

# APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS A LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN 2-D.

**Francisco Ureña Prieto**

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Castilla- La Mancha  
Dirección postal: Avda Camilo José Cela s/n. 13071 Ciudad Real  
e-mail: francisco.urena@uclm.es

**Juan José Benito Muñoz**

Departamento de Ingeniería de Construcción y Fabricación  
Universidad Nacional de Educación a Distancia  
Apdo. de correos 60149, 28080 Madrid  
e-mail: jbenito@ind.uned.es

**Luis Gavete Corvinos**

Departamento Matemática Aplicada a los Recursos Naturales  
Universidad Politécnica de Madrid  
Dirección postal: Rios Rosas 21, 28003 Madrid  
e-mail: lu.gavete@upm.es

**Eduardo Salete Casino**

Departamento de Ingeniería de Construcción y Fabricación  
Universidad Nacional de Educación a Distancia  
Apdo. de correos 60149, 28080 Madrid  
e-mail: esalete@ind.uned.es

## Resumen

En esta comunicación se muestra la aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas al problema de la propagación de ondas sísmicas, y más

concretamente se analiza la estabilidad y la dispersión en la estrella para el caso 2-D.

Se obtienen condiciones de estabilidad y dispersión en la estrella para las ondas  $S$  y  $P$ . También se obtienen las velocidades de grupo de las ondas  $P$  y  $S$ .

*Palabras Clave.* Métodos sin malla, diferencias finitas generalizadas, ondas, estabilidad, dispersión, mallas irregulares, método explícito.

## **Application of the generalized finite difference method for solving seismic waves propagation problem in 2-D**

### **Abstract**

This paper shows the application of generalized finite difference method (GFDM) to the problem of seismic wave propagation. We investigated stability and star dispersion in 2-D.

We obtained independent stability conditions and star dispersion for the  $P$  and  $S$  waves. Also, we are obtained  $P$  and  $S$ -wave group velocity.

## **1. Introducción**

Los métodos que en general se pueden denominar métodos sin malla, surgieron hace aproximadamente treinta años, aunque el interés y el esfuerzo investigador ha sido mínimo hasta hace poco tiempo. Así pues, la referencia más alejada en el tiempo y que puede considerarse como punto de partida es el método de partículas (SPHM) que fue desarrollado por en 1977 por Lucy([12]). En 1982 y 1988 Monaghan ([13] y [14]) desarrolla una explicación más rigurosa del método.

Una camino paralelo al indicado en el desarrollo de aproximaciones sin malla, se basa en la idea de realizar una aproximación local mediante el método de mínimos cuadrados móviles de Lancaster y Salkauskas (1981)([10]). Nayroles, Touzot y Villon (1992) ([16]) fueron los primeros en utilizar una aproximación de este tipo en un método de Galerkin, denominado método de los elementos difusos (DEM).

Belytschko, Lu y Gu (1994)([2]) refinaron y desarrollaron una implementación alternativa del método de los elementos difusos, que mejoró la precisión al utilizar multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones de contorno esenciales y un orden de cuadratura mayor en la integración. Ellos denominaron al método, Galerkin libre de elementos (EFG).

Un salto importante en el desarrollo de estos métodos se ha producido a

partir de los trabajos de Duarte y Oden (1995) ([8]) y de Babuska y Melenk (1995) ([1]) que realizan una generalización muy interesante de la aproximación por mínimos cuadrados móviles usando el concepto de partición de la unidad, que los primeros denominaron nubes hp (hp clouds) y de partición de la unidad (PUFEM) los segundos.

Otro camino en la evolución de los métodos sin malla se ha constituido mediante el desarrollo del método de diferencias finitas generalizadas (GFDM) que surge como consecuencia de la evolución del método de diferencias finitas clásicas. Los trabajos de Jensen (1972) ([9]) y Perrone y Kao (1975) ([18]) pusieron las bases del método. Liszka y Orkisz (1980) ([11]) y Orkisz (1998) ([17]) han realizado importantes contribuciones a la mejora y desarrollo del método.

