

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio



**Análisis de Sistemas Dinámicos en Ingeniería
Aeroespacial Mediante Métodos de
Descomposición Modal Avanzados**

TESIS DOCTORAL

Presentada para optar al título de Doctor por:

Beka Begiashvili

Ingeniero industrial

Madrid, 2024



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del
Espacio

Doctorado en Ingeniería Aeroespacial

Análisis de Sistemas Dinámicos en Ingeniería Aeroespacial Mediante Métodos de Descomposición Modal Avanzados

TESIS DOCTORAL

Presentada para optar al título de Doctor por:

Beka Begiashvili

Ingeniero industrial

Bajo la dirección de:

Dr. Jesús Garicano-Mena

Dra. Soledad Le Clainche

Madrid, 2024

Título: Análisis de Sistemas Dinámicos en Ingeniería Aeroespacial Mediante Métodos de Descomposición Modal Avanzados

Autor: Beka Begiashvili

Programa de Doctorado: Ingeniería Aeroespacial

Dirección de Tesis:

Dr. Jesús Garicano Mena, profesor contratado doctor en la Universidad Politécnica de Madrid (Director)

Dra. Soledad Le Clainche Martínez, profesora Titular de Universidad en la Universidad Politécnica de Madrid (Codirectora)

Revisores Externos:

Tribunal de Tesis:

Fecha de Defensa de Tesis:

Esta tesis ha sido apoyada por SIMOPAIR (Proyecto: RTI2018-097075-B-I00) financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por el programa de investigación e innovación del Horizonte 2020 de la Unión Europea bajo el acuerdo de Marie Skłodowska-Curie 101019137—FLOWCID. Especial mención también a las ayudas TED2021-129774B-C21 y PLEC2022-009235, financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y la Unión Europea "NextGenerationEU"/PRTR.

Dedicada a mi mamá.

Agradecimientos

En este momento crucial de culminación de mi investigación, deseo expresar mi más sincero reconocimiento y gratitud a aquellas personas que han sido fundamentales en este viaje académico y personal.

En primer lugar, mi eterna gratitud a mi madre, pilar inquebrantable de mi vida. Su constante apoyo, amor y sacrificios han sido la base sobre la que he construido cada uno de mis logros. Su fe en mis capacidades y su respaldo en los momentos más desafiantes han sido la luz que me ha guiado en este camino.

Mi profundo respeto y agradecimiento al Dr. Jesús Garicano Mena y a la Dra. Soledad Le Clainche. Como directores de esta tesis, su vasta experiencia, meticulosa orientación y compromiso con la excelencia han sido esenciales para la realización de este trabajo. Agradezco cada momento de discusión académica, cada corrección detallada y cada consejo brindado. Su dedicación y pasión por la investigación han sido una fuente de inspiración constante.

También quisiera expresar mi reconocimiento al Dr. Eusebio Valero. Su perspicacia, conocimientos y valiosas contribuciones han enriquecido significativamente este proyecto, aportando una profundidad y perspectiva esenciales para su desarrollo.

Un agradecimiento especial y profundo al Dr. Antonio Viedma Robles, mi primer profesor en el fascinante mundo de la mecánica de fluidos. Fue él quien me introdujo a la compleja y elegante matemática que rige el comportamiento de los fluidos. Más allá de transmitir conocimientos técnicos, el Dr. Viedma encendió en mí una chispa de curiosidad y pasión por este campo. Su dedicación, entusiasmo y la habilidad única de hacer complejas teorías comprensibles han dejado una marca indeleble en mi formación académica.

No puedo dejar de mencionar a mi amigo Víctor Campillo. Su amistad, consejos y apoyo constante han sido un refugio y una motivación a lo largo de este proceso. Su presencia y ánimo han sido esenciales en los momentos de duda y desafío.

Finalmente, agradezco a todos aquellos que, directa o indirectamente, han contribuido a la realización de esta tesis. Cada palabra intercambiada, cada crítica constructiva y cada interacción han sido fundamentales en este proceso. Este trabajo es el resultado de un esfuerzo colectivo, y cada uno de ustedes ha dejado una huella en él y en mi vida.

Abstract

Modal decomposition techniques are showing rapid growth in popularity because of their wide range of applications and diverse properties, especially as data-driven tools. There are many modal decomposition techniques, but Proper Orthogonal Decomposition (POD) and Dynamic Mode Decomposition (DMD) are the most widespread methods, especially in the field of fluid dynamics. As a result of their high utility in various applications in several fields, numerous extensions of these techniques have been developed. In this work we present an ambitious study comparing eight different modal decomposition techniques and introduce the distributed implementation of the code as well as the applicability beyond aerospace engineering. We include the most established methods, namely, POD, DMD and the Fast Fourier Transform (FFT); extensions of these classical methods: based on temporal embedding systems, Spectral POD (SPOD) and High Order Dynamic Mode Decomposition (HODMD), or based on scale separation, multi-scale POD (mPOD), multiresolution DMD (mrDMD); and also a method based on the data-driven resolvent analysis (RA). The performance of all these techniques will be evaluated in four different cases: a laminar flow around a cylinder, a turbulent axisymmetric jet flow, a three-dimensional flow around a cylinder in transient regime and a transient-turbulent flow around a cylinder. All these mentioned data sets are publicly available. First, we show a comparison between the performance of the eight modal decomposition techniques when the data sets are shortened. Then, all the obtained results will be explained in detail, showing both advantages and disadvantages of all the investigated methods depending on the type of application and the final objective, reconstruction or identification of the flow physics.

Resumen

Las técnicas de descomposición modal están mostrando un rápido crecimiento en popularidad por su amplia gama de aplicaciones y sus diversas propiedades, especialmente como herramientas basadas en datos. Existen muchas técnicas de descomposición modal, pero la descomposición en modos propios ortogonales (a la que nos referiremos de forma abreviada por POD, acrónimo¹ en inglés de *Proper Orthogonal Decomposition*) y la descomposición en modos dinámicos (DMD, acrónimo en inglés de *Dynamic Mode Decomposition*) son los métodos más extendidos, especialmente en el campo de la mecánica de fluidos. A raíz de su utilidad en diversas aplicaciones en varios campos, se han desarrollado numerosas extensiones de estas técnicas. En esta tesis presentamos un ambicioso estudio comparando ocho técnicas diferentes de descomposición modal e introducimos la implementación distribuida del código. Asimismo exponemos la aplicación más allá de ingeniería aeroespacial. Se incluyen los métodos más establecidos, *i.e.* POD, DMD y la transformada rápida de Fourier (FFT, acrónimo en inglés de *Fast Fourier Transform*); extensiones de estos métodos clásicos: basados en sistemas de incrustación temporal, POD espectral (SPOD, acrónimo en inglés de *Spectral Proper Orthogonal Decomposition*) y DMD de alto orden (HODMD, acrónimo en inglés de *Higher Order Dynamic Mode Decomposition*), o basados en la separación de escalas, POD multi-escala (mPOD, acrónimo en inglés de *Multi-scale Proper Orthogonal Decomposition*), DMD multirresolución (mrDMD, acrónimo en inglés de *Multi-resolution Dynamic Mode Decomposition*); y también un método basado en el operador resolvente basado en datos (RA, acrónimo en inglés de *Resolvent Analysis*). El rendimiento de todas estas técnicas se evalúa en cuatro casos diferentes: un flujo laminar alrededor de un cilindro, un chorro turbulento, un flujo laminar, tridimensional y turbulento alrededor de un cilindro en régimen transitorio y un flujo transitorio-turbulento alrededor de un cilindro. Todos estos conjuntos de datos mencionados están a disposición del público. En primer lugar, mostramos una comparación entre el rendimiento de las ocho técnicas de descomposición modal cuando se acortan los conjuntos de datos. A continuación, se explican en detalle los resultados obtenidos de los métodos investigados y sus aplicaciones. Asimismo exponemos el objetivo final, reconstrucción e identificación de la física del flujo.

¹Aspirando a la exhaustividad, en este trabajo presentaremos las denominaciones anglófona y castellana de cada técnica o fenómeno descritos. No obstante, para facilitar en lo posible la consulta de la bibliografía pertinente, a menudo favoreceremos el acrónimo o término en inglés.

Tabla de Contenido

Agradecimientos	v
Abstract	vi
Resumen	vii
Lista de Figuras	x
Lista de Tablas	xv
Abreviaturas y acrónimos	xviii
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Estado del Arte	2
1.2.1 Variantes de POD	4
1.2.2 Variantes de DMD	5
1.2.3 Otras variantes de descomposición modal	6
1.2.4 Métodos no lineales	8
1.2.5 Introducción al cálculo distribuido	8
1.3 Contribuciones y novedades de la tesis	9
1.3.1 Lista de publicaciones	9
Publicaciones en revistas Q1	9
Participación en conferencias	10
1.4 Organización de la tesis	11
2 Metodología	13
2.1 Introducción	13
2.2 Descomposición en Modos Propios Ortogonales	15
2.3 Descomposición en Modos Dinámicos	16
2.4 Análisis de Fourier	18
2.5 Métodos de deslizamiento de ventanas	19
2.5.1 Descomposición Espectral en Modos Propios Ortogonales	19
2.5.2 Descomposición en Modos Dinámicos de Alto Orden	20
2.5.3 Sobre los rasgos comunes de las técnicas SPOD y HODMD	22
2.6 Mejora de las estimaciones espectrales mediante análisis multirresolución	24
2.6.1 Descomposición en Modos Propios Ortogonales multi-escala	24
2.6.2 Descomposición en Modos Dinámicos multirresolución	26
2.7 Análisis del operador resolvente	28

2.8	Sinopsis	29
3	Bases de Datos	31
3.1	Introducción	31
4	Resultados	37
4.1	Estudio Comparativo	37
4.1.1	Detección de características mediante métodos clásicos: POD, DMD y FFT	38
4.1.2	Mejora de precisión por redundancia: SPOD y HODMD	64
4.1.3	Análisis multirresolución: mPOD y mrDMD	77
4.1.4	Análisis del operador resolvente	83
4.1.5	Análisis de Convergencia	88
4.2	Efecto de la truncación temporal	91
4.3	Escalabilidad de cálculo distribuido	97
5	Más Allá de la Ingeniería Aeroespacial	99
5.1	Estado del Arte	99
5.2	Aplicación	101
5.3	Desafíos y limitaciones	102
5.4	Conclusión	103
6	Conclusiones y Trabajos Futuros	105
6.1	Conclusiones	105
6.2	Trabajos futuros	108
	Referencias	109
	Apéndice Amplitudes de DMD	117

Lista de Figuras

2.1	Representación esquemática del método descrito en Towne et al., 2018 para estimar los modos SPOD (esquema adaptado de Towne et al., 2018).	20
2.2	Esquema del método HODMD (adaptado de Le Clainche et al., 2017).	21
2.3	Descripción esquemática de mPOD: en 2.3(a), el principio de multirresolución aplicado por el banco de filtros; en 2.3(b), una ilustración de las diferentes escalas que se pueden <i>revelados</i> (esquema adaptado de M. A. Mendez et al., 2019).	25
2.4	Representación esquemática de la partición de la matriz de correlaciones $\hat{\mathbf{K}}$ eligiendo diferentes frecuencias de división (f_i^c). Caso (a) considera una única escala, donde el mPOD resulta ser el POD. Caso (b) y (c) consideran dos y tres escalas, respectivamente. Caso (d) considera $n_t/2$ escalas, donde el mPOD resulta ser el DFT. (Esquema adaptado de M. A. Mendez et al., 2019).	26
2.5	Descripción esquemática del método presentado en Kutz, Fu y Brunton, 2016 para estimar los modos mrDMD (esquema adaptado de Kutz, Fu y Brunton, 2016).	27
3.1	TC1: Flujo por un cilindro a $Re_D = 100$. Dos <i>snapshots</i> representativos del campo de velocidades en el sentido de la corriente (3.1(a)). Evolución temporal de las componentes de velocidad en sentido de la corriente (3.1(b)) y normal (3.1(c)) en un punto situado en la estela (2,5,0,7).	32
3.2	TC2: Flujo de chorro turbulento a $Re_D = 10^6$ y $M = 0,4$. Dos <i>snapshots</i> representativos del campo de presión (3.2(a)). Evolución temporal de la presión en dos puntos representativos del campo, situados en $(x, r) = (5, 1,2)$ (3.2(b)) y $(x, r) = (12, 1,2)$ (3.2(c)).	33
3.3	TC3: Visualización tridimensional de la estela de un cilindro circular a $Re_D = 280$. Velocidad (u_z) en un <i>snapshot</i> representativo del régimen transitorio (360 segundos) (3.3(a)). Evolución temporal de las componentes de la velocidad (3.3(b)) en un punto del campo (5, 0, 0,83).	34
3.4	TC4: Estela transitoria-turbulenta alrededor de un cilindro. Velocidad normal calculada en <i>snapshots</i> representativos del primer estado estacionario (3.4(a)). Evolución temporal de las componentes de la velocidad (3.4(b)) en un punto del campo (20, 2).	35

4.1	TC1. Valores singulares del análisis POD (4.1(a)). Espectro del DMD (4.1(b)) comparando frecuencias adimensionales con las amplitudes del DMD, usando $\varepsilon_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ en Eq. (2.7).	39
4.2	TC1: flujo medio (4.2(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.2(b)). Modos dominantes POD (4.2(c), 4.2(d)) y DMD (4.2(e), 4.2(f)); (frecuencias modales DMD: $St = 0,1654, 0,33$).	40
4.3	TC1: contenido de frecuencias correspondientes a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz cronos \mathbf{R}_0 , Ec. (2.3). De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.	42
4.4	TC1: espectro de frecuencias, calculado según Ec. (2.18) (4.4(a)) y modo FFT a $St \approx 0,16$ (4.4(b)).	43
4.5	TC2. Valores singulares del análisis POD (4.5(a)). Espectro del DMD (4.5(b)) comparando frecuencias adimensionales con las amplitudes DMD, usando $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-1}$ en Ec. (2.7).	45
4.6	TC2: flujo medio (4.6(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.6(b)). Modos dominantes POD (4.6(c)) y DMD (4.6(d), 4.6(e)); (frecuencias modales DMD: $St = 0,58, 0,42$).	46
4.7	TC2: contenido de frecuencias correspondientes a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz de cronos \mathbf{R}_0 . De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.	47
4.8	TC2: Espectro de frecuencias, calculado utilizando Ec. (2.18) (4.8(a)) y el modo FFT a un $St \approx 0,6$ (4.8(b)).	48
4.9	TC3 (régimen transitorio y saturado). Valores singulares del análisis POD (4.9(a)). Espectro del DMD (4.9(b)) comparando frecuencias adimensionales con las amplitudes DMD, usando $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ en Ec. (2.7).	50
4.10	TC3: flujo medio (4.10(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.10(b)). Modos dominantes POD (4.10(c), 4.10(d)) y DMD (4.10(e), 4.10(f)); (frecuencias modales DMD: $St = 0,21, 0,37$. Iso-superficies obtenidos con iso-valor de $9 \cdot 10^{-4}$).	51
4.11	TC3: contenido de frecuencias correspondientes a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz cronos \mathbf{R}_0 , Ec. (2.3). De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.	52
4.12	TC3: Espectro de frecuencias, calculado utilizando Ec. (2.18) (4.12(a)) y el modo FFT a un $St \approx 0,21$ (4.12(b)), para un iso-valor de $3 \cdot 10^{-2}$	53
4.13	TC4. Primer régimen estacionario. Valores singulares del análisis POD (4.13(a)). Espectro del DMD (4.13(b)) comparando frecuencias con las amplitudes DMD, usando $\varepsilon = 4,5 \cdot 10^{-1}$ en Ec. (2.7).	55
4.14	TC4: flujo medio (4.14(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.14(b)). Modos dominantes POD (4.14(c) y 4.14(d)) y DMD (4.14(e) y 4.14(f)); (frecuencia modal DMD: $f = 449,47Hz$).	56
4.15	TC4. régimen estacionario: contenido en frecuencia correspondiente a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz de cronos \mathbf{R}_0 . De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.	57
4.16	TC4. régimen estacionario: espectro de frecuencias, calculado utilizando Ec. (2.18) (4.16(a)) y el modo FFT a un $f \approx 450Hz$ (4.16(b)).	58

4.17	TC4. Conjunto de datos completo. Valores singulares del análisis POD (4.17(a)). Espectro del DMD (4.17(b)) comparando frecuencias con las amplitudes DMD, usando $\varepsilon = 3,2 \cdot 10^{-1}$ en Ec. (2.7).	60
4.18	TC4. Caso completo: flujo medio (4.18(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.18(b)). Modos dominantes POD (4.18(c) y 4.18(d)) y DMD (4.18(e) y 4.18(f)); (frecuencia modal DMD: $f = 449,47Hz$).	61
4.19	TC4. Conjunto de datos completo: contenidos de frecuencia correspondientes a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz de cronos \mathbf{R}_0 . De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.	62
4.20	TC4. Conjunto de datos completo: Espectro de frecuencias, calculado utilizando Ec. (2.18) (4.20(a)) y el modo FFT en un $f \approx 450Hz$ (4.20(b)).	63
4.21	TC1, análisis del SPOD y del HODMD para longitudes de ventana que son potencias de 2. Energía del primer modo SPOD <i>vs</i> St , y sensibilidad a la longitud de ventana n'_t (4.21(a)). HODMD α_i <i>vs</i> St para diferentes longitudes de ventana d (4.21(b)) y tolerancias $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (4.21(c)).	65
4.22	TC1, análisis del SPOD y del HODMD. Energía del primer modo SPOD <i>vs</i> St , y sensibilidad a la longitud de ventana n'_t (4.22(a)). HODMD α_i <i>vs</i> St para diferentes longitudes de ventana d (4.22(b)) y tolerancias $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (4.22(c)).	66
4.23	TC1, modos SPOD (4.23(a) y 4.23(b)) y HODMD (4.23(c) y 4.23(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente) utilizando $d = n'_t = 64$	67
4.24	TC1, modos SPOD (4.24(a) y 4.24(b)) y HODMD (4.24(c) y 4.24(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente) utilizando $d = n'_t = 60$	68
4.25	TC2, análisis del SPOD y del HODMD para longitudes de ventana que son potencias de 2. Energía del primer modo SPOD <i>vs</i> St , y sensibilidad a la longitud de ventana n'_t (4.25(a)). HODMD α_i <i>vs</i> St para diferentes longitudes de ventana d (4.25(b)) y tolerancias $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (4.25(c)).	70
4.26	TC2, modos SPOD (4.26(a) y 4.26(b)) y HODMD (4.26(c) y 4.26(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente)	71
4.27	TC3 (régimen saturado), análisis SPOD y HODMD. Energía del primer modo SPOD <i>vs</i> St , y sensibilidad a la longitud de ventana n'_t (4.27(a)). HODMD α_i <i>vs</i> St para diferentes longitudes de ventana d (4.27(b)) y tolerancias (4.27(c)) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \cdot 10^{-5}$	73
4.28	TC3, modos SPOD (4.28(a) y 4.28(b)) y HODMD (4.28(c) y 4.28(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente)	74
4.29	TC4, conjunto de datos completo, análisis SPOD y HODMD. Energía del primer modo SPOD <i>vs</i> $f[Hz]$, y sensibilidad a la longitud de ventana n'_t (4.29(a)). HODMD α_i <i>vs</i> $f[Hz]$ para $d = 1100$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ (4.29(b)).	75
4.30	TC4, conjunto de datos completo, modos SPOD (4.30(a) y 4.30(b)) y HODMD (4.30(c) y 4.30(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente).	76
4.31	Modos mPOD y su correspondiente espectro de frecuencias para el TC1, $f_c = [0,2,0,25]$. Desde arriba hacia abajo: de los modos más a los menos energéticos.	78
4.32	Modos mPOD y su correspondiente espectro de frecuencias para el TC2, $f_c = [0,47,0,5]$. Desde arriba hacia abajo: de los modos más a los menos energéticos.	79

4.33	Modos mPOD y su correspondiente espectro de frecuencias para el TC3, $f_c = [0,15,0,40]$. Desde arriba hacia abajo: de los modos más a los menos energéticos.	80
4.34	Modos mPOD y su correspondiente espectro de frecuencias para el TC4, $f_c = [250, 365, 515]$. Desde arriba hacia abajo: de los modos más a los menos energéticos.	81
4.35	Espectro mrDMD para el TC1 (4.35(a)), el TC2 (4.35(b)) (es difícil interpretar la dinámica en este caso), el TC3, régimen saturado (4.35(c)), el TC3, régimen transitorio (4.35(d)) y el TC4, primer régimen estacionario (4.35(e))	82
4.36	Espectro del análisis del operador resolvente comparando la frecuencia con $\mathbf{S}_{\bar{B}}$ (ver Ec. (2.36)) para (4.36(a)) TC1, (4.36(b)) y (4.36(c)) TC2, (4.36(d)) y (4.36(e)) TC3 en régimen transitorio y saturado, respectivamente.	85
4.37	Modos del análisis del operador resolvente para (4.37(a)) TC1, (4.37(b)) TC2 y (4.37(c)) TC3 en régimen saturado, modos de <i>forzamiento</i> (izquierda) y <i>respuesta</i> , (derecha).	86
4.38	Espectro del análisis del operador resolvente comparando la frecuencia con $\mathbf{S}_{\bar{B}}$ (4.38(a)) (ver Ec. (2.36)) y los modos obtenidos para TC4 (conjunto de datos completo), para $f = 390Hz$ (4.38(b)) y $f \approx 450Hz$ (4.38(c)).	87
4.39	TC1: Error de reconstrucción $\mathcal{E}(r)$ en (4.1) en función de los modos retenidos (r).	89
4.40	TC2: Error de reconstrucción $\mathcal{E}(r)$ en (4.1) en función de los modos retenidos (r)	89
4.41	TC3 (régimen transitorio): Error de reconstrucción $\mathcal{E}(r)$ en (4.1) en función de los modos retenidos (r).	89
4.42	TC4 (conjunto completo de datos): Error de reconstrucción $\mathcal{E}(r)$ en (4.1) en función de los modos retenidos (r).	90
4.43	$\mathcal{E}_S(r)$ vs r modos retenidos en SPOD, para TC1 (4.43(a)), TC2 (4.43(b)), TC3 (4.43(c)) y TC4 (4.43(d)).	90
4.44	TC1: St dominante detectado vs longitud temporal del conjunto de datos para DMD, HODMD, mrDMD, RA (4.44(a)) y POD, mPOD, SPOD, FFT (4.44(b)).	93
4.45	TC2: St dominante detectado vs longitud temporal del conjunto de datos para DMD, HODMD, mrDMD, RA (4.45(a)) y POD, mPOD, SPOD, FFT (4.45(b)).	94
4.46	TC3: St dominante detectado vs longitud temporal del conjunto de datos para DMD, HODMD, mrDMD, RA (4.46(a)) y POD, mPOD, SPOD, FFT (4.46(b)).	95
4.47	TC4: St dominante detectado vs longitud temporal del conjunto de datos para DMD, HODMD, mrDMD, RA (4.47(a)) y POD, mPOD, SPOD, FFT (4.47(b)).	96
4.48	Escalabilidad del algoritmo SVD para las versiones <i>Python</i> y <i>Cython</i> . Adaptado de Eiximeno et al., 2023.	97
5.1	Imágenes y modos HODMD de la base de datos médica. Adaptado de Groun et al., 2023.	102
1	Estela laminar bidimensional alrededor de un cilindro a $Re_D = 100$: comparación de la importancia relativa de los diferentes modos DMD, utilizando diferentes técnicas.	119

2	Estela laminar bidimensional alrededor de cilindro a $Re_D = 100$: comparación de las estrategias para calcular las amplitudes HODMD dadas en Le Clainche y Vega, 2017b y en Ecs. 7-9 ($d = 15$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-14}$).	121
3	TC3, análisis DMD, $\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-2}$: α_i vs St (3(a)) y tasas de crecimiento escaladas vs St (3(b)) para los regímenes transitorio y saturado.	123
4	TC3, análisis DMD, $\varepsilon_1 = 1 \cdot 10^{-5}$: α_i vs St (4(a)) y tasas de crecimiento escaladas vs St (4(b)) para los regímenes transitorio y saturado.	124

Lista de Tablas

2.1	Resumen de los métodos considerados en esta tesis, principales referencias y disponibilidad.	14
2.2	Dashes	30
3.1	Resumen de las principales características de los cuatro casos de estudio. n_x , n_y y n_z son el número de puntos de la malla. n_p es el número de puntos de la malla \times número de variables, n_t es el número de <i>snapshots</i> y Δt^s es el intervalo temporal de muestreo.	36
1	Estela laminar bidimensional alrededor de un cilindro a $Re_D = 100$: Comparación de estrategias para evaluar la importancia relativa de los distintos modos DMD, utilizando diferentes técnicas.	118

Abreviaturas y acrónimos

UPM Universidad Politécnica de Madrid

\mathbf{v}_j Un *snapshot* representado en forma de columna

n_t El número de *snapshots*

Δt^s La tasa de muestreo.

n_{vars} El número de variables

n_s La dimensionalidad espacial

n_p La complejidad espacial, $n_p = n_s \times n_{vars}$

V La matriz que contiene los flujos instantáneos \mathbf{v}_j

L La matriz de vectores propios por la izquierda en la descomposición en valores singulares

S La matriz diagonal de valores singulares en la descomposición en valores singulares

R La matriz de vectores propios por la derecha en la descomposición en valores singulares

K La matriz de correlación temporal

\mathcal{C} La matriz cronos

\mathcal{A} La representación matricial discreta de la dinámica lineal

$\bar{\mathbf{A}}$ La matriz reducida de \mathcal{A} , proyectada en la base POD

μ_i Los valores propios asociados a $\bar{\mathbf{A}}$

Ψ La matriz modos DMD reducidos o vectores propios asociados a

$\bar{\mathbf{A}}$

Φ La matriz modos DMD (u otros, según el contexto) como sus columnas

σ_i La tasa de crecimiento asociada al i -ésimo modo DMD

ω_i La pulsación angular asociada al i -ésimo modo DMD

α_i La amplitud asociada al i -ésimo modo DMD

\mathbf{V}_μ La matriz de Vandermonde que contiene los coeficientes temporales en DMD

- $\hat{\mathbf{K}}$ La transformada de Fourier de la matriz de correlación temporal
- \mathbf{f} El término forzante de un sistema dinámico
- \mathbf{D}_α La matriz diagonal con las amplitudes α_i
- $\langle \bullet \rangle^H$ El complejo conjugado de la matriz $\langle \bullet \rangle$

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

En la vanguardia de la ingeniería aeroespacial, la comprensión profunda de los flujos turbulentos y los fenómenos fluidodinámicos complejos emerge como una piedra angular para el diseño y optimización avanzados de vehículos y componentes aeroespaciales. Estos flujos, presentes tanto en la naturaleza como en una vasta gama de aplicaciones industriales, desde el flujo en motores y sistemas de combustión hasta el flujo sanguíneo en el sistema circulatorio, plantean desafíos significativos debido a sus efectos indeseables que impactan la eficiencia y el rendimiento. La turbulencia, con su amplio espectro de escalas espaciales y temporales, exige un análisis meticuloso para predecir y controlar sus efectos, potenciando así el desarrollo de sistemas más eficientes y menos contaminantes.

En este escenario, la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes a través de simulaciones numéricas directas (DNS) se encuentra con el obstáculo de una demanda computacional exorbitante, limitando la factibilidad de estudios detallados sobre flujos tridimensionales y totalmente turbulentos. Sin embargo, la emergencia de métodos de descomposición modal y estrategias de modelos de orden reducido (ROM) ofrece un camino prometedor hacia la simplificación de esta complejidad. Estas herramientas matemáticas, al descomponer señales o campos de flujo en modos que representan patrones espaciales y temporales, facilitan la identificación de características dominantes y la reducción de la dimensionalidad del problema sin sacrificar la integridad analítica.

Con el auge de la ciencia de datos y la computación de alto rendimiento, se ha intensificado el interés en técnicas orientadas y basadas en datos en la ingeniería aeroespacial. Métodos basados en datos como la Descomposición en Modos Propios Ortogonales (POD) y la Descomposición Modal Dinámica (DMD) se han establecido como enfoques vanguardistas para abordar estos retos. Estos métodos, al extraer información directamente de conjuntos de datos experimentales o numéricos, prometen adaptabilidad a diversos escenarios y una menor dependencia de modelos físicos preestablecidos.

Este trabajo se centra en la validación crítica de ocho métodos de descomposición modal basados en datos, empleados comúnmente en la mecánica de fluidos, para discernir su eficacia

y precisión en la detección y reconstrucción de fenómenos fluidodinámicos en el ámbito aeroespacial. A través de un análisis exhaustivo, se busca capitalizar las ventajas inherentes a las técnicas orientadas por datos, mejorando así la comprensión y el control de los flujos turbulentos y contribuyendo al desarrollo de soluciones innovadoras en ingeniería aeroespacial.

1.2 Estado del Arte

Las técnicas de descomposición modal han experimentado un auge en su popularidad en diversas disciplinas, desde la ingeniería aeroespacial y eólica hasta la medicina. En el ámbito de la dinámica de fluidos, estas técnicas son esenciales, ya que permiten descomponer datos que representan flujos complejos y de alta dimensionalidad en términos de modos coherentes. Estos modos no solo ofrecen una mejor comprensión de la física del flujo, sino que también facilitan la predicción y el control de sistemas fluidodinámicos. Además, estas técnicas son fundamentales para la creación de modelos de orden reducido (ROM, acrónimo en inglés de *Reduced Order Model*), capaces de representar fenómenos complejos de forma simplificada.

Dentro del amplio espectro de técnicas de análisis modal, esta tesis se centra particularmente en aquellas metodologías fundamentadas en enfoques basados en datos, también conocidas como técnicas *data-driven*. Estas técnicas, que se derivan directamente de conjuntos de datos experimentales o numéricos, ofrecen ciertas ventajas distintivas en comparación con enfoques tradicionales:

- Son técnicas inherentemente flexibles, permitiendo la incorporación de nuevos datos con relativa facilidad, lo que las hace especialmente adecuadas para sistemas que experimentan cambios o perturbaciones.
- Estos métodos no requieren un conocimiento a priori de la física del sistema, lo que puede ser beneficioso cuando se trata de fenómenos poco comprendidos o difíciles de modelar matemáticamente.
- En muchos casos, una vez que se ha diseñado un modelo basado en datos, puede ser mucho más rápido en términos de tiempo de cálculo que los métodos numéricos tradicionales, especialmente para predicciones o simulaciones.
- Estos métodos pueden ser personalizados para aplicaciones específicas, permitiendo soluciones más precisas y relevantes para problemas particulares.
- Al operar directamente sobre los datos, estas metodologías pueden identificar y extraer patrones y características que podrían no ser evidentes o incluso pasar inadvertidas en enfoques más convencionales. Esta capacidad de discernir sutilezas en conjuntos de datos complejos es esencial para una comprensión más profunda y una modelización más precisa de fenómenos fluidodinámicos.

En el campo de la mecánica de fluidos, dos técnicas de descomposición modal han destacado históricamente por su eficacia: la Descomposición Ortogonal Propia (POD) y la Descomposición Modal Dinámica (DMD).

La descomposición POD, introducida en el contexto de la turbulencia por Lumley, 1967, ha sido una de las primeras técnicas empleadas en la mecánica de fluidos como un enfoque matemático para extraer estructuras coherentes de flujos turbulentos. El objetivo principal del POD es descomponer datos como una expansión de modos que se basan en optimizar el cuadrático medio de una variable de campo que se analiza. La descomposición en valores singulares (SVD) es un tipo de factorización que captura las direcciones de una matriz en las cuales los vectores pueden decrecer o crecer. Tales direcciones son dadas por los vectores propios y valores propios de una matriz rectangular. El método SVD ha sido ampliamente utilizado para diferentes aplicaciones, especialmente para aproximaciones de matrices de bajo rango. Esta reducción de dimensionalidad es muy relevante en dinámica de fluidos en general, y en el estudio de flujos turbulentos en particular. Aplicar el SVD permite reducir el tamaño de la gran cantidad de datos analizados, haciendo posible reducir los recursos computacionales requeridos para llevar a cabo esta tarea. SVD y POD son dos términos que generalmente se usan indistintamente en la literatura. Sin embargo, la principal diferencia reside en que el SVD es una de las técnicas que se pueden aplicar para obtener una descomposición POD, la cual es conocida como el método de *snapshots*, introducido por Sirovich, 1987. Para problemas tridimensionales, o incluso problemas bidimensionales de gran tamaño, la descomposición POD presenta complejidad computacional, por lo que se opta por el método SVD para obtener los modos, Le Clainche, 2020.

