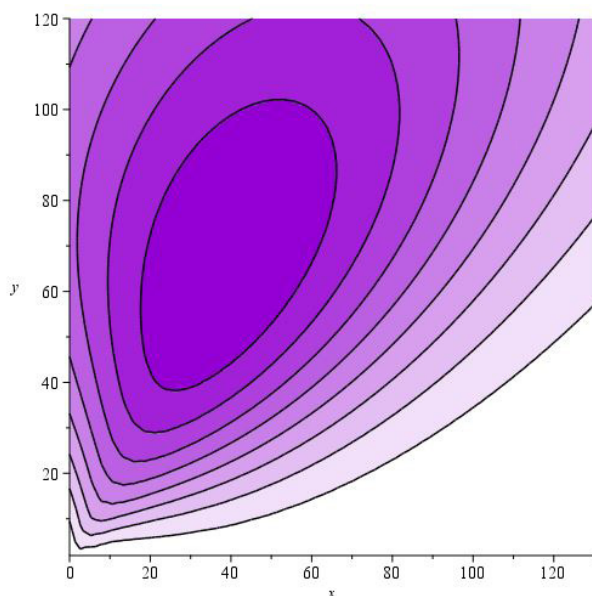
Si se superponen los vectores a las curvas de equivisibilidad, se puede ver como el campo de gradientes de la función es perpendicular a las curvas de nivel.



6.34 Campo gradiente superpuesto a las curvas de equivisibilidad que definen la forma del *Stadio N*.

(Elaboración Propia)

Esta última imagen da veracidad a la definición de campo gradiente y por lo tanto a la imagen 6.21 al coincidir las áreas marcadas en un morado más intenso con la dirección de crecimiento que marcan los vectores gradientes.



6.35 Gráfico que marca en blanco las superficies con valores más bajos de visibilidad y en morado aquellas de mayor valor.

(Elaboración Propia)

Conclusiones

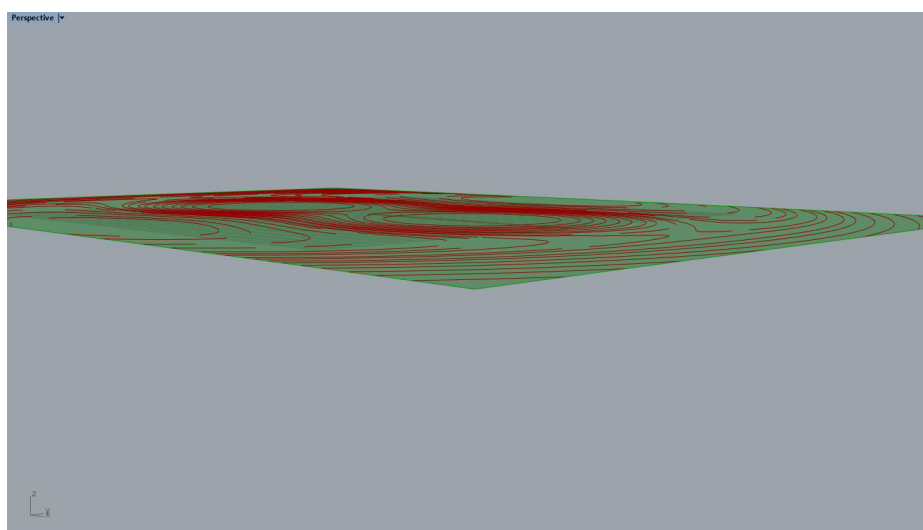
Tras la investigación realizada para el desarrollo del presente trabajo, es importante recalcar la evolución del término arquitectura paramétrica. La base de este lenguaje arquitectónico se encuentra en la definición de una forma a partir de una lista de parámetros. Mientras que inicialmente a partir del tema de diseño se fijaban unos parámetros y de la relación de dichos parámetros se generaba un algoritmo de diseño que definía la forma, actualmente se determinan unos parámetros que permitan generar una forma preconcebida. Ambos métodos son válidos y responden a las necesidades del diseño, pero es importante recalcar que este trabajo busca recuperar esa idea inicial bajo la cual se concibió el término arquitectura paramétrica. Aplicando el proceso definido por Moretti, y el cual se ha analizado a lo largo de este trabajo, se pueden obtener formas arquitectónicas adaptadas a las necesidades y con una base científica apoyada en las matemáticas acabando así con el uso de formas que han sido definidas a lo largo de los años y que se siguen utilizando de forma sistemática.

La forma de los ejemplos analizados en el capítulo 5 y los casos de estudio del capítulo 6 son resultado del afán de Luigi Moretti por modelar la visibilidad. Entendido el proceso que se basa en: definir un tema, establecer unos parámetros asociados a dicho tema y establecer unas relaciones que se puedan definir matemáticamente entre los distintos parámetros para generar el algoritmo de diseño, se puede aplicar el método en otros ámbitos. Si queremos diseñar una discoteca que presenta viviendas alrededor, el tema de diseño puede ser la máxima insonorización del establecimiento, con lo cual el objetivo será encontrar una expresión matemática a través de la cual modelar el sonido y generar la forma en función a dicha expresión. Si por el contrario quiero diseñar una urbanización de viviendas unifamiliares cuya principal fuente de energía sea el sol, buscaré el algoritmo de diseño que modele el soleamiento para localizar las áreas que reciben mayor luz y desarrollar en ellas las viviendas.

Como se ha podido ver en el capítulo 5 de este trabajo, a pesar de que la forma de todos los estadios responde a la necesidad de mejorar la visibilidad, la hipótesis que define la función es distinta para cada caso y está relacionada con los fenómenos que se suceden en las instalaciones y no sólo con el tema de diseño. En este trabajo se ha analizado la forma propuesta por Moretti para diseñar estadios de fútbol con el máximo confort visual. Por tanto, quedan abiertas 3 líneas de investigación cuyo fin es obtener las curvas de equivisibilidad que definen la forma obtenida para las instalaciones que vayan a albergar una piscina, una pista de tenis o una sala de cine.

Como punto de partida, se facilitan los análisis planteados en el capítulo 5 de este trabajo.

Como se ha mencionado en el trabajo, para representar las curvas de visibilidad se ha utilizado el programa de Grasshopper. Dichas curvas son resultado de la intersección de la superficie definida por la función con planos perpendiculares a ésta ubicados a diferentes alturas. Si se observa la superficie de visibilidad en el programa de diseño mencionado, se puede observar que los valores en el eje z son bastante más pequeños que los definidos para el eje x , y . Para poder modelar el estadio en 3 dimensiones sería necesario realizar un reescalado que no aparece contemplado en los escritos de Moretti a los que se ha tenido acceso. Queda abierta otra línea de investigación basada en la definición del modelo en 3 dimensiones.

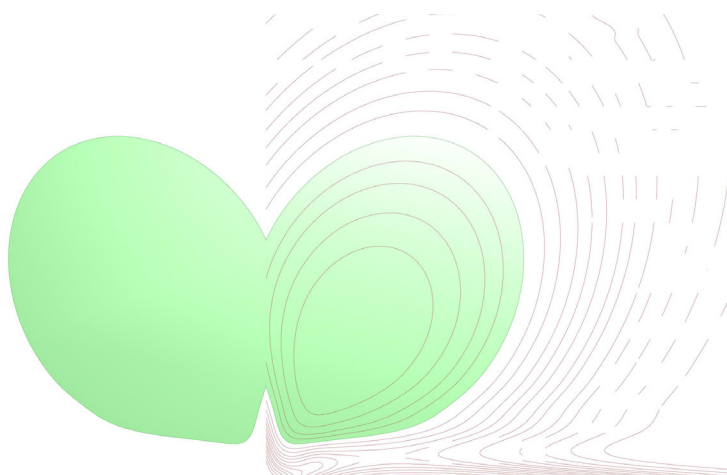


7.1 Imagen tomada del programa informático de Grasshopper y que muestra la superficie en perspectiva reflejando los valores tan pequeño que toma la superficie en el eje z .

(Elaboración propia)

Con la intención de generar un modelo físico como el que presentó Moretti en la XII Trienal de Milán, se han planteado dos métodos a partir de los cuales dar altura a las curvas de equivisibilidad. Estos métodos se han aplicado para obtener la forma física del *Stadio N*.

- El primer método se basa en localizar una curva de equivisibilidad cerrada y generar a partir de ella un volumen que se intersecará con un elipsoide. De dicha intersección, se obtendrán curvas a diferentes ángulos y la forma del estadio resultará de la selección de una de dichas curvas.

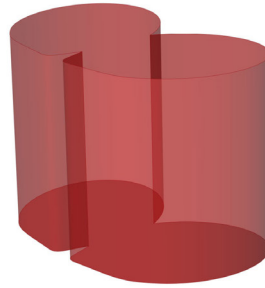


7.2 Localización de una curva de equivisibilidad cerrada.

(Elaboración propia)

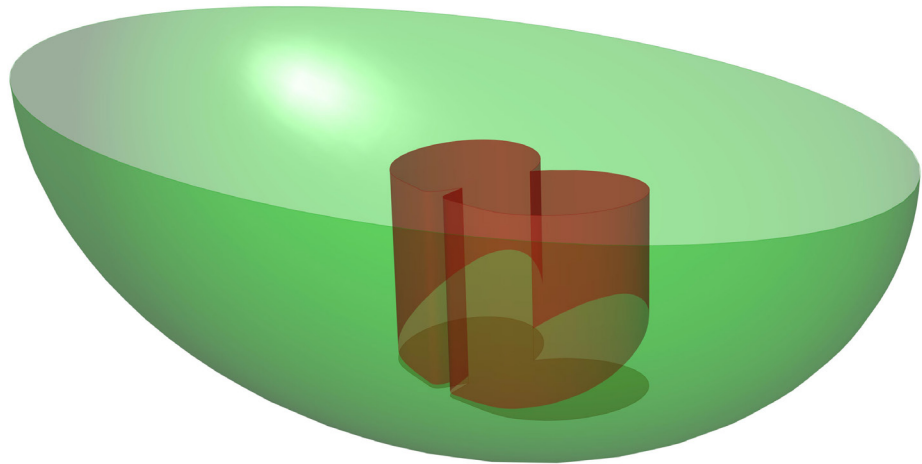
7.3 Volumen generado a partir de la curva de equisibilidad cerrada.

(Elaboración propia)



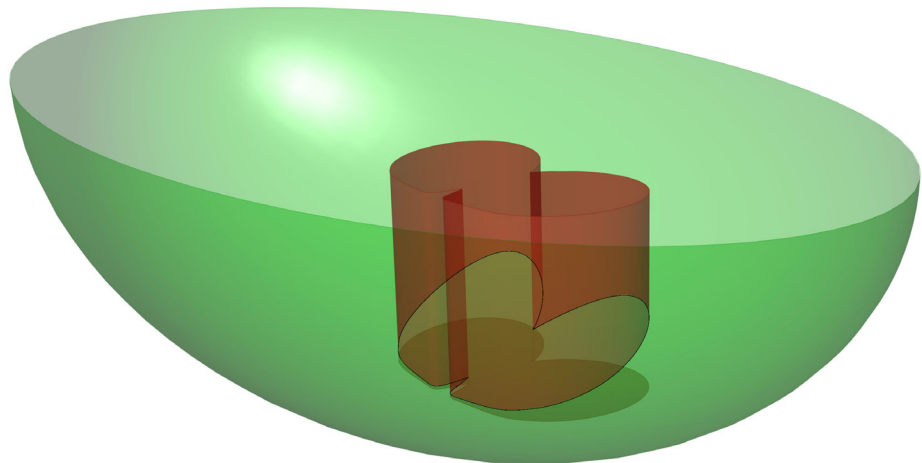
7.4 Intersección entre el volumen generado a partir de la curva de equisibilidad cerrada y un elipsoide.

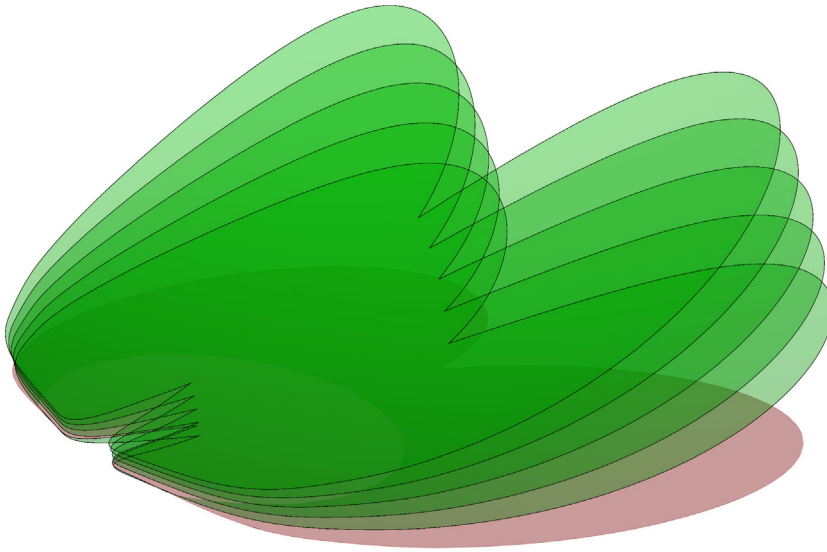
(Elaboración propia)



7.5 Curva resultante de la intersección entre el volumen generado a partir de la curva de equisibilidad cerrada y el elipsoide.

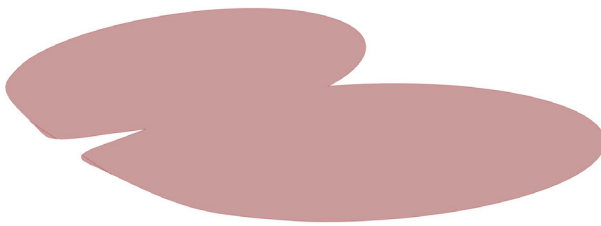
(Elaboración propia)



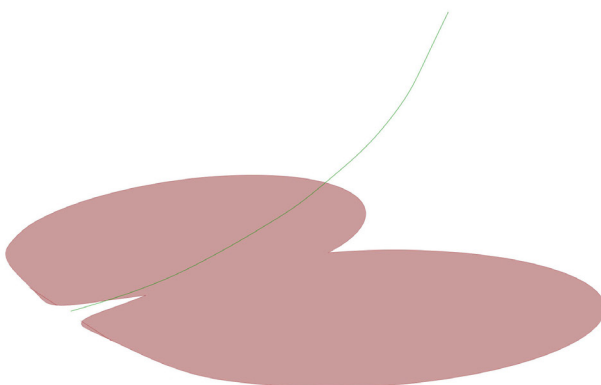


7.6 Posibles curvas de la que se obtendrá la forma resultante del estadio.
(Elaboración propia)

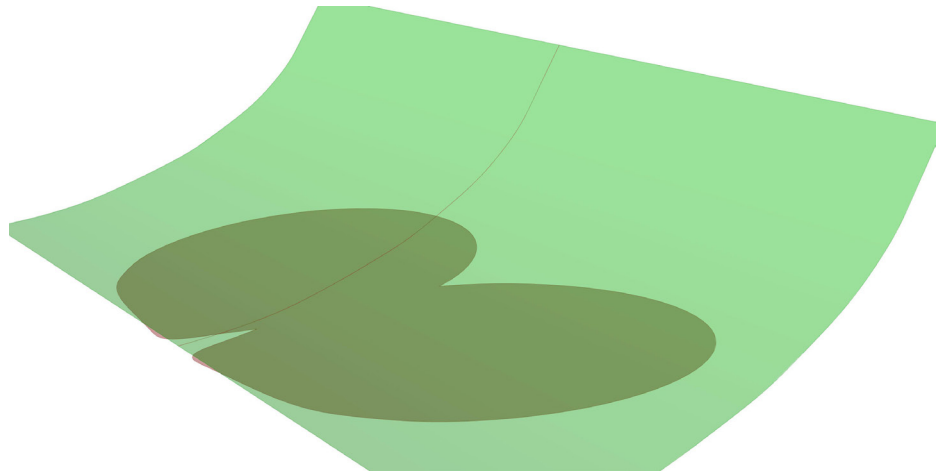
- En el segundo método, localizada la curva de equivisibilidad, se plantea una curva NURBS que refleje la forma que se le pretende dar al estadio. Definida la curva, se genera una plano y se proyecta en él la curva de equivisibilidad. El modo más correcto de definir la curva NURBS sería calculando la curva isóptica vertical, de esta forma se sabría el escalonamiento que deberían presentar las diferentes filas de asientos y lograr así la visibilidad más óptima no sólo en 2 dimensiones, también en un modelo tridimensional.