El método de diferencias finitas generalizadas (GFDM), se basa en la utilización de mínimos cuadrados móviles, lo que permite aplicar esquemas en diferencias finitas en dominios irregulares. Al desarrollo de este método han contribuido los trabajos de los autores. Así, se han obtenido fórmulas explícitas en diferencias para el caso de estrellas irregulares, analizándose la influencia de los parámetros fundamentales que aparecen en la formulación [3], se ha obtenido un método adaptativo para la mejora de la solución aproximada utilizando GFDM [4], en [6] se muestra la aplicación del método adaptativo en GFDM a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden y [7] es un resumen global de GFDM que incluye las aportaciones realizadas por los autores y su aplicación a problemas elásticos.

Los artículos [5] y [19] muestran la aplicación del método de diferencias finitas generalizadas a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales dependientes del tiempo.

## **2. Esquema en diferencias finitas generalizadas para el problema de propagación de ondas sísmicas en dominios homogéneos**

### **2.1. Planteamiento del problema**

El problema de propagación de ondas sísmicas en 2-D viene caracterizado por el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 V(x, y, t)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V(x, y, t)}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 V(x, y, t)}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 V(x, y, t)}{\partial y^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1)$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} U(x, y, 0) = f_1(x, y); V(x, y, 0) = f_2(x, y) \\ \frac{\partial U(x, y, 0)}{\partial t} = f_3(x, y); \frac{\partial V(x, y, 0)}{\partial t} = f_4(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

y la condición de contorno

$$\begin{cases} a_1 U(x_0, y_0, t) + b_1 \frac{\partial U(x_0, y_0, t)}{\partial n} = g_1(t) \\ a_2 V(x_0, y_0, t) + b_2 \frac{\partial V(x_0, y_0, t)}{\partial n} = g_2(t) \end{cases} \quad \text{en } \Gamma \quad (3)$$

siendo  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $f_3(x, y)$ ,  $f_4(x, y)$ ,  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$  funciones conocidas,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$\rho$  es la densidad,  $\lambda$  cortante de Lamé y  $\mu$  el mdulo de rigidez. Las funciones  $U(x, y, t)$ ,  $V(x, y, t)$  son al menos dos veces diferenciables con continuidad en el dominio  $\Omega$  con frontera  $\Gamma$ .

## 2.2. Esquema en diferencias finitas generalizadas

Para la obtención de las fórmulas explícitas en diferencias finitas de las derivadas espaciales, una vez discretizado el dominio  $\Omega \cup \Gamma$ , a cada nodo del mismo se le asigna un conjunto de nodos a su alrededor que se denomina estrella. En la figura 1 se muestra una estrella irregular con ocho nodos seleccionados con el criterio de los cuatro cuadrantes (dos nodos por cuadrante, que son los más próximos al nodo central, considerando este como origen). La derivada segunda respecto del tiempo en el nodo central de la estrella se aproxima por:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t^2} = \frac{u_0^{n+1} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{(\Delta t)^2} \\ \frac{\partial^2 V(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial t^2} = \frac{v_0^{n+1} - 2v_0^n + v_0^{n-1}}{(\Delta t)^2} \end{cases} \quad (4)$$

donde  $u_0^n$ ,  $u_0^{n+1}$  y  $u_0^{n-1}$  son los valores aproximados de las funciones  $U(x, y, t)$ ,  $V(x, y, t)$  en el nodo central de coordenadas espaciales  $(x_0, y_0)$  para los tiempos  $n\Delta t$  y  $(n+1)\Delta t$  respectivamente.

Las derivadas espaciales se aproximan por las expresiones explícitas en diferencias finitas generalizadas, obtenidas en [5] y [6]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x^2} &= -m_0 u_0^n + \sum_{j=1}^N m_j u_j^n; & \frac{\partial^2 V(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x^2} &= -m_0 v_0^n + \sum_{j=1}^N m_j v_j^n \\
\frac{\partial^2 U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y^2} &= -\eta_0 u_0^n + \sum_{j=1}^N \eta_j u_j^n; & \frac{\partial^2 V(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial y^2} &= -\eta_0 v_0^n + \sum_{j=1}^N \eta_j v_j^n \\
\frac{\partial^2 U(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x \partial y} &= -\zeta_0 u_0^n + \sum_{j=1}^N \zeta_j u_j^n; & \frac{\partial^2 V(x_0, y_0, n\Delta t)}{\partial x \partial y} &= -\zeta_0 v_0^n + \sum_{j=1}^N \zeta_j v_j^n
\end{aligned} \tag{5}$$