El POD ha encontrado aplicaciones en numerosos campos, desde la identificación de patrones en flujos turbulentos hasta la construcción de los ROMs. Willcox y Peraire, 2002 combinaron el POD con conceptos de la teoría de realización equilibrada (Moore, 1981), para la reducción de sistemas de alto orden, incluyendo un modelo de mecánica de fluidos computacional (CFD) que describe el movimiento linealizado no permanente de un perfil aerodinámico bidimensional. T. R. Smith et al., 2005 utilizaron el POD para construir modelos de orden reducido para flujos turbulentos. Roy y Leweke, 2008 aplicaron el POD no sólo para caracterizar la estructura del fenómeno del *vortex meandering*, sino también su frecuencia, longitud de onda y amplitud. El POD también ha sido utilizada por Del Pino et al., 2011 en un estudio de la dinámica del vórtice de la punta del ala en el campo cercano de un perfil aerodinámico NACA 0012. Zhang et al., 2021 aprovecharon el POD para estudiar la estructura interna de flujo no permanente en una bomba centrífuga por sus ventajas en el análisis de turbulencia.

Por otro lado, la descomposición DMD, presentada por Schmid, 2010, ha demostrado ser robusta y versátil en la descomposición de datos de flujo, identificando frecuencias dominantes y estructuras espaciales asociadas. Rowley et al., 2009 se propusieron describir el comportamiento global de flujos no lineales complejos utilizando el análisis espectral del operador de Koopman, donde recurren al DMD para encontrar los modos de Koopman. Los resultados demostraron la capacidad de la técnica para captar las frecuencias dominantes y elucidar las estructuras espaciales asociadas. Justo después, Schmid et al., 2011 publicaron un nuevo trabajo con el fin de demostrar el potencial de la técnica del DMD, donde mostraron la robustez de su técnica en dos ejemplos: (i) la descomposición de *snapshots* de Schlieren de un chorro de helio y (ii) la descomposición de mediciones de la velocimetría de imágenes (PIV) resueltas en el tiempo de un chorro forzado y no forzado. Kutz, Brunton et al., 2016b elaboraron un libro en torno al DMD y sus variantes. En el libro desarrollan las bases teóricas fundamentales del DMD y destacan muchas de sus aplicaciones. Unos años después, investigadores de la Universidad

Politécnica de Madrid, Garicano–Mena et al., 2019; Li et al., 2020 utilizaron el algoritmo del DMD para investigar bases de datos de canales turbulentos estándar y actuados generados con Simulación Numérica Directa (DNS), con el fin de explorar la existencia de características del flujo vinculadas a la reducción de la resistencia. Le Clainche, 2020 presenta una introducción a las metodologías usadas en dinámica de fluidos para analizar flujos complejos y construir ROMs, conectando la ciencia de datos y computación con términos clásicos de dinámica de fluidos. Con un enfoque diferente, Barros et al., 2022 trabajaron en capacitar al DMD para extraer características de observaciones con diferentes topologías y dimensiones de malla, como las encontradas en simulaciones de refinamiento adaptativo de malla (AMR/C), así como en evaluar la eficiencia del DMD para reconstruir la dinámica y algunas cantidades relevantes de interés.

Aunque ambas técnicas (POD y DMD) tienen aplicaciones similares, sus características fundamentales difieren. El POD, por ejemplo, asocia un espectro de frecuencias temporales a cada modo, mientras que el DMD asigna a cada modo una única frecuencia. Ofrecemos más detalles al respecto en el Capítulo 2. A pesar de sus diferencias, ambas técnicas han capturado la atención de la comunidad científica y han sido objeto de numerosas investigaciones y adaptaciones.

Dada la relevancia y eficacia del POD y el DMD en la mecánica de fluidos, no es sorprendente que estas técnicas hayan atraído el interés de investigadores y profesionales por igual. Sin embargo, como con muchas herramientas en ciencia e ingeniería, el paisaje de las aplicaciones y los desafíos asociados evoluciona constantemente. A medida que enfrentamos problemas más complejos en la dinámica de fluidos, especialmente en el ámbito aeroespacial, surge la necesidad de adaptar y refinar las técnicas existentes. Esta adaptabilidad no solo implica optimizar los métodos existentes, sino también explorar nuevas variantes que puedan ofrecer ciertas ventajas. La innovación y la adaptación son, por lo tanto, componentes clave en este campo de estudio. Varios autores, reconociendo la importancia de esta evolución, se han esforzado en aumentar la robustez de estos métodos. Su objetivo principal ha sido ampliar su rango de aplicación y mejorar su precisión y eficiencia. Como resultado, han surgido nuevas variantes y extensiones de los métodos DMD y POD, algunas de las cuales se mencionan a continuación.

1.2.1 Variantes de POD

Si bien en este apartado se discuten algunas extensiones clave de POD, es crucial reconocer que éstas no agotan la gama de variantes desarrolladas en la literatura (M. A. Mendez et al., 2019; Schmidt y Colonius, 2020; Willcox y Peraire, 2002). La selección de estas variantes se basa en su aplicabilidad generalizada y su demostrada eficiencia en la extracción de información relevante de conjuntos de datos complejos. Cada variante se ha elegido por su capacidad para abordar desafíos específicos dentro del análisis de flujo y la dinámica de fluidos, reflejando así el objetivo de esta investigación de explorar técnicas robustas y versátiles para la comprensión de fenómenos físicos complejos. Empezando por algunas de las extensiones de POD:

- POD extendido (EPOD) (Borée, 2003), que es una generalización del POD estándar, donde utiliza la base temporal de una variable para encontrar los modos de cualquier

conjunto de datos sincronizado con el conjunto de datos utilizado para la descomposición. Este método se ha utilizado principalmente, y se ha encontrado eficiente en la extracción de información sobre eventos correlacionados.

- POD cruzado (CPOD) (Cavaliere y da Silva, 2021), una extensión reciente del POD clásico. Esta técnica se desarrolló para descomponer de forma óptima la traza de las covarianzas cruzadas de las fluctuaciones de flujo en modos síncronos. Esta técnica muestra una dirección prometedora en la aplicación a tensiones de Reynolds generalizadas.

Una extensión reciente del POD es el POD espectral (SPOD) (Towne et al., 2018), que fue desarrollada con el fin de superar los retos que el POD clásico se enfrenta cuando las estructuras o modos coherentes pertinentes se producen a bajas energías o en múltiples frecuencias, que es a menudo el caso. Vale la pena mencionar que en realidad hay dos algoritmos con el nombre SPOD, uno conocido como el SPOD en el dominio del tiempo (Sieber et al., 2016) y otro el SPOD en el dominio de la frecuencia (Towne et al., 2018). Según Sieber et al., 2017 la principal diferencia entre estas dos técnicas se basa en el tratamiento de la matriz de correlación espacio-temporal de los campos fluctuantes antes de resolver el problema de valores propios. Varios trabajos han demostrado la diferencia entre estas dos técnicas, tanto analíticamente (Sieber et al., 2017) como experimentalmente (Zeng et al., 2023). Dado que el SPOD en el dominio de la frecuencia se considera más adecuado para la extracción de modos aplicando una separación estricta de los mismos en función de la frecuencia (que es el objetivo de esta tesis), es esta última la que se utiliza en esta tesis. Este algoritmo, que puede aplicarse tanto a datos resueltos espacial como temporalmente de un flujo estadísticamente estacionario, ya ha tenido varias aplicaciones en dinámica de fluidos. Karami y Soria, 2018 emplearon el SPOD para estudiar la dinámica espacio-temporal de las estructuras coherentes en un chorro supersónico subexpandido, donde el SPOD descompone el campo de flujo permitiendo la ilustración de las trayectorias hacia delante y hacia atrás del bucle de retroalimentación, representando dos cosas: (i) la inestabilidad hidrodinámica en la capa de cizalladura del chorro y (ii) la onda acústica propagándose en el medio. Abreu et al., 2020 también utilizaron el SPOD para identificar estructuras coherentes energéticamente dominantes en flujos turbulentos de tuberías, utilizando DNS, realizadas con un método de elementos espectrales de alto orden. Por otro lado, Nekkanti y Schmidt, 2021 utilizaron datos de simulación de grandes remolinos de un chorro turbulento para demostrar la aplicabilidad del algoritmo SPOD en cuatro contextos diferentes: reconstrucción de bajo orden, limpieza de ruido, análisis frecuencia-tiempo y pre-blanqueado o más conocido como *prewhitening* (proceso para convertir series temporales correlacionadas en series similares al ruido blanco, eliminando dependencias).

1.2.2 Variantes de DMD

De manera similar, en el contexto del DMD, las variantes discutidas en este apartado representan solo una fracción de las múltiples adaptaciones y mejoras propuestas en la literatura (Kutz, Brunton et al., 2016b; Kutz, Fu y Brunton, 2016; Le Clainche y Vega, 2017b). Éstas han sido seleccionadas específicamente por su contribución significativa al avance del análisis dinámico, permitiendo una aproximación más precisa del operador de Koopman y facilitando la reducción de la complejidad del modelo. En cuanto a las variaciones del DMD

clásico, mencionamos, por ejemplo, las siguientes:

- DMD extendido (EDMD) (Williams et al., 2015), que mejora el DMD estándar al incluir un diccionario de observables, que abarca un subespacio de dimensión finita sobre el que podemos aproximar el operador de Koopman, lo que permite al método capturar comportamientos más complejos.
- *Sparsity promoting* DMD (spDMD) (Jovanović et al., 2014), que utiliza técnicas de estimación y optimización convexa con el fin de reducir el número de modos DMD, quedándose con los más importantes.
- DMD con control (DMDC) (Proctor et al., 2016), donde esta técnica emplea tanto mediciones del sistema como un complemento ortogonal de entradas de control para extraer la dinámica subyacente.

El DMD de alto orden (HODMD) (Le Clainche y Vega, 2017b), es también una extensión reciente de una de las técnicas de descomposición modal más conocidas (DMD). Aunque sólo hayan pasado 6 años desde que se introdujo este algoritmo, ha abarcado varias aplicaciones en el campo de la dinámica de fluidos (Zhou et al., 2021) e incluso ha llegado a la biología (Le Clainche, 2019) y al campo de la medicina (Groun et al., 2023; Groun, Villalba-Orero et al., 2022a, 2022b). Le Clainche y Vega, 2017b han demostrado la eficacia del algoritmo HODMD en varias aplicaciones, entre ellas el estudio de las estructuras de flujo de un chorro de flujo de masa neta cero (ZNMF) (Le Clainche et al., 2017), el análisis del flujo turbulento de un fluido elastoviscoplastico (Le Clainche et al., 2020a) y la identificación de inestabilidades de flujo cruzado (Le Clainche et al., 2019a). Del mismo modo, C. Mendez et al., 2021 introdujeron un nuevo método de procesamiento de datos, basado en el HODMD, para analizar datos experimentales de ensayos en vuelo real. Su técnica propuesta proporciona información útil e interesante para predecir el *flapping* y demostró ser adecuada para el análisis de datos de ensayos en vuelo en tiempo real. Gutierrez-Castillo et al., 2022 utilizaron el HODMD para identificar la dinámica dominante en un vórtice de salida experimental. Además de las aplicaciones mencionadas anteriormente, los algoritmos del HODMD también se han aplicado según conveniencia, tanto a simulaciones numéricas como datos experimentales para el análisis de flujos complejos (Amor et al., 2023), así como para desarrollar los ROMs adaptativos (Beltrán et al., 2022).

1.2.3 Otras variantes de descomposición modal

El enfoque multiescala/multirresolución también ha alcanzado el POD/DMD. En tiempos recientes, el POD multi-escala (mPOD) (M. A. Mendez et al., 2019) y el DMD multirresolución (mrDMD) (Kutz, Fu y Brunton, 2016) han ganado relevancia.

Tang et al., 2020 investigaron la respuesta de las estructuras de gran y pequeña escala en el elemento cilíndrico dinámico utilizando el mPOD: los modos obtenidos con el mPOD se utilizaron para identificar estructuras de gran y pequeña escala. Procacci et al., 2022 examinaron la dinámica de llamas estabilizadas por cuerpos romos utilizando el algoritmo del mPOD. Mediante la aplicación de este método, fueron capaces de identificar los principales patrones de flujo en el campo de velocidad y aislar estructuras coherentes vinculadas a diversas

inestabilidades de flujo. Esposito et al., 2021 utilizaron la técnica del mPOD para el análisis de inestabilidades de cavitación en agua y nitrógeno líquido.

En el contexto del mrDMD, Climaco et al., 2021 propusieron un enfoque para la detección de daños en cajas de engranajes de aerogeneradores. Las señales de vibración de la caja de engranajes generadas bajo condiciones de carga variables se analizaron utilizando el mrDMD, lo que dio lugar a la identificación de características importantes relacionadas con el daño. Gonzales et al., 2022 crearon un modelo de tiempo continuo del perfil de presión sobre el *flapping* aerodinámico utilizando el mrDMD con el fin de proporcionar una información de mayor resolución temporal sobre el sistema. El algoritmo del mrDMD fue capaz de aislar el comportamiento de una onda de choque oscilante sobre la superficie del aleteo aerodinámico, así como determinar la frecuencia de las oscilaciones de amplitud de la onda de choque.

Otro enfoque que discutiremos es el análisis de la resolvente (RA). Antes de que Herrmann y otros desarrollaran esta metodología basada en datos en 2021, el análisis de la resolvente ya estaba causando impacto en el campo de la mecánica de fluidos, al ser usado en investigaciones dirigidas a nuevas aplicaciones del control de flujos. Luhar et al., 2014 reformularon el análisis resolvente para generar predicciones para el campo de presión fluctuante en el flujo turbulento de tuberías. Utilizaron su enfoque propuesto para mostrar cómo los modos de respuesta obtenidos concilian muchas de las relaciones clave entre el campo de velocidad, las estructuras coherentes y los eventos de presión de pared de gran amplitud. Yeh y Taira, 2019 emplearon el RA para diseñar técnicas de control activo para flujos separados sobre un perfil aerodinámico. También consideraron el uso de un filtro temporal para limitar el horizonte temporal y realizaron un análisis resolvente global en los flujos medios turbulentos de referencia para identificar la frecuencia de actuación y el número de onda que proporcionan una gran amplificación de la energía de perturbación.

A la vista del recorrido previo queda clara la enorme variedad de métodos de descomposición modal basados en datos. En esta tesis abordamos una comparación exhaustiva de 8 técnicas de descomposición modal basados en datos, que pueden clasificarse en tres grupos:

- Métodos clásicos que incluyen la descomposición en modos propios ortogonales (POD) (Lumley, 1967), la descomposición modal dinámica (DMD) (Schmid, 2010) y la transformada de Fourier (FFT) (Cooley y Tukey, 1965).
- Métodos mejorados basados en sistemas de representación temporal: POD espectral (SPOD) (Towne et al., 2018) y DMD de alto orden (HODMD) (Le Clainche y Vega, 2017b).
- Métodos multirresolución capaces de diferenciar escalas rápidas y lentas: POD multi-escala (mPOD) (M. A. Mendez et al., 2019) y DMD multirresolución (mrDMD) (Kutz, Fu y Brunton, 2016).
- Una implementación basada en datos del método de Análisis Resolvente (RA) (Jovanović y Bamieh, 2005), con el objetivo de mostrar las similitudes entre los modos resolventes y los modos DMD y POD.

Se realiza una evaluación exhaustiva de estas técnicas en cuatro conjuntos de datos disponibles públicamente, que se describen en detalle en el Capítulo 3.

Una revisión previa sobre técnicas de descomposición modal ha sido realizada por Taira et al., 2017, donde se cubrieron seis técnicas diferentes: tres de ellas son técnicas de descomposición basadas en datos (el POD, el POD equilibrado y el DMD), mientras que el resto (el enfoque teórico del análisis de Koopman, el análisis de estabilidad lineal global y el RA) están basadas en operadores. Junto a la descripción de los métodos, se proporcionaron ejemplos y aspectos futuros para cada técnica (véase también Taira et al., 2020). No obstante, el objetivo de esta tesis no es describir los distintos métodos con todo detalle, sino más bien hacer explícitos los rasgos comunes que comparten los métodos aquí considerados.

1.2.4 Métodos no lineales

Habiendo delineado las técnicas de descomposición modal, como el DMD y el POD, junto con sus variantes, es pertinente abordar avances recientes en el análisis de datos. En particular, el aprendizaje profundo o *Deep Learning*, representado por estructuras como *autoencoders* (Rumelhart et al., 1986), ha emergido como una herramienta significativa en la ingeniería y la ciencia de datos. Estos enfoques, derivados de investigaciones en inteligencia artificial, han demostrado aplicabilidad en problemas de ingeniería, ofreciendo capacidades avanzadas en la identificación y representación de patrones en conjuntos de datos complejos. A continuación, se discutirán los fundamentos y aplicaciones de los autoencoders y las redes neuronales en el contexto de la ingeniería y su intersección con técnicas de descomposición modal.

El POD es una técnica lineal, adecuada para identificar patrones del flujo, pero el factor de compresión es menor que cuando utilizamos técnicas no lineales como los *autoencoders*, lo cual es ventajoso porque con un número reducido de modos podemos reconstruir todo el campo de flujo. Murata et al., 2020 introdujeron una técnica basada en *autoencoder* de red neuronal convolucional (CNN) llamada “*autoencoder* de red neuronal convolucional descomponedora de modos” (MD-CNN-AE). La técnica se aplicó a un flujo alrededor de un cilindro circular a $Re_D \simeq 100$ para descomponer el flujo de forma no lineal y visualizar los campos descompuestos. Su técnica mostró un menor error de reconstrucción en comparación con el POD. Eivazi et al., 2022 desarrollaron un nuevo método basado en β *autoencoders* variacionales (β -VAEs) y CNNs, cuyo objetivo es minimizar tanto el error de reconstrucción como la correlación entre las variables latentes y penalizar el tamaño del vector latente. Probando su enfoque en datos experimentales de un flujo turbulento a través de un entorno urbano simplificado, mostraron resultados positivos, superando al POD, en la calidad de la reconstrucción. Esto es debido a que cada modo de *autoencoders* recoge información asociada a un número mayor de frecuencias que cada modo POD y con menos modos se reconstruye mejor la dinámica del sistema (véase también Fukami et al., 2020).

1.2.5 Introducción al cálculo distribuido

Tras haber introducido las diferentes técnicas de descomposición modal, es esencial abordar otro aspecto crítico en el procesamiento y análisis de datos: la eficiencia computacional. En el ámbito de la ingeniería y la ciencia de datos, la capacidad de procesar y analizar grandes conjuntos de datos de manera eficiente es fundamental. Aquí es donde la paralelización del código y el cálculo distribuido de los algoritmos adquieren relevancia. Estas técnicas, funda-

mentales en aplicaciones industriales, permiten abordar desafíos computacionales inherentes a los algoritmos de descomposición modal, que típicamente involucran cálculos intensivos. Al distribuir estos cálculos en múltiples procesadores núcleos de un servidor, se logra una optimización en términos de tiempo y recursos computacionales. Esto mejora la eficiencia computacional y reduce el tiempo total requerido para completar las tareas. Al dividir el trabajo entre múltiples unidades de procesamiento, se pueden manejar sistemas de mayor escala y modelar fenómenos más detallados. Esto es especialmente importante en aplicaciones industriales donde se requiere un modelado preciso de sistemas complejos. En ciertas aplicaciones industriales, como el control y la toma de decisiones en tiempo real, es esencial contar con tiempos de respuesta rápidos. Al paralelizar el código de forma adecuada, se puede reducir significativamente el tiempo de cálculo. Esto es especialmente crucial en procesos industriales donde incluso pequeños retrasos pueden tener un impacto significativo en la eficiencia y la seguridad.

En resumen, la paralelización de los algoritmos de descomposición modal es importante porque mejora la eficiencia computacional, permite abordar problemas más grandes, proporciona tiempos de respuesta más rápidos y utiliza de manera más eficiente los recursos de hardware. Estas ventajas son cruciales para lograr un modelado preciso y la optimización en diversas aplicaciones industriales.

Una metodología de paralelización del POD fue introducido por Eiximeno, Miró et al., 2022, donde se investigan las estructuras coherentes y la dinámica del vórtice de estela de un cilindro vibrante con dos grados de libertad y una baja relación de masa a $Re_D = 5300$, generado mediante simulaciones de gran escala. En Eiximeno et al., 2023 se introduce un marco de trabajo para el POD y el DMD en un entorno de computación de alto rendimiento (HPC, acrónimo en inglés de *High Performance Computing*).

1.3 Contribuciones y novedades de la tesis

Partes de esta tesis se publicaron y presentaron en revistas y conferencias científicas. Durante el desarrollo de esta tesis se llevaron a cabo las siguientes publicaciones y actividades de difusión:

1.3.1 Lista de publicaciones

Publicaciones en revistas Q1

- **B. Begiashvili**, N. Groun, J. Garicano-Mena, S. Le Clainche, & E. Valero. Data-driven modal decomposition methods as feature detection techniques for flow problems: A critical assessment. *Physics of Fluids*, 35(4), 1070, 2023, IF: 4,4.

Este trabajo (Begiashvili et al., 2023) presenta una revisión exhaustiva de los métodos de descomposición modal basados en datos. Se abordan 8 algoritmos de descomposición y se aplican a 4 casos distintos, lo que resulta en un análisis exhaustivo. Cada algoritmo se evalúa de acuerdo a varios criterios, como el error de reconstrucción, la capacidad de detección de frecuencias y la interpretabilidad de modos. Además, se discuten las

ventajas, limitaciones y aplicaciones potenciales de cada técnica. Este trabajo puede ser útil para cualquier investigador o profesional que busque una comprensión profunda y comparativa de las técnicas de descomposición modal en la mecánica de fluidos.

- N. Groun, **B. Begiashvili**, E. Valero, J. Garicano-Mena & S. Le Clainche, Higher order dynamic mode decomposition beyond aerospace engineering. *Results in Engineering*, 101471, 2023, IF: 4,059.

Este trabajo (Groun et al., 2023) aborda la importancia de la dinámica de fluidos en diversas áreas y cómo las técnicas basadas en ciencia de datos pueden ayudar a comprender estos problemas complejos. Se introduce el HODMD como un algoritmo originalmente desarrollado para la mecánica de fluidos y se muestra cómo puede ser de utilidad en otros campos. Asimismo, se presenta su fundamentación matemática y capacidades. En este trabajo se demuestra la aplicabilidad del HODMD en dos problemas: un chorro turbulento compresible y la identificación de patrones en imágenes de ecocardiografía.

Participación en conferencias

- **B. Begiashvili**, J. Garicano-Mena, S. Le Clainche, & E. Valero. Feature detection algorithms and modal decomposition methods. *The 8th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* (2022).

En este trabajo (Begiashvili et al., 2022), se realiza un análisis sobre la eficacia del DMD y del POD en la detección de frecuencias dominantes en sistemas dinámicos. Estas técnicas se aplican meticulosamente a dos conjuntos de datos: el campo de velocidades de un flujo laminar bidimensional alrededor de un cilindro y el campo de presiones de un chorro turbulento. Además de comparar el rendimiento de ambas, el estudio también se adentra en las particularidades de cada conjunto de datos, discutiendo las características intrínsecas que pueden influir en la eficacia de cada método. La investigación concluye con recomendaciones sobre cuándo y cómo aplicar cada técnica según el tipo de sistema y datos en cuestión.

- E. Lazpita, **B. Begiashvili**, J. Garicano-Mena, S. Le Clainche & E. Valero. Efficient data-driven algorithms to identify patterns in aeronautical industrial problems. *International Symposium on Unmanned Systems and the Defense Industry* (2022).

Las aproximaciones numéricas de problemas aeronáuticos industriales se han hecho muy populares, pero llevan aparejado un gran coste computacional. Una buena alternativa en dinámica de fluidos es desarrollar modelos de orden reducido utilizando, por ejemplo, técnicas de descomposición modal como la descomposición de valores singulares (SVD), el POD o el DMD, que reducen la dimensionalidad de grandes bases de datos extrayendo los fenómenos más relevantes del flujo. Otras técnicas, como el análisis del operador resolvente, predicen la respuesta del flujo a alguna excitación externa, lo que resulta adecuado para aplicaciones de control de flujo. En este trabajo (Lazpita et al., 2022) se aborda un estudio preliminar sobre el rendimiento de estas metodologías para el

análisis de bases de datos fluidodinámicas y se introduce la posibilidad de combinar estas técnicas con un algoritmo del SVD paralelo para tratar grandes bases de datos, que suelen encontrarse al resolver problemas aeronáuticos industriales.

- N. Groun, **B. Begiashvili**, J. Garicano-Mena, S. Le Clainche & E. Valero. Data-driven Methods Beyond Aerospace Field. *International Symposium on Unmanned Systems and the Defense Industry* (2022).

En este trabajo (Groun, Begiashvili, Valero, Garicano-Mena y Le Clainche, 2022) se presenta una aplicación innovadora del HODMD a conjuntos de datos de naturalezas muy distintas. Por un lado, se aborda un sistema fluido, como un chorro turbulento, analizando las complejidades y patrones inherentes a este tipo de flujo. Por otro lado, se exploran ecocardiografías, un ámbito de aplicación completamente diferente, demostrando la versatilidad del HODMD. El estudio se centra en cómo la técnica puede adaptarse y ser eficaz en escenarios tan dispares, proporcionando perspectivas valiosas sobre la adaptabilidad y potencial del HODMD en diversas aplicaciones.

- B. Eiximeno, **B. Begiashvili**, A. Miró, E. Valero & O. Lehmkuhl. Towards parallel data driven methods, an HPC suite for POD/DMD. In *3rd High-Fidelity Industrial LES/DNS Symposium* (2023).

Los algoritmos de modelos reducidos necesitan poder acceder a datos excesivamente grandes y manejarlos en paralelo en un entorno HPC (acrónimo en inglés de *High Performance Computing*) cuando se trata de casos industriales. En este trabajo (Eiximeno et al., 2023) se introduce la librería de cálculo distribuido, *pyLowOrder* (Eiximeno, Begiashvili, Miro, Valero y Lehmkuhl, 2022), para modelos de orden reducidos. La librería se ha desarrollado en colaboración de la Universidad Politécnica de Madrid y el Centro Nacional de Supercomputación (BSC, acrónimo en inglés de *Barcelona Supercomputing Center*).

1.4 Organización de la tesis

El resto del trabajo se organiza como sigue: El Capítulo 2 presenta los algoritmos mencionados (POD, DMD, FFT, SPOD, HODMD, mPOD, mrDMD, *data-driven* RA) para estas diferentes técnicas. El Capítulo 3 presenta y describe los casos de prueba sobre los que se evalúan los algoritmos, seguido de los principales resultados detallados, que se presentan en el Capítulo 4. Una introducción de la aplicación de estas técnicas más allá de ingeniería aeroespacial se presenta en el Capítulo 5. Finalmente, se presentan las principales conclusiones de esta tesis y se plantean futuras líneas de investigación.

Capítulo 2

Metodología

2.1 Introducción

En este capítulo se presentan los distintos métodos de análisis de datos considerados en esta tesis. Estos métodos pueden separarse generalmente en dos categorías principales: métodos relacionados con el POD y métodos relacionados con el DMD. Sin embargo, en lo que respecta a la discusión posterior, hay que tener en cuenta que existen fuertes conexiones entre los métodos de una misma categoría. Además, también pueden establecerse vínculos entre ambas familias de métodos.

Considérese una secuencia de n_t campos de flujo instantáneos dimensionales \mathbf{v}_j , (*e.g.*, estados del sistema, fotogramas o *snapshots*) indexados de 1 a n_t y que han sido adquiridos a la tasa de muestreo uniforme $\Delta t^s = t_{j+1} - t_j$. Obsérvese que n_p tiene en cuenta la dimensionalidad espacial n_s (puntos de malla, píxeles) y el número de variables de flujo consideradas n_{vars} (componentes de velocidad, presión, \dots), de modo que $n_p = n_s \times n_{vars}$; mediante el redimensionado de las fotogramas como vectores columna $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^{n_p}$, se construye una matriz de datos:

$$\mathbf{V}_1^{n_t} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_t-1}, \mathbf{v}_{n_t}] \in \mathbb{R}^{n_p \times n_t}. \quad (2.1)$$

La mayoría de las aplicaciones de mecánica de fluidos, ya sean numéricas o experimentales, conducen a matrices de datos con $n_t \ll n_p$, denominadas matrices altas y delgadas o *Tall & Skinny* (TS). Desde el punto de vista de la notación, a menudo omitiremos los subíndices y superíndices de la matriz de datos siempre que queden suficientemente claros por el contexto.

Es frecuente considerar el conjunto de datos asociado obtenido restando de cada una de los *snapshots* temporales el campo promediado temporalmente (el flujo medio), $\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \mathbf{v}_j$. El contexto a menudo determina si se está considerando el conjunto de datos original o sin el campo promediado, por lo que se mantendrá la notación $\mathbf{V}_1^{n_t}$ para ambos.

Antes de entrar en los detalles específicos de los distintos métodos considerados, recordemos que la mayoría de las técnicas de análisis modal basadas en datos pueden interpretarse como

estrategias de factorización matricial (véase Brunton y Kutz, 2019; Kutz, Brunton et al., 2016a; Schmid, 2010, pero también M. A. Mendez et al., 2019; M. A. Mendez, 2022), como en:

$$\mathbf{V}_1^{n_t} = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}^H = \sum_{j=1}^r b_j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c}_j^H, \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n_p \times r}$ ¹, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n_t \times r}$ y H es el operador complejo conjugado. Se suele imponer una estructura diagonal para \mathbf{B} , y la dimensión r se elige de modo que $1 \leq r \leq \min(n_p, n_t)$. Dado que $\mathbf{a}_j \in \mathbb{C}^{n_p}$, la matriz \mathbf{A} está relacionada con la *dimensión espacial* del conjunto de datos y, por tanto, \mathbf{A} se denomina a veces matriz *topos*. Del mismo modo, $\mathbf{c}_j \in \mathbb{C}^{n_t}$, y por tanto relacionada con la *dimensión temporal*; la matriz \mathbf{C} se denomina en consecuencia la matriz *cronos*.

A continuación, revisaremos primero los métodos clásicos: POD, DMD y FFT, destacando las conexiones entre ellas. Seguidamente, abordamos varias extensiones de estos métodos.

La primera extensión aprovecha la redundancia de datos, bien en el dominio espectral, promediando espectros de subsecuencias más cortas (según el método de Welch, Welch, 1967), bien en el dominio temporal mediante el desfase temporal de los *snapshots*; en ambos casos, se obtienen técnicas de análisis mejoradas. El POD espectral (Towne et al., 2018) y el DMD de alto orden (Le Clainche y Vega, 2017b) son representantes de este enfoque.

A continuación, se presenta un enfoque multi-escala para el POD y una interpretación multiresolución del DMD.

Por último, una perspectiva de entrada-salida en el espacio de los estados (Jovanović, 2021) permite introducir la técnica de análisis del operador resolvente (RA) basada en el DMD e impulsada por los datos que se describe en Herrmann et al., 2021.

En la tabla 2.1 se enumeran los distintos métodos analizados en esta contribución. Para cada uno, se proporcionan una o dos referencias fundamentales. La tabla también acredita el origen de las implementaciones para los diferentes métodos, al menos para aquellos que están disponibles públicamente.

Tabla 2.1: Resumen de los métodos considerados en esta tesis, principales referencias y disponibilidad.

Método	Referencias	Disponibilidad
POD	Berkooz et al., 1993; Volkwein, 2012	Comandos nativos de Matlab, <code>svd</code> , <code>eig</code>
DMD	Jovanović et al., 2014; Schmid, 2010	http://www.ece.umn.edu/users/mihailo/software/dmdsp/
FFT	Brunton y Kutz, 2019; Cooley y Tukey, 1965	Comandos nativos de Matlab, <code>fft</code> , <code>fft2</code>
SPOD	Schmidt y Colonius, 2020; Towne et al., 2018	https://nl.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/65683-spectral-proper-orthogonal-decomposition-spod
HODMD	Le Clainche y Vega, 2017b; Le Clainche y Vega, 2020	https://short.upm.es/q8rip
mPOD	M. A. Mendez et al., 2019, 2019	https://github.com/mendezVKI/MODULO
mrDMD	Kutz, Brunton et al., 2016a; Kutz, Fu y Brunton, 2016	https://github.com/kdmarrett/dmd
RA	Herrmann et al., 2021	N.A./Implementación propia

¹La mayoría de los métodos relacionados con el POD factorizan la matriz de datos en factores reales, mientras que los métodos relacionados con el DMD producen factores complejos. Esos factores complejos forman, no obstante, pares de variables conjugadas complejas, de modo que se recupera la matriz de datos reales original $\mathbf{V}_1^{n_t}$.