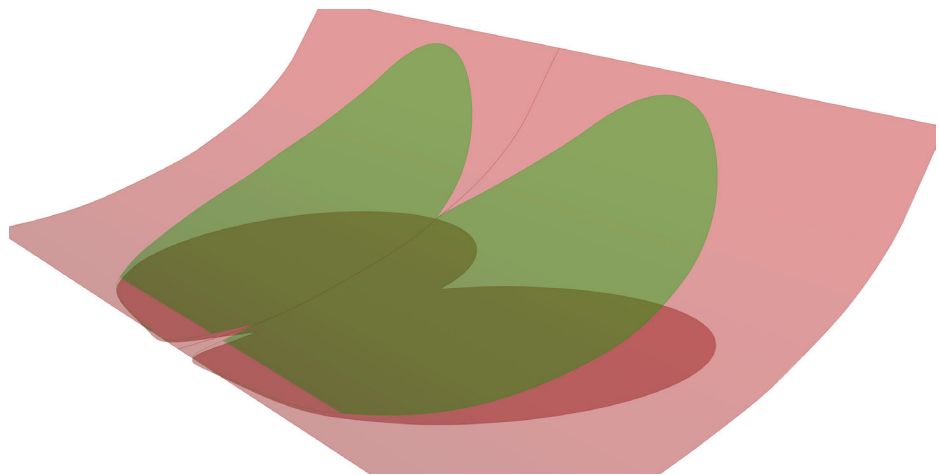
7.7 Localización de una curva de equivisibilidad cerrada.
(Elaboración propia)



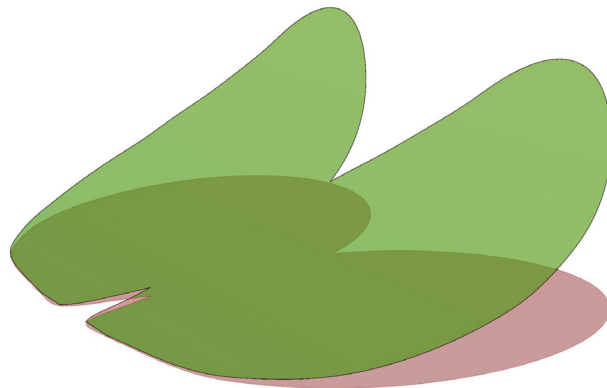
7.8 Se traza la curva NURBS.
(Elaboración propia)



7.9 Se genera una superficie a partir de la curva NURBS.
(Elaboración propia)



7.10 Se proyecta la curva de equivisibilidad sobre la superficie resultante de la curva NURBS.
(Elaboración propia)



7.11 Superficie que define la forma del estadio.
(Elaboración propia)

Si la arquitectura debe responder a las necesidades de los usuarios, resolver el diseño a partir de objetivos específicos que busquen su confort es un modo inteligente de generar arquitectura. Se puede decir, que en la arquitectura paramétrica la forma no sólo sigue a la función sino que se adapta a las características fisiológicas de los usuarios para mejorar su experiencia en el uso de esos espacios, lo que es posible gracias a las matemáticas.

Este trabajo me ha permitido conocer el poder que tienen las matemáticas y como se pueden aplicar éstas en la arquitectura para generar for-

mas que rompan con las tipologías edificatorias que se llevan repitiendo tantos años y las cuales no son resultado de ninguna investigación científica previa.

Espero que a partir de este trabajo sean muchos los arquitectos, que como yo, se enamoren de las matemáticas y las usen como herramienta de diseño. Moretti desarrolló el marco teórico que nos permite entender la arquitectura desde un punto de vista matemático, ahora está en nuestra mano ponerlo en práctica y con la ayuda de la tecnología, no sólo desarrollar arquitecturas orgánicas y complejas sino que resuelvan objetivos específicos bajo una base científica.

Programación del algoritmo de diseño con Grasshopper

Para obtener las curvas de equivisibilidad resultantes de la función se requiere de un software de diseño computacional, para este trabajo se ha usado el programa de Grasshopper.

El proceso de programación se puede resumir en 4 pasos:

1. Definir los datos.
2. Determinan los parámetros y la función de diseño.
3. Generar la superficie resultante de la función y fijar los planos que van a intersecar a dicha superficie.
4. Representar las curvas de equivisibilidad.

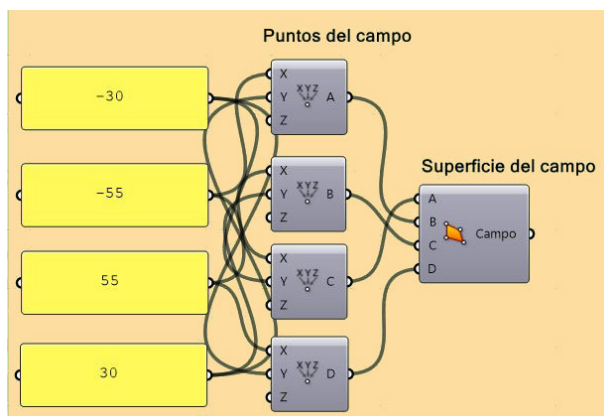
Todas las imágenes que forman parte de este capítulo son de elaboración propia y con ellas se refleja el trabajo realizado en Grasshopper.

Stadio M

1. Definición de los datos.

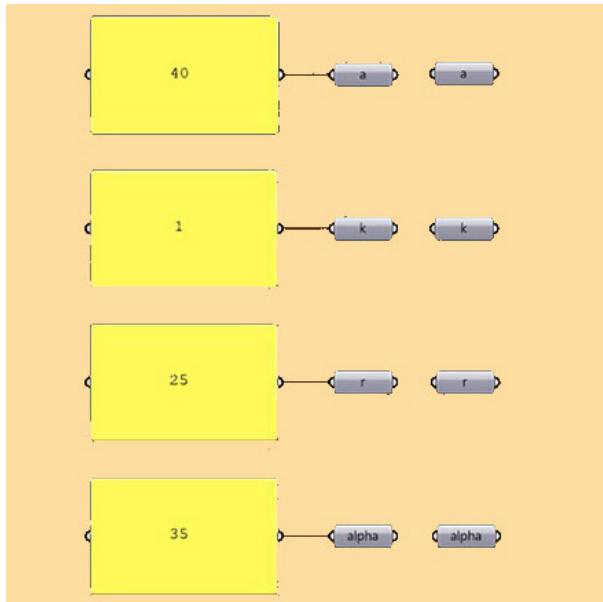
Los datos son extraídos de la hipótesis fijada por Moretti para determinar la forma de este estadio de fútbol.

- a) Se define la superficie del terreno de juego.

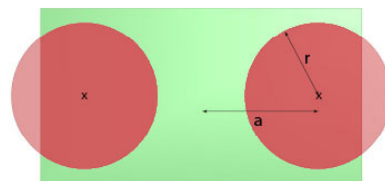
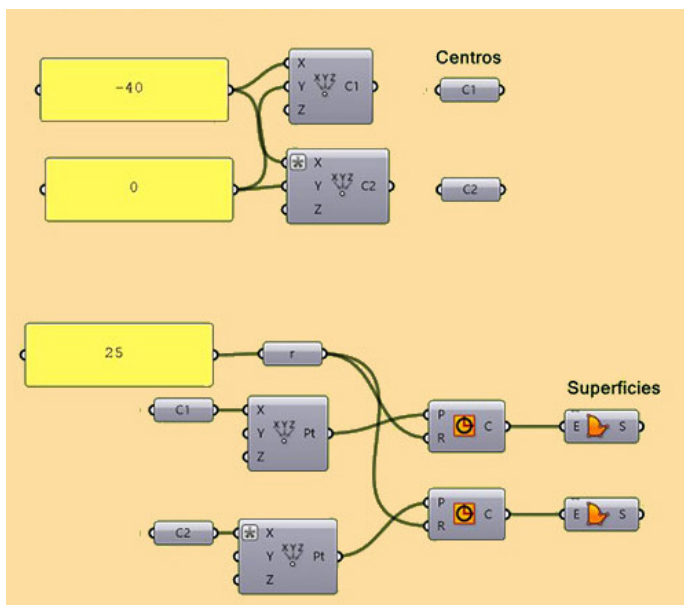


b) Se fijan los datos,

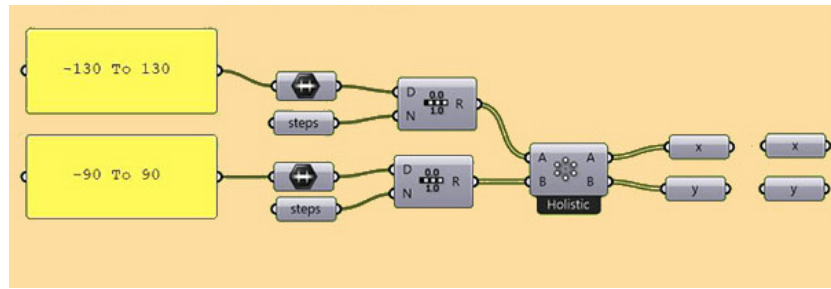
- a = distancia del origen de coordenadas a uno de los centros de las áreas de interés.
- r = radio de la circunferencia que determina el área de interés.
- α = ángulo bajo el cual se ve una de las áreas de interés.



c) Se definen las áreas de interés.



d) Se establece un dominio de valores que permite definir las coordenadas x, y de los diferentes puntos del espacio.



2. Determinación de los parámetros y la función de diseño.

Como se ha demostrado en el capítulo 7, la función de diseño presenta la siguiente expresión:

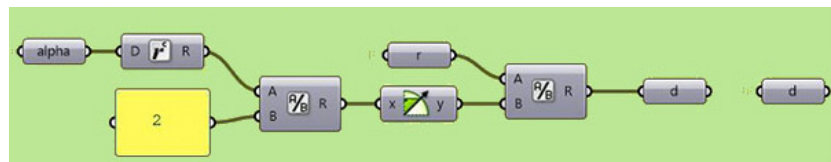
$$W(x, y) = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{d_{1 \max}} e^{-\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{d_{1 \max}}} + \frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{d_{2 \max}} e^{-\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{d_{2 \max}}}$$

Podemos ver que la función depende:

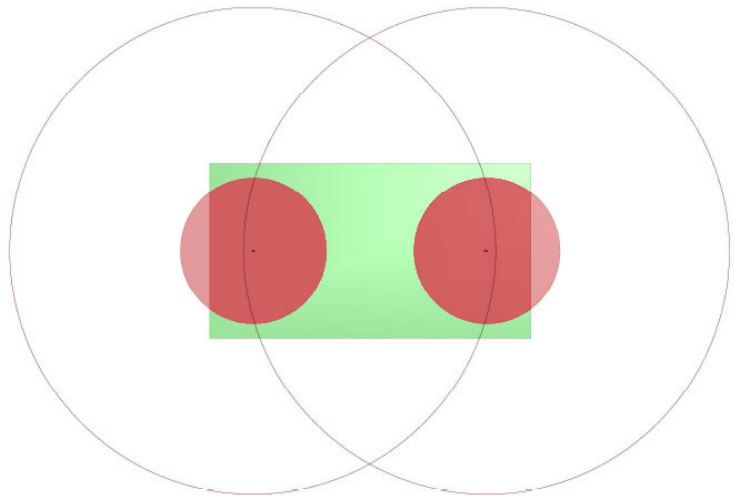
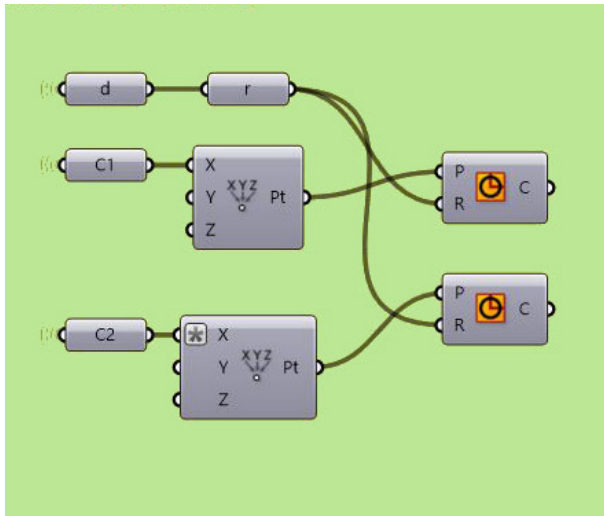
- De las coordenadas de un punto P del espacio (parámetros x,y).
- De la distancia del origen de coordenadas al centro de una de las áreas de interés. En la expresión se define por el parámetro c, pero en Grasshopper dicha distancia se define por la letra a.
- De la distancia del punto bajo el cual se ven las áreas de interés bajo un ángulo de 35°, a uno de los centros de dichas áreas. Dicha distancia, calculada también en el capítulo 7 es:

$$d = \frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

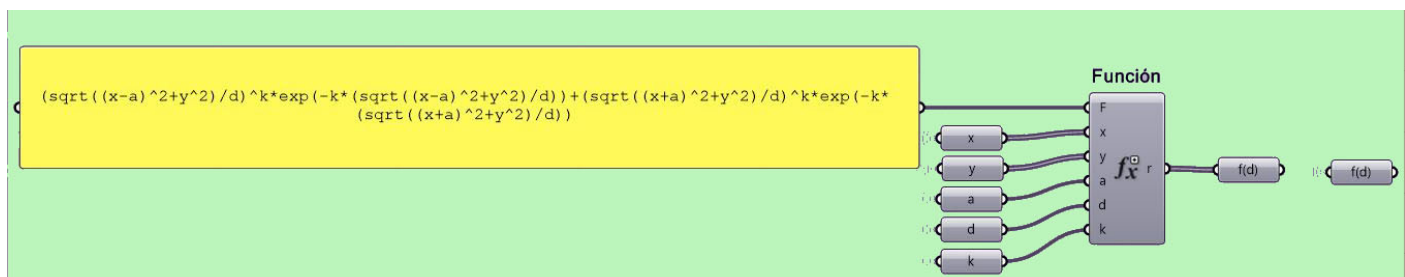
En Grasshopper, queda definida del siguiente modo:



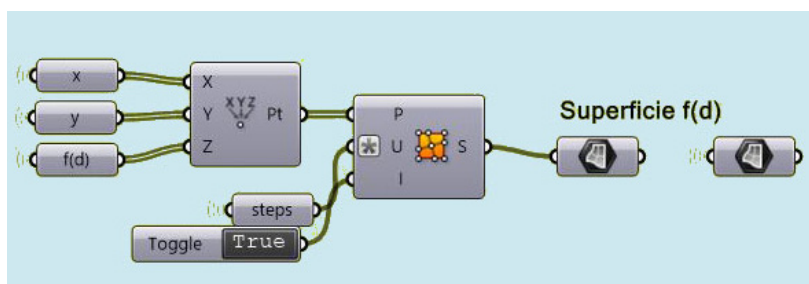
Definido el parámetro d , se pueden representar las curvas isópticas.