Si en el sistema de ecuaciones 1 se sustituyen las derivadas parciales por las expresiones 4 y 5 se obtiene:

$$\left\{ \begin{aligned}
u_0^{n+1} &= 2u_0^n - u_0^{n-1} + (\Delta t)^2 [\alpha^2 (-m_0 u_0^n + \sum_1^N m_j u_j^n) + \beta^2 (-\eta_0 u_0^n + \sum_1^N \eta_j u_j^n) \\
&\quad + (\alpha^2 - \beta^2) (-\zeta_0 v_0^n + \sum_1^N \zeta_j v_j^n)] \\
v_0^{n+1} &= 2v_0^n - v_0^{n-1} + (\Delta t)^2 [\beta^2 (-m_0 v_0^n + \sum_1^N m_j v_j^n) + \alpha^2 (-\eta_0 v_0^n + \sum_1^N \eta_j v_j^n) \\
&\quad + (\alpha^2 - \beta^2) (-\zeta_0 u_0^n + \sum_1^N \zeta_j u_j^n)]
\end{aligned} \right. \tag{6}$$

que constituyen el esquema en diferencias finitas generalizadas para el problema planteado.

### 3. Criterio de Estabilidad

Para estudiar la estabilidad se utiliza el análisis de von Neumann. Para lo cual se realiza una descomposición armónica de la solución aproximada de la forma

$$u_0^n = A \xi^n e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0}; \quad u_j^n = A \xi^n e^{i\mathbf{k} \mathbf{u}^T \mathbf{x}_j}; \quad v_0^n = B \xi^n e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_0}; \quad v_j^n = B \xi^n e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}_j} \tag{7}$$

donde

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_j; \quad \xi = e^{-i\omega \Delta t}$$

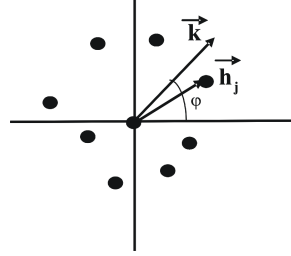
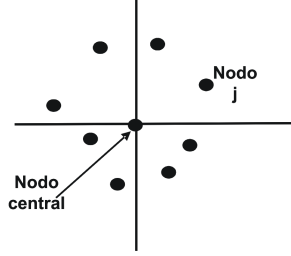


Figura 1: Estrella irregular de 9 nodos

Figura 2: Número de onda  $\vec{k}$

,  $\mathbf{k}$  es el vector del número de onda (ver figura 2)

$$\mathbf{k} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \end{Bmatrix} = \kappa \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}$$

y  $\xi$  es el llamado factor de amplificación, cuyo valor determinará la condición de estabilidad.

Al sustituir las expresiones 7 en la ecuación 6, y simplificar, se obtiene

$$\begin{aligned} A\xi &= 2A - \frac{A}{\xi} + (\Delta t)^2 [\alpha^2 (-Am_0 + A \sum_1^N m_j e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) + \beta^2 (-A\eta_0 + A \sum_1^N \eta_j e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) + \\ &\quad (\alpha^2 - \beta^2) (-B\zeta_0 + B \sum_1^N \zeta_j e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j})] \\ B\xi &= 2B - \frac{B}{\xi} + (\Delta t)^2 [\beta^2 (-Bm_0 + B \sum_1^N m_j e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) + \alpha^2 (-B\eta_0 + B \sum_1^N \eta_j e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) + \\ &\quad (\alpha^2 - \beta^2) (-A\zeta_0 + A \sum_1^N \zeta_j e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j})] \quad (8) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los coeficientes  $m_j, \eta_j, \zeta_j$ , son particiones de la unidad, se tiene

$$m_0 = \sum_1^N m_j; \quad \eta_0 = \sum_1^N \eta_j; \quad \zeta_0 = \sum_1^N \zeta_j \quad (9)$$

al sustituir las expresiones 9 en la ecuación 8, se obtiene el sistema de dos ecuaciones con dos incognitas,  $A$  y  $B$ , siguiente

$$\begin{aligned}
& A\left[\xi - 2 + \frac{1}{\xi} + (\Delta t)^2 \alpha^2 \sum_1^N m_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) + (\Delta t)^2 \beta^2 \sum_1^N \eta_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j})\right] \\
& \quad + B(\Delta t)^2 (\alpha^2 - \beta^2) \sum_1^N \zeta_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) = 0 \\
& A(\Delta t)^2 (\alpha^2 - \beta^2) \sum_1^N \zeta_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) + B\left[\xi - 2 + \frac{1}{\xi} + (\Delta t)^2 \beta^2 \sum_1^N m_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j})\right. \\
& \quad \left. + (\Delta t)^2 \alpha^2 \sum_1^N \eta_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j})\right] = 0 \quad (10)
\end{aligned}$$