2.2 Descomposición en Modos Propios Ortogonales

Iniciamos esta revisión concisa de los métodos clásicos de descomposición propia ortogonal, destacando que existen muchos métodos que reciben el nombre del POD en la bibliografía. El análisis de componentes principales (PCA) o la descomposición de Karhunen-Loève son también términos aplicados a estas técnicas.

Volkwein, 2012 presenta una buena descripción de tres algoritmos del POD diferentes pero interrelacionados. Aquí trataremos dos de ellos, ya que serán útiles para la discusión posterior. Una primera estrategia consiste en la aplicación directa de la descomposición de valores singulares (SVD) al conjunto de datos:

$$\mathbf{V}_1^{n_t} \stackrel{SVD}{=} \mathbf{L}_0 \mathbf{S}_0 \mathbf{R}_0^T = \sum_{j=1}^r s_{0,j} \mathbf{l}_{0,j} \cdot \mathbf{r}_{0,j}^T. \quad (2.3)$$

La matriz \mathbf{S}_0 contiene como entradas diagonales los valores singulares $s_{0,j}$ no negativos, decrecientes y que pueden ordenarse $s_{0,1} \geq s_{0,2} \geq \dots \geq s_{0,r} > 0$, mientras que las matrices reales \mathbf{L}_0 y \mathbf{R}_0 (que son ortonormales), tienen como columnas $\mathbf{l}_{0,j}$ y $\mathbf{r}_{0,j}$ los vectores singulares por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Nótese que el superíndice T representa el operador de transposición. Los vectores singulares $\mathbf{l}_{0,j}$ se identifican con los modos POD (Jovanović et al., 2014; Kou et al., 2018; Rowley y Dawson, 2017; Schmid, 2010).

La segunda estrategia, que por razones históricas se denomina *método de snapshots* (Sirovich, 1987), considera la matriz de correlación temporal $\mathbf{K} \equiv (\mathbf{V}_1^{n_t})^T \mathbf{V}_1^{n_t}$, y su descomposición de valores propios:

$$\mathbf{K} \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{D}_{s^2}, \quad (2.4)$$

donde los valores singulares se calculan como la raíz cuadrada de las entradas diagonales de \mathbf{D}_{s^2} , *i.e.*, $s_{0,j} = \sqrt{D_{s^2,j,j}}$, y los modos POD vienen dados por:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{V}_1^{n_t} \mathbf{R}_0 \mathbf{D}_{s^2}^{-1/2}. \quad (2.5)$$

Nótese cómo la factorización de la matriz de datos dada por la Ec. (2.3) permite separar de alguna manera los componentes espaciales de los componentes temporales de los datos. En consecuencia, se puede definir la *matriz cronos escalada* como:

$$\mathbf{C}_1^{n_t} \equiv \mathbf{S}_0 \mathbf{R}_0^T = \sum_{j=1}^r s_{0,j} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r}_{0,j}^T, \quad (2.6)$$

donde \mathbf{e}_j es el j -ésimo vector unitario en \mathbb{R}^r . Esta matriz será útil al presentar el método del DMD de alto orden (HODMD) en §2.5.2.

Por último, señalamos que los valores singulares no crecientes de \mathbf{S}_0 tienen una relación con la norma de Frobenius de $\mathbf{V}_1^{n_t}$, siendo $\|\mathbf{V}_1^{n_t}\|_F = \sqrt{\sum_j s_{0,j}^2}$. Nótese también que el límite superior de la suma en la Ec. (2.3) tiene que ser $r = \min(n_p, n_t)$. Las propiedades de la descomposición SVD (Volkwein, 2012), garantizan que la elección de $1 \leq r' \leq r$ conduce a la representación

óptima de rango r' del conjunto de datos. El parámetro r' , a menudo denominado rango de la aproximación, puede elegirse directamente (simplemente especificando un valor entero) o indirectamente, es decir, ajustando r' para cumplir una tolerancia dada ε , como en:

$$\frac{\|\mathbf{V}_1^{n_t} - \sum_{j=1}^{r'} s_{0,j} \mathbf{l}_{0,j} \cdot \mathbf{r}_{0,j}^T\|_F}{\sqrt{\sum_{j=1}^r s_{0,j}^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=r'+1}^r s_{0,j}^2}{\sum_{j=1}^r s_{0,j}^2}} \leq \varepsilon. \quad (2.7)$$

2.3 Descomposición en Modos Dinámicos

Las primeras implementaciones de los, ya plenamente establecidos, métodos de descomposición en modos dinámicos se remontan a Rowley et al., 2009 (el DMD basado en la *matriz de compañía* de Rowley et al.) y a Schmid, 2010 (el DMD basado en la *transformación de semejanza* de Schmid). En esta tesis, y por brevedad, consideramos principalmente implementaciones derivadas del trabajo de Schmid, 2010. El método del DMD clásico asume una relación lineal entre *snapshots* consecutivos:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathcal{A}^h \mathbf{v}_k, \quad k = 1, \dots, n_t - 1, \quad (2.8)$$

donde el operador lineal \mathcal{A}^h puede interpretarse como una matriz de transición de estado en tiempo discreto (Jovanović, 2021). La Ec. (2.8) está relacionada con el *operador de Koopman* (Le Clainche y Vega, 2020).

Definiendo las subsecuencias parciales $\mathbf{X} \equiv \mathbf{V}_1^{n_t-1}$ y $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{V}_2^{n_t}$, podemos escribir la Ec. (2.8) en forma compacta:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{A}^h \mathbf{X}. \quad (2.9)$$

A continuación, se realiza el SVD de la primera subsecuencia, $\mathbf{X} \stackrel{SVD}{=} \mathbf{L}_0 \mathbf{S}_0 \mathbf{R}_0^T$. Nótese que, como $\mathbf{X} = \mathbf{V}_1^{n_t-1}$, este SVD no es equivalente al de la Ec. (2.3) aunque se emplee la misma notación \mathbf{L}_0 , \mathbf{S}_0 , \mathbf{R}_0 , *cf.* Ec. (2.3) para ser concisos. Recordemos también que, en esta etapa, se podría considerar una representación reducida de la subsecuencia de datos de entrada \mathbf{X} simplemente reteniendo $r' \leq r = n_t - 1$ valores singulares, de acuerdo con la Ec. (2.7). Utilizando la SVD de la matriz \mathbf{X} en la Ec. (2.9) se puede construir una matriz reducida $\bar{\mathbf{A}}$, definida como:

$$\bar{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{L}_0^T \mathcal{A}^h \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0^T \mathbf{Y} \mathbf{R}_0 \mathbf{S}_0^{-1}. \quad (2.10)$$

La matriz reducida $\bar{\mathbf{A}}$ es la proyección de la matriz \mathcal{A}^h sobre el espacio lineal generado por las columnas de \mathbf{L}_0 (Schmid, 2010). El método del DMD opera bajo la hipótesis de que la matriz proyectada $\bar{\mathbf{A}}$ conserva la mayor parte de la información contenida en el operador \mathcal{A}^h . Esta proyección sirve para reducir la dimensionalidad de la dinámica del sistema, facilitando su análisis y modelización. También ayuda a filtrar el ruido y a resaltar los modos más importantes del sistema. Este paso puede aprovecharse para diseñar estrategias de control u optimizar el rendimiento del sistema.

Una vez calculada la matriz reducida $\bar{\mathbf{A}}$, su descomposición de valores propios (por la derecha):

$$\bar{\mathbf{A}} \Psi = \Psi \Lambda_\mu, \quad (2.11)$$

ofrece los modos DMD reducidos $\boldsymbol{\psi}_i$ como las columnas de $\boldsymbol{\Psi}$; los valores propios correspondientes μ_i (las entradas diagonales de $\boldsymbol{\Lambda}_\mu$) indican las tasas de crecimiento temporal ($\sigma_i = \text{Re}(\mu_i)$) y la pulsación angular ($\omega_i = \text{Im}(\mu_i)$).

Los modos propios proyectados (es decir, los modos dinámicos) de la matriz \mathcal{A}^h se recuperan como $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{L}_0 \boldsymbol{\Psi}$. Obsérvese también que las tasas de crecimiento y las frecuencias en el semiplano complejo pueden recuperarse a partir de los valores propios como:

$$\lambda_i = \log(\mu_i) / \Delta t^s. \quad (2.12)$$

Por último, nótese que el DMD permite reconstruir la secuencia de datos original como:

$$\mathbf{v}(t_j) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i \mu_i^j \Delta t^s, \quad (2.13)$$

expresión que se puede formular en forma matricial como:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{V}_\mu, \quad (2.14)$$

donde \mathbf{V}_μ es una matriz de Vandermonde cuyas columnas están generadas por las potencias sucesivas del vector columna $[\mu_1^j, \dots, \mu_r^j]^T$, con $j = 0, \dots, n_t - 1$; y \mathbf{D}_α es una matriz diagonal cuyas entradas no nulas deben determinarse.

Existen varias estrategias para identificar \mathbf{D}_α , véase el Apéndice para los detalles. La mayor parte de las ocasiones usaremos la estrategia descrita en Jovanović et al., 2014. En cuanto a la Ec. (2.13), nótese que si se considera un límite superior $r'' \leq r' \leq r$, en los casos en que tenemos una alta relación ruido/señal, los datos originales \mathbf{X} no se reconstruyen, sino que se aproximan. Sin embargo, en casos de flujos turbulentos y ruidosos, la convergencia del método a una frecuencia específica que represente a la dinámica principal del flujo no está garantizada, incluso aunque se tomen todos los modos (ya que todos los modos calculados por el método no son necesariamente modos físicos, aunque sean apropiados para ajustarse a la base de datos original con un error de reconstrucción reducido). El parámetro r'' se denomina *complejidad espectral* (Le Clainche y Vega, 2018) y también puede ajustarse directa o indirectamente mediante una condición ε similar a la de la Ec. (2.7).

Revisamos ahora una definición alternativa del método del DMD que facilita la conexión con el método del DMD de alto orden (HODMD) discutido en §2.5.2. Esta formulación, que sigue Le Clainche y Vega, 2017b establece la asunción de Koopman en subsecuencias construidas a partir de la matriz de cronos escalada (por lo tanto, aprovecha la Ec. (2.3) directamente, en lugar de la Ec. (2.9)), según:

$$\mathcal{C}_2^{n_t} = \mathcal{A}_1^h \mathcal{C}_1^{n_t-1}. \quad (2.15)$$

A continuación, se aplica el procedimiento habitual, es decir, la primera subsecuencia se descompone como:

$$\mathcal{C}_1^{n_t-1} \stackrel{SVD}{=} \mathbf{L}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{R}_1^T. \quad (2.16)$$

La única diferencia es que ahora los modos dinámicos se recuperan como $\Phi = \mathbf{L}_0 \mathbf{L}_1 \Psi$. Esta formulación alternativa permite recuperar el análisis DMD a un coste computacional reducido, siempre que la descomposición SVD esté disponible, (Groun, Villalba-Orero et al., 2022a; Li et al., 2022).

Llegados a este punto, podemos hacer una primera comparación entre las factorizaciones POD y DMD, según el modelo de factorización $\mathbf{V}_1^{n_t} = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ de la Ec. (2.2). Los métodos difieren en la naturaleza de las respectivas matrices *topos*: los modos POD \mathbf{L}_0 son ortogonales entre sí, mientras que los modos DMD Φ no lo son necesariamente. Cada una de las columnas de la matriz *cronos* del POD, \mathbf{R}_0 , contiene todo el rango de frecuencias presentes en el problema analizado (es decir, las frecuencias son *mixtas*), mientras que cada una de las filas de la matriz DMD \mathbf{V}_μ describe una variación temporal sinusoidal a una frecuencia distinta ω_j modulada por un factor exponencial $e^{\sigma_j t}$. Por último, recordamos el hecho de que los valores singulares $s_{0,j}$ son decrecientes, y tienen una relación directa con la norma de Frobenius de $\mathbf{V}_1^{n_t}$, mientras que las amplitudes α_j no.

2.4 Análisis de Fourier

Como se discute en Brunton y Kutz, 2019; Strang, 1986, la transformada discreta de Fourier del conjunto de datos $\mathbf{V}_1^{n_t}$ se calcula formalmente como el producto matriz–matriz:

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_1^{n_t} \mathcal{F}, \quad (2.17)$$

donde la matriz $\mathcal{F} \in \mathbb{C}^{n_t \times n_t}$ es simétrica ($\mathcal{F}^T = \mathcal{F}$). La matriz \mathcal{F} tiene una estructura especial que puede ser explotada para calcular eficientemente, para secuencias de longitud 2^n , la transformada de Fourier a través del algoritmo *Fast Fourier Transform* (o FFT) de Cooley y Tukey (Brunton y Kutz, 2019; Cooley y Tukey, 1965). Obsérvese también que, si se dispone de la descomposición SVD del conjunto de datos, el método FFT puede aplicarse a la matriz de cronos escalada.

En esta tesis, se considera la densidad del espectro de potencia (o bien *Power Spectral Density*, PSD) de conjuntos de datos resueltos en el tiempo, calculada como:

$$PSD = \hat{\mathbf{V}} \odot \hat{\mathbf{V}}^H, \quad (2.18)$$

donde \odot representa el producto de Hadamard (elemento por elemento). La transformada de Fourier del conjunto de datos también abre el camino para realizar manipulaciones en el espacio espectral y es la base de los métodos POD espectral (SPOD) y el POD multi-escala (mPOD): Estas conexiones se describen en las secciones correspondientes. En cuanto al DMD, Rowley *et al.* establecieron que realizar el DMD sobre el conjunto de datos que se les ha sustraído la media es equivalente a la transformada discreta de Fourier (Chen et al., 2012).

2.5 Métodos de deslizamiento de ventanas

El análisis de la densidad del espectro de potencia de una señal infinitamente larga y periódica mediante técnicas DFT es más preciso conforme que se dispone de secuencias temporales cada vez más largas. En la práctica, sin embargo, rara vez pueden muestrearse las señales durante un tiempo suficiente. Además, las estimaciones espectrales no convergen a medida que aumenta el número de muestras n_t : la incertidumbre de la estimación en cada frecuencia es tan grande como la magnitud de la propia estimación.

Una estrategia para obtener estimaciones convergentes se concreta en promediar los espectros sobre varias realizaciones de la señal, utilizando el método Welch (Welch, 1967). Esta estrategia está en la raíz del método del POD espectral (SPOD) (Towne et al., 2018). Se puede obtener un efecto equivalente recurriendo al análisis de d *snapshots* desfasados en el tiempo, como hace el método del DMD de alto orden (HODMD) (Le Clainche y Vega, 2017b; Le Clainche y Vega, 2020), explotando la redundancia de datos. A continuación, repasamos ambos métodos.

2.5.1 Descomposición Espectral en Modos Propios Ortogonales

El POD espectral es una descomposición espacio-temporal para datos estadísticamente estacionarios que se basa en estimar primero y factorizar a continuación el tensor de densidad espectral cruzada (CSD, acrónimo en inglés de *Cross Spectral Density*) a diferentes frecuencias.

En esta tesis nos limitamos a una descripción sucinta del método SPOD, principalmente desde el punto de vista algorítmico; Schmidt y Colonius, 2020; Towne et al., 2018 proporcionan una descripción detallada del método y su aplicación. Como mencionamos en el primer capítulo, recordemos que en la bibliografía se han descrito otras estrategias de procesamiento de datos también denominadas SPOD, pero no las trataremos aquí. (Del Pino et al., 2011; Derebail Muralidhar et al., 2019).

La Fig. 2.1 es ilustrativa del algoritmo SPOD. Las estimaciones del tensor CSD en un conjunto predefinido de frecuencias f_k pueden obtenerse simplemente subdividiendo el conjunto de datos en n_b subsecuencias –o bloques– de longitud temporal n'_t , $\mathbf{V}^b = \mathbf{V}_k^{k+n'_t}$, con $1 \leq k \leq n_t - n'_t$ y $b = 1, \dots, n_b$. A cada uno de estos bloques se le aplica la transformada de Fourier, $\hat{\mathbf{V}}^b$. Cabe mencionar que cada bloque puede compartir (*solaparse*) con bloques vecinos en hasta n_o *snapshots*. El parámetro n_o suele elegirse de modo que se alcance un solapamiento del 50% entre bloques consecutivos (Schmidt y Colonius, 2020).

Observando que la columna k -ésima de cualquiera de los bloques transformados $\hat{\mathbf{V}}^b$ está relacionada con la misma frecuencia f_k (ver Fig. 2.1), es posible estimar el tensor CSD en f_k simplemente agrupando todas esas columnas en una matriz \mathbf{V}_{f_k} y operando:

$$\mathbf{S}_{f_k} = \mathbf{V}_{f_k}^H \mathbf{W} \mathbf{V}_{f_k}. \quad (2.19)$$

La formulación admite una matriz de pesos \mathbf{W} que puede servir para tener en cuenta el refinamiento de la malla y/o las funciones ventana Towne et al., 2018. En esta tesis, utilizamos la función de ventana de Hamming siguiendo a Schmidt y Colonius, 2020. Tenga en cuenta que las frecuencias f_k se definen a priori por la elección de n_b y n_o , ver *e.g.* Ec. (3.5) en Towne et al., 2018.

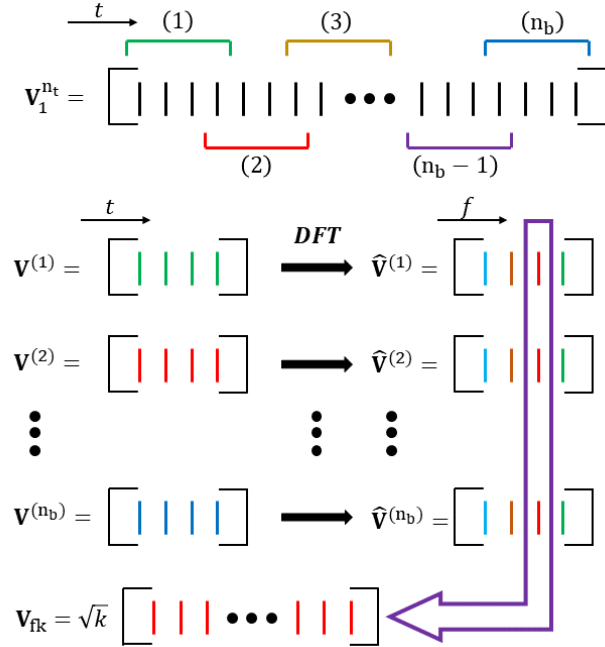


Figura 2.1: Representación esquemática del método descrito en Towne et al., 2018 para estimar los modos SPOD (esquema adaptado de Towne et al., 2018).

Los modos SPOD son los vectores singulares de \mathbf{S}_{f_k} y se obtienen con la estrategia algorítmica de las ecuaciones (2.4) y (2.5):

$$\mathbf{S}_{f_k} \Theta_{f_k} = \Theta_{f_k} \Lambda_{f_k}, \text{ seguida de } \mathbf{L}_{0,f_k} = \mathbf{V}_{f_k} \Theta_{f_k} \Lambda_{f_k}^{-1/2}. \quad (2.20)$$

De este modo, las energías modales a la frecuencia f_k vienen dadas por las entradas diagonales de $\Lambda_{f_k}^{1/2}$. Estas energías modales son no-crecientes y, por tanto, permiten clasificar la contribución de los distintos modos SPOD.

2.5.2 Descomposición en Modos Dinámicos de Alto Orden

El DMD de alto orden (HODMD) aprovecha también la noción de redundancia, pero en el tiempo. El lector interesado puede consultar la extensa bibliografía sobre el tema en Le Clainche et al., 2017; Le Clainche y Vega, 2017b o la monografía Le Clainche y Vega, 2020.

Para introducir el HODMD, la hipótesis de Koopman de la Ec. (2.8) se amplía para incluir d snapshots con desfase temporal, ver la Fig. 2.2 (se ha eliminado el subíndice 1 y el superíndice h del operador $\mathcal{A}_{1,j}^h$ para simplificar la notación):

$$\mathbf{v}_{k+1} = \sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j \mathbf{v}_{k-j}. \quad (2.21)$$

Esta relación se denomina a veces la hipótesis de Koopman *de orden superior*. Por razones de eficiencia computacional, es mejor escribir la Ec. (2.21) en términos de las columnas de la

matriz cronos escalada:

$$\mathbf{c}_{k+1} = \sum_{j=1}^d \mathcal{A}_j \mathbf{c}_{k-j}. \quad (2.22)$$

Tenga en cuenta cómo fijar $d = 1$, ya sea en Ec. (2.21) o (2.22) conduce al DMD *clásico*. La contrapartida matricial de la Ec. (2.22) es (ver Fig. 2.2):

$$\mathbf{C}_{d+1}^{n_t} = \mathcal{A}_1 \mathbf{C}_1^{n_t-d} + \mathcal{A}_2 \mathbf{C}_2^{n_t-d+1} + \dots + \mathcal{A}_d \mathbf{C}_d^{n_t-1}, \quad (2.23)$$

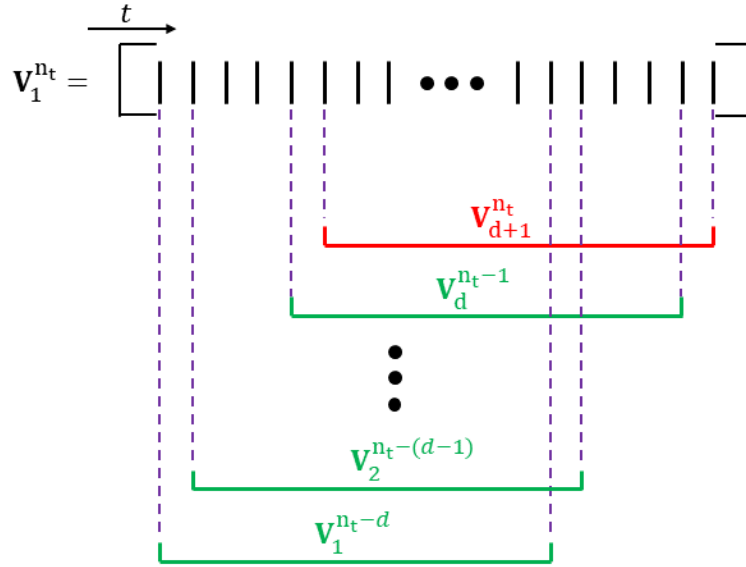


Figura 2.2: Esquema del método HODMD (adaptado de Le Clainche et al., 2017).

Las operaciones matemáticas conducen a una relación basada en una matriz de bloques por tipo matriz de compañía:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_2^{n_t-d+1} \\ \mathbf{C}_3^{n_t-d+2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d^{n_t-1} \\ \mathbf{C}_{d+1}^{n_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{I} \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \dots & \mathcal{A}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{n_t-d} \\ \mathbf{C}_2^{n_t-d+1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{d-1}^{n_t-2} \\ \mathbf{C}_d^{n_t-1} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

que puede escribirse de forma compacta como:

$$\tilde{\mathbf{C}}_2^{n_t-d+1} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{C}}_1^{n_t-d}. \quad (2.25)$$

Obsérvese cómo esta última ecuación es formalmente similar a la Ec. (2.15). En efecto, a partir de aquí el HODMD sigue el algoritmo del DMD clásico. En consecuencia, la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ nunca se forma explícitamente; el algoritmo recurre en su lugar al SVD:

$$\tilde{\mathbf{C}}_1^{n_t-d} \stackrel{SVD}{=} \tilde{\mathbf{L}}_1 \tilde{\mathbf{S}}_1 \tilde{\mathbf{R}}_1^T. \quad (2.26)$$

Esto a su vez sirve para construir la matriz proyectada (Ec. (2.10)):

$$\bar{\mathcal{A}} = \tilde{\mathbf{C}}_2^{n_t-d+1} \tilde{\mathbf{R}}_1 \tilde{\mathbf{S}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_1^T. \quad (2.27)$$

La descomposición de valores propios de esta última matriz, $\bar{\mathcal{A}} \Psi = \Psi \Lambda_\mu$, proporciona los modos HODMD, $\Phi = \mathbf{L}_0 \tilde{\mathbf{L}}_1 \Psi'$, donde (usando la notación de Matlab) $\Psi' = \Psi(1 : r_1, :)$.

Remarcamos que el método HODMD ofrece dos alternativas complementarias para la representación reducida del conjunto de datos: una al construir la matriz de cronos escalada en Ec. (2.6) (asociada a r'_1 y/o ε_1), y la otra con el SVD de la matriz $\tilde{\mathbf{C}}_1^{n_t-d}$ (a través de r'_2 y/o ε_2).

En este sentido, para un número suficientemente grande de *snapshots* n_t (situación común), siempre que la complejidad espacial r' (el número de modos POD/SVD retenidos tras la reducción de dimensionalidad realizada por el método, en función de la tolerancia ε_1) sea menor que la complejidad espectral r'' (el número de modos DMD retenidos en la expansión del DMD Ec. (2.13), para $n_t > r'$), la hipótesis de Koopman de alto orden completa la falta de información espacial (reducida de n_t a r'). Esto explica el buen rendimiento del método HODMD en bases de datos muy complejas, ya que permite separar el ruido (experimentos) y/o las pequeñas escalas del flujo (turbulencia) (Le Clainche et al., 2017, 2019a, 2020a; C. Mendez et al., 2021).

Además, siguiendo el teorema de *clustering* de Takens (Takens, 2006), el proceso de ventaneado deslizante llevado a cabo en el segundo paso del algoritmo HODMD aumenta el rango de la matriz. Para obtener las frecuencias propias de los sistemas dinámicos, el rango de la matriz analizada debe ser igual o mayor que el número de frecuencias representativas del sistema dinámico (estos dos conceptos se denominan complejidades espacial y espectral, respectivamente, tal y como se han definido previamente en el apartado correspondiente). Sin embargo, el HODMD también funciona en soluciones cuasi-periódicas, donde el número de frecuencias que modelan el sistema es inconmensurable. En Le Clainche y Vega, 2017b se demuestra que si el rango de los modos POD es al menos igual a M , donde M es un número de modos DMD con amplitud suficientemente alta para representar la dinámica principal del sistema, el método da buenas aproximaciones del conjunto de datos analizado (nótese que serán sólo aproximaciones, y nunca será posible reconstruir la solución exacta).

2.5.3 Sobre los rasgos comunes de las técnicas SPOD y HODMD

De la discusión anterior se desprende que los métodos HODMD y SPOD son versiones mejoradas de las técnicas del DMD y del método POD, respectivamente. A pesar de las obvias diferencias algorítmicas entre las implementaciones HODMD y SPOD presentadas hasta ahora, hay que reconocer que ambos métodos heredan sus capacidades mejoradas del mismo principio subyacente, que es la explotación de la redundancia de datos para identificar mejor las características relevantes de los datos disponibles.

El HODMD, por un lado, comienza con un paso de reducción de la dimensionalidad de los datos basado en un primer SVD, y explota la redundancia mediante un proceso de ventaneado. Este proceso conduce a una matriz ampliada con los datos limpios de ruido, pequeñas escalas de flujo, redundancias/degeneraciones espaciales u otros artefactos indeseables; la aplicación

del algoritmo DMD estándar (que incluye un paso adicional de reducción de la dimensionalidad para aliviar los requisitos de memoria del ordenador) permite entonces identificar los modos DMD, tasas de crecimiento y frecuencias.

El método SPOD sigue una ruta diferente para introducir redundancia en el dominio de la frecuencia considerando conjuntos de ventanas más cortas, solapadas y transformadas en Fourier que también son seguidas por un proceso de ventaneado deslizante. Este paso del algoritmo recuerda al conocido método Welch (Welch, 1967), o, alternativamente, al proceso PSD, que suele realizarse al analizar bases de datos experimentales (Le Clainche et al., 2012). Este proceso conduce a subconjuntos de datos asociados a frecuencias específicas (digamos f_k) que se procesan mediante el método POD, para producir finalmente una colección de modos SPOD asociados a frecuencias distintas, como en el método del DMD (Towne et al., 2018).

En casos de flujos con dinámicas simples (los que estudiaremos en la Sección 4.1.2), el HODMD y el SPOD deberían proporcionar resultados similares. Sin embargo, en flujos complejos, que abarcan un gran número de escalas espacio-temporales, ambos métodos son complementarios, recuperando generalmente modos de forma similar que contienen información relevante sobre las principales inestabilidades que controlan el flujo. Es destacable que el HODMD proporciona los modos DMD, mientras que el SPOD proporciona un nuevo conjunto de modos, que podría considerarse un híbrido entre los modos DMD y POD: de hecho, Towne et al., 2018 identifican los modos SPOD como “modos DMD promediados de manera óptima, obtenidos a partir de un problema de DMD basado en *phase-averaging* para flujos estacionarios”.

En el análisis de flujos complejos, ambas metodologías requieren una calibración cuidadosa. Como se discutirá en el Capítulo 4 de esta tesis, el número/tamaño de las ventanas seleccionadas en ambas metodologías es crucial para identificar adecuadamente la dinámica que controla el flujo, es decir, el uso de ventanas demasiado cortas impedirá que ambos métodos identifiquen dinámicas relevantes de baja frecuencia; alternativamente, para conjuntos de datos complejos, un número demasiado pequeño de ventanas afectará negativamente a la capacidad de ambos métodos para filtrar frecuencias redundantes.

Una de las principales ventajas del HODMD es que es un método basado en el DMD, que se considera como una herramienta más eficiente que el método FFT: el DMD es capaz de identificar la dinámica principal del flujo utilizando conjuntos de datos más *cortos* que el FFT, que requiere grandes bases de datos para proporcionar resultados precisos (Le Clainche y Vega, 2017b). Tanto el FFT como el DMD obedecen el teorema de Nyquist, aunque en casos complejos, se sabe que el DMD identifica las frecuencias principales del flujo en una base de datos que contiene el 75 % del periodo de la frecuencia (Chen et al., 2012). Al igual que el FFT, el HODMD puede identificar las principales frecuencias del flujo, incluso en bases de datos con información espacial limitada, como las provenientes de sondas experimentales. Sin embargo, el HODMD va un paso más allá al incorporar y aprovechar las ventajas inherentes del DMD. Además, el HODMD selecciona automáticamente las principales frecuencias del flujo, basándose en la robustez de los resultados presentados con las diferentes calibraciones. La selección de frecuencias específicas para estudiar la dinámica principal del flujo obliga a tener un conocimiento previo del flujo estudiado, lo que puede ser un gran inconveniente en el caso de flujos complejos (por ejemplo, flujos turbulentos en canales, Le Clainche et al., 2020a, 2020b; identificación de vibraciones en pruebas, de vuelo, Le Clainche et al., 2019b;

C. Mendez et al., 2021; identificación de inestabilidades de flujo cruzado, Le Clainche et al., 2019a; predicciones en medidas Lidar, Le Clainche et al., 2018b, etc.)

Por último, la aplicación del método HODMD no se limita a datos estadísticamente estacionarios: el HODMD también puede aplicarse a datos de flujo adquiridos en regímenes transitorios (Begiashvili et al., 2023; Le Clainche y Vega, 2017a; Le Clainche et al., 2018a).