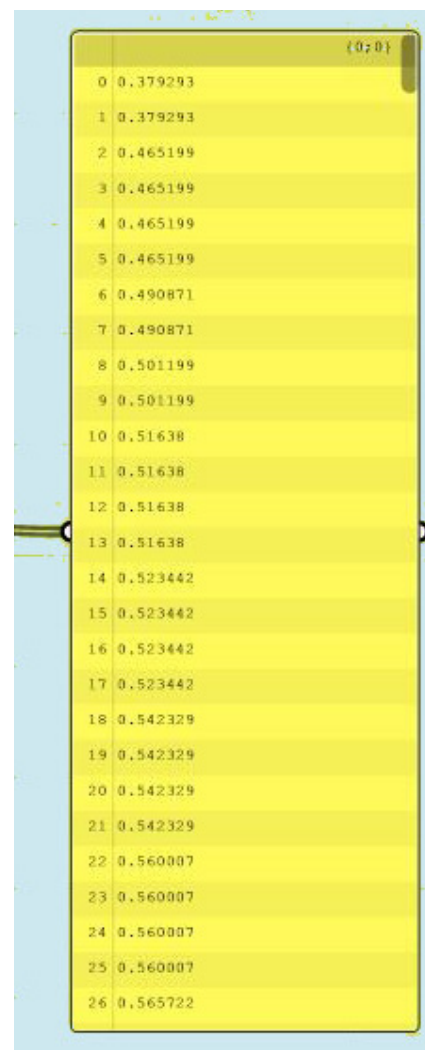
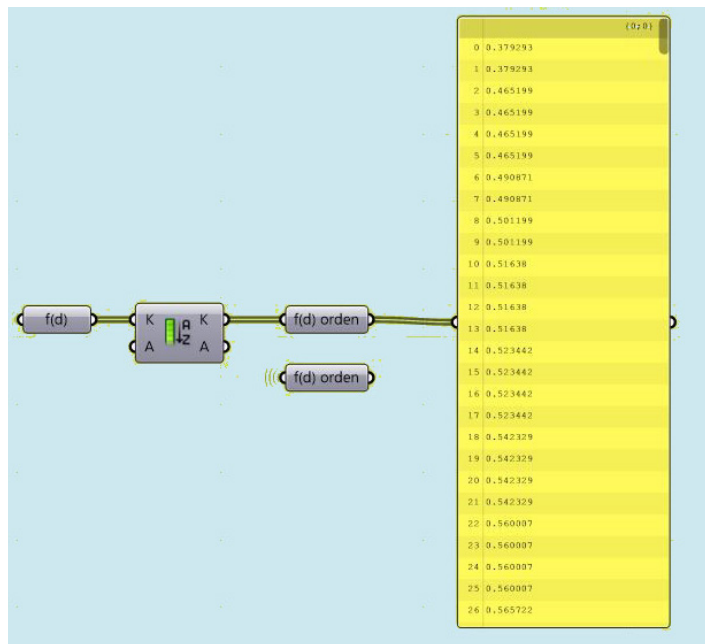
Determinadas las variables, podemos definir la función:



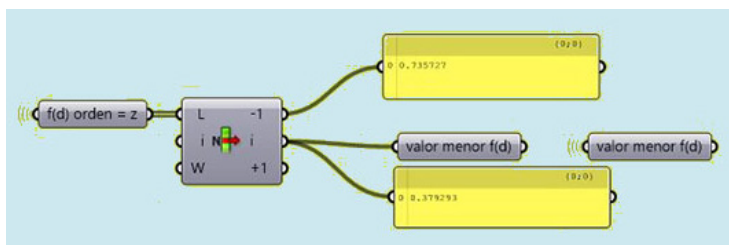
3. Se genera la superficie resultante de la función y se fijan los planos que van a intersectar a dicha superficie.



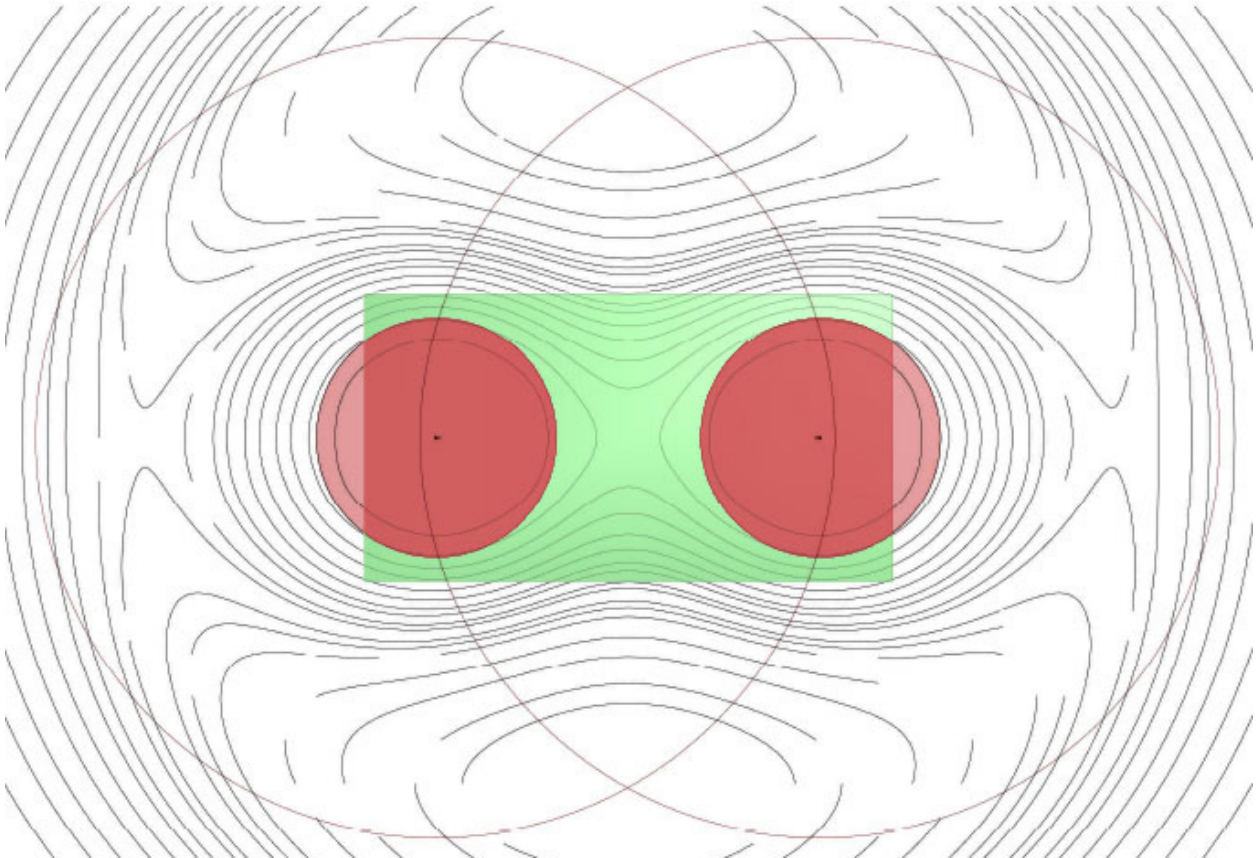
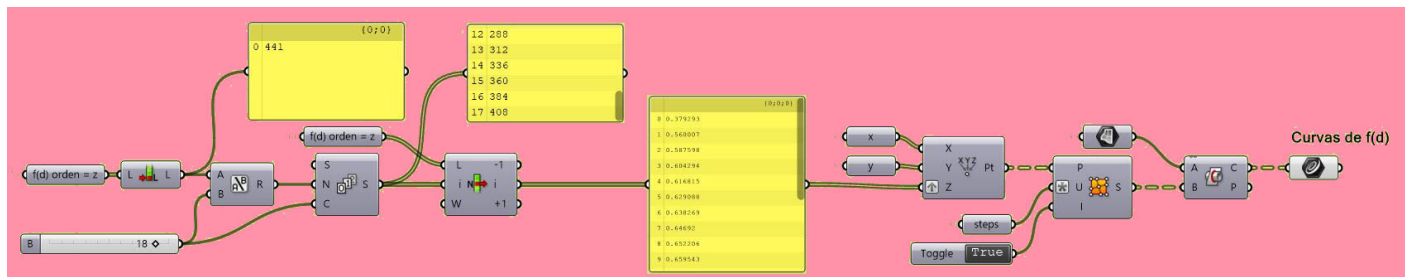
- Los planos que intersecan a la superficie pueden ubicarse en las siguientes alturas.



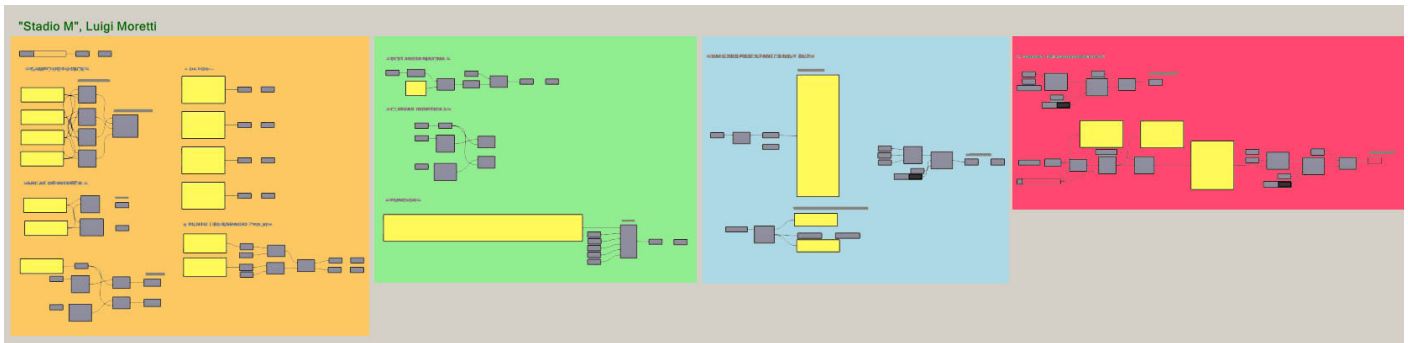
- Siendo la altura máxima y mínima:



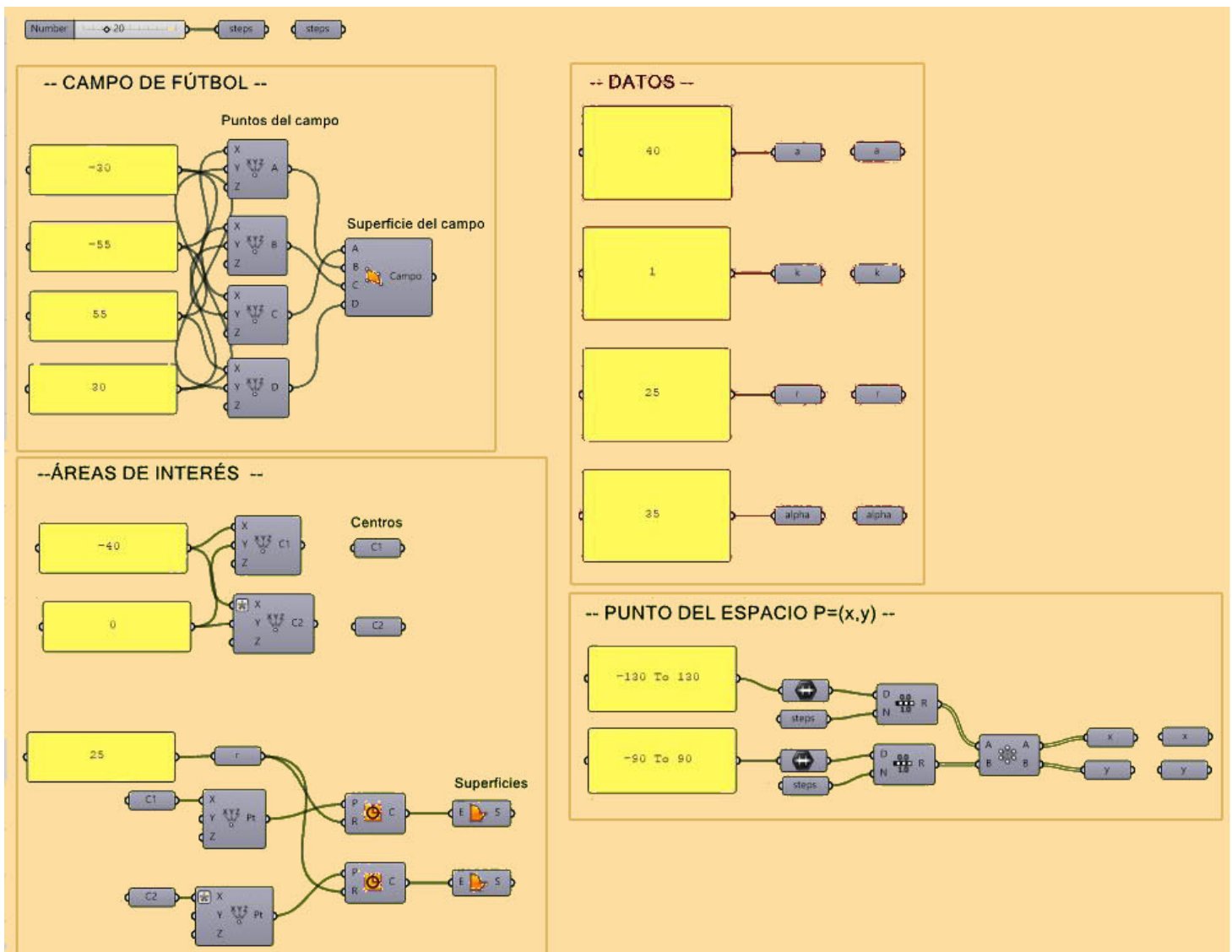
4. Representación de las curvas de equivisibilidad.



A continuación se muestra una imagen general del archivo Grasshopper donde se detalla cada parte del algoritmo identificándolo por distintos colores, se tiene así una idea global del documento.