en el que al despejar  $B$  de la segunda ecuación del sistema 10, y sustituir en la primera ecuación, y tras operar, se obtiene

$$\begin{aligned}
& [2 \cos w\Delta t - 2 + (\Delta t)^2 (\alpha^2 \sum_1^N m_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) + \beta^2 \sum_1^N \eta_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}))] \times \\
& [2 \cos w\Delta t - 2 + (\Delta t)^2 (\beta^2 \sum_1^N m_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) + \alpha^2 \sum_1^N \eta_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}))] = \\
& = (\Delta t)^4 (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[ \sum_1^N \zeta_j (1 - e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j}) \right]^2 \quad (11)
\end{aligned}$$

Tras operar, se obtienen las siguientes condiciones:

**Parte real**

$$\begin{aligned}
& (1 - \cos w\Delta t)^2 - 2(1 - \cos w\Delta t) \frac{(\Delta t)^2}{4} (\alpha^2 + \beta^2) \sum_1^N (m_j + \eta_j) (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \\
& \frac{(\Delta t)^4}{4} \left[ (\alpha^2 \sum_1^N m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \beta^2 \sum_1^N \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) (\beta^2 \sum_1^N m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) \right. \\
& + \alpha^2 \sum_1^N \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) - (\alpha^2 \sum_1^N m_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j + \beta^2 \sum_1^N \eta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) (\beta^2 \sum_1^N m_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \\
& \left. + \alpha^2 \sum_1^N \eta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - (\alpha^2 - \beta^2)^2 \left[ \left( \sum_1^N \zeta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \right)^2 - \left( \sum_1^N \zeta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \right)^2 \right] \right] = 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

### Parte imaginaria

$$\begin{aligned}
& 2(1 - \cos w\Delta t)(\alpha^2 + \beta^2) \sum_1^N (m_j + \eta_j) \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j - (\Delta t)^2 [(\alpha^2 \sum_1^N m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \\
& + \beta^2 \sum_1^N \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) (\beta^2 \sum_1^N m_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j + \alpha^2 \sum_1^N \eta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \\
& (\alpha^2 \sum_1^N m_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j + \beta^2 \sum_1^N \eta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) (\beta^2 \sum_1^N m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) + \\
& \alpha^2 \sum_1^N \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j)) + 2(\alpha^2 - \beta^2)^2 (\sum_1^N \zeta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \sum_1^N \zeta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j] = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Al operar con estas ecuaciones, simplificando mediante el uso de criterios conservadores y eligiendo entre ambas la condición más restrictiva, se obtiene

$$\Delta t < \sqrt{\frac{4}{(\alpha^2 + \beta^2)[(|m_0| + |\eta_0|) + \sqrt{(m_0 + \eta_0)^2 + \zeta_0^2}]}]} \tag{14}$$

que es la condición de estabilidad de la estrella. Por tanto, el paso de tiempo ( $\Delta t$ ) deberá ser el mínimo de los obtenidos para las estrellas de la malla.

## 4. Dispersión en la estrella

### 4.1. Dispersión de las ondas P

De la ecuación 12 se tiene

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \arccos \Phi \tag{15}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Phi = 1 - \frac{(\Delta t)^2}{4} & ((\alpha^2 + \beta^2)(a_1 + a_3) + ((\alpha^2 + \beta^2)^2(a_1 + a_3)^2 + \\
& 4[(\alpha^2 - \beta^2)^2(a_5^2 - a_6^2) + (\alpha^2 a_2 + \beta^2 a_4)(\beta^2 a_2 + \alpha^2 a_4) - (\alpha^2 a_1 + \beta^2 a_3)(\beta^2 a_1 + \alpha^2 a_3)]) \frac{1}{2})
\end{aligned} \tag{16}$$

donde

$$a_1 = \sum_1^N m_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \Rightarrow \frac{\partial a_1}{\partial k} = a_{1,k} = \sum_1^N m_j d \sin kd$$