2.6 Mejora de las estimaciones espectrales mediante análisis multirresolución

2.6.1 Descomposición en Modos Propios Ortogonales multi-escala

La descomposición en modos propios ortogonales multi-escala (o mPOD, introducida en M. A. Mendez et al., 2019, 2018) combina principios del análisis multirresolucional (MRA) (Strang, 1986) con la técnica del método del POD (Ec. (2.4)). El MRA permite analizar la matriz de correlaciones con diferentes niveles de detalle. Esta jerarquía de puntos de vista permite segregar la matriz de correlación temporal, $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$, en contribuciones de diferentes *escalas* no superpuestas, mientras que las propiedades de optimalidad del POD permiten encontrar la base óptima para cada escala. La técnica del mPOD separa las escalas en Ec. (2.28) mediante la aplicación de un *banco de filtros* $H_{\mathcal{L}_1}, \dots, H_{\mathcal{H}_M}$ (ver Fig. 2.3(a)) a la transformada de Fourier de la matriz de correlación temporal:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathcal{F}^H \mathbf{K} \mathcal{F} = \mathcal{F}^H (\mathbf{V}_1^{n_t})^T \mathbf{V}_1^{n_t} \mathcal{F}. \quad (2.28)$$

La Fig. 2.3(a) presenta un esquema del procedimiento (véase M. A. Mendez et al., 2019 para los detalles completos). De esta manera, el método mPOD aproxima la matriz de correlación temporal como la superposición de M contribuciones diferentes (ver Fig. 2.3(b)):

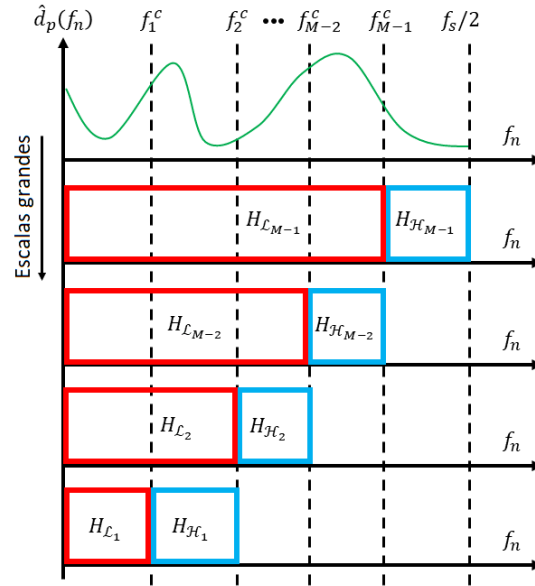
$$\mathbf{K} \approx \mathbf{K}_{\mathcal{L}_1} + \sum_{j=1}^{M-1} \mathbf{K}_{\mathcal{H}_j}. \quad (2.29)$$

Cada una de estas contribuciones es, a su vez, descompuesta en valores propios como $\mathbf{K}_j \mathcal{X}_j = \mathcal{X}_j \mathbf{D}_{s_j^2}$, véase la Ec. (2.4). A continuación, los vectores propios de las distintas escalas se reúnen en $\mathcal{X}_{mPOD}^0 = [\mathcal{X}_{\mathcal{L}_1}, \mathcal{X}_{\mathcal{H}_1}, \dots, \mathcal{X}_{\mathcal{H}_{m-1}}]$. Seguidamente, se recurre a la factorización QR para corregir las posibles pérdidas de ortogonalidad. Invertiendo el factor \mathcal{R} se obtiene la matriz de vectores singulares por la derecha \mathbf{R} :

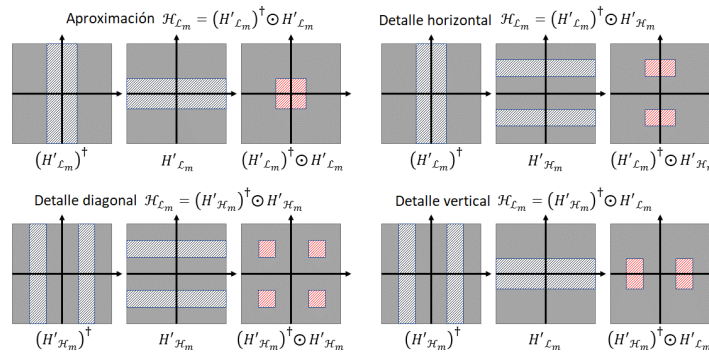
$$\mathcal{X}_{mPOD}^0 \stackrel{QR}{=} \mathcal{Q}^\perp \mathcal{R} \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \mathcal{Q}^\perp = \mathcal{X}_{mPOD}^0 \mathcal{R}^{-1}, \quad (2.30)$$

que ahora se garantiza que son ortogonales. Finalmente, los modos espaciales (los vectores singulares por la izquierda) se obtienen como $\mathbf{L} = \mathbf{V}_1^{n_t} \mathbf{R} \mathbf{D}_{s_2}^{-1/2}$, Ec. (2.5).

El lector interesado encontrará detalles adicionales sobre el método mPOD (por ejemplo, la preparación del banco de filtros) en la publicación M. A. Mendez et al., 2019. Una propiedad interesante del método mPOD es cómo la configuración del banco de filtros define la jerarquía de las escalas resueltas (la Fig. 2.4 ilustra este punto). La relación del método mPOD con los métodos DMD y RA también se trata en M. A. Mendez et al., 2019.



(a)



(b)

Figura 2.3: Descripción esquemática de mPOD: en 2.3(a), el principio de multirresolución aplicado por el banco de filtros; en 2.3(b), una ilustración de las diferentes escalas que se pueden *reveladas* (esquema adaptado de M. A. Mendez et al., 2019).

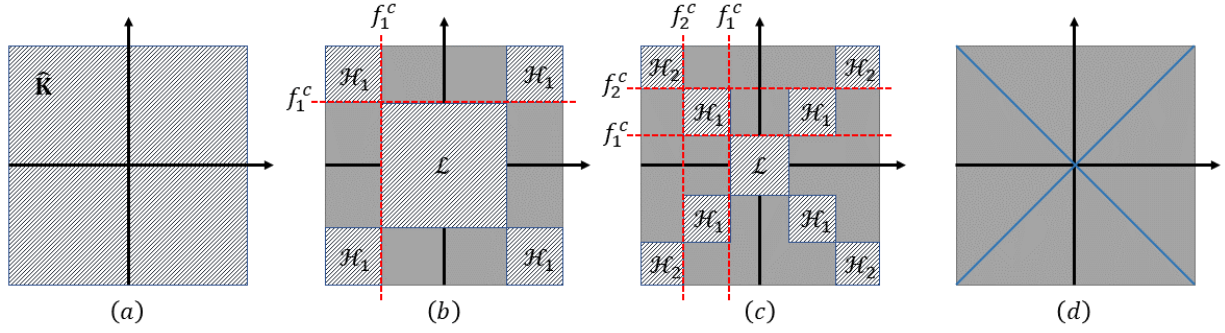


Figura 2.4: Representación esquemática de la partición de la matriz de correlaciones $\hat{\mathbf{K}}$ eligiendo diferentes frecuencias de división (f_i^c). Caso (a) considera una única escala, donde el mPOD resulta ser el POD. Caso (b) y (c) consideran dos y tres escalas, respectivamente. Caso (d) considera $n_t/2$ escalas, donde el mPOD resulta ser el DFT. (Esquema adaptado de M. A. Mendez et al., 2019).

2.6.2 Descomposición en Modos Dinámicos multirresolución

Las estrategias multirresolución también pueden combinarse con el método de descomposición en modos dinámicos: Kutz, Fu y Brunton, 2016, propusieron una reformulación del método DMD clásico que permite descomponer los datos en componentes organizados jerárquicamente según diferentes escalas temporales, de manera similar a lo presentado en la Ec. (2.29). Esta reformulación, que se conoce como el DMD multirresolución (o mrDMD), funciona como se indica en la Fig. 2.5: si se van a considerar n_L niveles, se aplica el DMD clásico $n_b \equiv 2^{n_L-1}$ veces al conjunto de datos recursivamente divididos por la mitad (es decir, de longitud $n_t/2^l$), con $l = 0, \dots, n_L - 1$. En cada nivel, sólo se extraen los r_l modos más lentos (según un umbral especificado por el usuario). El efecto de este proceso es expresar la Ec. (2.13) como:

$$\mathbf{v}(t_j) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \phi_i \mu_i^j \Delta t^s = \sum_{l=1}^{n_L} \sum_{k=1}^{n_b} \sum_{i=1}^{r_l} \gamma^{l,k} \alpha_i^{l,k} \phi_i^{l,k} (\mu_i^{l,k})^j \Delta t^s, \quad (2.31)$$

donde n_b y r_l son respectivamente el número de intervalos y el número de modos DMD retenidos en el nivel l , y $\gamma^{l,k}$ es una función que es igual a 1 si $t \in [t_k, t_{k+1}]$ y 0 en los demás casos.

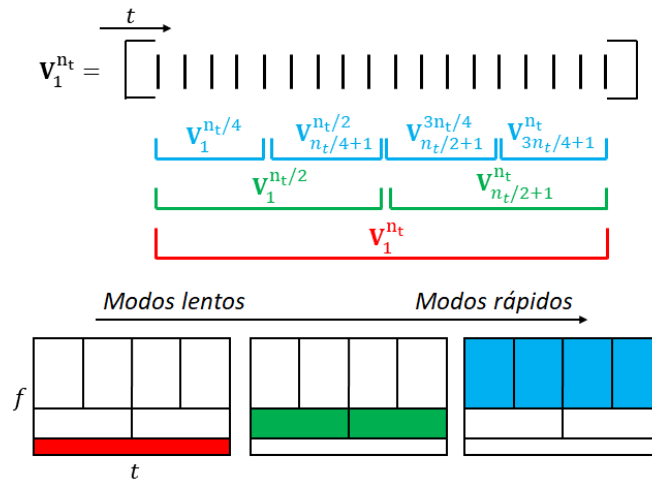


Figura 2.5: Descripción esquemática del método presentado en Kutz, Fu y Brunton, 2016 para estimar los modos mrDMD (esquema adaptado de Kutz, Fu y Brunton, 2016).

2.7 Análisis del operador resolvente

Consideremos ahora un sistema dinámico lineal (o linealizado) en tiempo continuo sujeto a un forzamiento, descrito por:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathcal{A}^c \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (2.32)$$

En la ecuación anterior, \mathcal{A}^c es la matriz Jacobiana del sistema, y el estado \mathbf{v} puede representar fluctuaciones alrededor de un estado estadísticamente estacionario; las no linealidades pueden incluirse en término forzante externo \mathbf{f} . Es bien sabido que la respuesta del sistema a excitaciones armónicas $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} e^{-i\omega t}$, invocando la linealidad del sistema (véase Boyce et al., 2017), es:

$$\hat{\mathbf{v}} = \underbrace{(-i\omega\mathbf{I} - \mathcal{A}^c)^{-1}}_{\mathbf{H}(\omega)} \hat{\mathbf{f}}. \quad (2.33)$$

Las propiedades espectrales del operador *resolvente* $\mathbf{H}(\omega)$ definido anteriormente controlan el comportamiento de \mathbf{v} , véase referencia McKeon y Sharma, 2010. Las técnicas de análisis del operador resolvente (RA) se tratan en la referencia Jovanović, 2021, incluyendo una interpretación de la Ec. (2.32) como una representación en el espacio de estados del sistema (es decir, análisis entrada–salida, véanse también referencias Jovanović, 2021; McKeon y Sharma, 2010). Además, en Towne et al., 2018 se discuten las conexiones entre el algoritmo SPOD y las técnicas del RA. Sin embargo, y en aras de la brevedad, en esta tesis omitimos el material que cubre la implementación intrusiva del RA (es decir, aquella en el que uno necesita tener acceso a las ecuaciones linealizadas discretizadas del problema que se está resolviendo, pues está más allá del alcance de esta tesis) con el fin de centrarse exclusivamente en la formulación basada en datos de la técnica de análisis del operador resolvente (RA) recientemente propuesta en Herrmann et al., 2021.

El análisis del operador resolvente basado en datos de la Ref. Herrmann et al., 2021 recurre al algoritmo sobre la implementación del DMD de la Ref. Tu et al., 2014. Más concretamente, si se considera una determinada matriz de pesos \mathbf{W} , primero la secuencia de datos transformada $\mathbf{U}_1^{n_t} = \mathbf{Q} \mathbf{V}_1^{n_t}$ es calculada; \mathbf{Q} es el factor de Cholesky de la matriz de pesos, $\mathbf{W} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$. Entonces, las subsecuencias parciales $\mathbf{X} \equiv \mathbf{U}_1^{n_t-1}$ and $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{U}_2^{n_t}$ están relacionadas a través de una variante de la Ec. (2.9) (ver también Li et al., 2022; E. Smith et al., 2022), *i.e.*:

$$\mathbf{Y} = \underbrace{\exp(\mathcal{A}^c \Delta t^s)}_{\mathcal{B}} \mathbf{X}. \quad (2.34)$$

Considerando entonces una matriz $\bar{\mathbf{B}}$, SVD-reducida de rango r' , se calculan sus valores propios $\Lambda_{\bar{\mathbf{B}}}$, vectores propios directos ($\Psi_{\bar{\mathbf{B}}}$) y adjuntos ($\Phi_{\bar{\mathbf{B}}}$), que satisfacen lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} \Psi_{\bar{\mathbf{B}}} &= \Psi_{\bar{\mathbf{B}}} \Lambda_{\bar{\mathbf{B}}} \\ \bar{\mathbf{B}}^\dagger \Phi_{\bar{\mathbf{B}}} &= \Phi_{\bar{\mathbf{B}}} \Lambda_{\bar{\mathbf{B}}}^H \end{aligned} \quad (2.35)$$

A partir de ellos, una matriz intermedia y su descomposición QR, $-\Psi_{\bar{\mathbf{B}}}^H \mathbf{W} \Psi_{\bar{\mathbf{B}}} \stackrel{QR}{=} \tilde{\mathbf{F}}^H \tilde{\mathbf{F}}$ conduce al operador resolvente aproximado:

$$\tilde{\mathbf{F}} (-\omega \mathbf{I} - \Lambda_{\bar{\mathbf{B}}}) \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \stackrel{SVD}{=} \mathbf{L}_{\bar{\mathbf{B}}} \mathbf{S}_{\bar{\mathbf{B}}} \mathbf{R}_{\bar{\mathbf{B}}}^H. \quad (2.36)$$

cuya SVD compleja permite obtener los modos de *forzamiento* como:

$$\Phi = \Psi_{\bar{B}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{R}_{\bar{B}}, \quad (2.37)$$

mientras que los modos *respuesta* vienen dados por:

$$\Psi = \Psi_{\bar{B}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{L}_{\bar{B}}. \quad (2.38)$$

2.8 Sinopsis

Para concluir este capítulo, en la Tabla 2.2 se resumen las técnicas consideradas en esta tesis y un breve resumen de sus características:

Método	Dominio de aplicación
POD	Determina aproximaciones óptimas de bajo rango basadas en modos ortogonales en el espacio. Cada modo está relacionado con varias frecuencias. Esta técnica es adecuada para limpiar el ruido y conserva los modos con interpretabilidad física. Buen rendimiento con un número reducido de <i>snapshots</i> .
DMD	Encuentra la mejor aproximación lineal al sistema dinámico no lineal. Las expansiones modales DMD pueden utilizarse para la predicción del estado futuro del sistema dinámico. Cada modo DMD está asociado a una única frecuencia. En sistemas lineales y periódicos, los modos DMD se aproximan a los modos propios de estabilidad lineal o a los modos de Fourier. Funciona mejor con casos donde la complejidad espectral es igual o menor que la complejidad espacial. Buen rendimiento con un número reducido de <i>snapshots</i> . En su formulación estándar requiere datos equidistantes en el tiempo.
FFT	Procesamiento de datos para convertir una señal en componentes espectrales individuales, lo que proporciona información de frecuencia relacionada con la señal. Es más eficiente con secuencias de datos de suficiente longitud temporal para converger a soluciones precisas y evitar las fugas espectrales (<i>spectral leakage</i>).
SPOD	Extrae los modos POD asociados a frecuencias preestablecidas. Podría considerarse un híbrido entre el POD y el DMD. Bueno para extraer estructuras coherentes en datos experimentales, turbulentos y estadísticamente estacionarios. Mejor rendimiento con secuencias de datos de suficiente longitud temporal para converger y evitar <i>spectral leakage</i> .
HODMD	Extrae los modos DMD y calcula expansiones modales DMD precisas. Adecuado para el análisis de sistemas dinámicos complejos y no lineales. Funciona bien con conjuntos de datos de flujos turbulentos, ruidosos y/o transitorios. Funciona en casos en los que el DMD encuentra dificultades (cuando la complejidad espectral es mayor que la espacial, muy común en flujos turbulentos o bases de datos experimentales). Buen rendimiento con un número reducido de <i>snapshots</i> . No es necesario que los datos sean equidistantes en el tiempo, aunque es aconsejable.
mPOD	Extrae modos POD asociados a grupos específicos de frecuencias. Captura la evolución de patrones coherentes en grandes conjuntos de datos. Se comporta muy bien con datos transitorios, ya que conserva la información en el tiempo.
mrDMD	Extrae los modos DMD y separa los sistemas complejos en una jerarquía de componentes de escala temporal multirresolución. Es eficaz con datos transitorios.
RA	Proporciona tanto los modos de forzamiento como los de respuesta de un sistema dinámico, en un sentido de entrada-salida. La respuesta representa los modos DMD. Se utiliza para el control y la optimización, así como para el análisis de sensibilidad estructural.

Tabla 2.2: Resumen de las técnicas consideradas en esta tesis.

Capítulo 3

Bases de Datos

En este capítulo se presentarán las bases de datos utilizadas como fuentes primarias de información, destacando su relevancia, contenido y criterios de selección. Una vez establecida la metodología a emplear, y con las bases de datos consideradas adecuadamente descritas estaremos en condiciones de garantizar la solidez y la validez de los resultados obtenidos, proporcionando un marco sólido para el análisis y la interpretación de los hallazgos de esta investigación.

3.1 Introducción

En esta tesis se pretende evaluar el rendimiento de varias estrategias de identificación de patrones y parámetros en datos de simulación CFD o experimentales mediante técnicas de descomposición modal basadas en datos y disponibles públicamente. En un intento de llevar a cabo una comparación lo más informativa posible, consideraremos cuatro conjuntos de datos no estacionarios y progresivamente más complejos. Los conjuntos de datos elegidos, que también están disponibles públicamente, son representativos de cuatro regímenes de flujo distintos: laminar, turbulento, transitorio y una combinación de turbulento-transitorio.

El primer caso de prueba considerado (que denominamos TC1) es el flujo incompresible alrededor de la sección media de un cilindro muy largo. La dinámica de un flujo a Reynolds relativamente bajo que pasa por un cilindro circular es bien conocida, y ha sido estudiada en detalle por Barkley y Henderson, [1996](#), entre otros. Se sabe que el proceso de bifurcación en la estela de un cilindro circular comienza en $Re_D \simeq 48$, donde una bifurcación de Hopf desencadena la transición del flujo desde un flujo simétrico y estacionario a un flujo no estacionario (Jackson, [1987](#)). En concreto, consideramos un flujo a $Re_D = U D/\nu = 100$, siendo U la velocidad de la corriente incidente, ν la viscosidad cinemática y D el diámetro del cilindro. En estas condiciones, el flujo es laminar y bidimensional. El flujo muestra un desprendimiento periódico de vórtices con un número de Strouhal principal $St = f D/U = 0,16$, siendo f la frecuencia en Hercios. En resumen, este conjunto de datos es un caso de prueba ideal para evaluar el rendimiento de los métodos aquí considerados. La base de datos empleada procede de Kutz, Brunton et al., [2016a](#). Las características de este conjunto de datos (tamaño por *snapshot* n_p , número de *snapshots* n_t , paso temporal Δt^s , Strouhal más representativo,

...) se resume en la Tabla 3.1. La figura 3.1 muestra dos *snapshots* representativos de la componente de velocidad en sentido de la corriente en la base de datos analizada. La figura también muestra la evolución temporal de las componentes de velocidad normal y en sentido de la corriente en un punto situado en la estela: el carácter periódico de la velocidad es evidente.

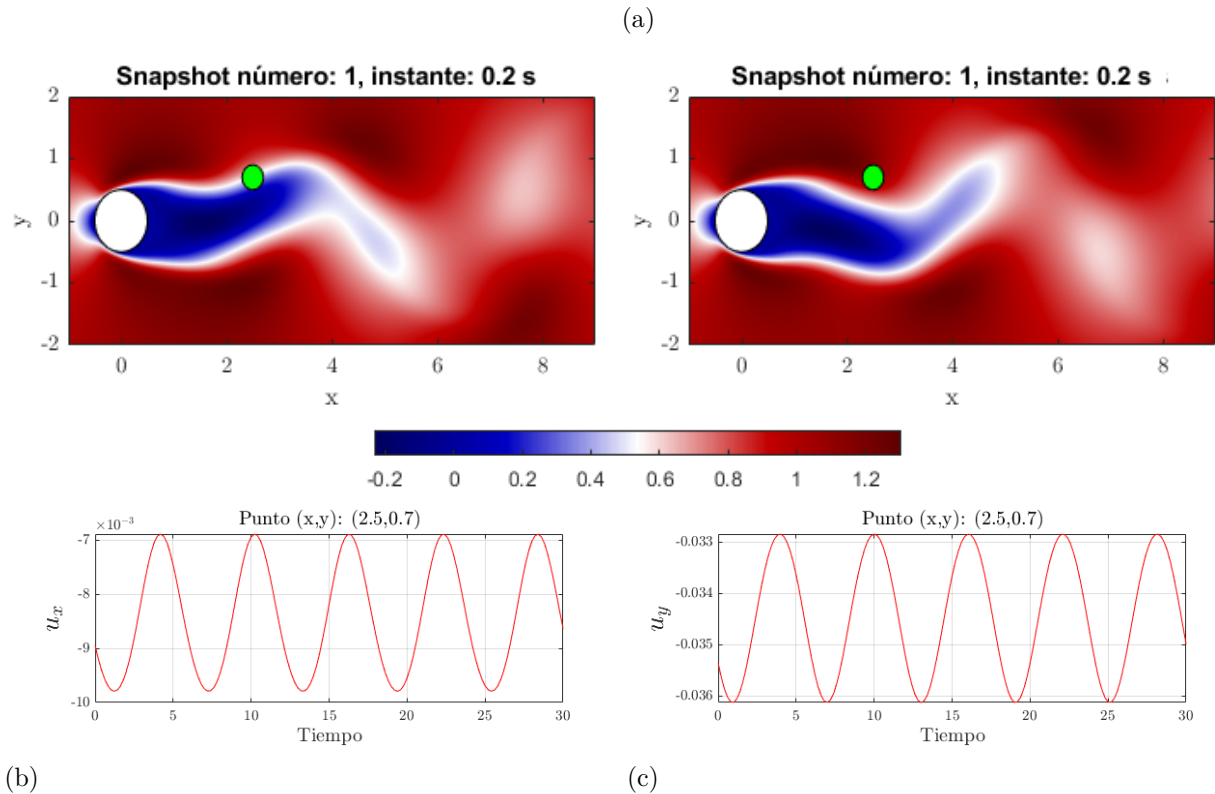


Figura 3.1: TC1: Flujo por un cilindro a $Re_D = 100$. Dos *snapshots* representativos del campo de velocidades en el sentido de la corriente (3.1(a)). Evolución temporal de las componentes de velocidad en sentido de la corriente (3.1(b)) y normal (3.1(c)) en un punto situado en la estela (2,5, 0,7).

El segundo caso de prueba (TC2), descrito originalmente en Towne et al., 2018, considera el campo de presión en un chorro turbulento. En contraste con el flujo turbulento limitado por pared (Le Clainche et al., 2020a), el espectro de frecuencias en flujos de chorro presenta frecuencias bien definidas, que son las que definen la dinámica del flujo. Estas frecuencias de alta amplitud están en muchos casos relacionadas con inestabilidades del flujo que se producen en la capa de cizallamiento del chorro, lo que concuerda con la propia naturaleza de este tipo de flujos. En concreto, el caso de prueba TC2 es un chorro turbulento a $Re_D = \rho_j U_j D / \mu_j \approx 10^6$ y número de Mach $M = U_j / c_j = 0,4$ con $T_j / T_\infty = 1$. Aquí U es la velocidad, c es la velocidad del sonido, T es la temperatura, ρ es la densidad, D es el diámetro a la salida de la tobera, μ es la viscosidad dinámica; los subíndices j y ∞ se refieren respectivamente a las condiciones medias en la salida de la tobera y en el campo lejano. En las condiciones de flujo actuales, el flujo se caracteriza por una frecuencia $St \simeq 0,6$ que controla la dinámica del flujo (más

detalles sobre esta caracterización del flujo en Towne et al., 2018). La alta complejidad de esta base de datos, asociada al carácter turbulento del flujo, se ilustra en la Fig. 3.2: las diferencias con Fig. 3.1 son evidentes, especialmente para el comportamiento de la señal de presión. Este conjunto de datos procede de simulación LES, por lo que contiene una amplia gama de escalas espaciotemporales que interactúan entre sí de forma compleja. Así pues, el conjunto de datos supone un reto para los métodos de análisis de datos considerados en esta tesis. Al igual que en el caso anterior, las características de este conjunto de datos se resumen en la Tabla 3.1.

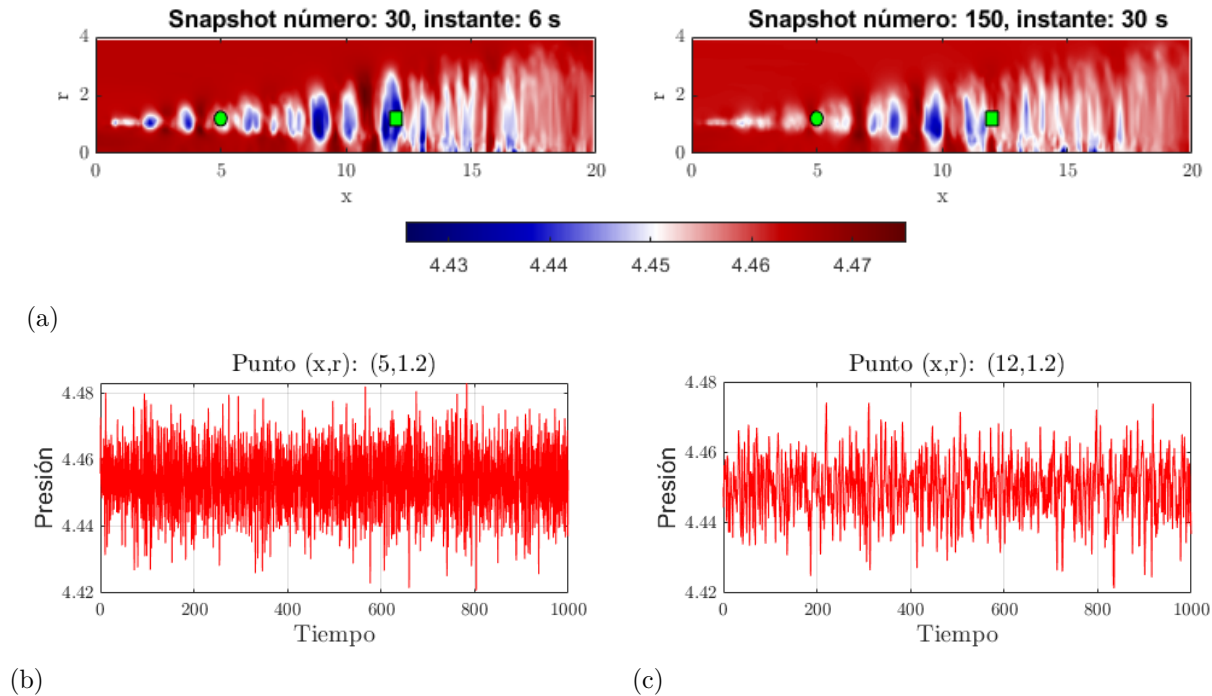


Figura 3.2: TC2: Flujo de chorro turbulento a $Re_D = 10^6$ y $M = 0,4$. Dos *snapshots* representativos del campo de presión (3.2(a)). Evolución temporal de la presión en dos puntos representativos del campo, situados en $(x,r) = (5,1,2)$ (3.2(b)) y $(x,r) = (12,1,2)$ (3.2(c)).

El tercer caso de prueba (TC3) considera otro flujo laminar e incompresible alrededor de un cilindro, pero esta vez a $Re_D = 280$, que es significativamente más complejo que el TC1. Como se ha establecido anteriormente, más allá de la primera bifurcación en $Re_D \simeq 48$, la estela después se hace inestable, pero el flujo sigue siendo bidimensional. Conforme aumenta Re_D , aparece una segunda bifurcación del flujo en $Re_D \simeq 190$, y el flujo bidimensional se convierte en un flujo tridimensional. Dependiendo de la envergadura del cilindro, definida como $L_z = 2\pi/\beta$ siendo β el número de onda a lo ancho, se encuentran diferencias en el valor del número de Reynolds crítico y en la dinámica del sistema (Blackburn et al., 2005). En esta tesis, consideramos $L_z = 6,99$, que corresponde a un flujo periódico, donde una inestabilidad tridimensional conduce los cambios de flujo impulsados por un modo con número de onda crítico $\beta \simeq 7,570$ (más detalles en Le Clainche et al., 2018a). Así, en la condición de flujo actual (*i.e.* $Re_D = 280$, $L_z = 6,99$), la solución estacionaria es periódica, con frecuencia adimensional principal en $St = 0,21$. En el régimen transitorio de la simulación, la frecuencia

adimensional de $St = 0,36$ también se identifica con una amplitud elevada pero una tasa de crecimiento negativa, como veremos más adelante. Esta última frecuencia está relacionada con la transición a un flujo cuasi-periódico tridimensional, que es una bifurcación de flujo que tiene lugar en $Re_D \simeq 380$, véase Blackburn et al., 2005. Obsérvese que esta segunda frecuencia desaparece cuando el análisis se realiza en el flujo saturado (es decir, cuando se alcanza el estado estacionario). El conjunto de datos TC3, disponible en Le Clainche y Vega, 2020, contiene datos de flujo tridimensional no estacionario (ver Fig. 3.3). La base de datos incluye *snapshots* recogidos desde el inicio de la simulación numérica, lo que permite evaluar el rendimiento de los métodos basados en datos también para soluciones transitorias, revelando así las capacidades y limitaciones de estas técnicas a la hora de modelizar la dinámica principal del flujo. En otras palabras, el TC3 sirve para ilustrar el rendimiento de los métodos como modelos de orden reducido. Si la dinámica se identifica correctamente en las soluciones transitorias entonces es posible reducir el coste computacional de las simulaciones numéricas. Esto, a su vez, podría ser adecuado para futuras aplicaciones de control de flujo: en primer lugar, los métodos identifican los modos que impulsan la dinámica principal del flujo. Una vez identificados correctamente estos modos (por ejemplo, sus frecuencias y su estructura espacial), su conocimiento puede combinarse con otras estrategias para el control. Por ejemplo, la sensibilidad estructural no lineal (Corrochano y Le Clainche, 2022) es un novedoso método basado en el HODMD que identifica las zonas más sensibles del flujo que deben modificarse para controlar la presencia de los modos DMD. Como antes, las características de la base de datos se resumen en la Tabla 3.1. Más detalles sobre el TC3 en M. A. Mendez et al., 2020.

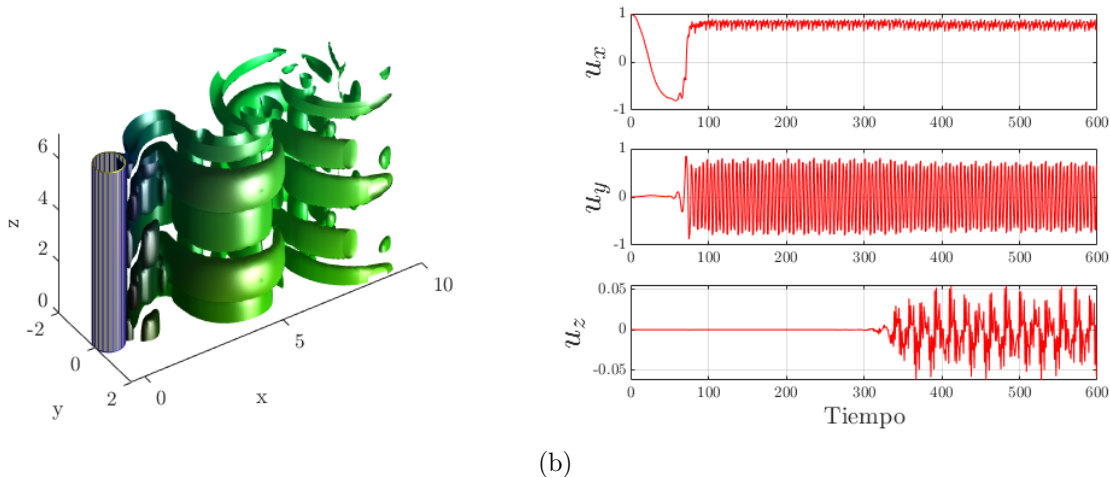


Figura 3.3: TC3: Visualización tridimensional de la estela de un cilindro circular a $Re_D = 280$. Velocidad (u_z) en un *snapshot* representativo del régimen transitorio (360 segundos) (3.3(a)). Evolución temporal de las componentes de la velocidad (3.3(b)) en un punto del campo (5, 0, 0,83).