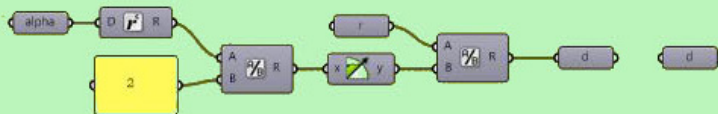


1. Definición de los datos.

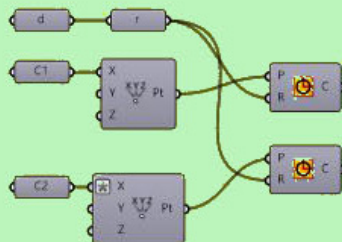


2. Determinación de los parámetros y la función de diseño.

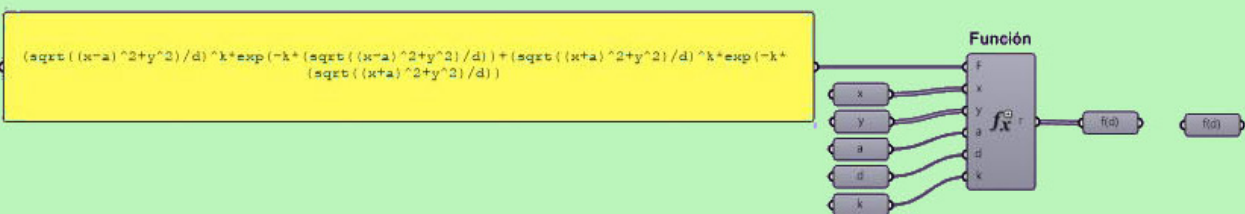
-- DISTANCIA MÁXIMA --



-- CURVAS ISÓPTICAS --



-- FUNCIÓN --

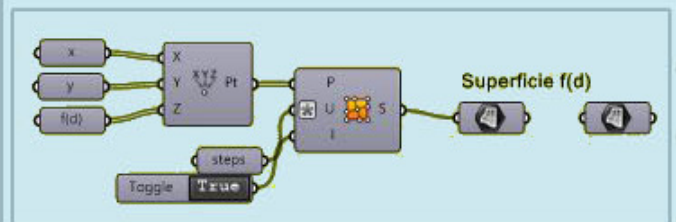


3. Se genera la superficie resultante de la función y se fijan los planos que van a intersectar a dicha superficie.

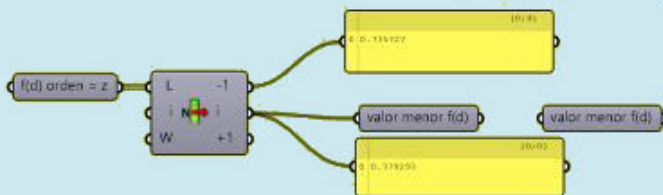
-- VALORES RESULTANTES $f(d)$ Y SUP --

Valores $f(d)=z$

0	0.339281
1	0.339281
2	0.445139
3	0.445139
4	0.445139
5	0.445139
6	0.445139
7	0.445139
8	0.445139
9	0.445139
10	0.516200
11	0.516200
12	0.516200
13	0.516200
14	0.523440
15	0.523440
16	0.523440
17	0.523440
18	0.542529
19	0.542529
20	0.542529
21	0.542529
22	0.548007
23	0.548007
24	0.548007
25	0.548007
26	0.548007

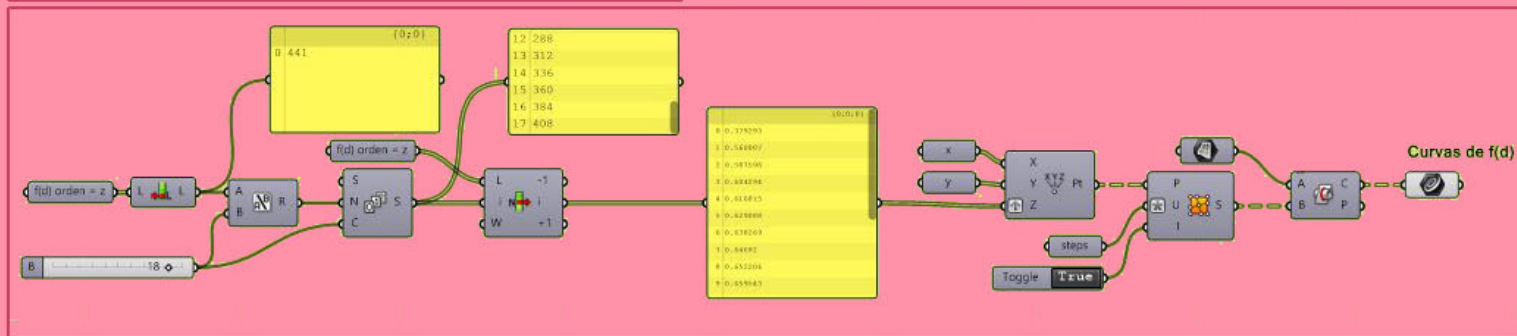
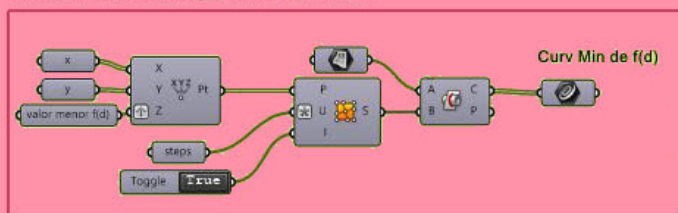


Valores Máx y Min de $f(d) = z$ máx y mín



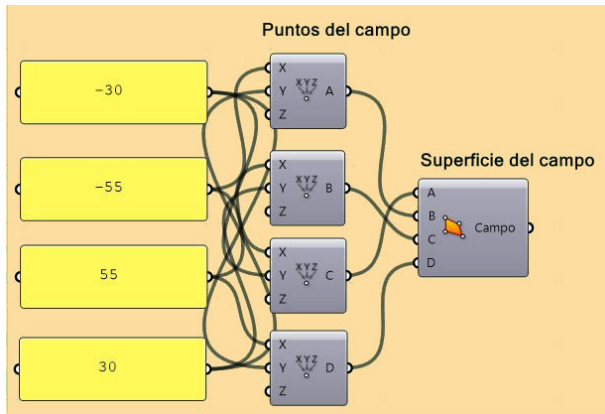
4. Representación de las curvas de equivisibilidad.

-- CURVAS DE EQUIVISIBILIDAD--



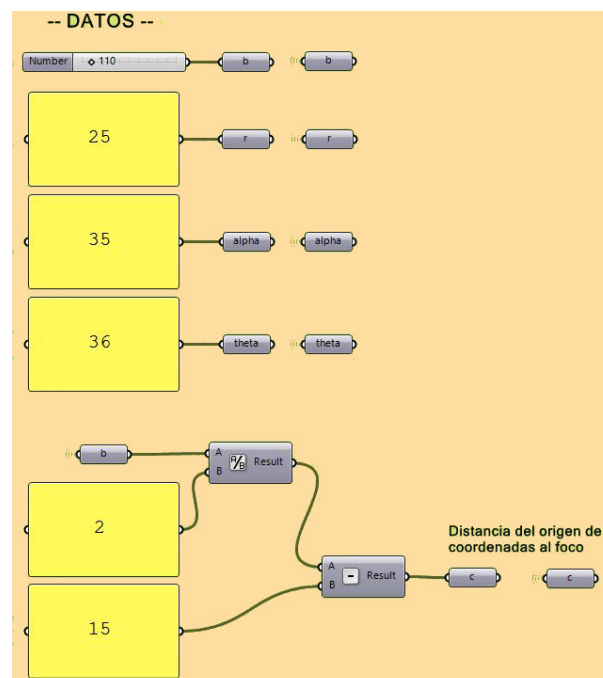
Stadio N**1. Definición de los datos.**

a) Se define la superficie del terreno de juego.

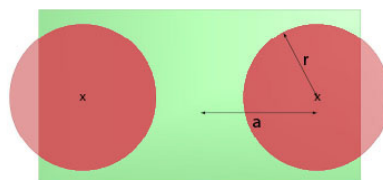
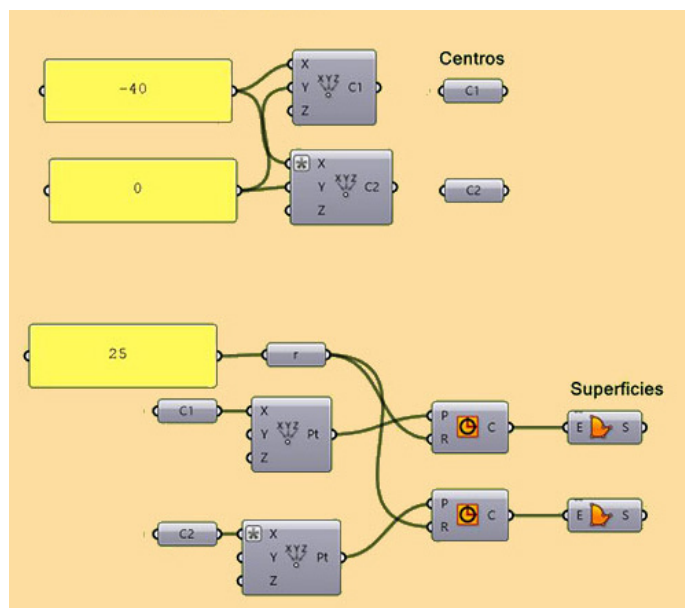


b) Se fijan los datos,

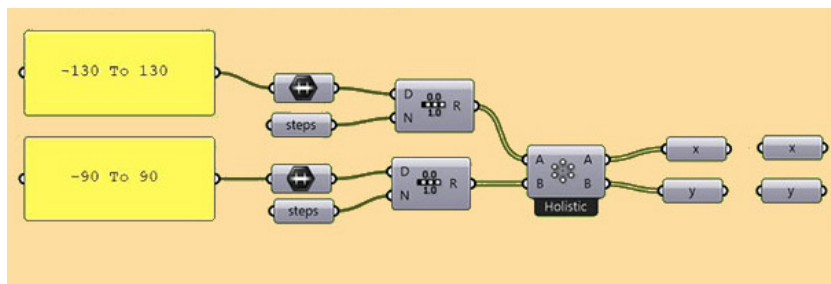
- c= distancia del origen de coordenadas a uno de los centros de las áreas de interés.
- r= radio de la circunferencia que determina el área de interés.
- alpha= ángulo bajo el cual se ve una de las áreas de interés.
- theta= ángulo bajo el cual se alcanza el valor de visibilidad máximo.
- b= largo del campo de fútbol.



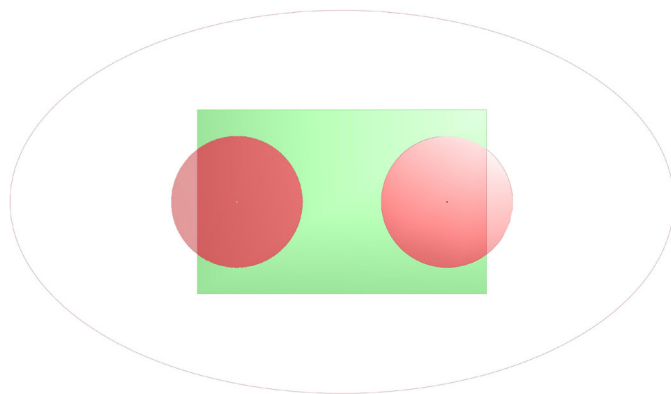
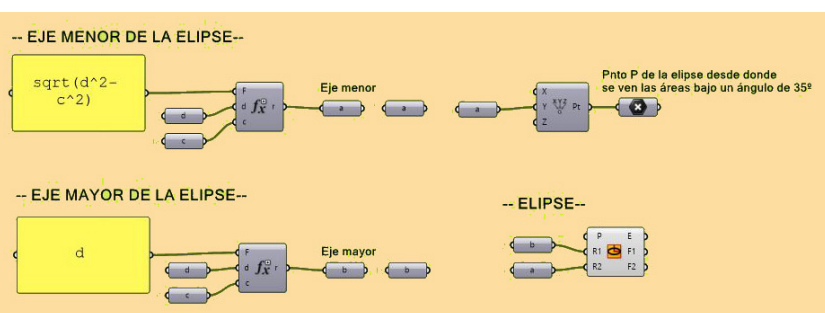
c) Se definen las áreas de interés.



d) Se establece un dominio de valores que permite definir las coordenadas x, y de los diferentes puntos del espacio.



e) Se define la elipse.



2. Determinación de los parámetros y la función de diseño.

Como se ha demostrado en el capítulo 7, la función de diseño presenta la siguiente expresión:

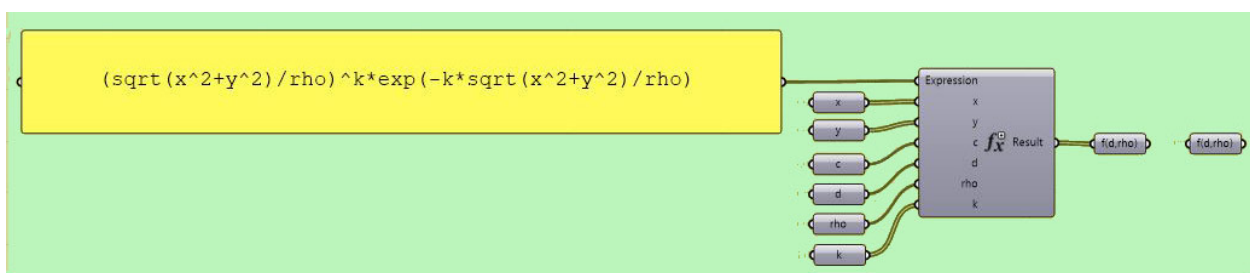
$$W(x, y) = x^{k(y)} e^{-k(y)x}$$

$$k(y) = 3,5y^2 - 2,5y + 1,5$$

$$x = \frac{\rho}{\bar{\rho}(\theta)}$$

$$y = \frac{2\theta}{\pi}$$

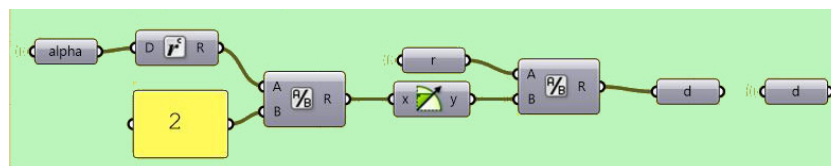
En Grasshopper la función toma la siguiente expresión:



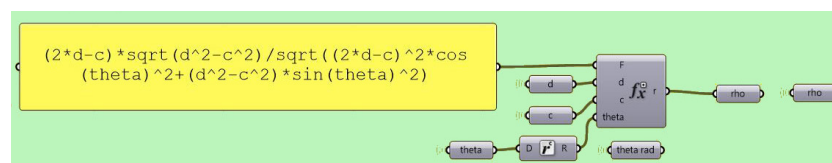
La diferencia de expresiones se debe a que en Grasshopper la función debe estar definida en coordenadas cartesianas. El cambio de coordenadas polares a cartesianas se puede ver el capítulo 9.2.

La función expresada en Grasshopper depende de:

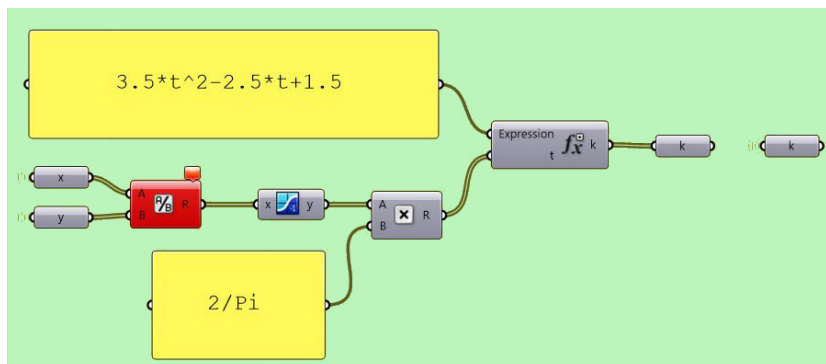
- Los parámetros x, y que definen un punto P del espacio.
- El parámetro c hace referencia a la distancia focal.
- El parámetro d que al igual que para el *Stadio M* define la distancia desde el punto P a C_i .