$$\begin{aligned}
a_2 &= \sum_1^N m_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \Rightarrow \frac{\partial a_2}{\partial k} = a_{2,k} = \sum_1^N m_j d \cos kd \\
a_3 &= \sum_1^N \eta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \Rightarrow \frac{\partial a_3}{\partial k} = a_{3,k} = \sum_1^N \eta_j d \sin kd \\
a_4 &= \sum_1^N \eta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \Rightarrow \frac{\partial a_4}{\partial k} = a_{4,k} = \sum_1^N \eta_j d \cos kd \\
a_5 &= \sum_1^N \zeta_j (1 - \cos \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j) \Rightarrow \frac{\partial a_5}{\partial k} = a_{5,k} = \sum_1^N \zeta_j d \sin kd \\
a_6 &= \sum_1^N \zeta_j \sin \mathbf{k}^T \mathbf{h}_j \Rightarrow \frac{\partial a_6}{\partial k} = a_{6,k} = \sum_1^N \zeta_j d \cos kd \tag{17}
\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{k}^T \mathbf{h}_j = k(h_{jx} \cos \varphi + h_{jy} \sin \varphi) = kd$$

Se sabe que

$$\omega = 2\pi \frac{c^{grid}}{\lambda^{grid}} \tag{18}$$

donde  $c^{grid}$  y  $\lambda^{grid}$  son la velocidad de fase ( $\alpha^{grid}$  o  $\beta^{grid}$ ) y la longitud de onda ( $\lambda_P^{grid}$  y  $\lambda_S^{grid}$ ) en la estrella respectivamente.

Si se definen las relaciones:

$$s = \frac{2}{\lambda_S^{grid} \sqrt{(r^2 + 1)[(|m_0| + |\eta_0|) + \sqrt{(m_0 + \eta_0)^2 + \zeta_0^2}]}} \tag{19}$$

$$s_P = \frac{2}{\lambda_P^{grid} \sqrt{(r^2 + 1)[(|m_0| + |\eta_0|) + \sqrt{(m_0 + \eta_0)^2 + \zeta_0^2}]}} \tag{20}$$

$$p = \frac{\beta \Delta t \sqrt{(r^2 + 1)[(|m_0| + |\eta_0|) + \sqrt{(m_0 + \eta_0)^2 + \zeta_0^2}]}}{2} \tag{21}$$

La razón de velocidades es

$$r = \frac{\alpha}{\beta} \tag{22}$$

y por tanto

$$s_P = \frac{s}{r} \tag{23}$$

Si se sustituyen las ecuaciones 15, 20, 21 y 23 en la ecuación 18 particularizada para las ondas P, tras operar, se obtiene la relación de dispersión para las ondas P

$$\frac{\alpha^{grid}}{\alpha} = \frac{\arccos \Phi}{2\pi s p} \tag{24}$$

## 4.2. Dispersión de las ondas S

Se sabe que

$$\omega = 2\pi \frac{\beta^{grid}}{\lambda_S^{grid}} \quad (25)$$

Si se sustituyen las ecuaciones 15, 19 y 21 en la ecuación 25, tras operar, se obtiene

$$\frac{\beta^{grid}}{\beta} = \frac{\text{arc cos } \Phi}{2\pi sp} \quad (26)$$

## 4.3. Dispersión de la velocidad de grupo ondas P

Por definición la velocidad de grupo para las ondas  $P$ , se obtiene al derivar  $w$ , dada por la expresión 15, respecto de  $k$ , por tanto

$$\alpha_{group}^{grid} = \frac{\partial w}{\partial k} = \frac{\Delta t}{4} \frac{\beta^2 \Upsilon}{\sqrt{1 - \Phi^2}} \quad (27)$$

donde

$$\begin{aligned} \Upsilon = & (r^2 + 1)(a_{1,k} + a_{3,k}) + \frac{1}{2}[2(r^2 + 1)^2(a_1 + a_3)(a_{1,k} + a_{3,k}) + \\ & 4[2(r^2 - 1)^2(a_5 a_{5,k} - a_6 a_{6,k}) + (r^2 a_{2,k} + a_{4,k})(a_2 + r^2 a_4) + \\ & (r^2 a_2 + a_4)(a_{2,k} + r^2 a_{4,k}) - (r^2 a_{1,k} + a_{3,k})(a_1 + r^2 a_3) - \\ & (r^2 a_1 + a_3)(a_{1,k} + r^2 a_{3,k})] \times [(r^2 + 1)^2(a_1 + a_3)^2 + \\ & 4[(r^2 - 1)^2(a_5^2 - a_6^2) + (r^2 a_2 + a_4)(a_2 + r^2 a_4) - (r^2 a_1 + a_3)(a_1 + r^2 a_3)]]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (28)$$

designando

$$\begin{aligned} F = & (r^2 + 1)(a_1 + a_3) + [(r^2 + 1)^2(a_1 + a_3)^2 + \\ & 4[(r^2 - 1)^2(a_5^2 - a_6^2) + (r^2 a_2 + a_4)(a_2 + r^2 a_4) - (r^2 a_1 + a_3)(a_1 + r^2 a_3)]]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (29)$$