El cuarto caso de prueba (TC4) se obtiene a partir de experimentos realizados en un túnel de viento de baja velocidad del Instituto von Karman (M. A. Mendez et al., 2020). Se considera de nuevo el flujo alrededor de un cilindro circular de $D = 5mm$, ver Fig. 3.4(a). En este caso, el flujo es turbulento, y se investiga la evolución entre dos condiciones estacionarias: la

velocidad del flujo entrante se reduce de $U = 12,1 \pm 3\%$ m/s a $U = 7,9 \pm 3\%$ m/s (ver Fig. 3.4(b)), lo que se traduce en un cambio del número de Reynolds de $Re_D = 4000$ a $Re_D = 2600$; el desprendimiento de vórtices varía de $f = 450Hz$ a $f = 303Hz$, lo que corresponde en ambos regímenes estacionarios a un número de Strouhal de aproximadamente $St = fD/U \approx 0,19$. El conjunto de datos consta de un total de $n_t = 13200$ *snapshots*: la primera condición estacionaria se cubre en las primeras 4000 *snapshots*. Los siguientes 3000 *snapshots* describen el régimen transitorio del flujo, mientras que el segundo (y último) estado estacionario queda cubierto por el resto de los *snapshots*. Las características del conjunto de datos se resumen en la Tabla 3.1. Más detalles sobre el experimento se encuentra en M. A. Mendez et al., 2020.

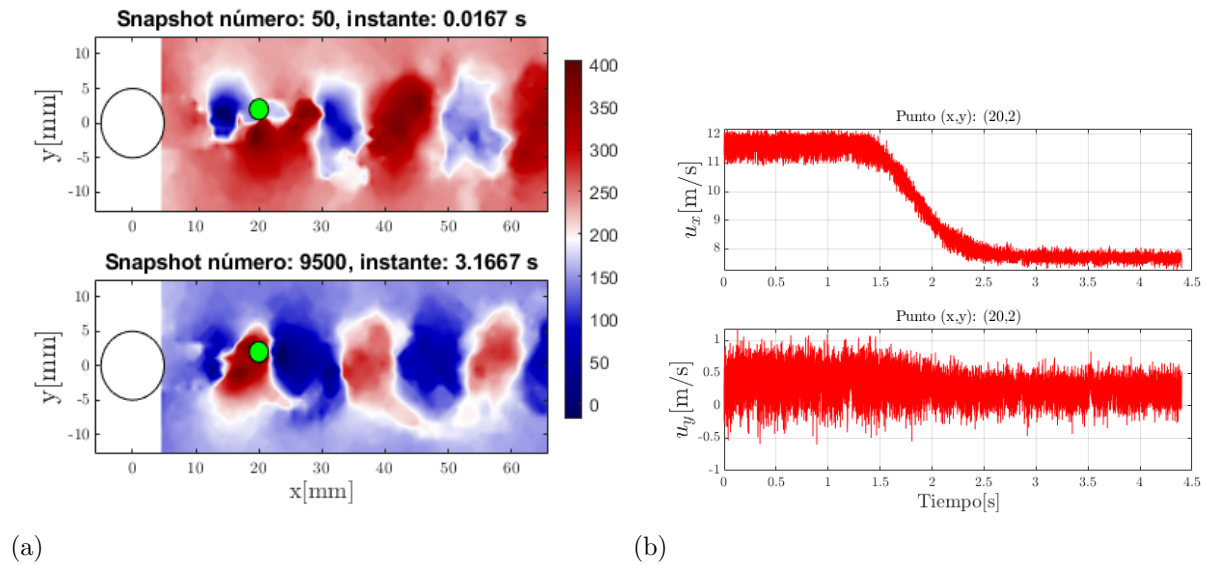


Figura 3.4: TC4: Estela transitoria-turbulenta alrededor de un cilindro. Velocidad normal calculada en *snapshots* representativos del primer estado estacionario (3.4(a)). Evolución temporal de las componentes de la velocidad (3.4(b)) en un punto del campo (20, 2).

Tabla 3.1: Resumen de las principales características de los cuatro casos de estudio. n_x , n_y y n_z son el número de puntos de la malla. n_p es el número de puntos de la malla \times número de variables, n_t es el número de *snapshots* y Δt^s es el intervalo temporal de muestreo.

Caso de estudio	$[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$	$n_x \times n_y \times n_z$	Variables	n_p	n_t	Δt^s	St Objetivo
TC1 (laminar, 2D)	$[-1, 9] \times [0, 2]$	449×199	(u_x, u_y)	$1,78 \times 10^5$	151	0,2	0,16
TC2 (turbulento, axisimétrico)	$[0, 20] \times [0, 4]$	39×175	p	$6,83 \times 10^3$	5000	0,2	0,6
TC3 (transitorio, 3D)	$[0, 10] \times [-2, 2] \times [0, 6, 99]$	$100 \times 40 \times 64$	(u_x, u_y, u_z)	$7,68 \times 10^5$	599	1	0,21 (0,36)
TC4 (transitorio, turbulento)	$[0, 60] \times [-12, 12]$	71×30	(u_x, u_y)	$4,26 \times 10^3$	13200	3000^{-1}	0,19

Capítulo 4

Resultados

Este capítulo presenta los resultados clave obtenidos en nuestra investigación exhaustiva sobre el análisis de sistemas dinámicos en ingeniería aeroespacial. En la Sec. 4.1, se desglosan los diferentes modos y métodos utilizados en el estudio, destacando su relevancia y aplicabilidad en el contexto aeroespacial, junto con el estudio de la convergencia de la reconstrucción. A continuación, en la Sec. 4.2, se investiga cómo los diferentes métodos reaccionan ante secuencias de datos recortadas temporalmente. El objetivo de este experimento es conocer cómo los diferentes métodos de análisis reaccionan ante un empobrecimiento de los datos disponibles y si alguno de entre ellos es capaz todavía de identificar información relevante a partir de estas secuencias de datos empobrecidas. Finalmente, la Sec. 4.3 aborda técnicas y herramientas utilizadas para manejar y procesar grandes conjuntos de datos, enfatizando la eficiencia y la capacidad de adaptación de los algoritmos.

4.1 Estudio Comparativo

En el Capítulo 2 se han descrito, esperemos que con suficiente detalle, los diferentes métodos considerados. En esta sección analizamos los resultados obtenidos al aplicar los distintos métodos de descomposición modal basados en datos a los conjuntos de datos TC1–TC4. Seguimos la estructura expuesta en el Capítulo 2, y comenzamos con los resultados obtenidos con los métodos clásicos (POD, DMD y FFT), y continuamos con los métodos mejorados que explotan la redundancia de datos (SPOD y HODMD). Seguimos con los métodos multirresolución (mPOD y mrDMD), y terminamos con el análisis de la resolvente basado en datos (RA).

A continuación, se presentan los resultados de la evaluación mencionada, sobre los casos de estudio. Pero antes de adentrarnos en los detalles, es esencial tener en cuenta que cada técnica considerada posee un dominio de aplicación en el cual es más óptima. Este dominio está determinado tanto por las hipótesis que se hicieron al derivar cada técnica como por las restricciones que surgen de esas derivaciones. Esto implica que algunas de las pruebas que se presentan pueden ser de alguna manera *injustas*. Un ejemplo de esta situación podría ser la aplicación de la técnica SPOD al caso transitorio TC3, ya que SPOD fue concebida principalmente para manejar datos estadísticamente estacionarios (Towne et al., 2018).

Todos los cálculos se han realizado en un ordenador de sobremesa equipado con un procesador CPU Intel(R) Core(TM) i5-3570K de 4 núcleos a 3,40 GHz, una memoria cache de 6144 kB y 8,0 GB de RAM.

4.1.1 Detección de características mediante métodos clásicos: POD, DMD y FFT

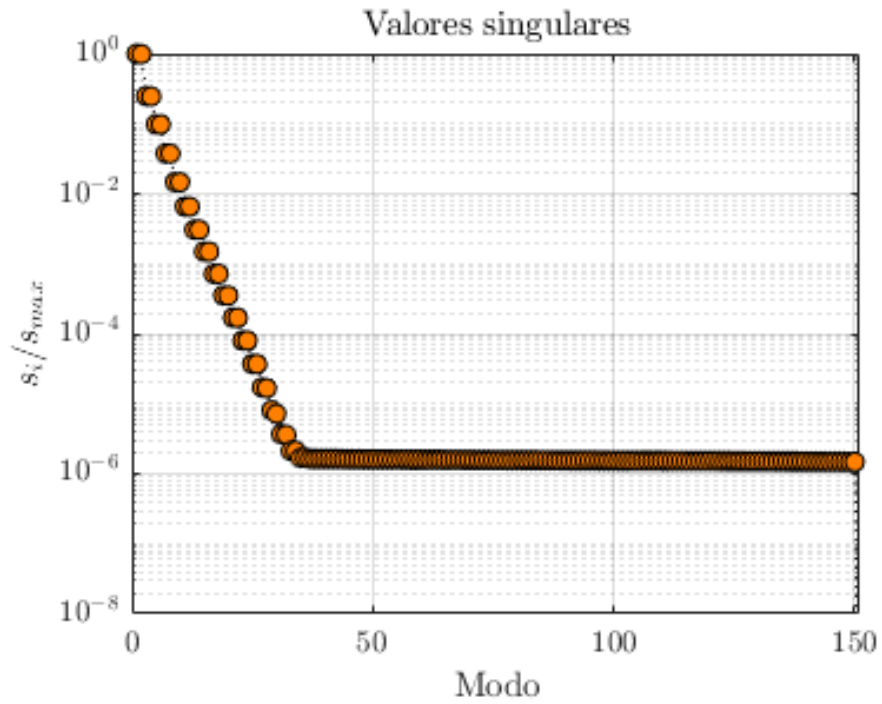
En esta sección se describen los resultados obtenidos mediante la aplicación de los métodos consolidados, POD, DMD y FFT a los conjuntos de datos TC1-TC4.

La Figura 4.1(a) muestra los valores singulares obtenidos cuando se aplica el POD del caso TC1, la estela bidimensional alrededor de un cilindro. Obsérvese cómo, los valores singulares se agrupan en pares, lo que es un reflejo del fuerte carácter periódico del flujo (Oberleithner et al., 2011). La Fig. 4.1(b) muestra las amplitudes de los modos DMD en función de la frecuencia adimensional $St = fD/U^1$, lo que suele denominarse el *espectro* del DMD. El espectro muestra que el modo más relevante aparece a la frecuencia principal $St \approx 0,16$; también se observan amplitudes elevadas en múltiplos enteros de la frecuencia principal: éstos son armónicos del modo principal. Nótese que en el régimen estacionario, en el DMD, las tasas de crecimiento $\text{Re}(\lambda)$, deberían ser cero. En flujos con ruido (o simulaciones numéricas que aún no están saturadas en el tiempo), las tasas de crecimiento nunca son exactamente cero, ya que el valor que toman es del mismo orden de magnitud que el nivel de ruido subyacente. Esto, a su vez, proporciona una estimación del error cometido en la determinación de la frecuencia (véanse más detalles en Duke et al., 2012; Le Clainche y Vega, 2017a; Le Clainche et al., 2017).

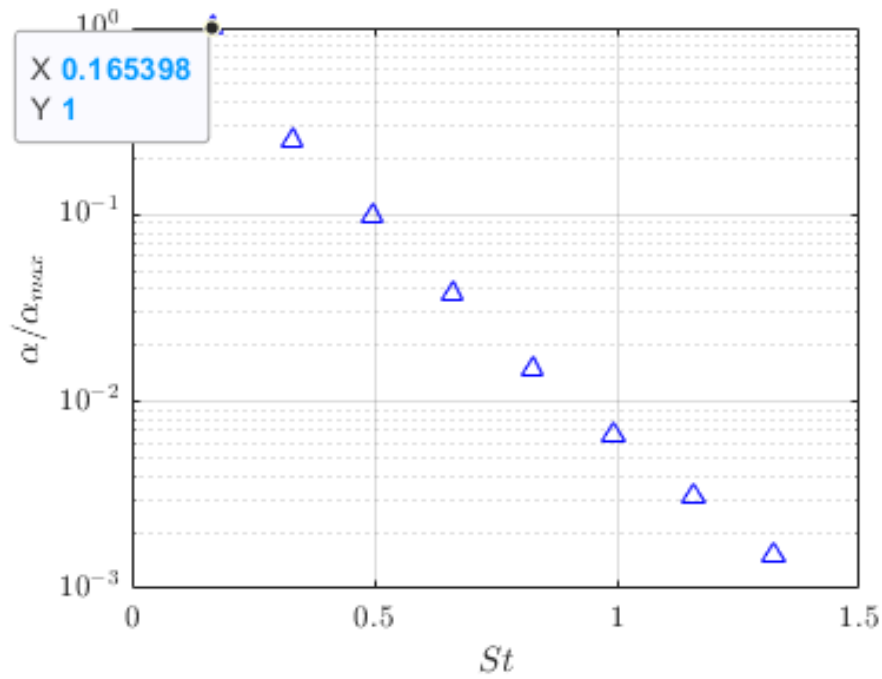
La Fig. 4.2 muestra el flujo medio y el soporte espacial de los modos POD y DMD más relevantes. Obsérvese cómo el flujo medio y el modo DMD en $St = 0$ son similares, lo que sugiere que el modo DMD con $St = 0$ representa el flujo medio, véase Le Clainche et al., 2018a. En cuanto a los modos restantes, observe cómo estos modos son cualitativamente similares. Recordemos que (véase Capítulo 2) los modos POD son reales, mientras que los modos DMD aparecen en pares complejos conjugados; nótese también cómo las partes real e imaginaria de los modos DMD están desfasadas $\pi/2$ radianes, lo que revela el carácter viajero de los modos en el flujo de estela.

Sin embargo, teniendo en cuenta que el TC1 es un conjunto de datos que describe un movimiento bidimensional, laminar, coherente y bien organizado (la estela), generado por un *solver* numérico de alta precisión, no debería sorprender que los análisis POD y DMD proporcionen resultados comparables. Por ejemplo, la Fig. 4.3 muestra el contenido en frecuencia de los tres primeros modos POD dominantes (calculados mediante el FFT sobre el correspondiente modo POD temporal $\mathbf{r}_{0,j}$, Ec. (2.3)). Este comportamiento se observa típicamente cuando se aplican tanto el DMD como el POD para analizar datos transitorios generados por dinámicas sencillas. En esos casos, POD, DMD, pero también los modos de estabilidad global lineal son los mismos (véase detalles y más resultados en Gómez et al.,

¹ $St = fD/U$, siendo f la frecuencia en Hertz, D el diámetro y U la velocidad de la corriente incidente.



(a)



(b)

Figura 4.1: TC1. Valores singulares del análisis POD (4.1(a)). Espectro del DMD (4.1(b)) comparando frecuencias adimensionales con las amplitudes del DMD, usando $\varepsilon_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ en Eq. (2.7).

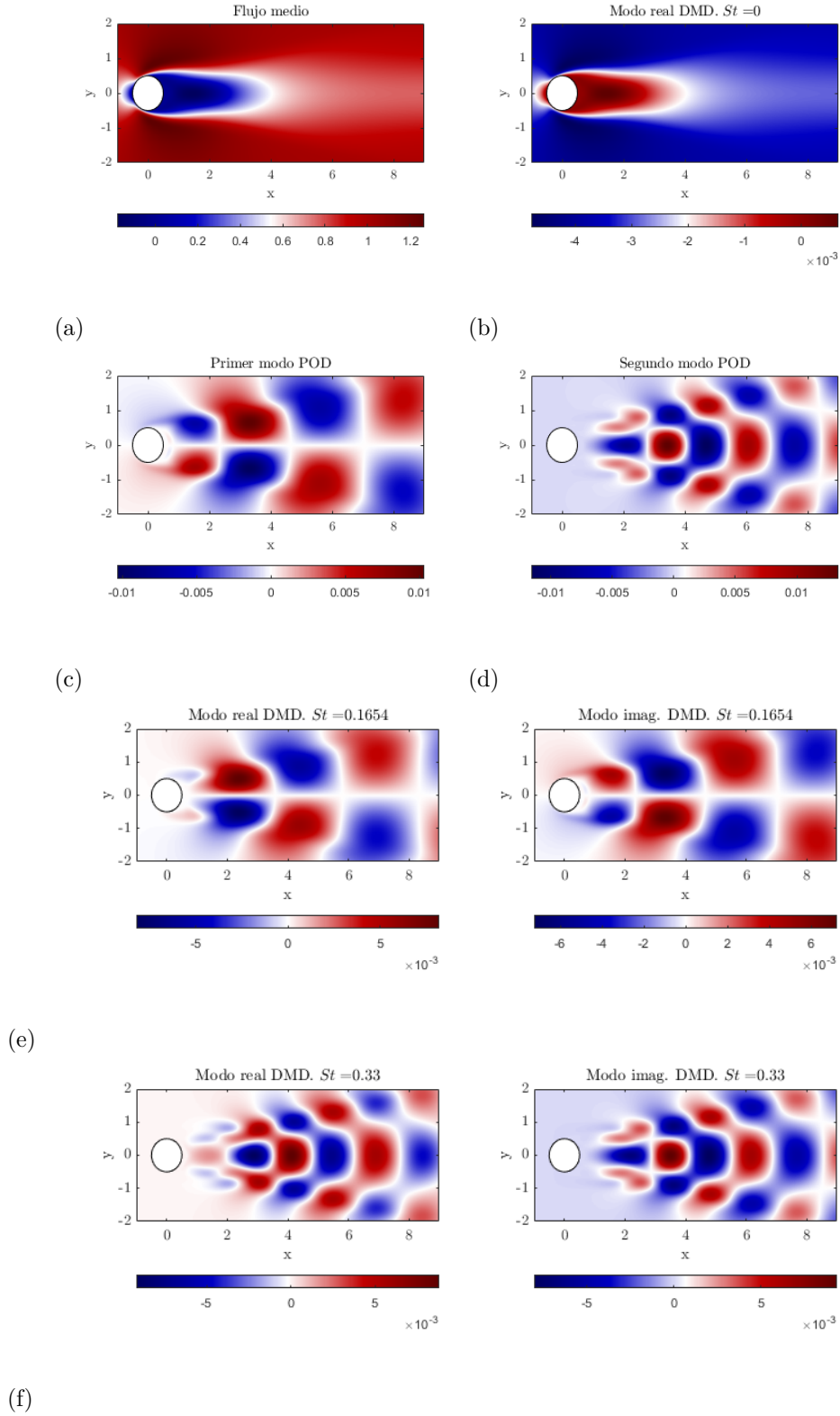


Figura 4.2: TC1: flujo medio (4.2(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.2(b)). Modos dominantes POD (4.2(c), 4.2(d)) y DMD (4.2(e), 4.2(f)); (frecuencias modales DMD: $St = 0,1654, 0,33$).

2012).

En aplicaciones fluidodinámicas, la reducción de la dimensionalidad posibilitada por el SVD es útil a dos niveles: por un lado, dado que la mayoría de los conjuntos de datos están densamente discretizados en el espacio y muestreados “a alta frecuencia” en el tiempo (es decir, tienen el potencial de ocupar mucha memoria); el SVD permite reducir la memoria necesaria para realizar el análisis DMD. Por otra parte, las propiedades del SVD se vuelven útiles para filtrar el ruido y las redundancias espaciales, *i.e.* para *limpiar* los datos. En cada paso del SVD (hay solo un paso SVD para el DMD clásico, y dos para el HODMD, Capítulo 2), el rango de la matriz cronos escalada $\mathcal{C}_1^{n_t-1}$ (Ec. (2.26)) puede controlarse directamente (estableciendo r') o indirectamente (mediante las tolerancias ε_1 y ε_2 (Sección 2.5.2)). Por lo general, tolerancias mayores (es decir, más modos SVD retenidos) ayudan al método a identificar correctamente la dinámica principal del sistema. Sin embargo, y de forma un tanto paradójica, los conjuntos de datos de flujos complejos (*i.e.*, multiescala, turbulencia, ruido, etc.) exigen reducciones de dimensionalidad lo más intensas posible. Por lo tanto, el usuario debe realizar esta reducción cuidadosamente, ya que valores de tolerancia inadecuados pueden llevar a comprometer el análisis. Este comportamiento está relacionado con las complejidades espectral y espacial introducidas en las Secciones 2.3 y 2.5.2. Del mismo modo, el espectro de frecuencias del DMD también es sensible a la dimensión $n_p \times n_v$ de los datos que componen el dominio espacial. Por ejemplo, en mediciones experimentales, si el número de puntos espaciales (complejidad espacial) es menor que la complejidad espectral (número de frecuencias retenidas en la ecuación de expansión DMD Ec. (2.31)), entonces el DMD no funciona. En tales casos, otros métodos, como el POD, el FFT, o los enfoques más robustos, como el SPOD y el HODMD, se presentan como alternativas más adecuadas.

A continuación, se presentan los resultados del análisis FFT. Téngase en cuenta que para el algoritmo FFT, junto con los espectros, se trazan las estructuras espaciales asociadas a ciertas frecuencias, y de acuerdo con la terminología utilizada en este trabajo, llamamos a estas estructuras *modos*. La Fig. 4.4(a) muestra el espectro de Fourier calculado para el TC1, utilizando la Ec. (2.18). Obsérvese cómo para este flujo simple y fuertemente periódico, el FFT identifica las mismas frecuencias que el POD y el DMD. La Fig. 4.4(b) muestra el modo FFT en $St \approx 0,16$. Esta información revela que la mayoría de las zonas *energéticas* se encuentran en la estela del cilindro. Según la componente horizontal, la información relevante se encuentra simétricamente por encima y por debajo de la línea $y = 0$. Obsérvese cómo la información espacial proporcionada por el método FFT no se interpreta tan fácilmente como la proporcionada por los métodos POD y DMD. Sin embargo, esto se podría anticipar, si se recuerda que el método FFT opera sobre la matriz de correlación temporal (véanse las Secciones 2.4 y 2.6), lo que significa que la información espacial se pierde hasta cierto punto.

Como hemos observado hasta ahora, los métodos clásicos de descomposición modal basados en datos, es decir, POD, DMD y FFT proporcionan resultados comparables si se aplican a bases de datos que describen dinámicas sencillas y fuertemente coherentes. Ahora investigamos cómo se comportan estas técnicas cuando se enfrentan a flujos más complejos, p. ej., el flujo de un chorro totalmente turbulento (TC2), el flujo tridimensional transitorio alrededor de un cilindro (TC3) y el caso de estudio de la estela transitoria-turbulenta alrededor de cilindro (TC4). En

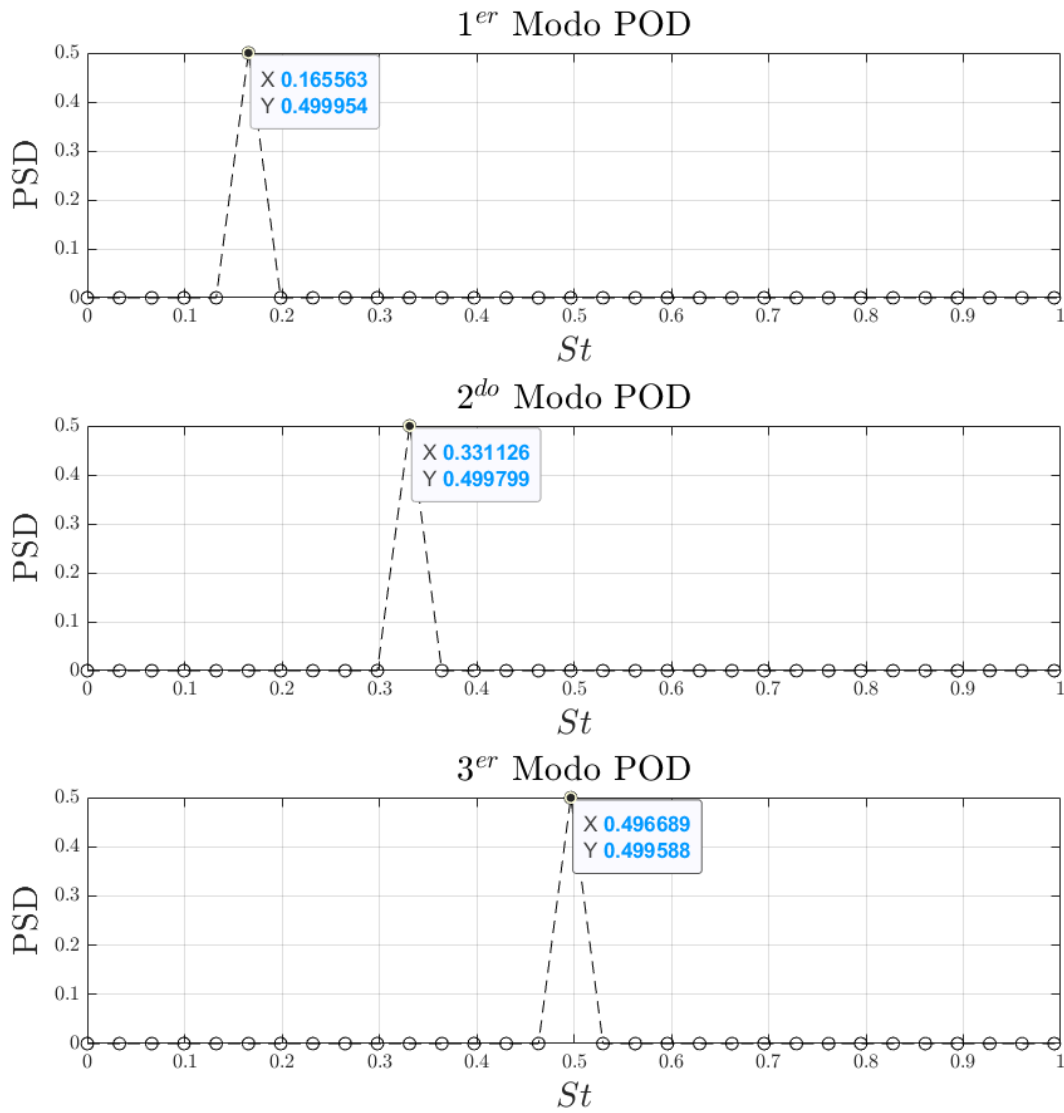
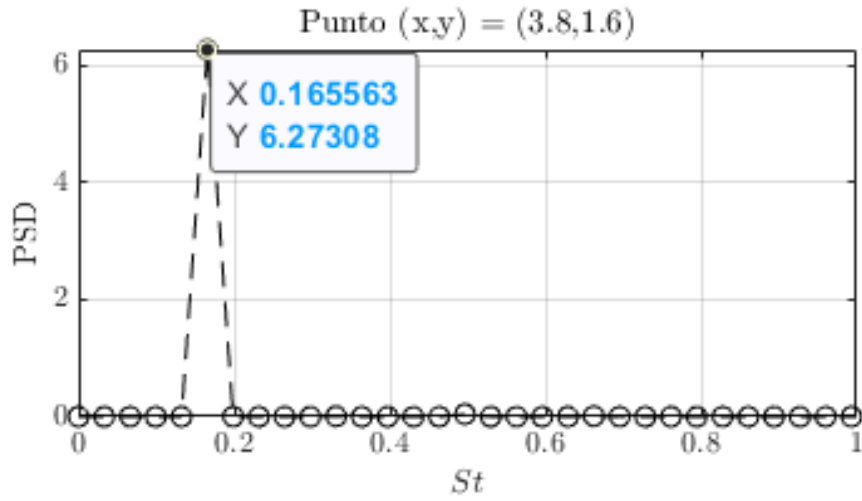
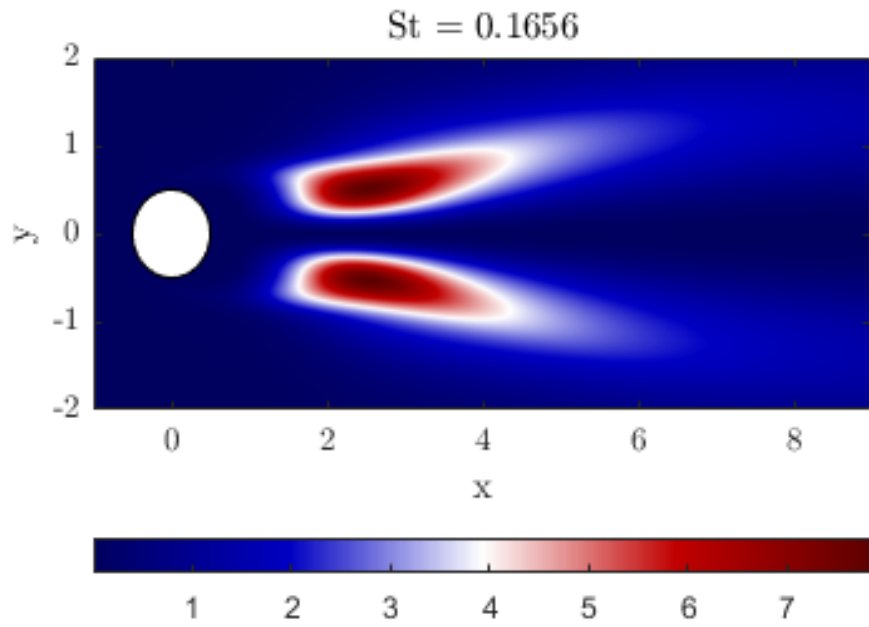


Figura 4.3: TC1: contenido de frecuencias correspondientes a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz cronos \mathbf{R}_0 , Ec. (2.3). De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.



(a)



(b)

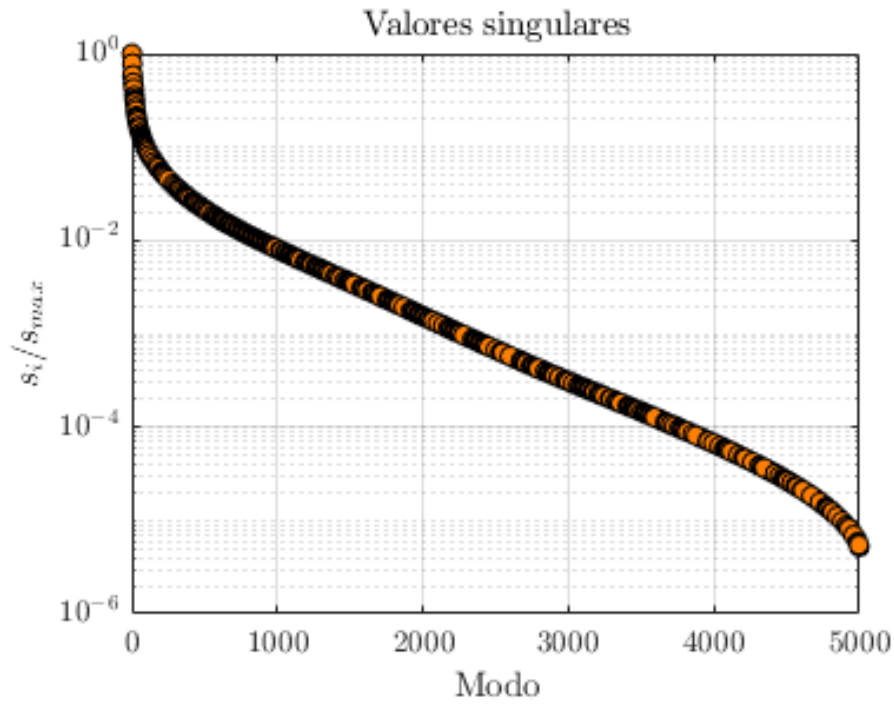
Figura 4.4: TC1: espectro de frecuencias, calculado según Ec. (2.18) (4.4(a)) y modo FFT a $St \approx 0,16$ (4.4(b)).

TC3, consideramos dos rangos temporales diferenciados, que denominamos respectivamente *régimen transitorio* ($t \in [300, 420]$) y *régimen saturado* ($t \in [450, 570]$), ver Fig. 3.3(b). En el TC4 consideramos también dos rangos temporales: el primer régimen estacionario ($t \in [0, 1,34]$ segundos) y el conjunto completo de datos ($t \in [0, 4,4]$ segundos).