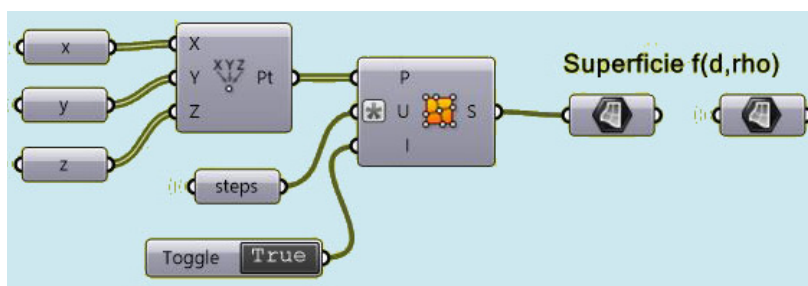
- Del parámetro rho= distancia del origen de coordenadas al $P_{\text{máx}}$ donde se alcanza el valor de máxima visibilidad.



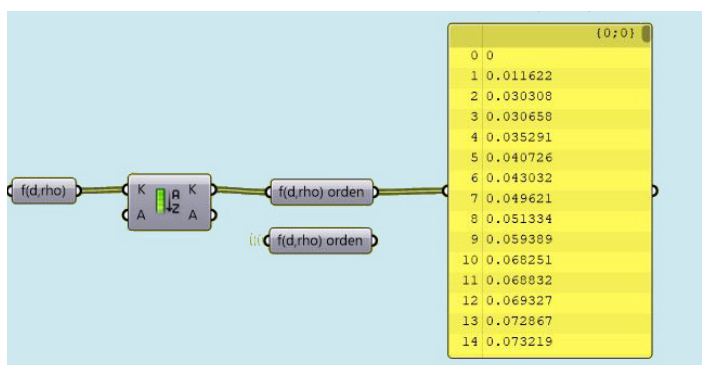
- De la función K, dependiente del parámetro y



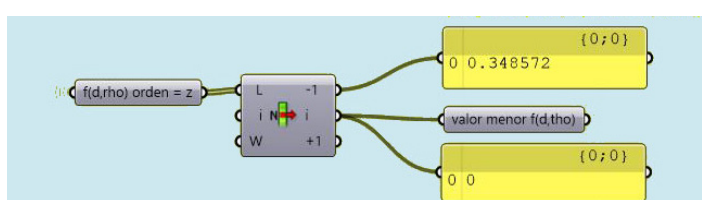
3. Se genera la superficie resultante de la función y se fijan los planos que van a intersectar a dicha superficie.

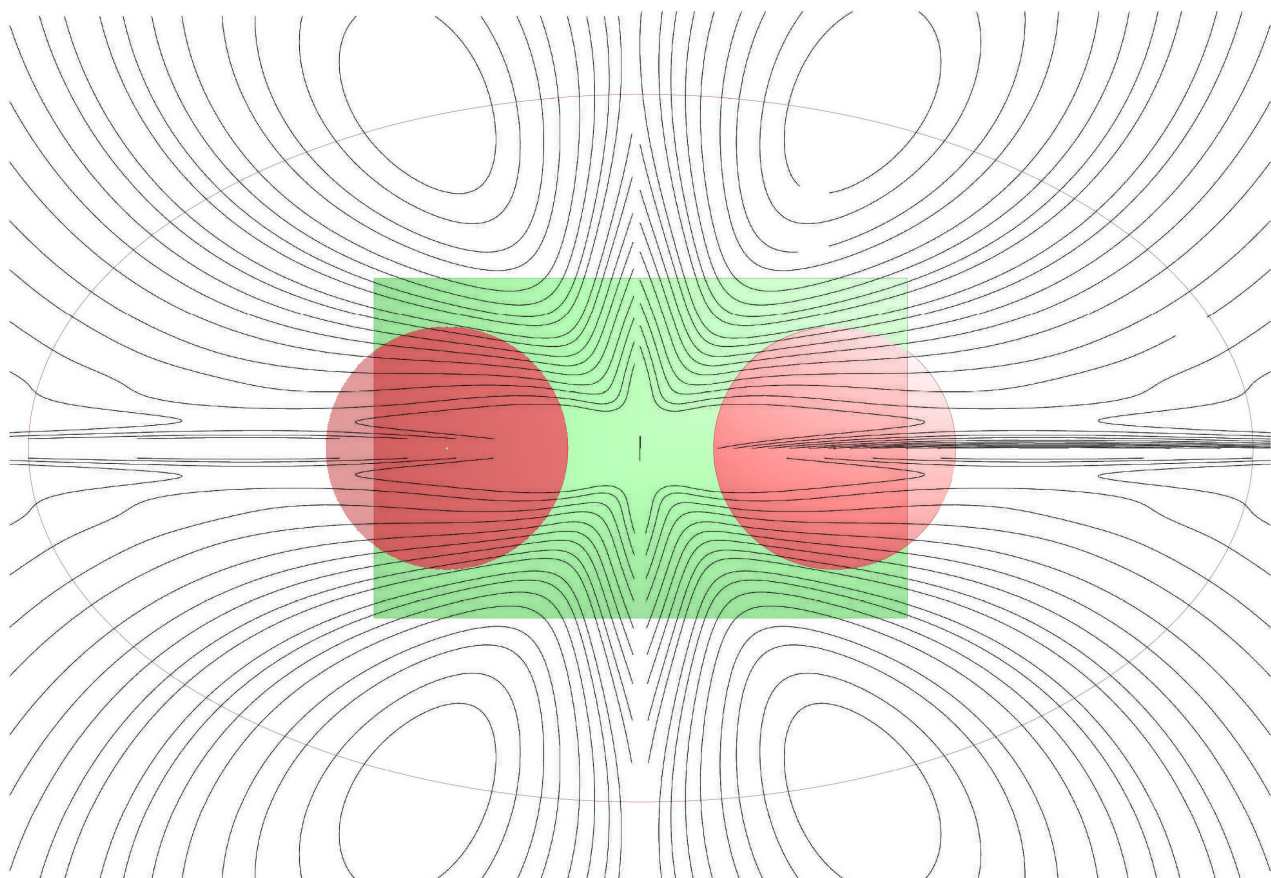


- Los planos que intersectan a la superficie pueden ubicarse en las siguientes alturas.

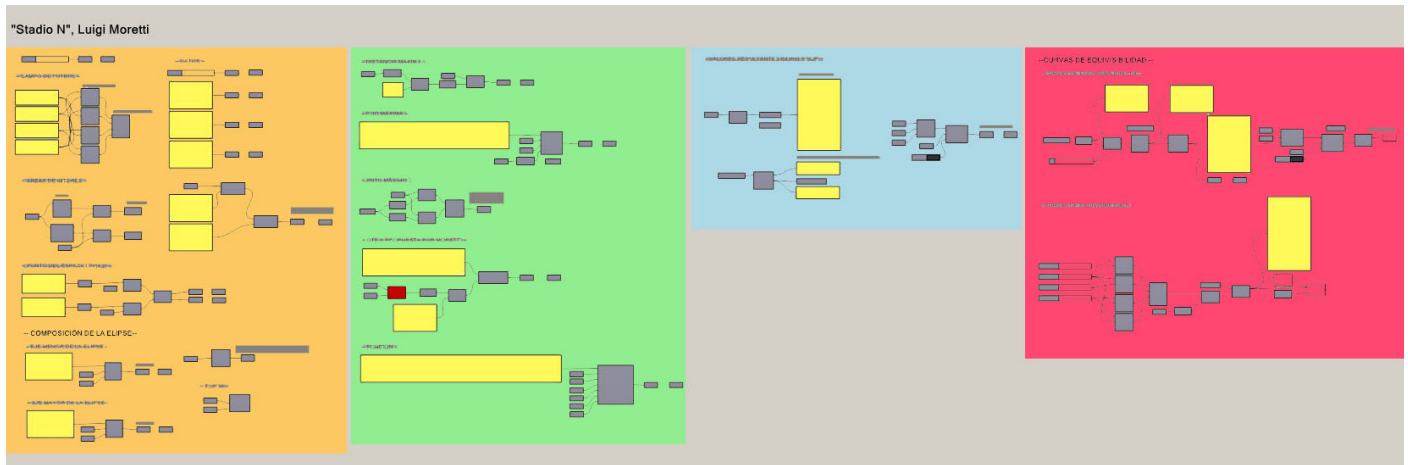


- Siendo la altura máxima y mínima:





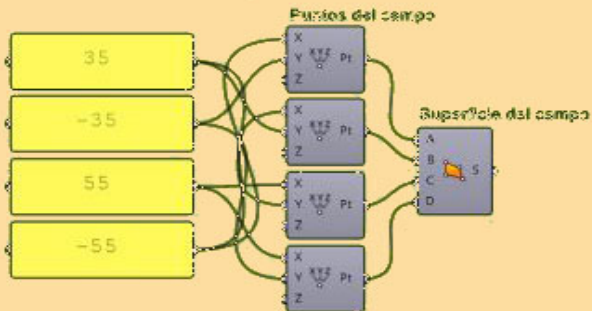
A continuación se muestra una imagen general del archivo Grasshopper donde se detalla cada parte del algoritmo identificándolo por distintos colores, se tiene así una idea global del documento.



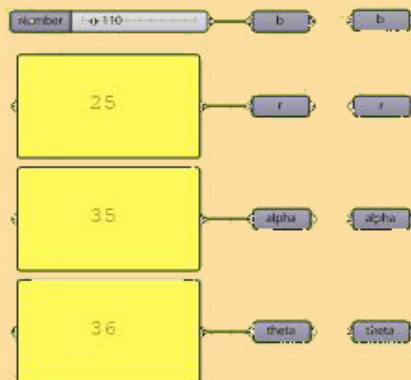
1. Definición de los datos.

Number $\rightarrow 20$ steps steps

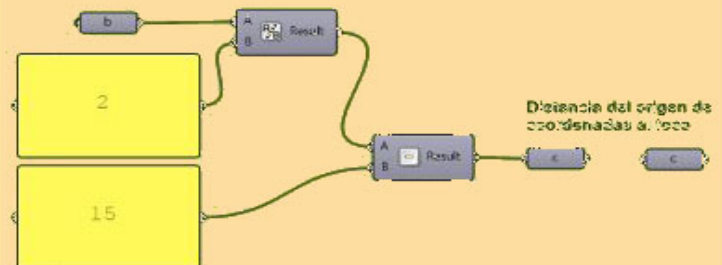
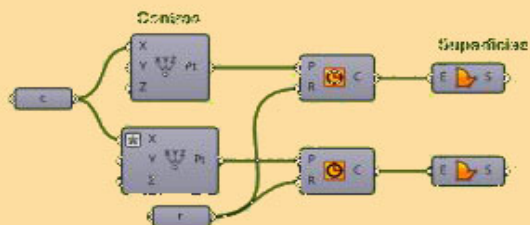
-- CAMPO DE FÚTBOL --



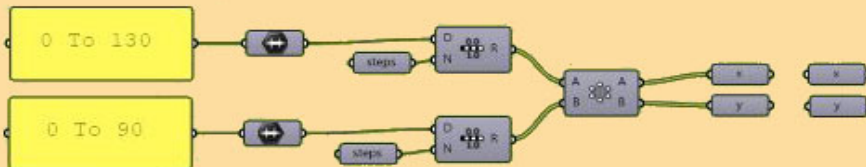
-- DATOS --



-- ÁREAS DE INTERÉS --

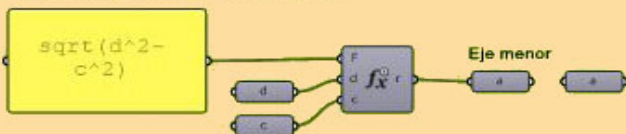


-- PUNTO DEL ESPACIO P=(x,y) --

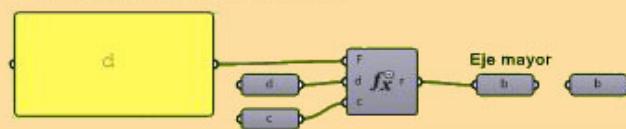


-- COMPOSICIÓN DE LA ELIPSE --

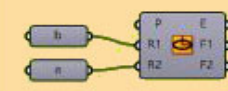
-- EJE MENOR DE LA ELIPSE --



-- EJE MAYOR DE LA ELIPSE --

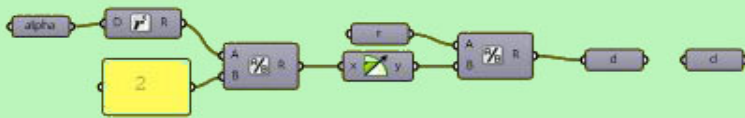


-- ELIPSE --

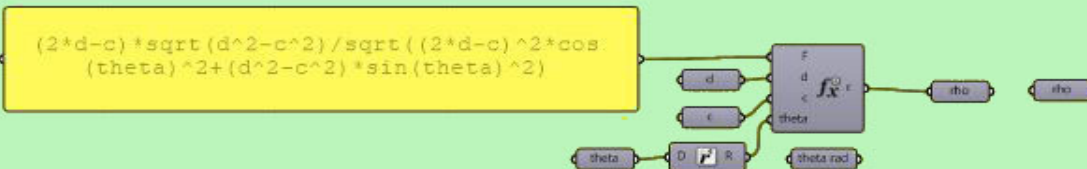


2. Determinación de los parámetros y la función de diseño.

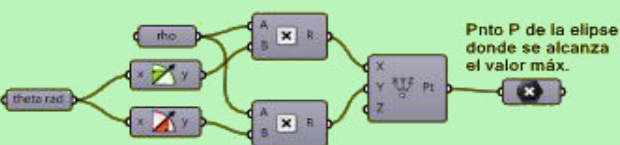
-- DISTANCIA MÁXIMA --



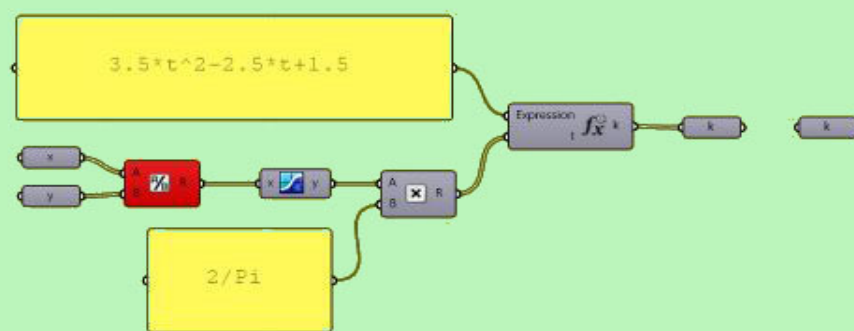
-- RHO MÁXIMA --



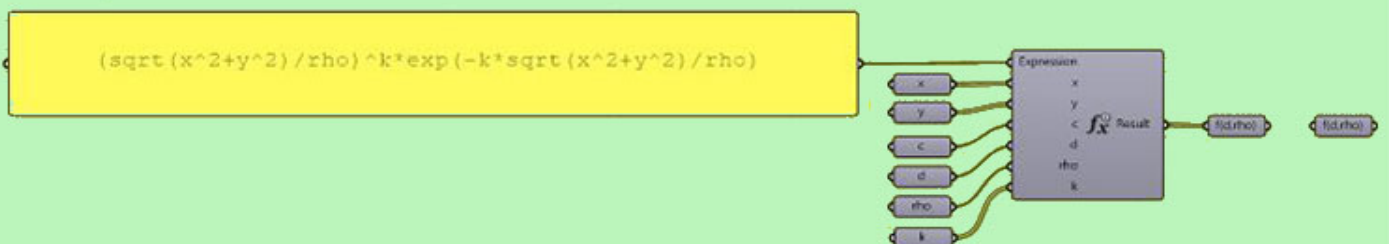
-- PNT0 MÁXIMO --



-- CTE K PROPUESTA POR MORETTI --

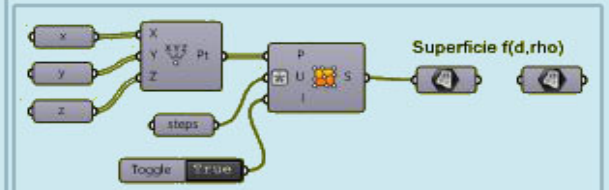
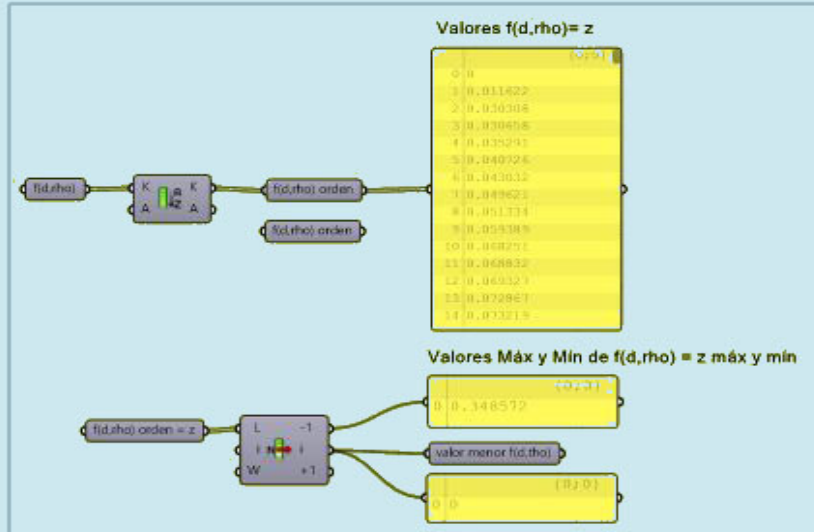