Teniendo en cuenta las ecuación 29 y 21, se tiene

$$\frac{\alpha_{group}^{grid}}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}r} \frac{\Upsilon}{\sqrt{F - \left( \frac{pF}{\sqrt{(r^2 + 1)[(|m_0| + |\eta_0|) + \sqrt{(m_0 + \eta_0)^2 + \zeta_0^2}] \sqrt{2}}} \right)^2}} \quad (30)$$

#### 4.4. Dispersión de la velocidad de grupo ondas S

$$\frac{\beta_{group}^{grid}}{\beta} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Upsilon}{\sqrt{F - \left( \frac{pF}{\sqrt{(r^2 + 1)(|m_0| + |\eta_0|) + \sqrt{(m_0 + \eta_0)^2 + \zeta_0^2}} \sqrt{2}} \right)^2}} \quad (31)$$

#### 4.5. Irregularidad de la estrella y dispersión

Los coeficientes,  $m_0, \eta_0, \zeta_0$ , que aparecen en el criterio de estabilidad dependen de: a) número de nodos en la estrella, b) las coordenadas de cada nodo respecto del nodo central de la estrella y c) de la función de ponderación elegida ([3]).

Fijados el número de nodos por estrella, en nuestro caso 9 ( $N = 8$ ), y la función de ponderación,  $w(h_{jx}, h_{jy}) = \frac{1}{(\sqrt{h_{jx}^2 + h_{jy}^2})^3}$ , la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{(r^2 + 1)(|m_0| + |\eta_0|) + \sqrt{(m_0 + \eta_0)^2 + \zeta_0^2}}} \quad (32)$$

depende de la razón de velocidades y de las coordenadas relativas de cada nodo de la estrella respecto del nodo central de la misma.

Los coeficientes,  $m_0, \eta_0, \zeta_0$ , son funciones de  $\frac{1}{h_{jx}^2 + h_{jy}^2}$ , de tal manera que al disminuir las coordenadas relativas de los nodos de la estrella, aumentan dichos coeficientes, lo cual ocurre al aumentar el número de nodos en la malla. Para un mismo número de nodos en la malla el mínimo valor de los coeficientes mencionados se obtiene para la malla regular ([6]).

Sea  $\tau_l$  la media de las distancias de los nodos de la estrella  $l$  a su nodo central. Sea  $\tau$  la media de todas las  $\tau_l$  de las estrellas de la malla, una vez discretizado nuestro dominio. Se tiene que:

$$\mathbf{h}_j = \tau \left\{ \begin{array}{c} \overline{h_{jx}} \\ \overline{h_{jy}} \end{array} \right\} \quad (33)$$

$$m_0 = \overline{m_0} \frac{1}{\tau^2}; \quad \eta_0 = \overline{\eta_0} \frac{1}{\tau^2}; \quad \zeta_0 = \overline{\zeta_0} \frac{1}{\tau^2} \quad (34)$$

La condición de estabilidad puede reescribirse

$$\Delta t < \frac{2\tau}{\beta \sqrt{(r^2 + 1) \sqrt{(|\overline{m_0}| + |\overline{\eta_0}|) + \sqrt{(\overline{m_0} + \overline{\eta_0})^2 + \overline{\zeta_0}^2}}}} \quad (35)$$

En el caso de malla regular de ocho nodos la expresión 35 resulta ser

$$\Delta t < \frac{\tau}{\beta\sqrt{r^2+1}} \frac{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad (36)$$

Si se multiplica el segundo miembro de la expresión 36 por el factor

$$\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{3(|\bar{m}_0|+|\bar{\eta}_0|)+\sqrt{(\bar{m}_0+\bar{\eta}_0)^2+\bar{\zeta}_0^2}}} \quad (37)$$

se obtiene la expresión 35.