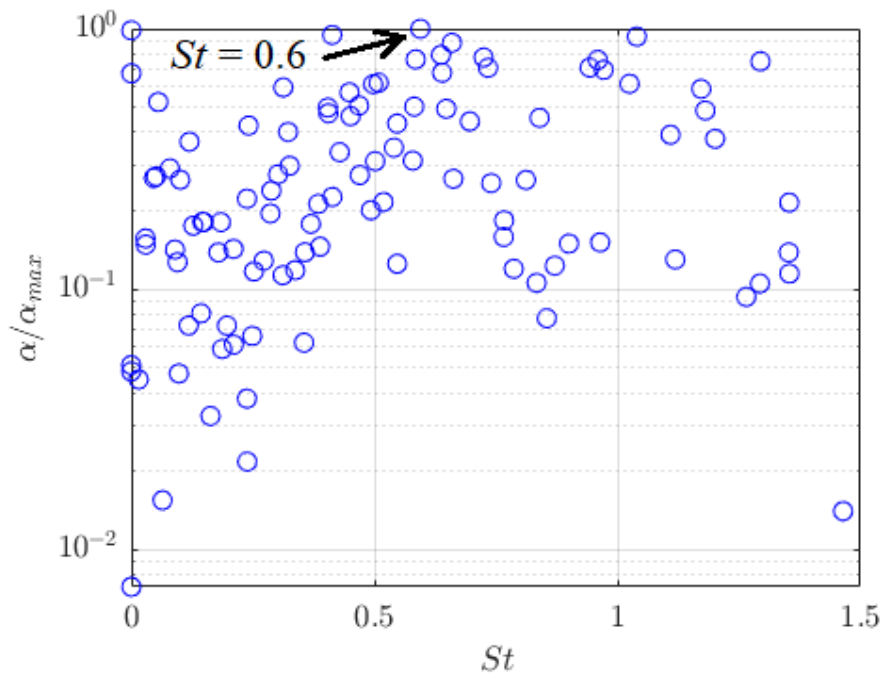
En cuanto al TC2, la Figura 4.5(a) presenta los valores singulares obtenidos con el POD. Obsérvese la diferencia radical en la tasa de decaimiento de los valores singulares para el TC2 con respecto al más simple TC1: mientras que para el TC1 (Fig. 4.1(a)) los s_i (Ec. (2.3)) decaen relativamente rápido y se estabilizan alrededor de 10^{-6} , los s_i para el TC2 decaen también muy rápido al principio, y ligeramente más lento después; sin embargo, no hay un índice i más allá del cual los valores singulares se vuelvan insignificantes, o incluso se estabilicen. Este comportamiento es coherente con la naturaleza multiescala de la turbulencia: en un flujo turbulento, todas las escalas albergan cierta *energía*. La Figura 4.5(b) muestra el espectro DMD: obsérvese cómo los modos relevantes parecen ser el componente estacionario ($St \approx 0$), el componente situado a $St \approx 0,6$ y $St \approx 0,43$, lo que se considera compatible con la bibliografía (Schmidt y Colonius, 2020). Sin embargo, varios modos DMD presentan amplitudes a niveles relativamente altos, algunos de ellos comparables al modo a $St \approx 0,6$. Y en este caso es mucho más difícil establecer un criterio claro basado en la amplitud para considerar o no un determinado modo DMD. En este caso turbulento, el panorama general no es tan claro como en el caso del TC1.

La Fig. 4.6 muestra el flujo medio y los modos POD y DMD más relevantes. De nuevo observamos la coincidencia en la forma del flujo medio y el modo DMD en $St = 0$. Tanto los modos POD reales como los DMD complejos presentan características que recuerdan a las estructuras coherentes (Towne et al., 2018).

La Fig. 4.7 presenta el contenido en frecuencia de los tres primeros modos POD dominantes. El contenido espectral de los modos POD no es tan limpio como el del TC1; más bien, para cada modo POD, todas las frecuencias están *activas*, lo que es de esperar en un flujo complejo y turbulento. Cabe mencionar que las frecuencias dominantes obtenidas mediante el espectro de la Fig. 4.7 coinciden con las frecuencias dominantes del DMD, Fig. 4.5(b). Por otra parte, el DMD está concebido de modo que los modos DMD se asocian con frecuencias distintas, individuales. Sin embargo, esto es de poca ayuda en este caso, recuerde el espectro DMD, de la Fig. 4.5. La situación no es mejor para el análisis FFT, ver la Fig. 4.8. En conclusión, con los conjuntos de datos de cierta complejidad, se hacen necesarias herramientas de análisis de datos con un mejor rendimiento.



(a)



(b)

Figura 4.5: TC2. Valores singulares del análisis POD (4.5(a)). Espectro del DMD (4.5(b)) comparando frecuencias adimensionales con las amplitudes DMD, usando $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-1}$ en Ec. (2.7).

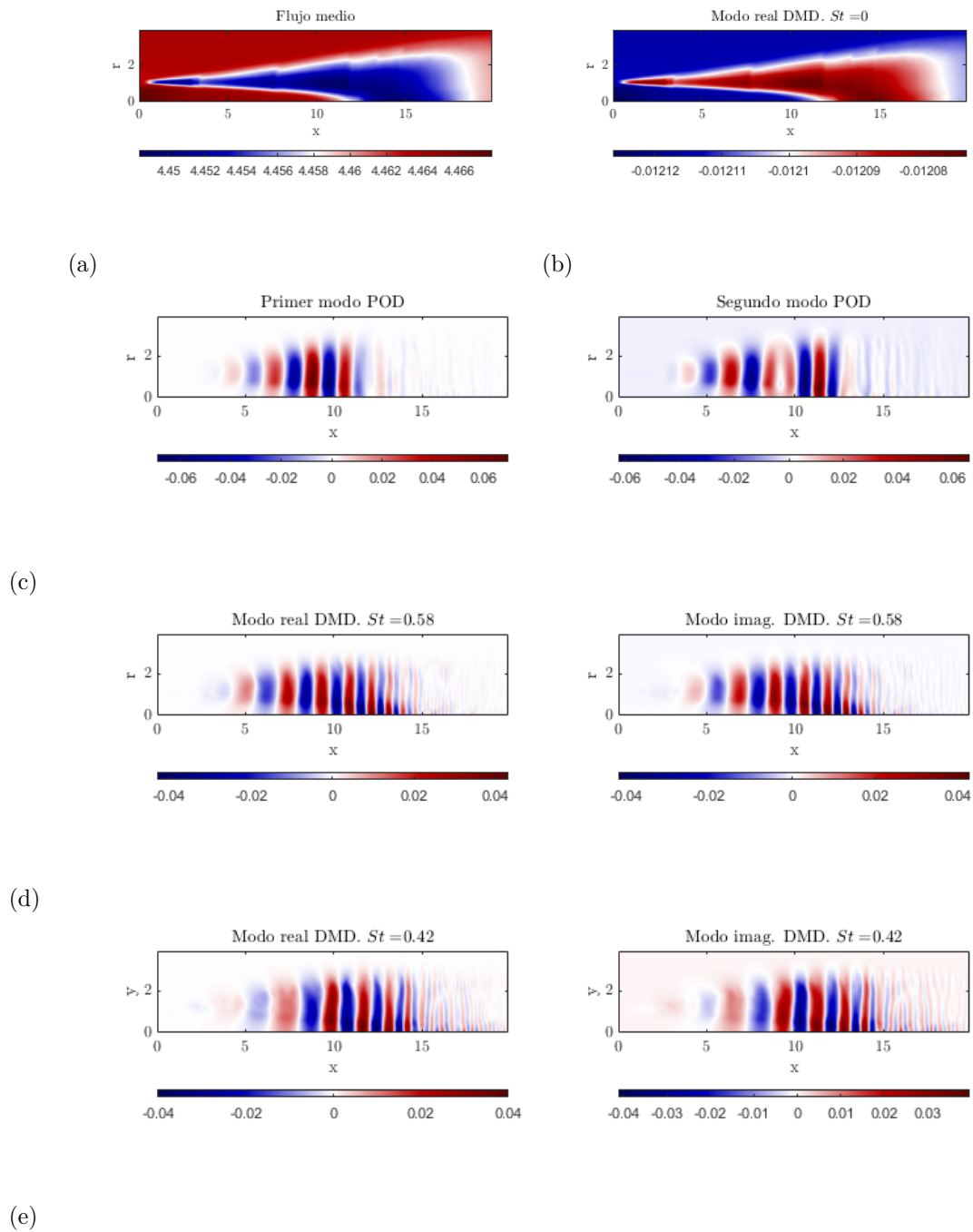


Figura 4.6: TC2: flujo medio (4.6(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.6(b)). Modos dominantes POD (4.6(c)) y DMD (4.6(d), 4.6(e)); (frecuencias modales DMD: $St = 0,58, 0,42$).

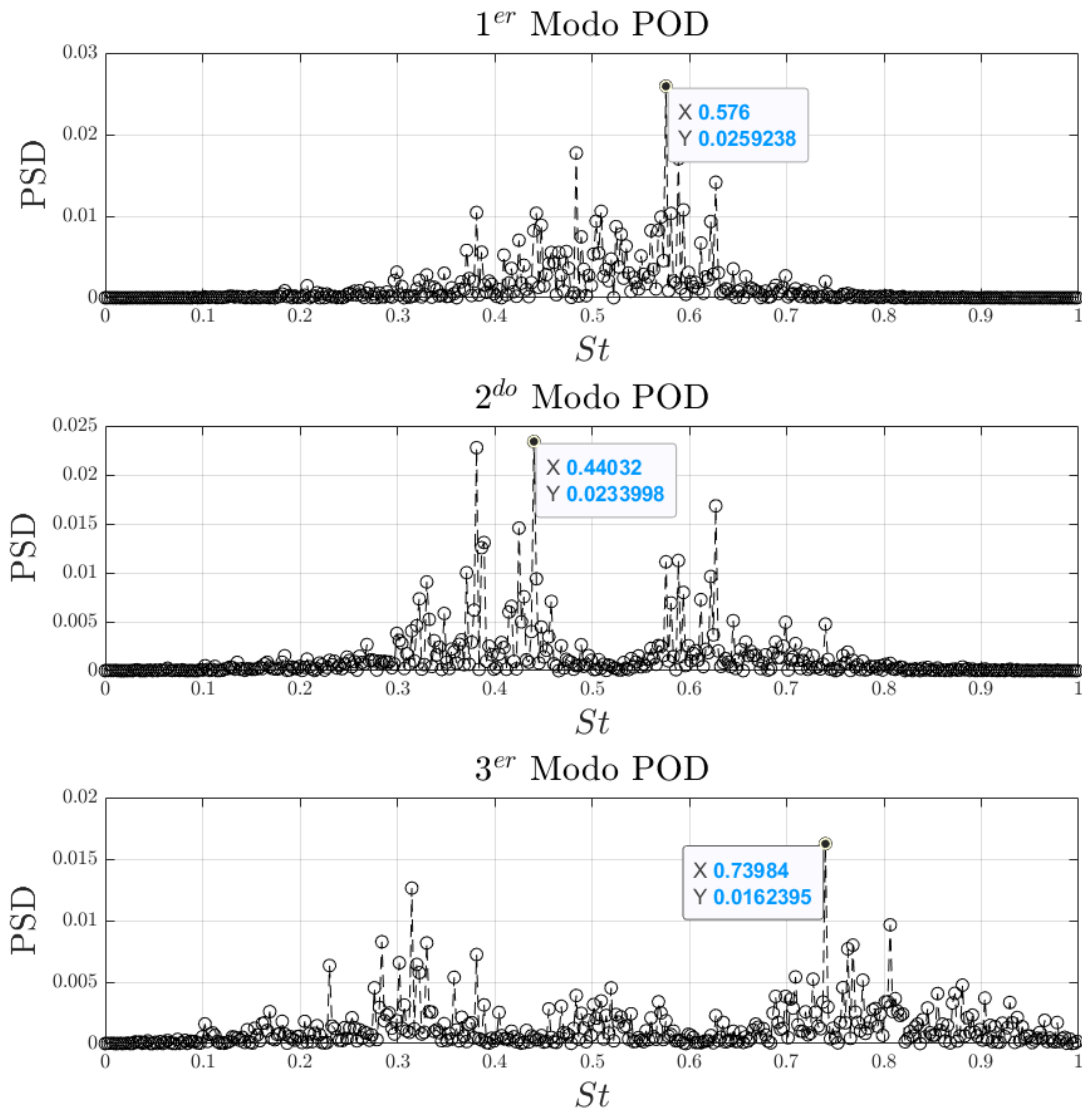
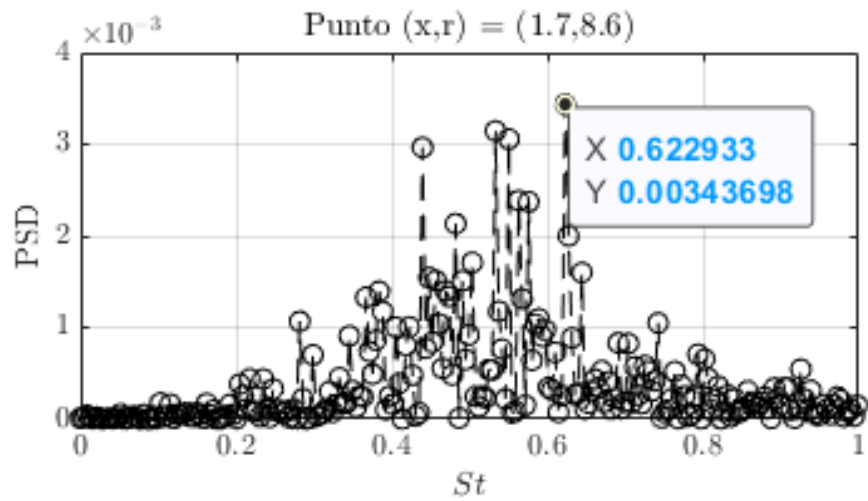
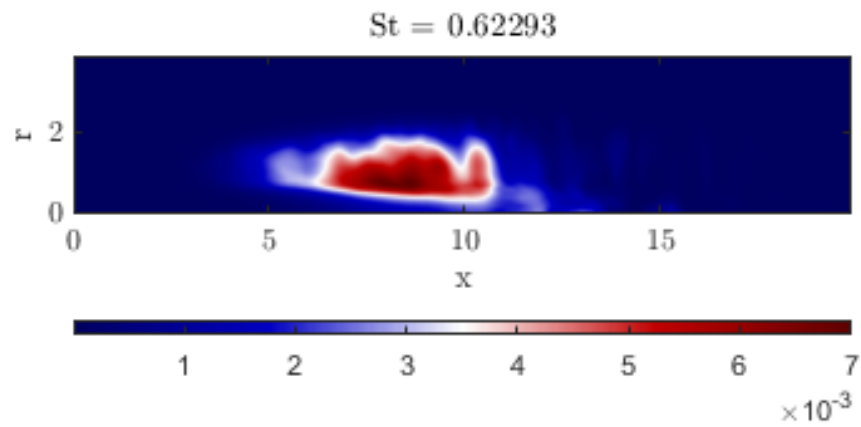


Figura 4.7: TC2: contenido de frecuencias correspondientes a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz de cronos \mathbf{R}_0 . De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.



(a)

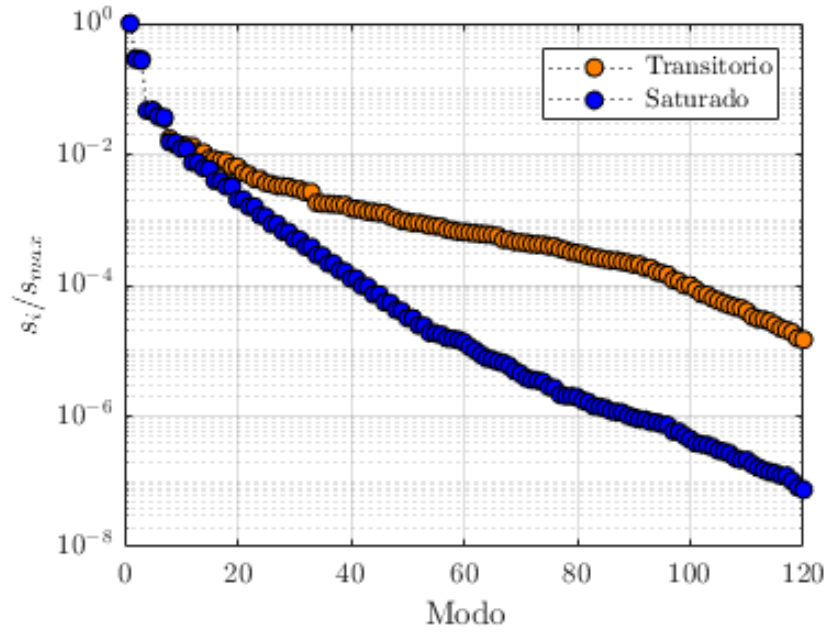


(b)

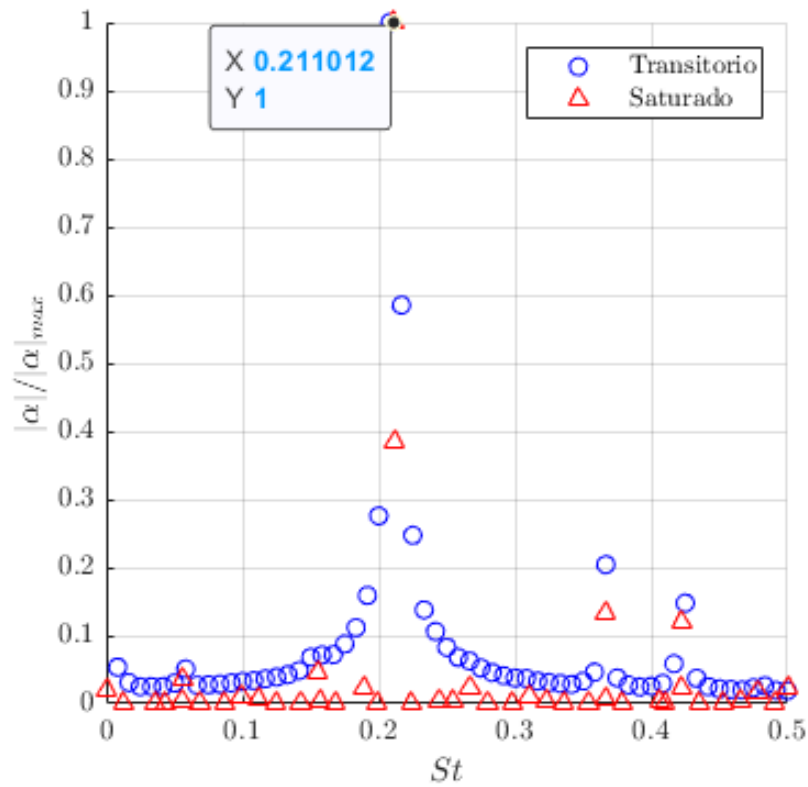
Figura 4.8: TC2: Espectro de frecuencias, calculado utilizando Ec. (2.18) (4.8(a)) y el modo FFT a un $St \approx 0,6$ (4.8(b)).

En cuanto al TC3, la Figura 4.9(a) presenta los valores singulares obtenidos por el POD aplicado a la componente z de la velocidad. Las distribuciones de valores singulares son más parecidas a la del TC1 que a la del TC2; de hecho, los valores singulares podrían agruparse de nuevo por pares. Obsérvese cómo, más allá del modo número 10, la *energía* de los modos POD es comparativamente mayor en el régimen transitorio, ya que hay varias estructuras de flujo que aún no se han atenuado. El espectro DMD (Fig. 4.9(b)) también es mucho más sencillo, y los modos en $St \approx 0,21$ y $St \approx 0,36$ se identifican fácilmente. Esta aparente simplicidad es de nuevo un reflejo del carácter laminar del flujo. El hecho de que el análisis se realice en la parte saturada y fuertemente coherente del conjunto de datos también ayuda en este sentido. Sin embargo, el TC3 es más complejo que el TC1, y esto se observa en los modos espaciales del POD y del DMD mostrados en la Fig. 4.10. La Fig. 4.11 presenta el contenido en frecuencia de los tres primeros modos POD dominantes. De nuevo, el contenido espectral de los modos POD es relativamente simple; sin embargo, no se puede asignar a cada modo una frecuencia única y distinta, como era de esperar. De hecho, el segundo modo POD está ligado a una frecuencia aproximadamente el doble de $St \approx 0,21$, pero también se aprecia la frecuencia $St \approx 0,36$; el tercer modo POD está vinculado a $St \approx 0,36$ y, sin embargo, también está *contaminado* por el primer armónico.

El análisis FFT se resume en la Fig. 4.12. El espectro revela los componentes a $St \approx 0,21$ y $St \approx 0,36$ pero las contribuciones a otras frecuencias también son apreciables. El modo FFT en $St \approx 0,21$ es diferente del mostrado en la Fig. 4.4, *e.g.*, es ligeramente asimétrico. La estructura de la componente de velocidad en z es especialmente visible en el modo FFT en $St \approx 0,21$ obtenido a partir de la componente de velocidad transversal del flujo, Fig. 4.12(b).



(a)



(b)

Figura 4.9: TC3 (regímenes transitorio y saturado). Valores singulares del análisis POD (4.9(a)). Espectro del DMD (4.9(b)) comparando frecuencias adimensionales con las amplitudes DMD, usando $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ en Ec. (2.7).

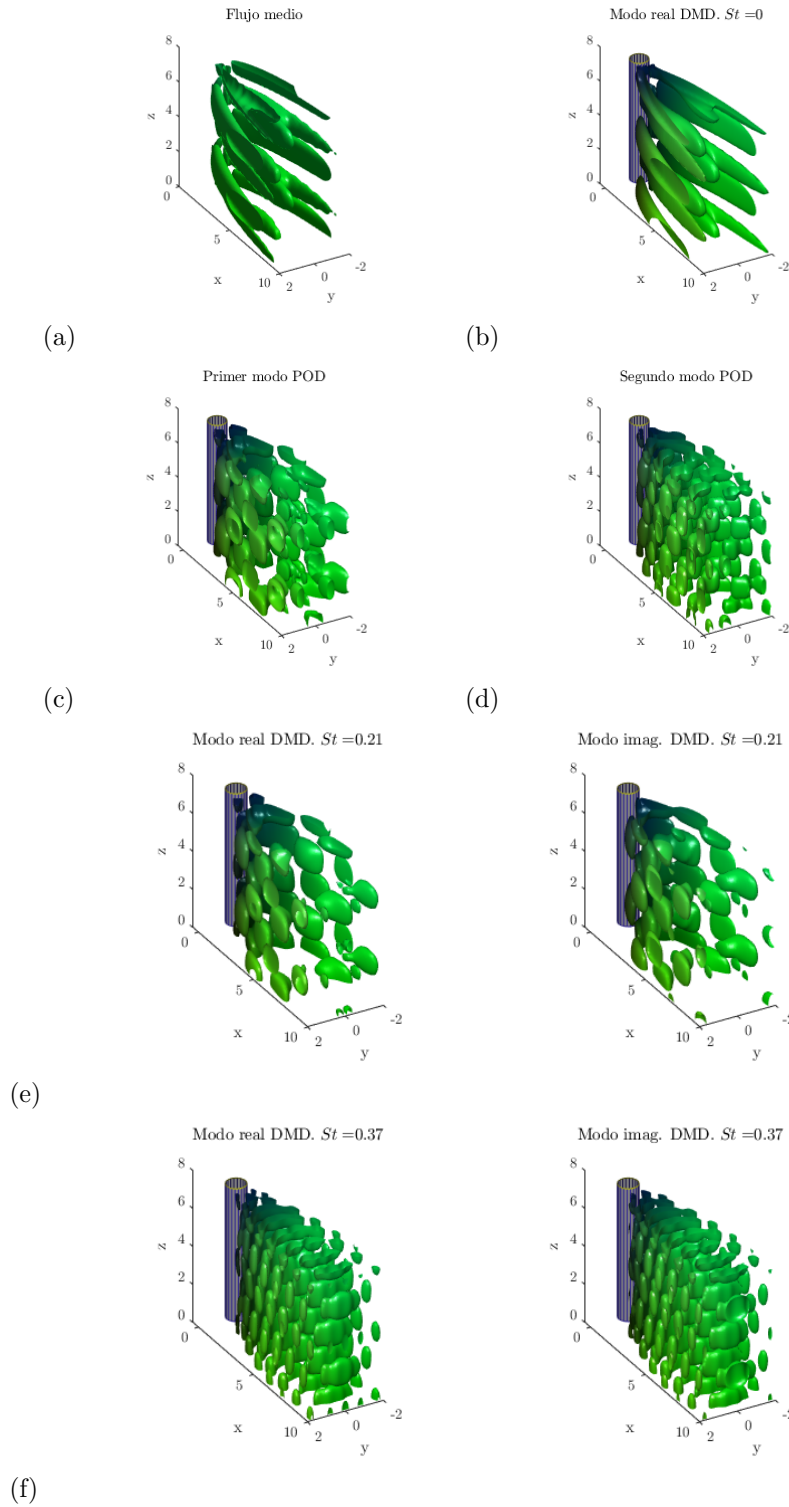


Figura 4.10: TC3: flujo medio (4.10(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.10(b)). Modos dominantes POD (4.10(c), 4.10(d)) y DMD (4.10(e), 4.10(f)); (frecuencias modales DMD: $St = 0, 0.21, 0.37$). Iso-superficies obtenidos con iso-valor de $9 \cdot 10^{-4}$.

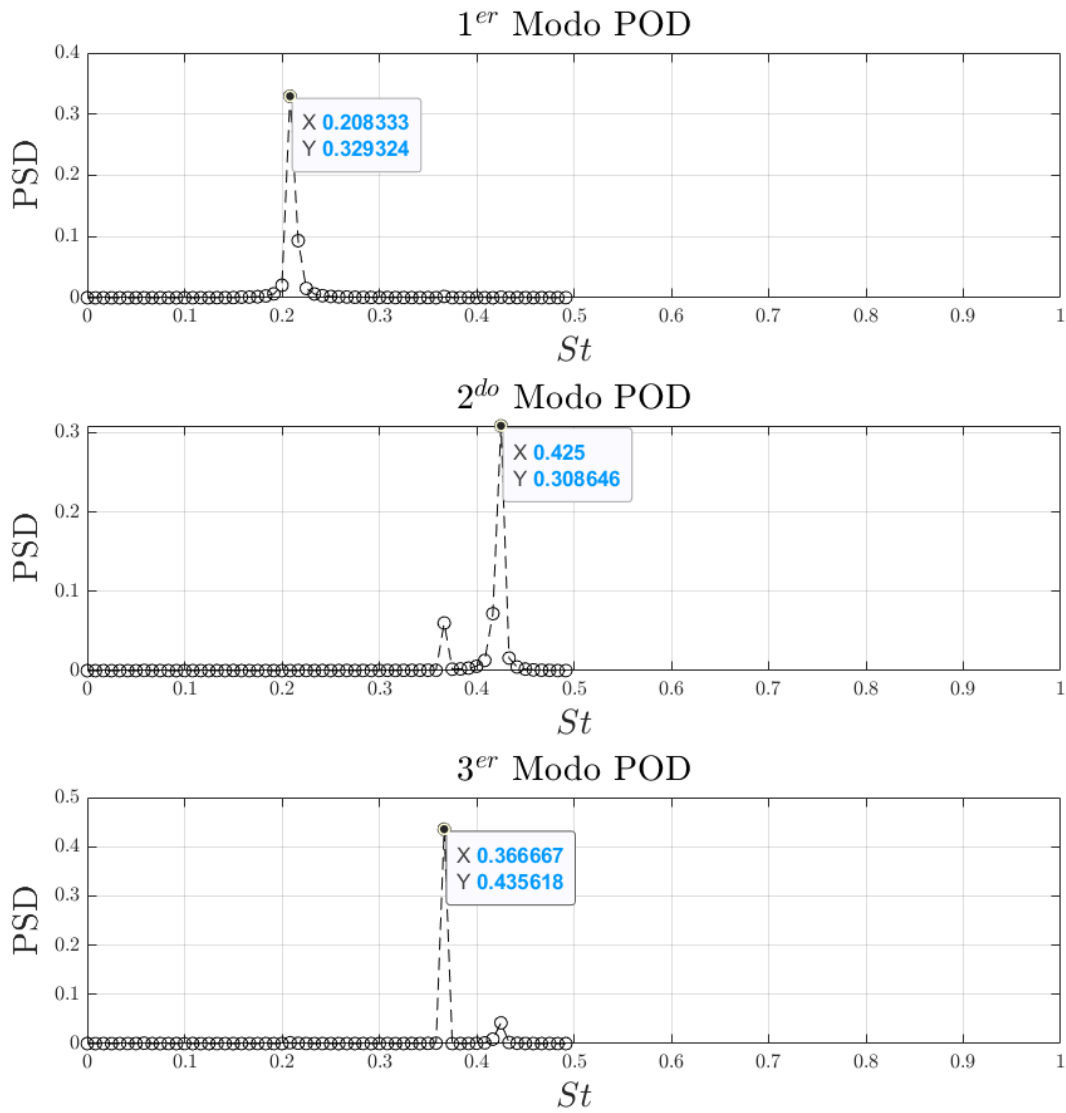
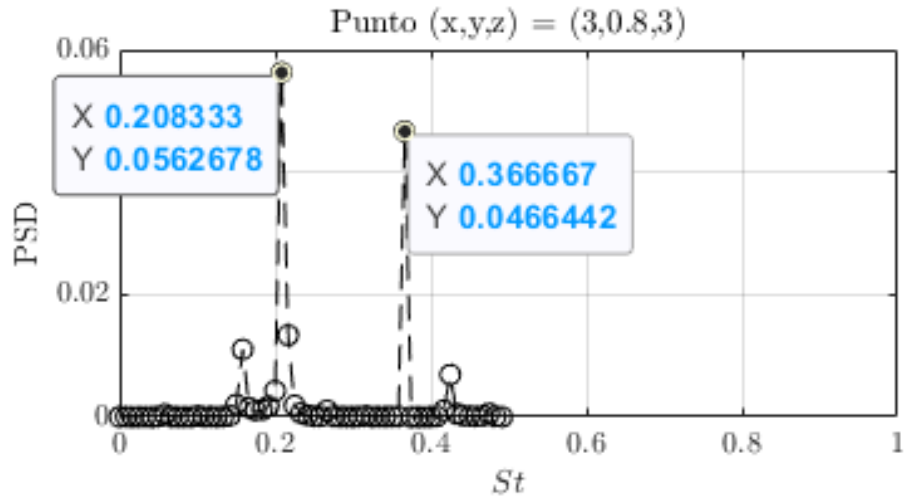
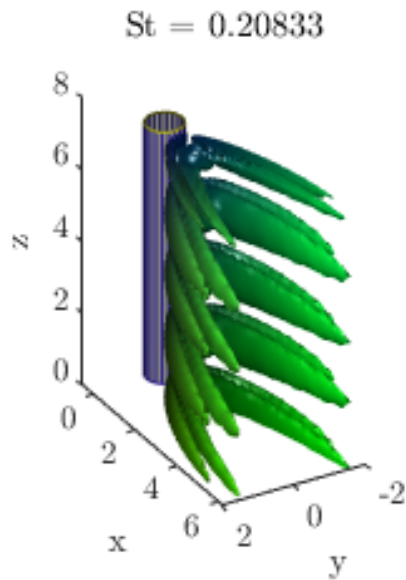


Figura 4.11: TC3: contenido de frecuencias correspondientes a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz cronos \mathbf{R}_0 , Ec. (2.3). De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.



(a)



(b)

Figura 4.12: TC3: Espectro de frecuencias, calculado utilizando Ec. (2.18) (4.12(a)) y el modo FFT a un $St \approx 0,21$ (4.12(b)), para un iso-valor de $3 \cdot 10^{-2}$.