-- FUNCIÓN --



3. Se genera la superficie resultante de la función y se fijan los planos que van a intersectar a dicha superficie.

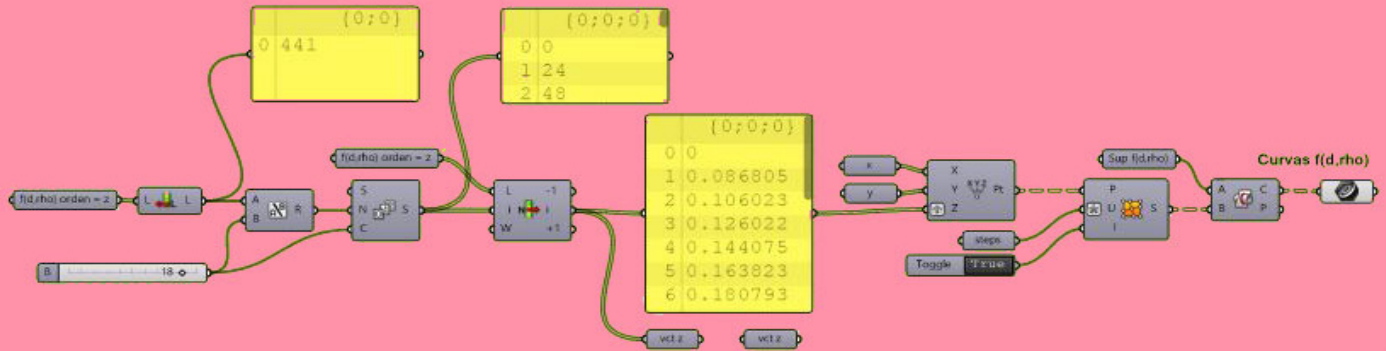
--VALORES RESULTANTES $f(d, \rho)$ Y SUP --



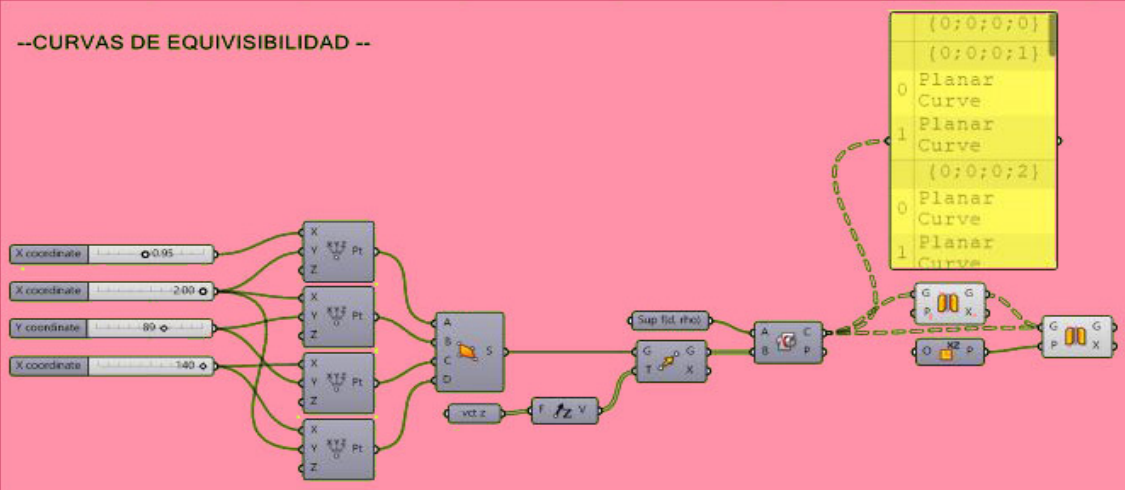
4. Representación de las curvas de equivisibilidad.

--CURVAS DE EQUIVISIBILIDAD --

--CURVAS DE EQUIVISIBILIDAD 1/4 --



--CURVAS DE EQUIVISIBILIDAD --



Cálculos realizados en Maple

Este apartado recoge los cálculos realizados en el programa de Maple. Con la ayuda de este programa se han podido ir comprobando los avances que se iban realizando en la búsqueda de la función y darles veracidad.

Stadio M

▼	ESTADIO DE FÚTBOL. STADIO M
▶	DATOS
[>	
▶	ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE VISIBILIDAD (respecto a 1 área de interés)
[>	
▶	CIRCUNFERENCIAS ISÓPTICAS Y PUNTOS DE MÁXIMA VISIBILIDAD
[>	
▶	FUNCIÓN DE VISIBILIDAD TOTAL
[>	
▶	SUPERFICIE RESULTANTE DE LA FUNCIÓN
[>	
▶	CURVAS DE EQUIVISIBILIDAD
[>	

ESTADIO DE FÚTBOL. STADIO M

DATOS

```

#### Áreas de interés: Centros (c, 0), (-c, 0) y radio r ####
#### Ángulo de máxima visibilidad:  $\theta=35$  #####
[>
[> restart : with(plots) :
[> c := 40; r := 25;
                                     c := 40
                                     r := 25
                                     (1.1.1)
[> alpha :=  $\frac{35 \cdot \text{Pi}}{180}$ ;
                                      $\alpha := \frac{7 \pi}{36}$ 
                                     (1.1.2)
[>

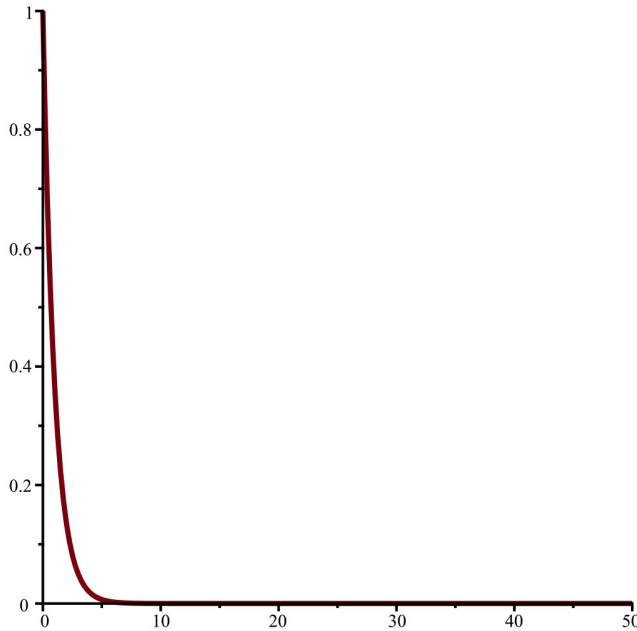
```

ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN DE VISIBILIDAD (respecto a 1 área de interés)

```

[>
CANDIDATA 1
[> D0 := plot( exp( -x), x = 0 ..50, thickness = 2 ) :
[> f0(x) := exp( -x)
                                     f0 := x ↦ e-x
                                     (1.2.1.1)
[> display( [D0] );

```



```

[> # La función en el origen no es 0 #
[>

```

CANDIDATA 2

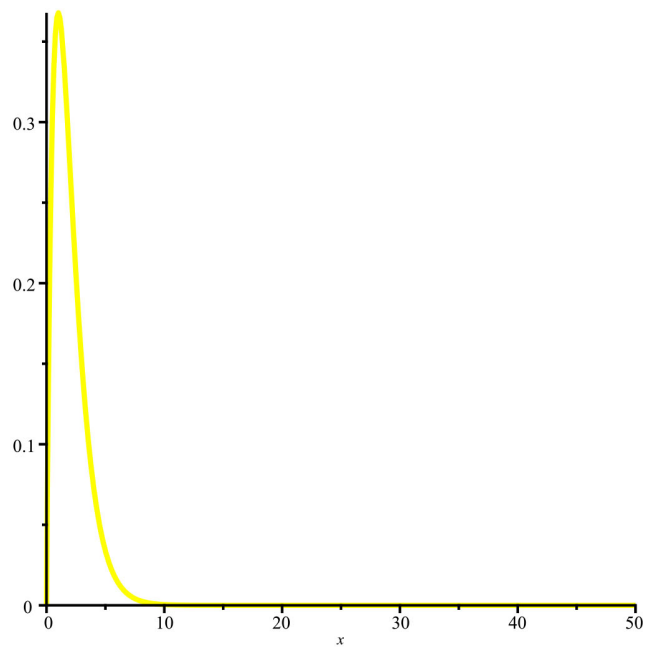
```
> D1 := plot( x·exp( -x), x=0 ..50, thickness=2, color=yellow ) :
```

```
> f1(x) := x·exp( -x)
```

$$f1 := x \mapsto x \cdot e^{-x}$$

(1.2.2.1)

```
> display( [D1] );
```



```
> solve( f1'(x) = 0, x)
```

1

(1.2.2.2)

```
> # El valor máximo de la función no se alcanza en xmax#
```

CANDIDATA 3

```
> d := 5;
```

$$d := 5$$

(1.2.3.1)

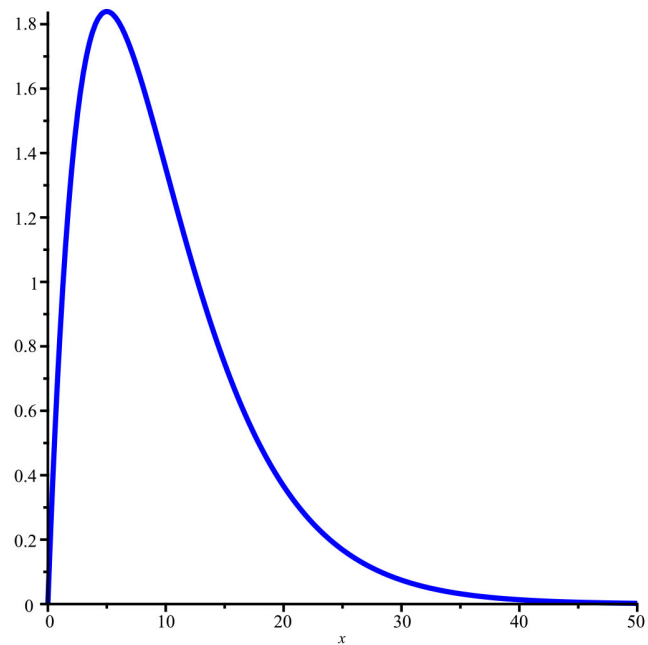
```
> D2 := plot( x·exp( - x/d ), x=0 ..50, thickness=2, color=blue ) :
```

```
> f2(x) := x·exp( - x/d )
```

$$f2 := x \mapsto x \cdot e^{-\frac{x}{d}}$$

(1.2.3.2)

```
> display( [D2] );
```



```
> solve( f2'(x) = 0, x )
```

$$5$$

(1.2.3.3)

```
> # El valor xmax es distinto a 1#
```

```
>
```

CANDIDATA 4= función que cumple todas las condiciones

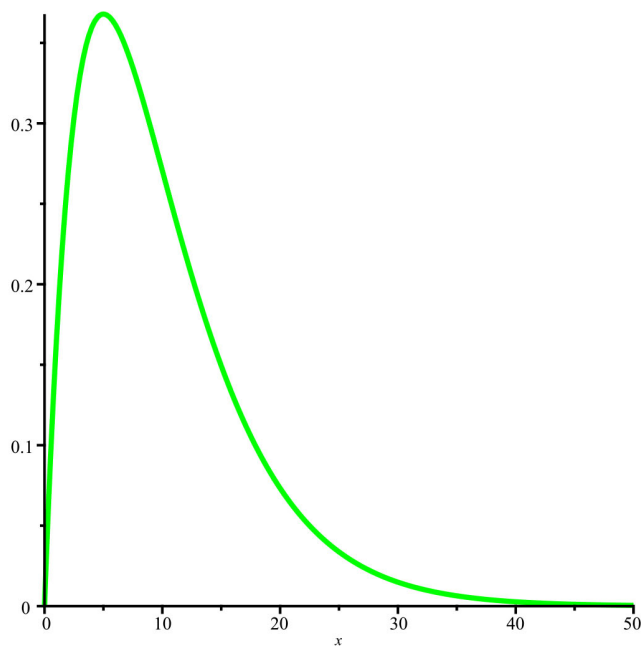
```
> D3 := plot(  $\frac{x}{d} \cdot \exp\left(-\frac{x}{d}\right)$ , x=0..50, thickness=2, color=green ):
```

```
> f3(x) :=  $\frac{x}{d} \cdot \exp\left(-\frac{x}{d}\right)$ 
```

$$f3 := x \mapsto \frac{x \cdot e^{-\frac{x}{d}}}{d}$$

(1.2.4.1)

```
> display([D3]);
```



```
> solve(f3'(x)=0, x)
```

5

(1.2.4.2)

```
> evalf(f3(d));
```

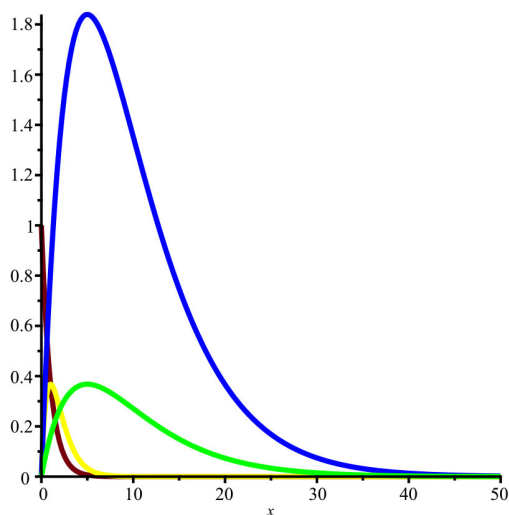
0.3678794412

(1.2.4.3)

```
> # Se cumplen todas las condiciones#
```

```
>
```

```
> display([D0, D1, D2, D3]);
```