El factor obtenido en 37, que para una estrella regular (esquema de ocho nodos más el nodo central) es la unidad, es un indicador de la irregularidad de la estrella. Se adopta como indicador de irregularidad de la malla (IIM) el valor mnimo de los indicadores de irregularidad obtenidos para cada una de las estrellas de la malla. Al aumentar el número de nodos en la malla, podra disminuir el indicador de irregularidad de la malla y, por tanto, el paso de tiempo.

## 5. Resultados Numéricos

Resolución del problema definido en 2.1, con  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$  con las condiciones de contorno Dirichlet y las condiciones iniciales

$$U(x, y, 0) = \sin x \sin y; V(x, y, 0) = \cos x \cos y$$

$$\frac{\partial U(x, y, 0)}{\partial t} = 0; \frac{\partial V(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (38)$$

utilizando mallas regulares (ver figura 3 con 121 nodos) e irregulares (ver figuras 4 y 5) de 121 nodos. La solución analítica

$$U(x, y, t) = \cos \sqrt{2}t \sin x \sin y; \quad V(x, y, t) = \cos \sqrt{2}t \cos x \cos y \quad (39)$$

La función de ponderación utilizada ha sido

$$w(h_j, k_j) = \frac{1}{\sqrt{(h_j^2 + k_j^2)^3}} \quad (40)$$

y el criterio de selección de los nodos el del cuadrante. El error global ha sido calculado para cada paso de tiempo utilizando la siguiente norma

$$Error \quad global = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{NT} (sol(j) - exac(j))^2}{NT}}}{|exac_{max}|} \times 100 \quad (41)$$

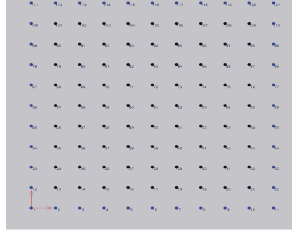


figura 3

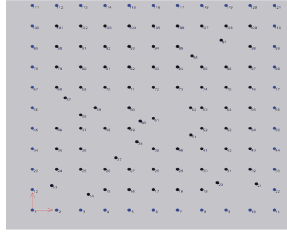


figura 4

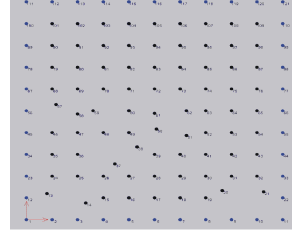


figura 5

donde  $sol(j)$  es el valor de la solución aproximada en el nodo  $j$ ,  $exac(j)$  es el valor de la solución exacta en el nodo  $j$ ,  $exac_{max}$  es el máximo valor de la solución exacta en los nodos interiores de la malla considerada y  $NT$  es el número de nodos del interior.

Los errores globales, con  $\Delta t = 0,01$ , para distintos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , en las mallas regulares, se muestran en las tablas 1 y 2

Cuadro 1: Influencia del número de nodos en el error global con  $\alpha = 1; \beta = 0,6$

N de Nodos	Error Global $U$	Error Global $V$
121	0.002816	0.003851
289	0.001166	0.001618
441	0.0006524	0.0008963
676	0.0003288	0.0004437

Los valores del error global al variar  $\Delta t$ , utilizando la malla irregular de 121 nodos de la figura 4, con  $IMM = 1,5327$ , se muestran en la tabla 3. Los valores del error global al variar  $\Delta t$ , utilizando la malla irregular de 121 nodos de la figura 5, con  $IMM = 1,118$ , se muestran en la tabla 4.

## 6. Conclusiones

En este artículo se muestran las expresiones explícitas, en diferencias finitas generalizadas, para la propagación de ondas sísmicas en 2-D. Se estudia la estabilidad, obteniéndose un criterio en función de la razón de velocidades y los coeficientes de las fórmulas explícitas.