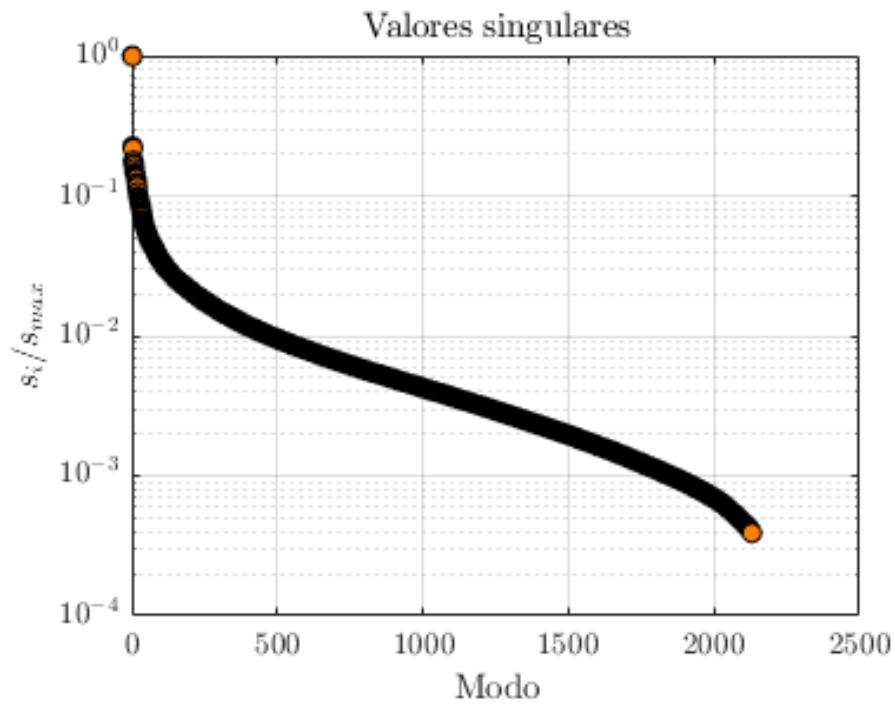
En el TC4, se presenta primero el primer régimen estacionario del conjunto de datos, $t \in [0, 1,34]$. La figura 4.13(a) muestra los valores singulares obtenidos en el POD. La tasa de decaimiento no es tan rápida como en el TC1, más bien recuerda a la del TC2, debido a la naturaleza turbulenta del flujo. La figura 4.13(b) muestra el espectro del DMD. Aquí la frecuencia objetivo ($f \approx 450Hz$) puede detectarse con $\varepsilon = 4,5 \cdot 10^{-1}$. A pesar de que se trata de un régimen estacionario, el espectro no es tan limpio como en el TC1. Nótese que para el TC4 consideramos frecuencias en Hz en lugar del número de Strouhal St . Dado que el número de Reynolds cambia con el tiempo mientras que el número de Strouhal permanece fijo, el número de Strouhal es menos informativo que las frecuencias identificadas directamente por los distintos métodos considerados, especialmente si se estudia todo el conjunto de datos.

La figura 4.14 muestra el flujo medio y los modos POD y DMD. Como en ocasiones previas, el modo DMD en $St = 0$ representa el flujo medio. En cuanto a los modos DMD y POD, se observa una similitud cualitativa. Los modos DMD son complejos conjugados, lo que representa el carácter viajero de los modos en el flujo de estela. Obsérvese que no hay armónicos en este flujo, ya que el ε utilizado aquí es alto, respondiendo al interés de eliminar el ruido experimental en la medida de lo posible.

La figura 4.15 muestra el contenido en frecuencias de los modos POD. Obsérvese cómo aunque en el primer modo POD varias frecuencias se aprecian, la frecuencia objetivo ($f \approx 450Hz$) es claramente dominante.

La figura 4.16 presenta los resultados FFT para el TC4, en el régimen estacionario. Obsérvese cómo el FFT identifica la misma frecuencia objetivo ($f \approx 450Hz$) que el POD y el DMD para el régimen estacionario del TC4.

En cuanto al primer régimen estacionario del TC4, POD, DMD y FFT lograron detectar la frecuencia dominante del flujo ($f \approx 450Hz$), así como el soporte espacial de los modos.



(a)

(b)

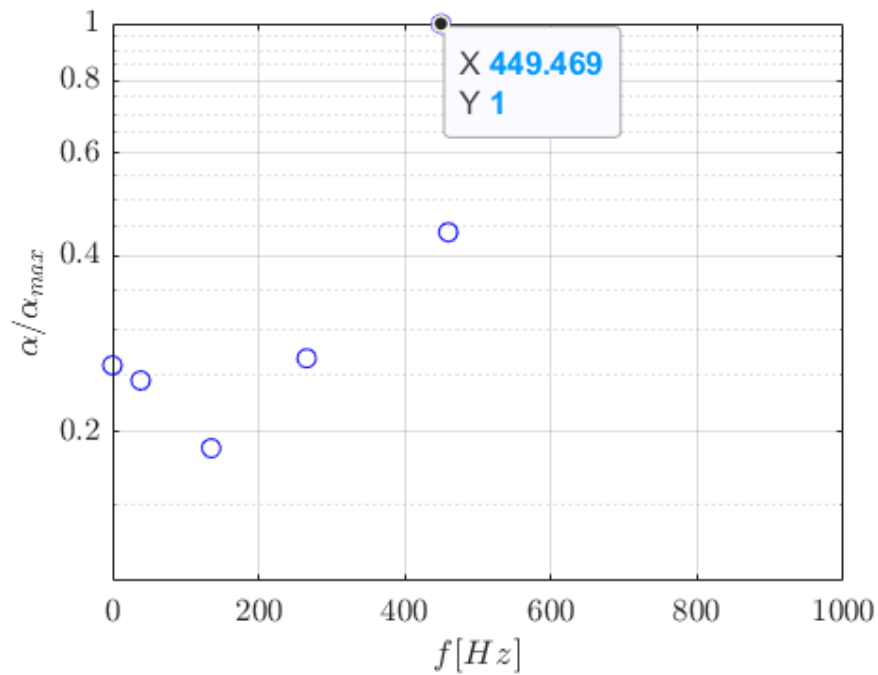


Figura 4.13: TC4. Primer régimen estacionario. Valores singulares del análisis POD (4.13(a)). Espectro del DMD (4.13(b)) comparando frecuencias con las amplitudes DMD, usando $\varepsilon = 4,5 \cdot 10^{-1}$ en Ec. (2.7).

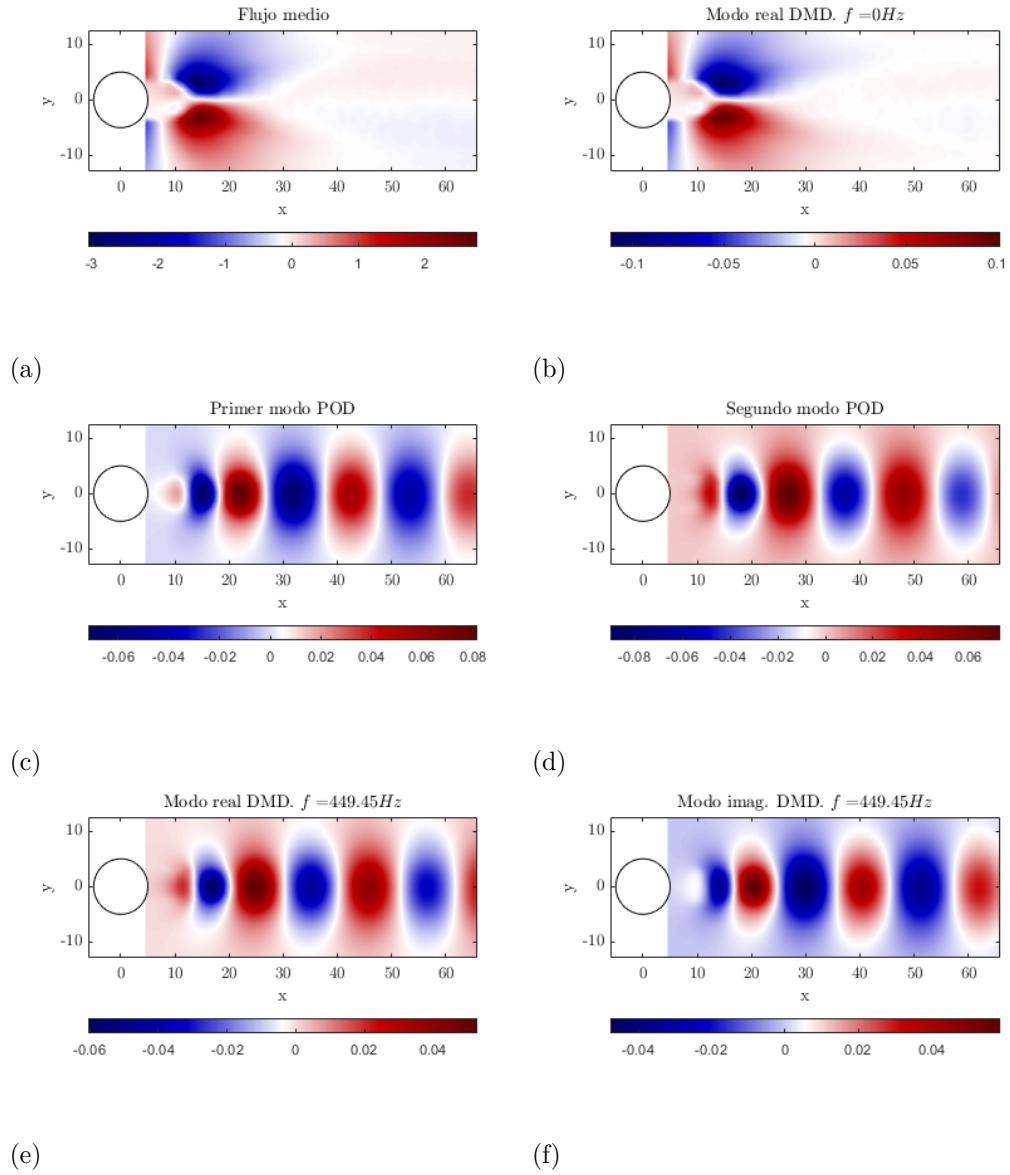


Figura 4.14: TC4: flujo medio (4.14(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.14(b)). Modos dominantes POD (4.14(c) y 4.14(d)) y DMD (4.14(e) y 4.14(f)); (frecuencia modal DMD: $f = 449,47Hz$).

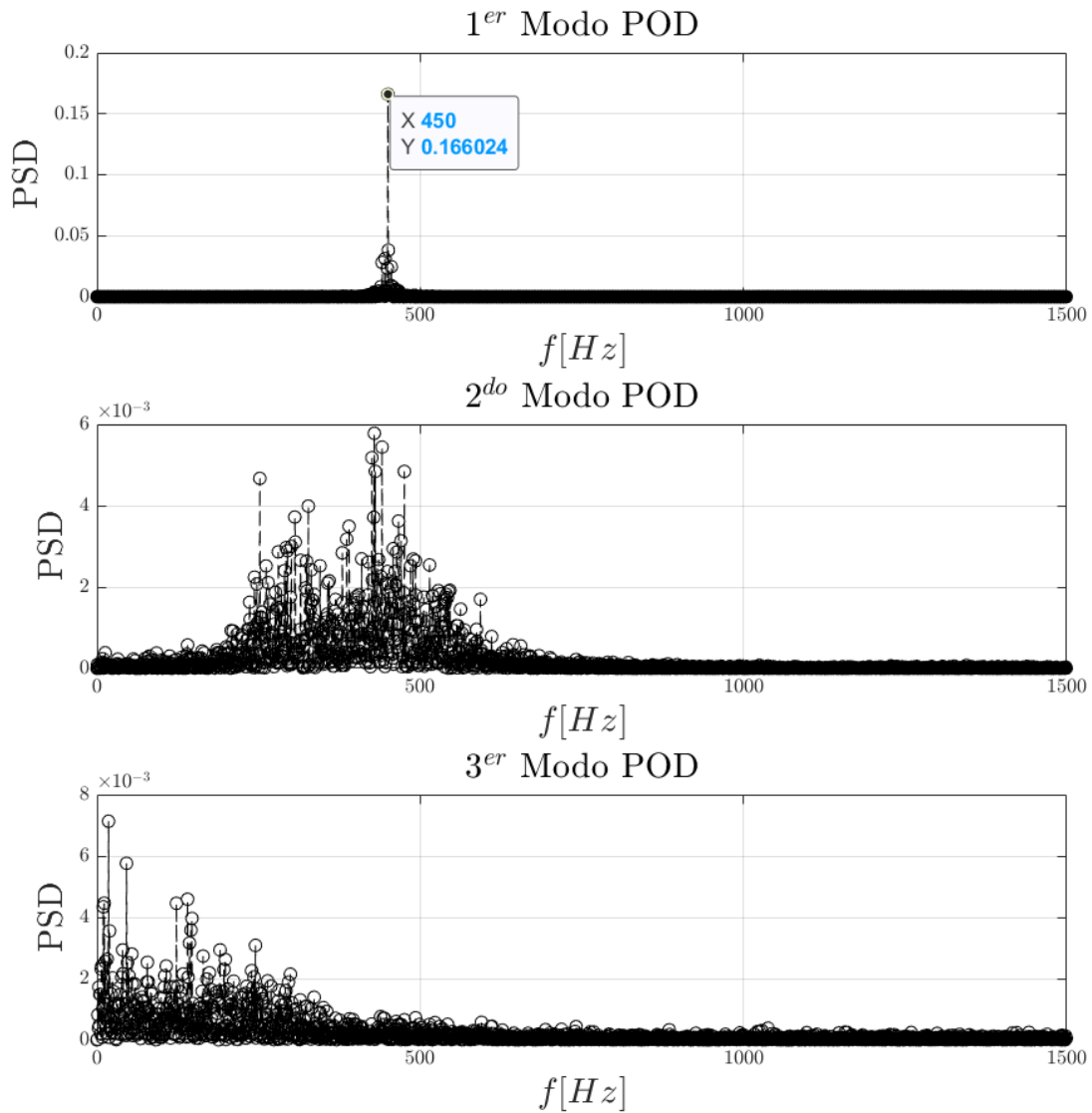
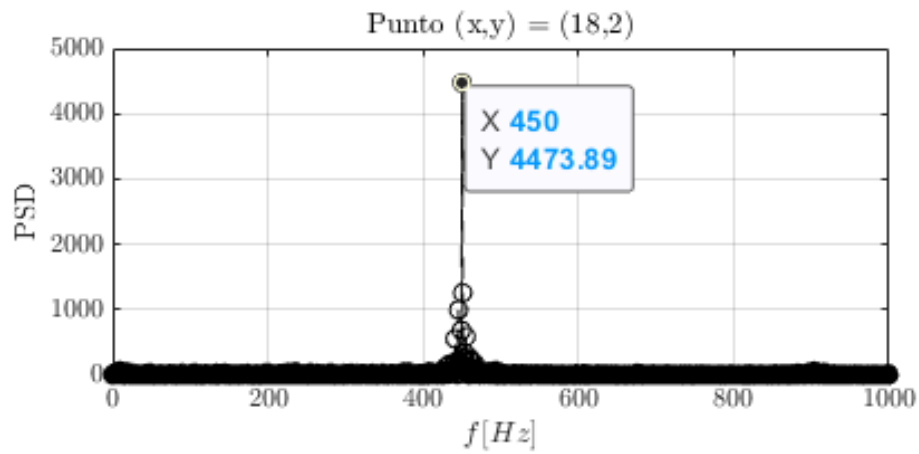
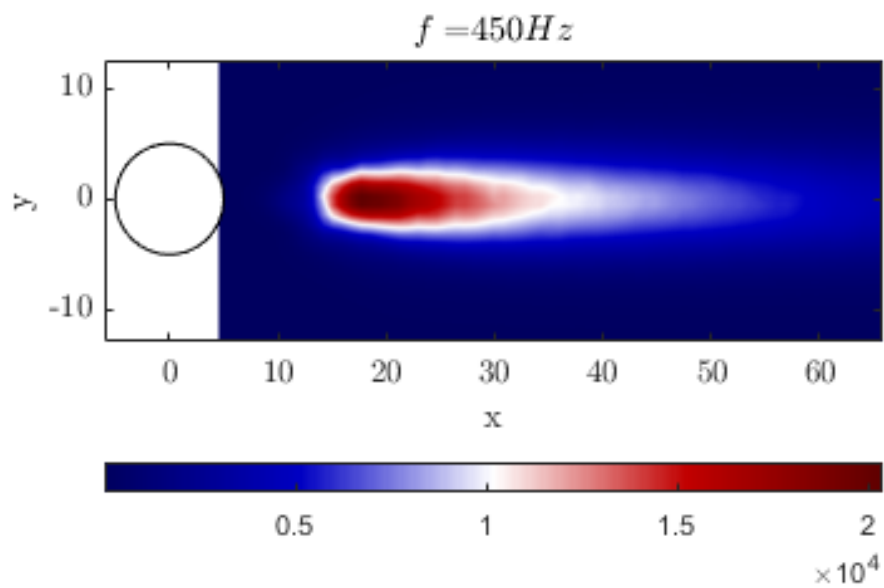


Figura 4.15: TC4. régimen estacionario: contenido en frecuencia correspondiente a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz de cronos \mathbf{R}_0 . De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.



(a)



(b)

Figura 4.16: TC4. régimen estacionario: espectro de frecuencias, calculado utilizando Ec. (2.18) (4.16(a)) y el modo FFT a un $f \approx 450Hz$ (4.16(b)).

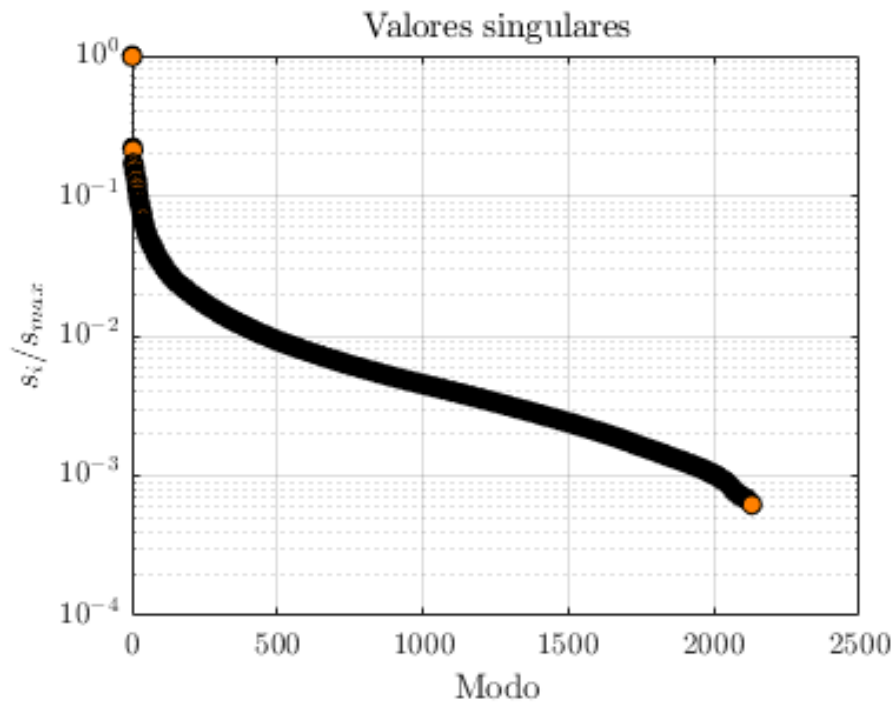
A continuación, procedemos a aplicar estas técnicas clásicas (POD, DMD y FFT) a todo el rango temporal del caso TC4, donde hay dos frecuencias dominantes a detectar: $f \approx 450Hz$ y $f \approx 303Hz$. Nótese que estas frecuencias están *activas* en diferentes momentos: primero, $f \approx 450Hz$ está presente al inicio, cuando el número de Reynolds es $Re_D = 4000$; $f \approx 303Hz$ aparece más tarde, cuando el número de Reynolds ha descendido hasta $Re_D = 2600$. La Fig. 4.17(a) muestra los valores singulares del POD. Los valores singulares son cualitativamente similares a los del régimen estacionario. La Fig. 4.17(b) muestra el espectro del DMD. Como era de esperar, DMD tiene dificultades para detectar las frecuencias objetivo.

La Fig. 4.18 muestra los modos DMD y POD. Podemos observar que el POD sigue siendo capaz de detectar estructuras coherentes, mientras DMD no. Esto se debe en parte al elevado ε empleado, pero sobre todo a las limitaciones inherentes del método para un caso de estudio tan complejo.

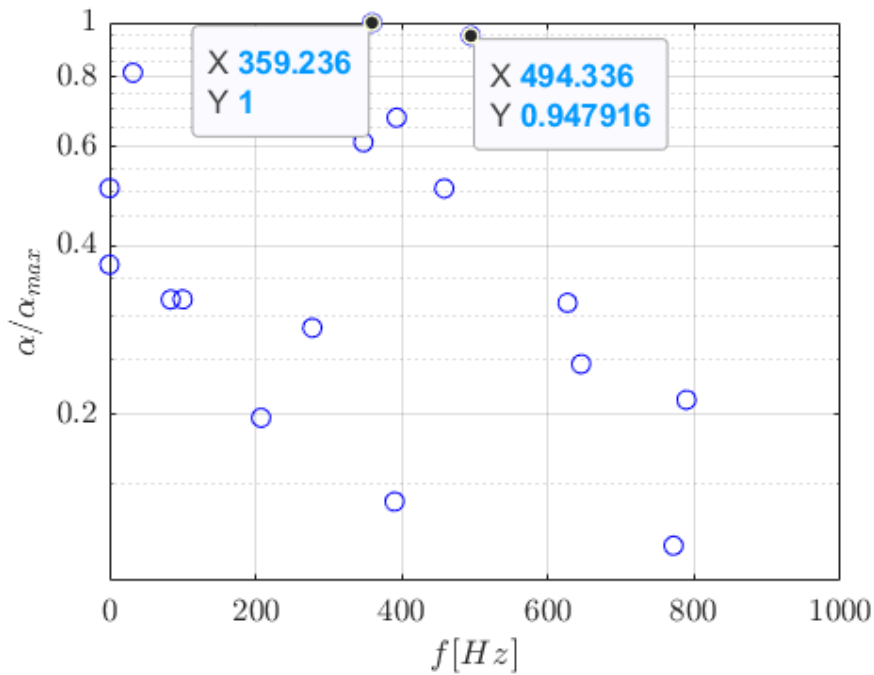
En cuanto al espectro POD, la Fig. 4.19 muestra que POD es capaz de detectar las frecuencias dominantes del conjunto completo de datos, $f \approx 450Hz$ y $f \approx 303Hz$.

La Fig. 4.20 presenta el espectro FFT y el soporte espacial para todo el rango temporal del TC4. Obsérvese cómo el FFT identifica ambas frecuencias dominantes ($f \approx 450Hz$ y $f \approx 303Hz$).

En resumen, para el TC4, cuando se trata de la primera fase estacionaria, POD, DMD y FFT son capaces de detectar la frecuencia dominante ($f \approx 450Hz$) junto con su estructura coherente. Cuando tomamos el conjunto de datos completo, el POD y el FFT detectan correctamente las frecuencias dominantes ($f \approx 450Hz$ y $f \approx 303Hz$) y las estructuras coherentes; el DMD, por el contrario, tiene dificultades para detectar estas frecuencias y modos. En las subsecciones siguientes, consideraremos el conjunto de datos completo.



(a)



(b)

Figura 4.17: TC4. Conjunto de datos completo. Valores singulares del análisis POD (4.17(a)). Espectro del DMD (4.17(b)) comparando frecuencias con las amplitudes DMD, usando $\varepsilon = 3,2 \cdot 10^{-1}$ en Ec. (2.7).

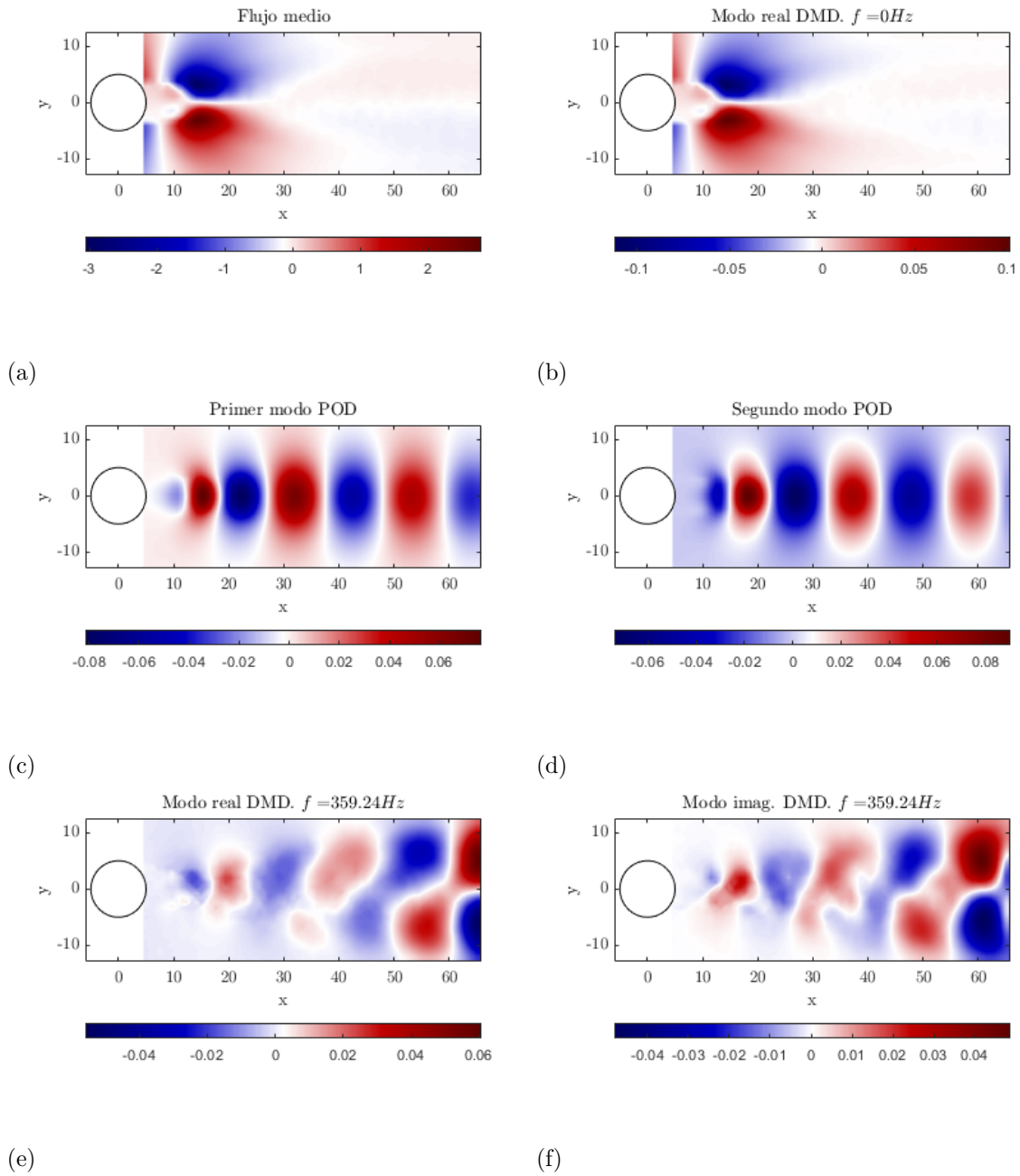


Figura 4.18: TC4. Caso completo: flujo medio (4.18(a)) y modo DMD estable ($St = 0$) (4.18(b)). Modos dominantes POD (4.18(c) y 4.18(d)) y DMD (4.18(e) y 4.18(f)); (frecuencia modal DMD: $f = 449,47Hz$).

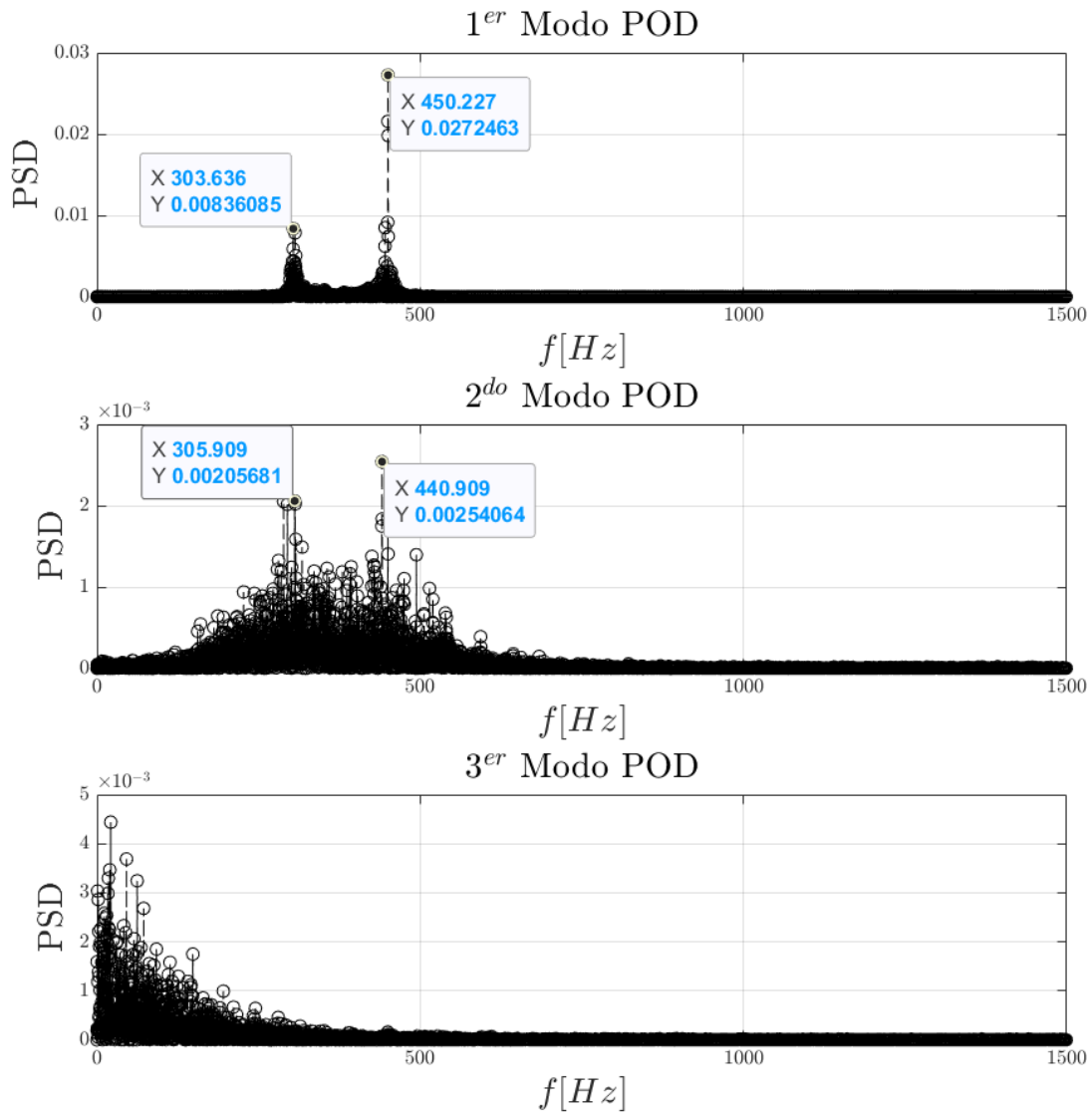
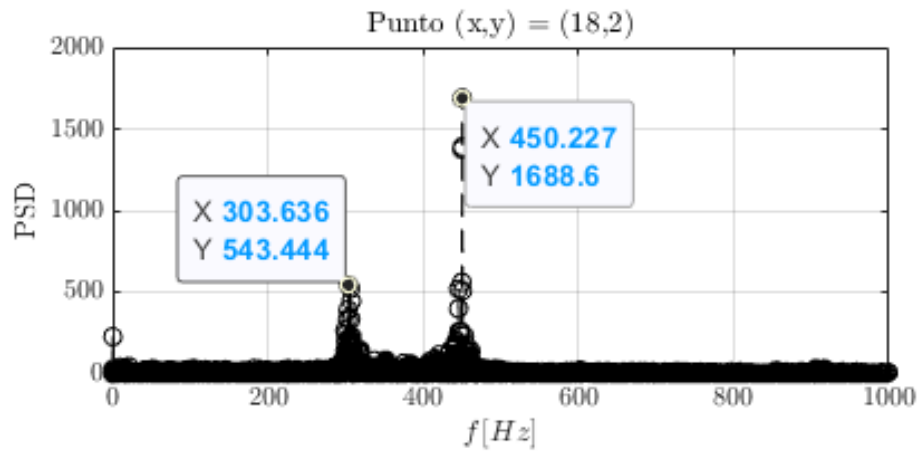
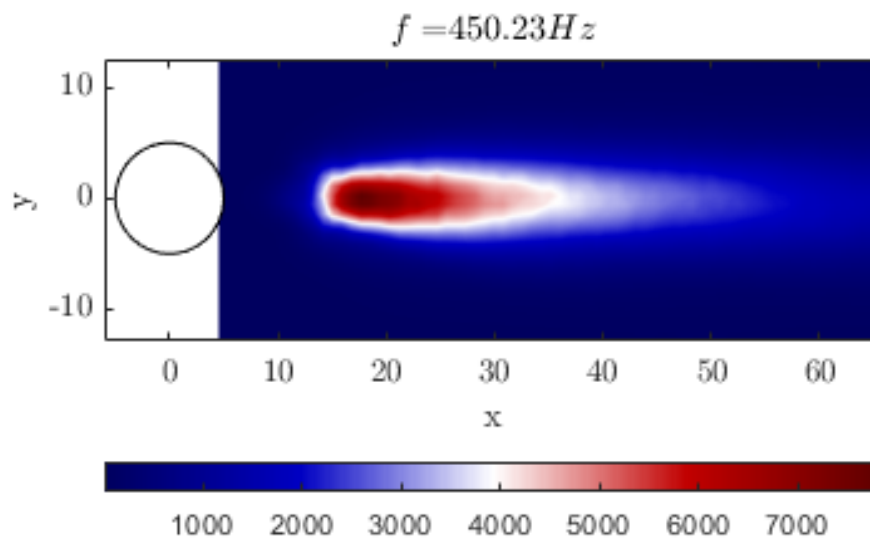


Figura 4.19: TC4. Conjunto de datos completo: contenidos de frecuencia correspondientes a los modos POD, obtenidos a partir de la matriz de cronos \mathbf{R}_0 . De superior a inferior: primer, segundo y tercer modos de mayor energía.