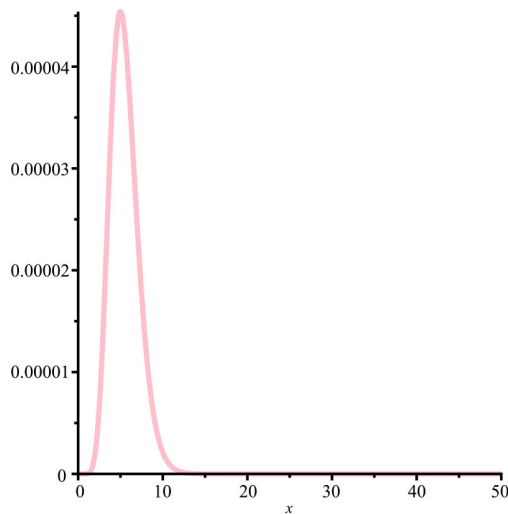
FUNCIÓN CON K, como la planteaba Luigi Moretti

```
> k := 10;
                                     k := 10
(1.2.5.1)
```

```
> g(x) := (x/d)^k * exp(-k * x/d)
(1.2.5.2)
```

```
g := x ↦ (x/d)^k * e^(-k*x/d)
(1.2.5.2)
```

```
> plot((x/d)^k * exp(-k * x/d), x=0..50, thickness=2, color=pink)
```



```
>
> solve(g'(x)=0, x)
                                     0, 5
(1.2.5.3)
```

```
> evalf(g(d));
                                     0.00004539992976
(1.2.5.4)
```

```
>
# Con la constante k, como plantea Moretti la ecuación visibilidad no se cumplen las
condiciones#
```

CIRCUNFERENCIAS ISÓPTICAS Y PUNTOS DE MÁXIMA VISIBILIDAD

$$d := \frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$d := \frac{25}{\sin\left(\frac{7\pi}{72}\right)}$$
(1.3.1)

```

> C1 := plot([c + d*cos(t), d*sin(t), t=0..2*π], color=green) :
> C2 := plot([-c + d*cos(t), d*sin(t), t=0..2*π], color=green) :
> P := [0, sqrt(d^2 - c^2)];
> Q := [0, -sqrt(d^2 - c^2)];

```

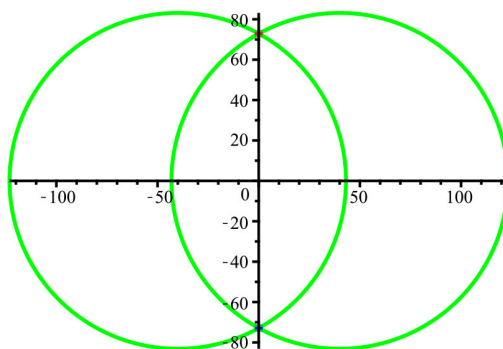
$$P := \left[0, 5 \sqrt{-64 + \frac{25}{\sin\left(\frac{7\pi}{72}\right)^2}} \right]$$

$$Q := \left[0, -5 \sqrt{-64 + \frac{25}{\sin\left(\frac{7\pi}{72}\right)^2}} \right]$$
(1.3.2)

```

> Puntos := pointplot([P, Q], color=[red, blue]) :
> display([C1, C2, Puntos]);

```



```

> evalf(d);

```

$$83.13773808$$
(1.3.3)

FUNCIÓN DE VISIBILIDAD TOTAL

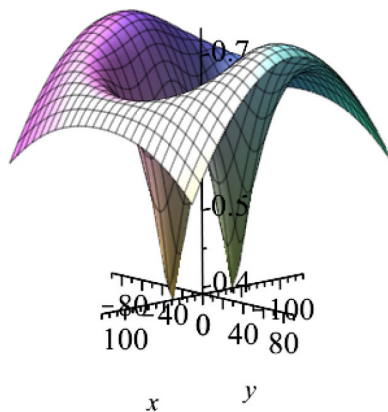
$$\begin{aligned} &> k := 1; \\ &\quad k := 1 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

$$\begin{aligned} &> f(x, y) := \left(\frac{x}{d}\right)^k \cdot \exp\left(-k \cdot \frac{x}{d}\right) + \left(\frac{y}{d}\right)^k \cdot \exp\left(-k \cdot \frac{y}{d}\right); \\ &\quad f := (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{d}\right)^k \cdot e^{-\frac{k \cdot x}{d}} + \left(\frac{y}{d}\right)^k \cdot e^{-\frac{k \cdot y}{d}} \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

$$\begin{aligned} &> W(x, y) := \left(\frac{\text{sqrt}((x-c)^2 + y^2)}{d}\right)^k \cdot \exp\left(-k \cdot \frac{\text{sqrt}((x-c)^2 + y^2)}{d}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\text{sqrt}((x+c)^2 + y^2)}{d}\right)^k \cdot \exp\left(-k \cdot \frac{\text{sqrt}((x+c)^2 + y^2)}{d}\right) \\ &W := (x, y) \mapsto \left(\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{d}\right)^k \cdot e^{-\frac{k \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{d}} + \left(\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{d}\right)^k \\ &\quad \cdot e^{-\frac{k \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{d}} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

SUPERFICIE RESULTANTE DE LA FUNCIÓN

$$> \text{plot3d}(W(x, y), x = -130..130, y = -90..90, \text{axes} = \text{normal});$$



$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(d); \\ &\quad 83.13773808 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

CURVAS DE EQUIVISIBILIDAD

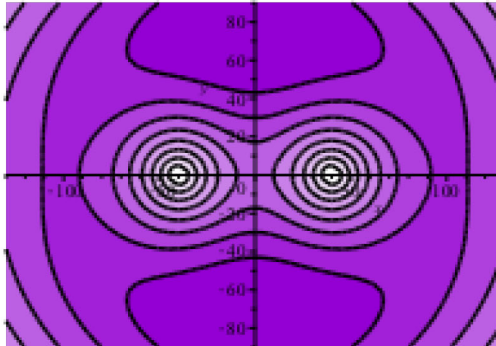
```
> Cmax := display([C1, C2], colour = [green, green]) :
```

```
> evalf(W(0, d));
```

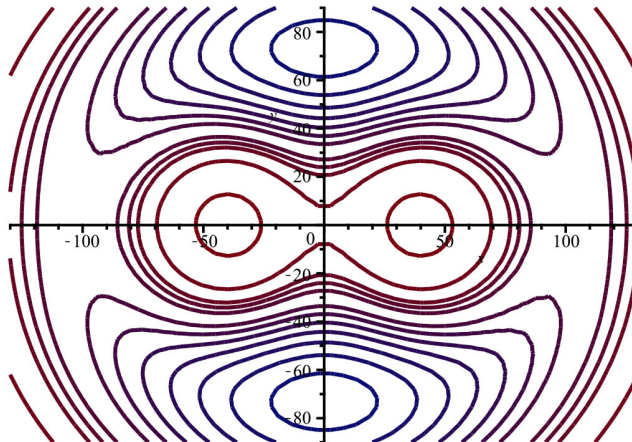
0.7316409464

(1.6.1)

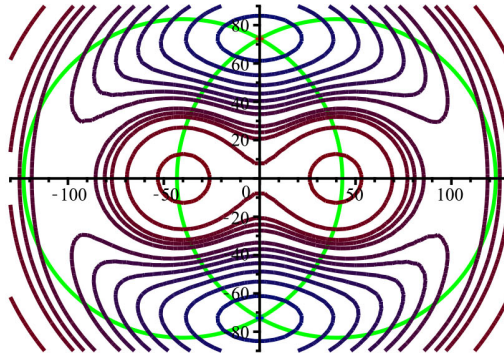
```
> contourplot(W(x, y), x = -130 .. 130, y = -90 .. 90, filledregions = true, coloring = ["White",  
"DarkViolet"]);
```



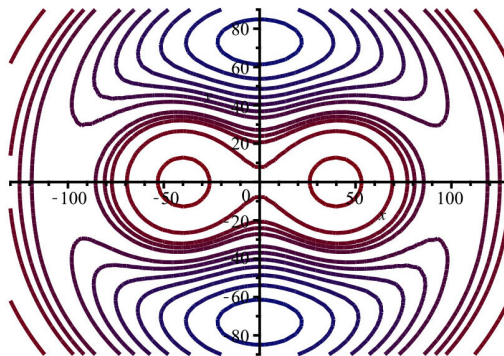
```
> CurvasNivel := contourplot(W(x, y), x = -130 .. 130, y = -90 .. 90, contours = [0.73, 0.72, 0.71,  
0.7, 0.6, 0.69, 0.68, 0.67, 0.65, 0.64, 0.63, 0.5])
```



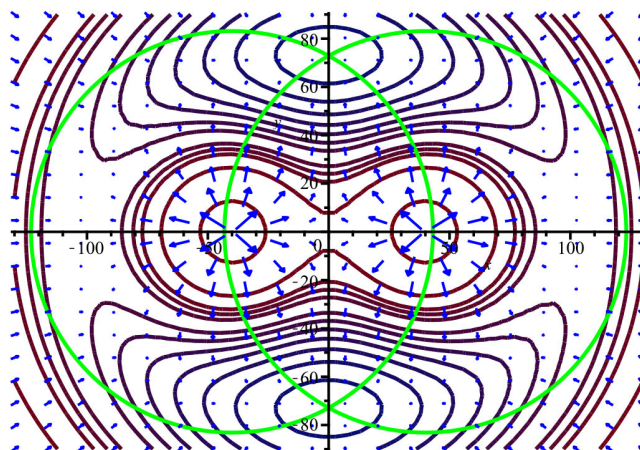
```
>
> display(Cmax, CurvasNivel, Puntos)
```



```
> display(CurvasNivel)
```



```
> GRAD := gradplot(W(x, y), x = -130 .. 130, y = -90 .. 90, color = blue, arrows = SLIM) :
> display(CurvasNivel, C1, C2, GRAD);
```



Stadio N

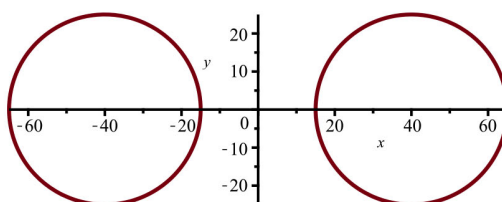
- ▼ **ESTADIO DE FÚTBOL. STADIO N**
 - ▶ **DATOS Y ÁREAS DE INTERÉS**
 - [>
 - ▶ **ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN VISIBILIDAD**
 - [>
 - ▶ **CÁLCULO DE LA ELIPSE DE MAYOR VISIBILIDAD**
 - [>
 - ▶ **CÁLCULO DEL PUNTO DE MAYOR VISIBILIDAD**
 - [>
 - ▶ **FUNCIÓN VISIBILIDAD Y CURVAS DE EQUIVISIBILIDAD**
 - [>

DATOS Y ÁREAS DE INTERÉS

```

> ##### Áreas de interés: Centros (c, 0), (-c, 0) y radio r
=
>
=
>
=
> restart : with(plots) :
> c := 40; r := 25;
                                     c := 40
                                     r := 25
                                     (1.1.1)
> implicitplot([ (x + c)^2 + y^2 = r^2, (x - c)^2 + y^2 = r^2 ], x = -130 .. 130, y = -90 .. 90, numpoints
= 1800);

```



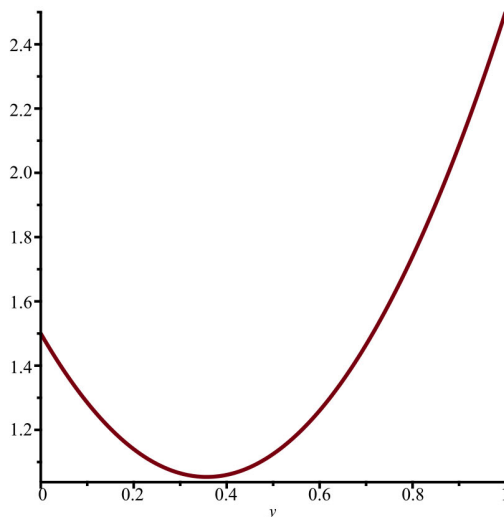
ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN VISIBILIDAD

```

>
>  $k(y) := 3.5 \cdot y^2 - 2.5 \cdot y + 1.5;$ 
                                 $k := y \mapsto 3.5 \cdot y^2 + (-1) \cdot 2.5 \cdot y + 1.5$ 
>  $\text{plot}(k(y), y=0..1);$ 

```

(1.2.1)

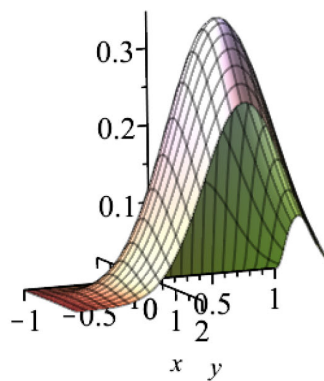


```

>
>  $f(x, y) := x^{k(y)} \cdot \exp(-k(y) \cdot x);$ 
                                 $f := (x, y) \mapsto x^{k(y)} \cdot e^{-k(y) \cdot x}$ 
> ### Superficie de la función K ###
>  $\text{plot3d}(f(x, y), x=-2..2, y=-1..1, \text{thickness}=2, \text{axes}=\text{normal})$ 

```

(1.2.2)



CÁLCULO DE LA ELIPSE DE MAYOR VISIBILIDAD

```
>
> alpha :=  $\frac{35 \cdot \text{Pi}}{180}$ ;

```

$$\alpha := \frac{7 \pi}{36} \quad (1.3.1)$$

```
> d :=  $\frac{r}{\sin\left(\frac{\text{alpha}}{2}\right)}$ ;

```

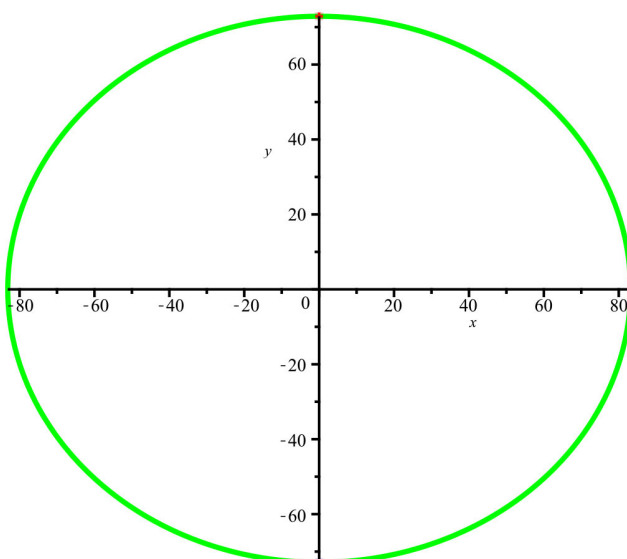
$$d := \frac{25}{\sin\left(\frac{7 \pi}{72}\right)} \quad (1.3.2)$$

```
> evalf(d);

```

$$83.13773808 \quad (1.3.3)$$

```
> P := [0, sqrt(d^2 - c^2)]:
> Q := [0, -sqrt(d^2 - c^2)]:
> Puntos := pointplot([P, Q], color=[red, blue]):
> E := implicitplot( $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2 - c^2} = 1$ , x=-130..130, y=-90..90, thickness=2, color
=green):
> display(E, Puntos);
```