Cuadro 2: Influencia del número de nodos en el error global con  $\alpha = 1; \beta = 0,5$

N de Nodos	Error Global $U$	Error Global $V$
121	0.001569	0.001754
289	0.0006037	0.0006796
441	0.0003856	0.0004312
676	0.000245	0.0002756

Cuadro 3: Influencia del  $\Delta t$  en el error global con  $\alpha = 1; \beta = 0,5$

$\Delta t$	Error Global $U$	Error Global $V$
0.0316	0.01506	0.0079
0.0223	0.01017	0.006447
0.01	0.003566	0.003099
0.007	0.002245	0.001945

Se analiza la dispersión y se relaciona con la irregularidad de la estrella utilizando el índice de irregularidad de la malla. La utilización de mallas irregulares, según la geometría del problema, puede ocasionar que se produzcan dispersiones elevadas en algunas estrellas, coherentemente con un indicador de irregularidad de la malla (IIM) elevado. En este caso se redefine la malla mediante un proceso adaptativo hasta conseguir una malla con valores de dispersión e índice de irregularidad adecuados.

## 7. Agradecimientos

Los autores agradecen la ayuda recibida del Ministerio de Ciencia e Innovación de España en el proyecto TISMANCA, Ref.: CGL2008-01757/CLI.

## Referencias

- [1] I. Babuska y J.M.. Melenk, *The partition of unity method*, International journal for numerical methods in engineering, vol 40, 727–758. Jhon Wiley & Sons, 1995.

Cuadro 4: Influencia del  $\Delta t$  en el error global con  $\alpha = 1; \beta = 0,5$

$\Delta t$	Error Global $U$	Error Global $V$
0.0316	0.0049	0.0104
0.0223	0.0039	0.0073
0.01	0.00202	0.00246
0.007	0.00152	0.00153

- [2] T. Belytschko, Y.Y. Lu y L. Gu, *Element-free Galerkin methods*, International journal for numerical methods in engineering, vol 37, 229–256, 1994.
- [3] J. J. Benito, F. Ureña y L. Gavete, *Influence several factors in the generalized finite difference method*, Applied Mathematical Modeling, vol 25, pp. 1039–1053, (2001).
- [4] J. J. Benito, F. Ureña, L. Gavete y R. Alvarez, *An h-adaptive method in the generalized finite difference*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol 192, pp. 735–759 (2003).
- [5] J. J. Benito, F. Ureña, L. Gavete y B. Alonso, *Solving parabolic and hyperbolic equations by Generalized Finite Difference Method*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol 209 Issue 2, pp. 208–233 (2007).
- [6] J. J. Benito, F. Ureña, L. Gavete y B. Alonso, *Application of the Generalized Finite Difference Method to improve the approximated solution of pdes*, Computer Modelling in Engineering & Sciences, vol 38, pp. 39–58 (2009).
- [7] J. J. Benito, F. Ureña y L. Gavete, *Leading-Edge Applied Mathematical Modelling Research (chapter 7)*, Nova Science Publishers, New York, 2008.
- [8] C.A. Duarte y J.T. Oden, *A meshless method to solve boundary-value problems*, TICAM report, 95–105, 1995.
- [9] P. S. Jensen, *Finite difference techniques for variable grids*, Computers & Structures 2, 17–29, 1972.

- [10] P. Lancaster y K. Salkauskas, *Surfaces generated by moving least square methods*, Mathematics of computation, vol 37, 141–158, 1981.
- [11] T. Liszka y J. Orkisz, *The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics*, Computers & Structures 11, 83–95. Pergamon Press 1980.
- [12] L. Lucy, *A numerical approach to testing the fission hypothesis*, App. Jour. 82, 1013–1024, 1977.
- [13] J.J. Monaghan, *Why particle methods work?*, SIAM Scientific Journal of stat. Comp., vol. 3, 422–433, 1982.
- [14] J.J. Monaghan, *And introduction to SPH*, Comput. Phys. Comun., vol 48, 89–96, 1988.
- [15] P. Moczo y J. Kristek, *The finite difference and finite element modelling of seismic wave propagation and earthquake motion*, Acta physica slovacica vol 57 N 2, pp. 177–406, 2007.
- [16] B. Nayroles, G. Touzpt y P. Villon, *Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements*, Computational mechanics, Springer-Verlag, 307–318, 1992.
- [17] J. Orkisz, *Meshless finite difference method II. Adaptive approach*, Computation Mechanics, CIMNE, 1998.
- [18] N. Perrone y R. Kao , *A general finite difference method for arbitrary meshes*, Computers & Structures 5, 45–58, 1975.
- [19] F. Ureña, J.J. Benito, L. Gavete, R. Alvarez, *Resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo de segundo orden utilizando Diferencias Finitas Generalizadas*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para cálculo y diseño en ingeniería. Vol. **19**, **3**, 331-340 (2003).