CÁLCULO DEL PUNTO DE MAYOR VISIBILIDAD

```
> ### Ángulo de máxima visibilidad:  $\theta=36$  ###
```

```
> theta :=  $\frac{36 \cdot \text{Pi}}{180}$ ;
```

$$\theta := \frac{\pi}{5} \quad (1.4.1)$$

```
> rho :=  $\frac{\text{sqrt}((d)^2 \cdot (d^2 - c^2))}{\text{sqrt}((d)^2 \cdot \cos(\text{theta})^2 + (d^2 - c^2) \cdot \sin(\text{theta})^2)}$  :
```

```
> evalf(rho)
```

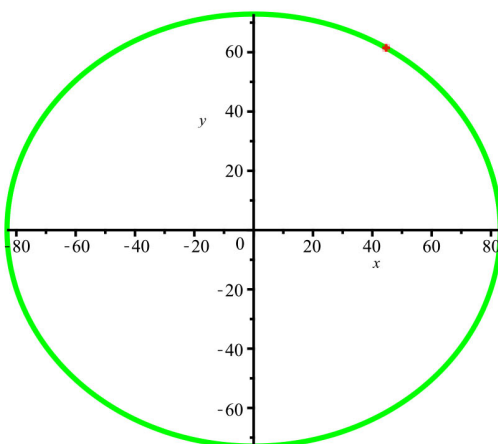
$$75.98445402 \quad (1.4.2)$$

```
>
```

```
> Pmax := pointplot([ rho·sin(theta), rho·cos(theta) ], color = red) :
```

```
>
```

```
> display([E, Pmax]);
```



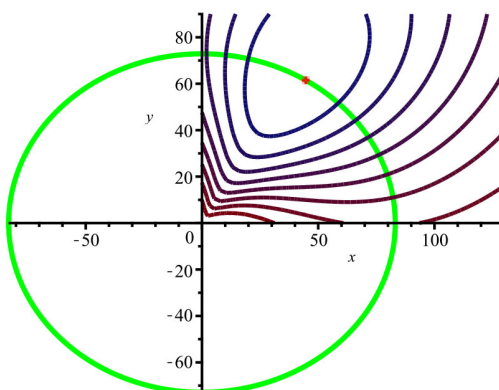
```
>
```

FUNCIÓN VISIBILIDAD Y CURVAS DE EQUIVISIBILIDAD

```

> W(x, y) :=  $\left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\text{rho}} \right)^{k \left( \frac{2}{\text{Pi}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right)} \cdot \exp\left( -k \left( \frac{2}{\text{Pi}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\text{rho}} \right) :$ 
> CN := contourplot(W(x, y), x = 0 .. 130, y = 0 .. 90) :
>
> display([E, Pmax, CN]);

```



```

> evalf(W(rho*sin(theta), rho*cos(theta)));

```

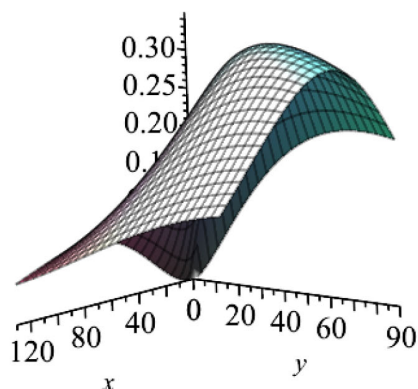
0.3464558101

(1.5.1)

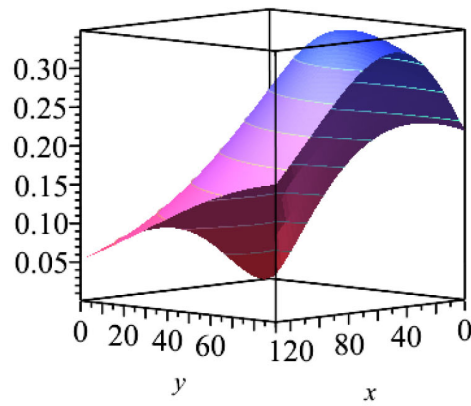
```

> plot3d(W(x, y), x = 0 .. 130, y = 0 .. 90, thickness = 2, axes = normal);

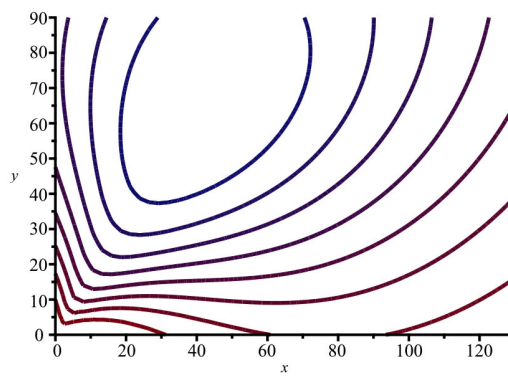
```



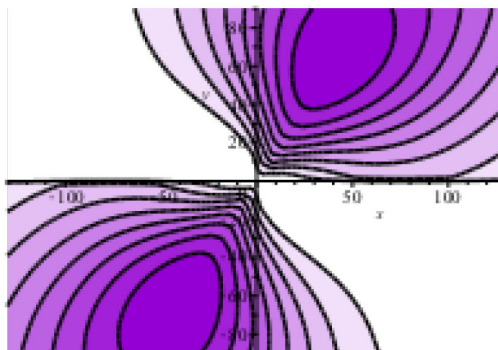
```
> contourplot3d(W(x, y), x = 0 .. 130, y = 0 .. 90, filledregions = true)
```



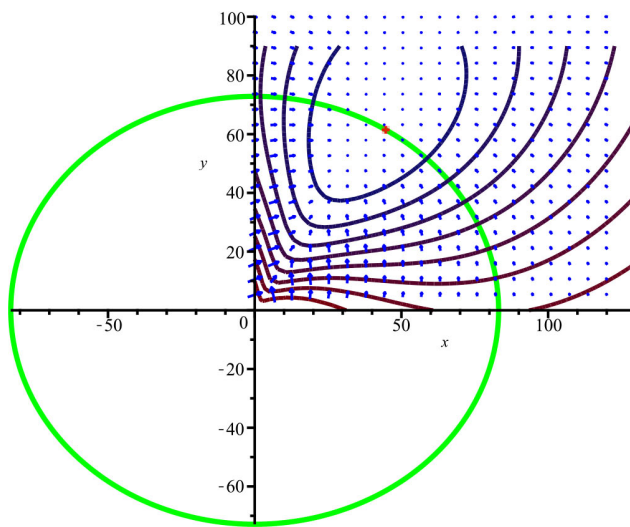
```
> contourplot(W(x, y), x = 0 .. 130, y = 0 .. 90)
```



```
> contourplot(W(x, y), x = -130 .. 130, y = -90 .. 90, filledregions = true, coloring = ["White", "DarkViolet"]);
```



```
> Grad := gradplot(W(x, y), x = 0 .. 120, y = 0 .. 100, color = blue, arrows = SLIM) :  
> display(E, Pmax, CN, Grad);
```



Bibliografía

MORETTI, Luigi. "Ricerca Matematica in Architettura e Urbanistica". *Moebius unita' della cultura* (Roma), número 1, 1971/72, páginas 30-53.

Este artículo ha sido clave para el desarrollo del presente trabajo. Sin él hubiera sido muy difícil llegar al grado de definición que se ha conseguido. Este artículo recoge la información necesaria para analizar cada uno de los estadios y poder plantear el algoritmo del diseño.

CAPONI, Piermaria. "Revisiting the «*M Stadium*» Project by Luigi Moretti: A Forgotten Model of Parametric Architecture". (Barcelona), Octubre 2019, páginas 1-5.

BIANCONI, Fabio; FILIPPUCI, Marco; BUFFI, Alessandro; VITALI, Luisa. "Morphological and visual optimization in stadium design: a digital reinterpretation of Luigi Moretti's stadiums". *Architectural Science Review*, Noviembre 2019, páginas 194-209.

Estos dos artículos : "Revisiting the «*M Stadium*» Project by Luigi Moretti: A Forgotten Model of Parametric Architecture" y "Morphological and visual optimization in stadium design: a digital reinterpretation of Luigi Moretti's stadiums", me permitieron iniciar la investigación. La información que se había encontrado hasta entonces además de ser escasa no daba información sobre proceso definido por Moretti para obtener las curvas de equivisibilidad, el fin de este trabajo. Al encontrar estos artículos parecía que el problema de falta se había solventado. Sin embargo, al iniciar a trabajar con ellos me di cuenta que el problema seguía existiendo. A pesar de que el objetivo de ambos trabajos era reproducir el *Stadio M*, la función visibilidad reflejada en cada uno de ellos era distinta. Mientras que la expresión recogida en el primer artículo era la definida por Moretti para el *Stadio M*, el segundo artículo recoge la expresión que daba forma al *Stadio N*. A la limitación de información se sumaba la confusión.

PALESTINA, Caterina; BASSO, Alessandro. "Parametric Architecture and Representation, the Experiment of Luigi Moretti". (Italia), 2019, páginas 183-198.

LEKUONA AMUNDARAIN, Aitor; DOMÍNGUEZ SOMONTE Manuel; ESPINOSA ESCUDERO, María del Mar. "Parametric design as a creative tool in product design". Julio 2021.

NAVARRETE, Sandra. "Diseño paramétrico. El gran desafío del siglo XXI". Diciembre 2012, cuaderno 49, páginas 63-72.

Estos tres artículos han sido claves para redactar la información recogida en el apartado 3.2.

SHEPHERD, Paul; HUDSON, Roly; HINES, David. "Aviva Stadium: A parametric success". *International Journal of Architectural Computing*. Junio 2011, volumen 09, páginas 167-185.

SHEPHERD, Paul. "On the Benefits of a Parametric Approach to Stadium Design". *Future Visions* (Amsterdam) Agosto 2015.

MORETTI, Luigi. *Spazio*. Milán: Christian Marinotti Edizioni, 2021; 239. Versión de recopilación: SIMONA PIERINI, Orsina.

Este libro recoge algunos de los escritos que Moretti publicó en la revista *Spazio*. A pesar de no ser de mucha ayuda para el objetivo con el que se ha realizado este trabajo me ha permitido conocer los intereses del arquitecto y los cuales están plasmados en su arquitectura.

FINELLI, Luciana. *Luigi Moretti la promessa e il debito*. Officina Edizioni, 2005; 252.

ROSTAGNI, Cecilia. *Luigi Moretti 1907-1973*. Mondadori Electa, 2008; 339.

MORETTI, Luigi. *Razionalismo e trasgressività tra barocco e informale*. Mondadori Electa, 2010; 471.

Zevi, Bruno. *L'Architettura Cronache e Storie*. Número 30, Abril 1958.

<https://www.visualarq.com/es/arquitectura-y-deporte-un-estadio-para-modernos-gladiadores/>; consultado el 30.05.2023.

<https://www.archdaily.cl/cl/970851/como-se-calcula-la-isoptica>; consultado el 30.05.2023.

<https://arquinetpolis.com/arquitectura/que-es-la-isoptica/>; consultado el 30.05.2023.

Moretti en sus escritos no habla de curva isóptica sin embargo el cálculo de esta curva permite mejorar la visibilidad en estadios, teatros y cines, tema bajo el cual se planteaba la forma de cada uno de los estadios expuestos en la XII Trienal de Milán. Estas tres páginas web me han ayudado a conocer el concepto de curva isóptica, introducido brevemente en este trabajo.

<https://fernandoalonsoarchitect.blogspot.com/2017/01/historia-del-diseno-parametrico.html>; consultado el 29.05.2023.

Procedencia de las ilustraciones

- 1.1. Tomado de <https://www.visualarq.com/es/arquitectura-y-deporte-un-estadio-para-modernos-gladiadores/>; consultado el 30.05.2023.
- 1.2. Tomado de Salvatore Santuccio, *Luigi Moretti* (Roma: Zanichelli, 1986), figura 3, página 120.
- 1.3. Tomado de Salvatore Santuccio, *Luigi Moretti* (Roma: Zanichelli, 1986), figura 2, página 120.
- 3.1. Tomado de <https://www.danieldavis.com/thesis-ch2/>; consultado el 15.04.2023.
- 3.2. Tomado de <https://faircompanies.com/articles/disenio-parametrico-reivindicacion-de-sus-pioneros-artesanales/>; consultado el 15.04.2023.
- 4.1. Tomado de Fabio Bianconi, Alessandro Buffi, Marco Pilippucci, Luisa Vitali, «*Morphological and visual optimization in stadium design: a digital reinterpretation of Luigi Moretti's stadiums*», *Architectural Science Review* (1986), figura 1, página 196.
- 4.2. Tomado de <https://ofhouses.com/post/100416045925/110-luigi-moretti-villa-la-saracena-santa>; consultado el 22.04.2023.
- 4.3. Tomado de <https://architectureofdoom.tumblr.com/post/41107905851/watergate-complex-washington-dc-luigi-moretti>; consultado el 22.04.2023.
- 4.4. Tomado de <https://www.elledecor.com/it/architettura/a35739272/parcheggio-luigi-moretti-villa-borghese-roma/>; consultado el 22.04.2023.
- 4.5. Tomado de <https://www.metalocus.es/es/noticias/olvidense-de-los-archistars-re-descubran-la-verdadera-arquitectura-como-la-de-luigi-moretti-en-fiuggi>; consultado el 22.04.2023.
- 4.6. Tomado de Eleonora Carrano, *Luigi Moretti L'Oeuvre Romaine* (Roma: Prospettive Edizioni, 2006), página 70.
- 4.7. Tomado de Fabio Bianconi, Alessandro Buffi, Marco Pilippucci, Luisa Vitali, «*Morphological and visual optimization in stadium design: a digital reinterpretation of Luigi Moretti's stadiums*», *Architectural Science Review* (1986), figura 4, página 198.
- 4.8. Tomado de Fabio Bianconi, Alessandro Buffi, Marco Pilippucci, Luisa Vitali, «*Morphological and visual optimization in stadium design: a digital reinterpretation of Luigi Moretti's stadiums*», *Architectural Science Review* (1986), figura 4, página 198.
- 5.1. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 20, página 44.
- 5.2. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 16, página 42.
- 5.3. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 18, página 43.

- 5.4. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 21, página 44.
- 5.5. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 22, página 45.
- 5.6. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 17, página 42.
- 5.7. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 19, página 44.
- 5.8. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 29, página 49.
- 5.9. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 23, página 46.
- 5.10. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 24, página 47.
- 5.11. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 26-27, página 48.
- 5.12. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 23, página 46.
- 5.13. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 25, página 48.
- 5.14. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 32, página 51.
- 5.15. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 31, página 50.
- 5.16. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 30, página 50.
- 5.17. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 33, página 51.
- 5.18. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 35, página 52.
- 5.19. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 34, página 52.
- 5.20. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 36, página 53.
- 6.1. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 14, página 41.
- 6.2. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 15, página 41.

-
- 6.3. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 18, página 43.
- 6.4-6.9. Elaboración del autor utilizando el programa de Grasshopper.
- 6.10-6.15. Elaboración del autor utilizando el programa de Maple.
- 6.16. Elaboración del autor utilizando el programa de Grasshopper.
- 6.17. Elaboración del autor a partir de un original tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 18, página 43.
- 6.18. Elaboración del autor utilizando el programa de Grasshopper.
- 6.19-6.22. Elaboración del autor utilizando el programa de Maple.
- 6.23. Tomado de Luigi Moretti, «*Ricerca matematica in architettura e urbanistica*», *Moebius* (n1, 1971/72), figura 19, página 44.
- 6.24. Elaboración del autor utilizando el programa de Maple.
- 6.25-6.31. Elaboración del autor utilizando el programa de Grasshopper.
- 6.32-6.35. Elaboración del autor utilizando el programa de Maple.
- 7.1-7.11. Elaboración del autor utilizando el programa de Grasshopper.