(a)



(b)

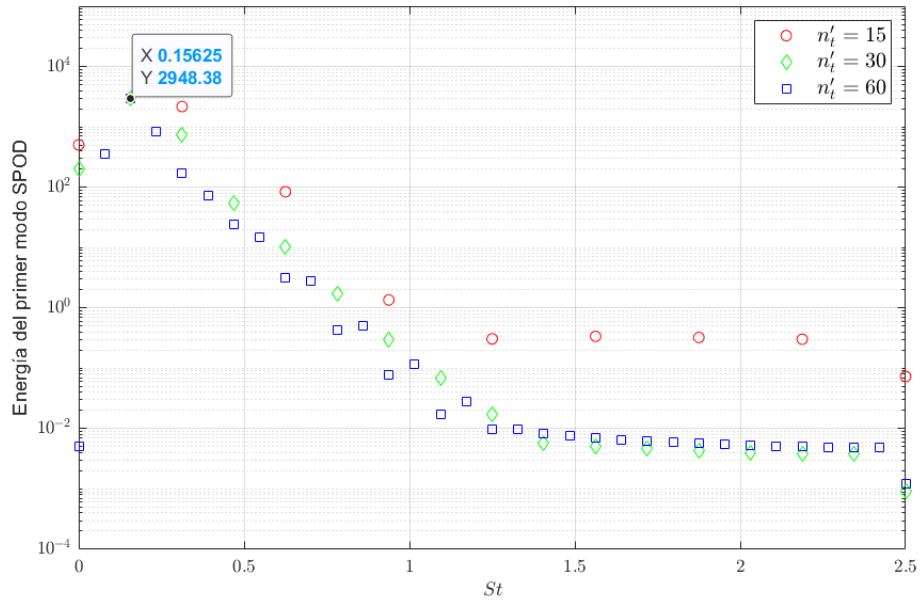
Figura 4.20: TC4. Conjunto de datos completo: Espectro de frecuencias, calculado utilizando Ec. (2.18) (4.20(a)) y el modo FFT en un $f \approx 450 Hz$ (4.20(b)).

4.1.2 Mejora de precisión por redundancia: SPOD y HODMD

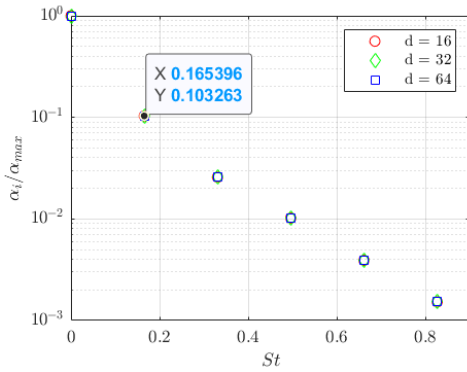
Analicemos ahora los resultados del análisis utilizando los métodos SPOD y HODMD para los conjuntos de datos TC1–TC4.

Las Figuras 4.21 y 4.22 presentan los espectros SPOD y HODMD. En particular, investigamos la influencia de la longitud de la ventana (dada por n'_t para el SPOD y por d para el HODMD) en los resultados obtenidos para el TC1. En una primera comparación, fijamos longitudes de ventana que son potencias de 2, para obtener el rendimiento óptimo del algoritmo FFT, sobre el que está construida la implementación del SPOD disponible.

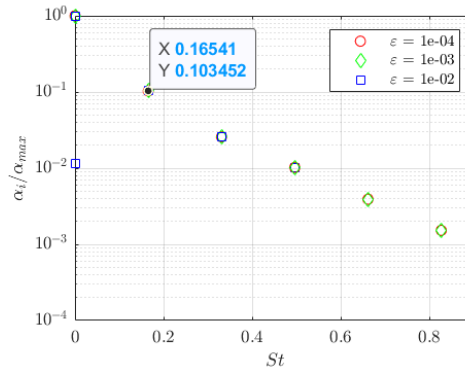
En cuanto al espectro SPOD (Fig. 4.21(a), obtenido con un solapamiento de bloques de 50% y la función de ventana de Hamming siguiendo a Schmidt y Colonius, 2020), el primer modo SPOD es más energético en $St \in (0,15, 0,25)$, dependiendo de la elección de los parámetros. Este es un signo de *spectral leakage* Schmidt y Colonius, 2020, derivado de la relativa brevedad de la secuencia temporal. En cuanto a los resultados del HODMD, las Fig. 4.21(b) y Fig. 4.21(c) muestran la sensibilidad del espectro del HODMD a la longitud de la ventana y la tolerancia (véase la Ec. 2.7): cuanto mayor sea el valor de ε_1 y ε_2 , menos modos se conservan en la reconstrucción y, por tanto, menos modos se identifican. El SPOD detecta las frecuencias correctas si se emplean longitudes de ventana múltiplos de 15, ya que éstas conducen a un conjunto de frecuencias que coinciden con $St \approx 0,16$. Estos resultados también se resumen en la Fig. 4.22(a). Los resultados del HODMD aparecen también en la Fig. 4.22(b). Los modos SPOD y HODMD se muestran en las Fig. 4.23 y Fig. 4.24: son muy similares a los obtenidos por el POD y el DMD.



(a)

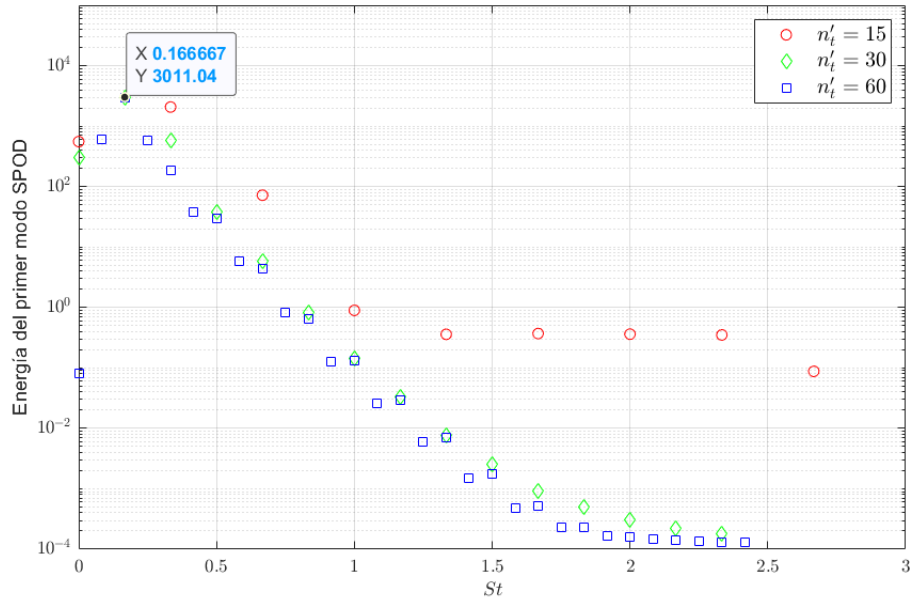


(b)

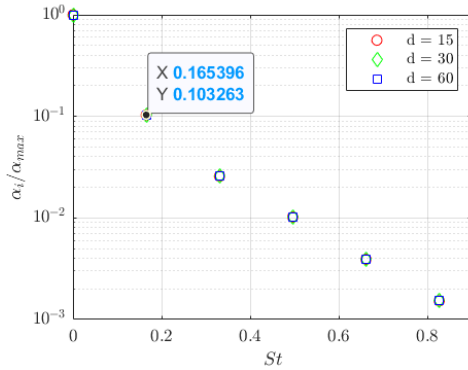


(c)

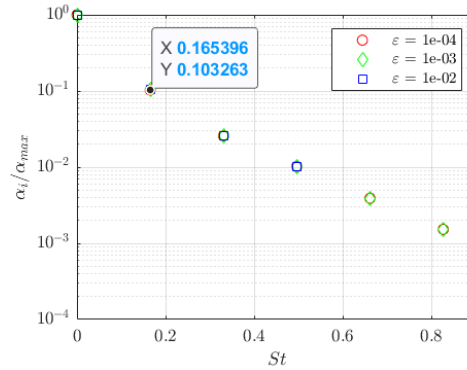
Figura 4.21: TC1, análisis del SPOD y del HODMD para longitudes de ventana que son potencias de 2. Energía del primer modo SPOD *vs St*, y sensibilidad a la longitud de ventana n_t' (4.21(a)). HODMD α_i *vs St* para diferentes longitudes de ventana d (4.21(b)) y tolerancias $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (4.21(c)).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.22: TC1, análisis del SPOD y del HODMD. Energía del primer modo SPOD $vs St$, y sensibilidad a la longitud de ventana n'_t (4.22(a)). HODMD α_i $vs St$ para diferentes longitudes de ventana d (4.22(b)) y tolerancias $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (4.22(c)).

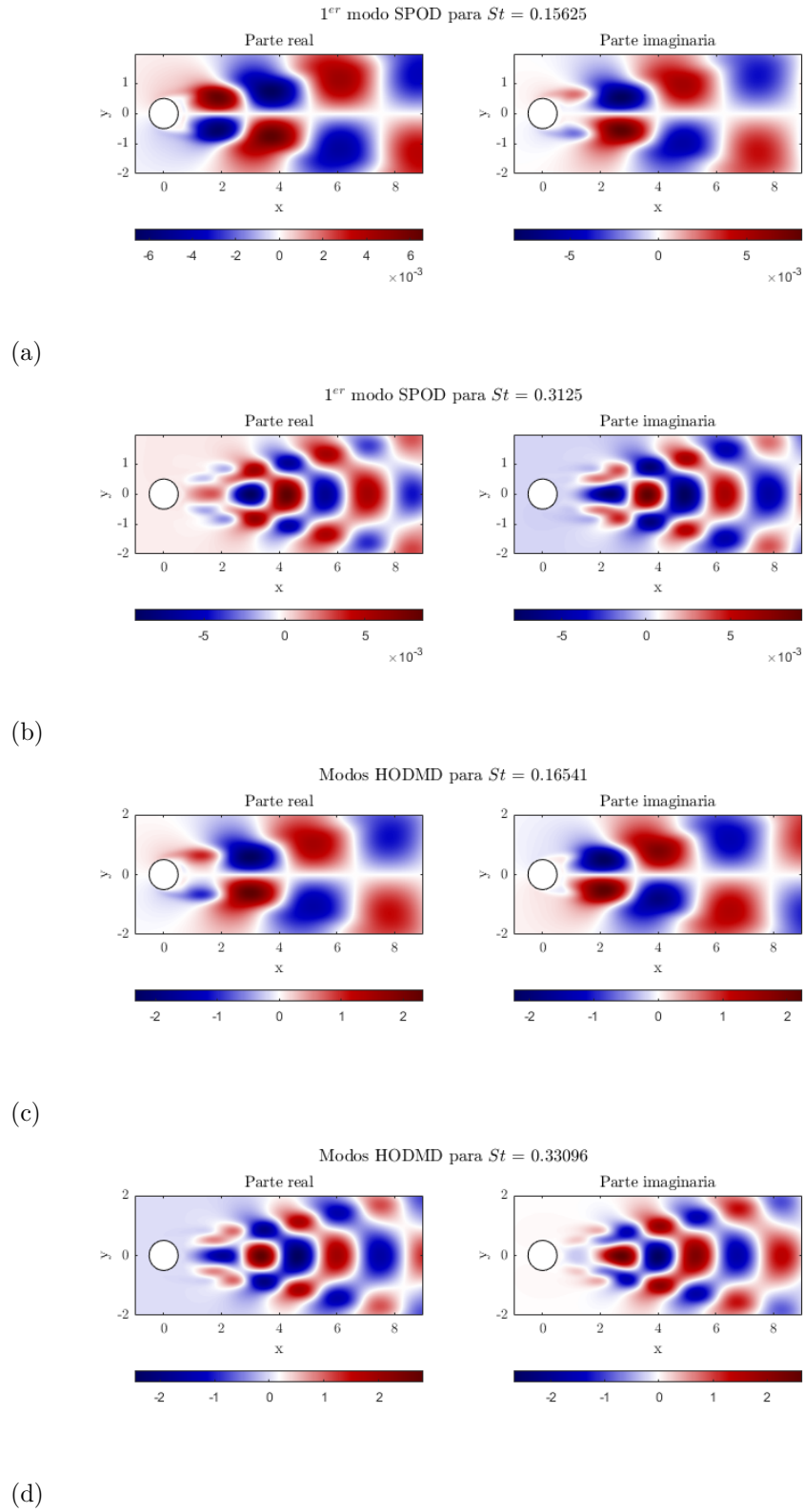


Figura 4.23: TC1, modos SPOD (4.23(a) y 4.23(b)) y HODMD (4.23(c) y 4.23(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente) utilizando $d = n'_t = 64$.

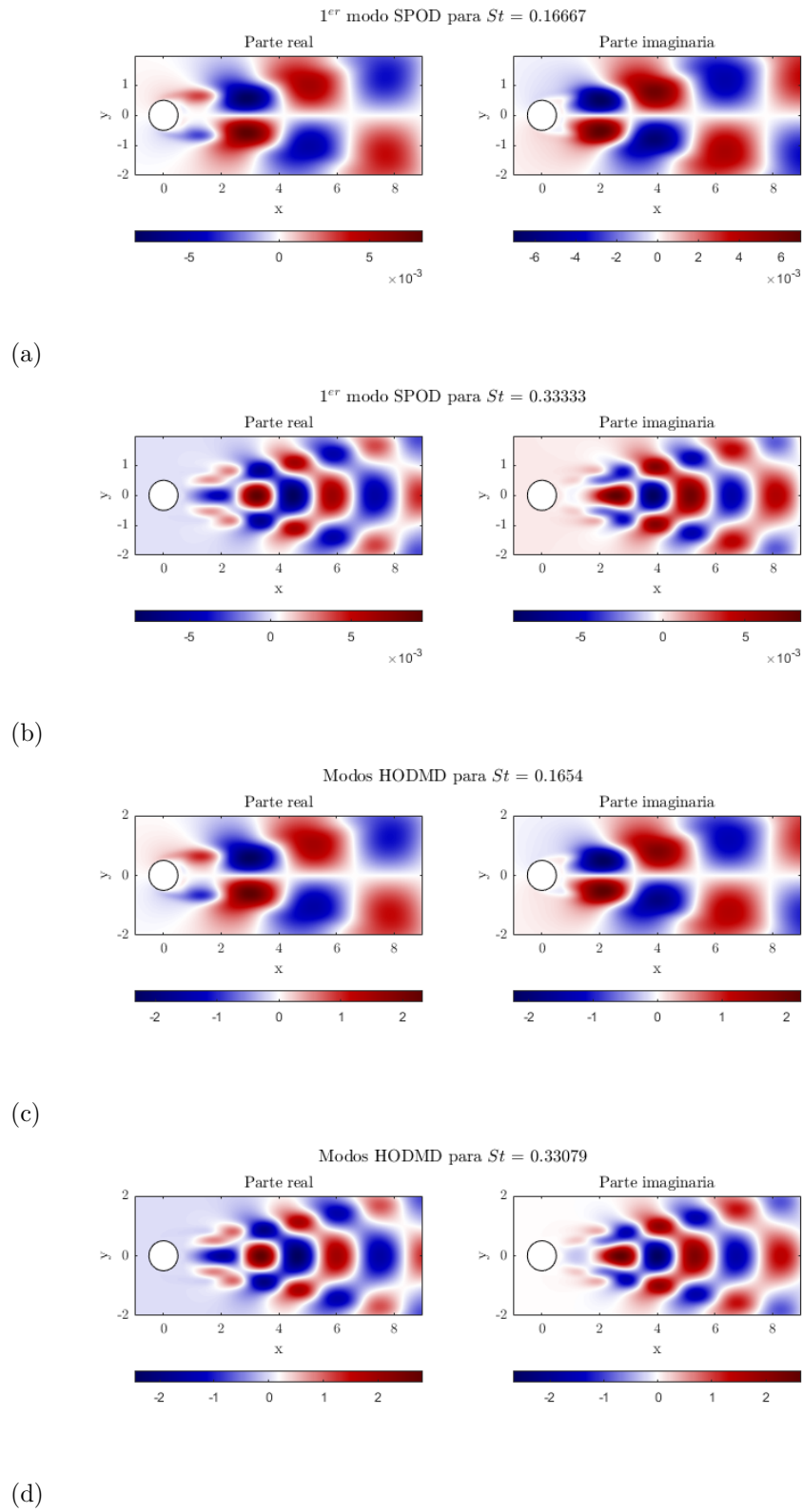
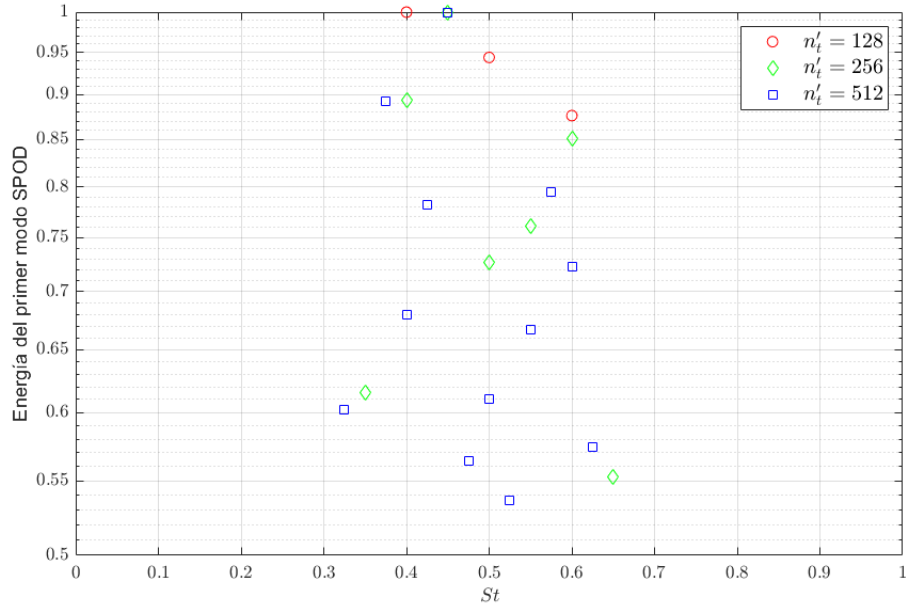
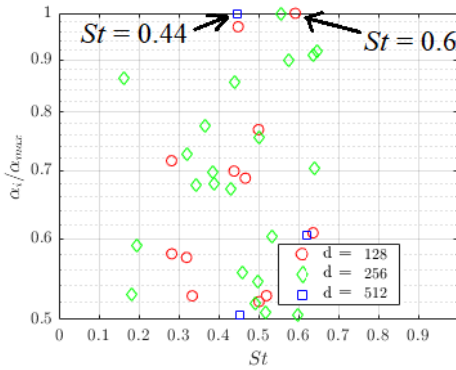


Figura 4.24: TC1, modos SPOD (4.24(a) y 4.24(b)) y HODMD (4.24(c) y 4.24(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente) utilizando $d = n'_t = 60$.

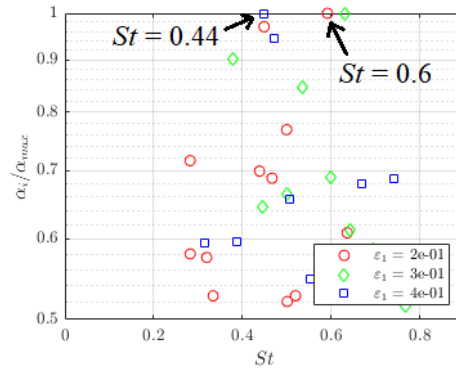
Los espectros HODMD y SPOD para el conjunto de datos del chorro turbulento (TC2) se recogen en la Fig. 4.25. Este conjunto de datos es mucho más largo ($n_t = 5000$), lo que permite una mayor flexibilidad en la elección de la longitud de la ventana n'_t para el SPOD; de nuevo consideramos potencias de 2. La Fig. 4.25(a) confirma que el modo SPOD más energético está activo a $St \approx 0,6$. La Fig. 4.26(b) muestra los modos HODMD de mayor amplitud y su sensibilidad a d y a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Como los parámetros ε_1 y ε_2 controlan la reducción de la dimensión y el truncamiento de la amplitud, respectivamente, la selección incorrecta de estas dos tolerancias puede afectar mucho a los resultados obtenidos, ya sea por una eliminación de ruido insatisfactoria o por la identificación de modos de baja amplitud, que no suelen ser relevantes para la física del flujo. En este caso de estudio, los modos obtenidos cubren un rango de $\alpha_i/\alpha_{max} \in (0,5, 1)$. Para valores de $d = 128 - 256$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \in (0,2, 0,3)$, el modo más relevante aparece en la frecuencia esperada $St \approx 0,6$. El soporte espacial de los modos SPOD y HODMD se muestra en la Fig. 4.26, que de nuevo es muy similar al obtenido por el POD y el DMD.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.25: TC2, análisis del SPOD y del HODMD para longitudes de ventana que son potencias de 2. Energía del primer modo SPOD *vs* St , y sensibilidad a la longitud de ventana n_t' (4.25(a)). HODMD α_i *vs* St para diferentes longitudes de ventana d (4.25(b)) y tolerancias $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (4.25(c)).

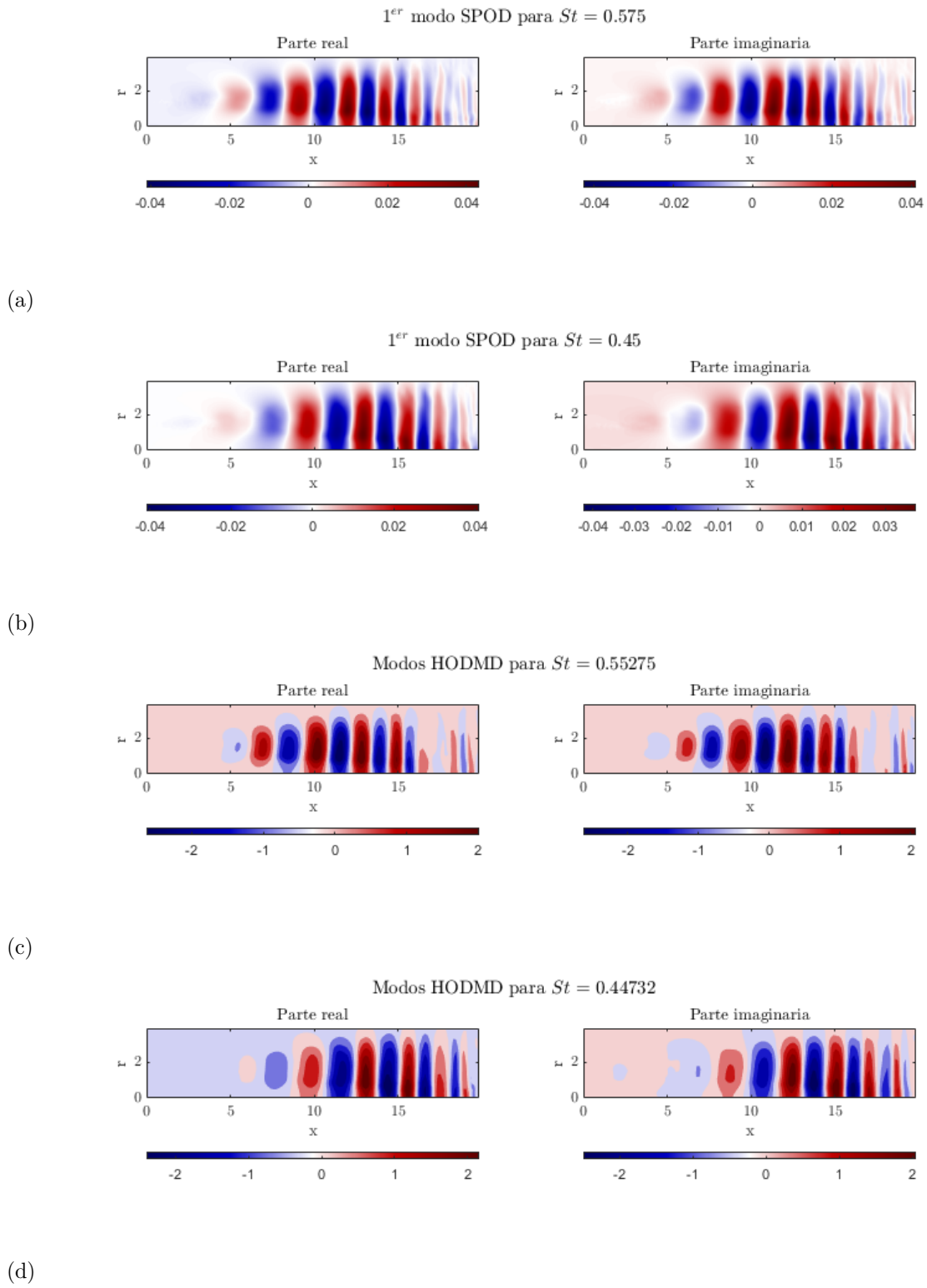


Figura 4.26: TC2, modos SPOD (4.26(a) y 4.26(b)) y HODMD (4.26(c) y 4.26(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente)

En cuanto al flujo laminar y tridimensional alrededor de un cilindro a $Re_D = 280$ (TC3), el estudio se realiza sobre secciones temporales del conjunto de datos de $n'_t = 120$, siguiendo Le Clainche y Vega, 2020. En este caso, las frecuencias objetivos son principalmente $St \approx 0,21$ y $St \approx 0,36$, por lo que consideraremos longitudes de ventana de hasta 64 *snapshots*, para que los intervalos resultantes puedan capturar esa frecuencia. Fig. 4.27(a) muestra el modo SPOD más energético. Para una longitud de ventana $n'_t = 64$, este modo tiene la mayor energía en $St \approx 0,21$, también $St \approx 0,36$ parece ser relevante. Para las longitudes de ventana $n'_t = 16$ y $n'_t = 32$, la resolución no es suficiente para identificar las frecuencias de interés. Fig. 4.27(b) y Fig.4.27(c) muestran de nuevo modos HODMD con la mayor amplitud y su sensibilidad a d y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, respectivamente. En este caso, los modos obtenidos cubren un rango de $\alpha_i/\alpha_{max} \in (10^{-3}, 1)$; Los modos más relevantes aparecen en las frecuencias $St \approx 0,21$ y $St \approx 0,36$. Los modos espaciales del SPOD y del HODMD se muestra en la Fig. 4.28; estos son de nuevo muy similares a los obtenidos con el POD y el DMD.

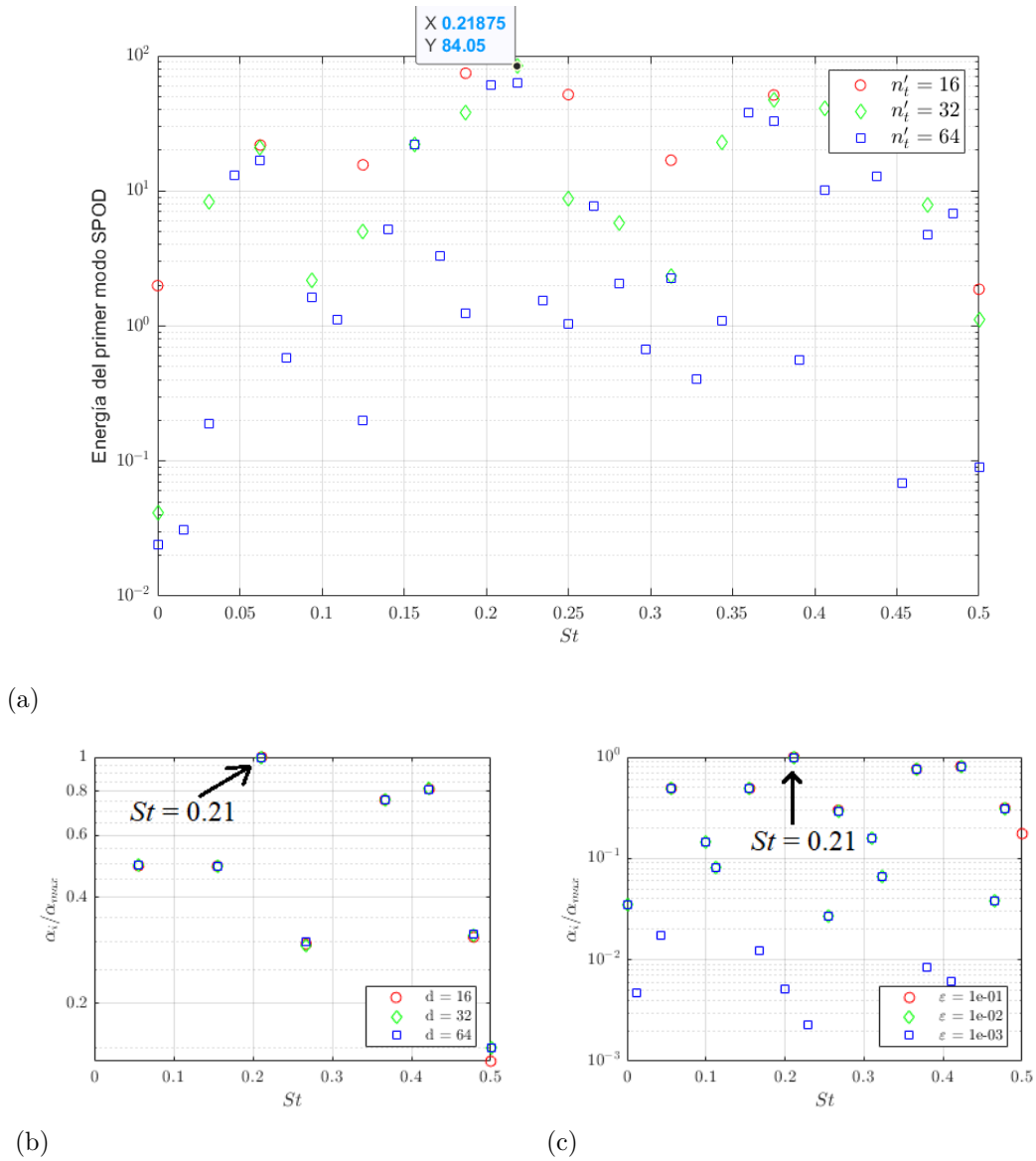


Figura 4.27: TC3 (régimen saturado), análisis SPOD y HODMD. Energía del primer modo SPOD vs St , y sensibilidad a la longitud de ventana n_t' (4.27(a)). HODMD α_i vs St para diferentes longitudes de ventana d (4.27(b)) y tolerancias (4.27(c)) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 \cdot 10^{-5}$.

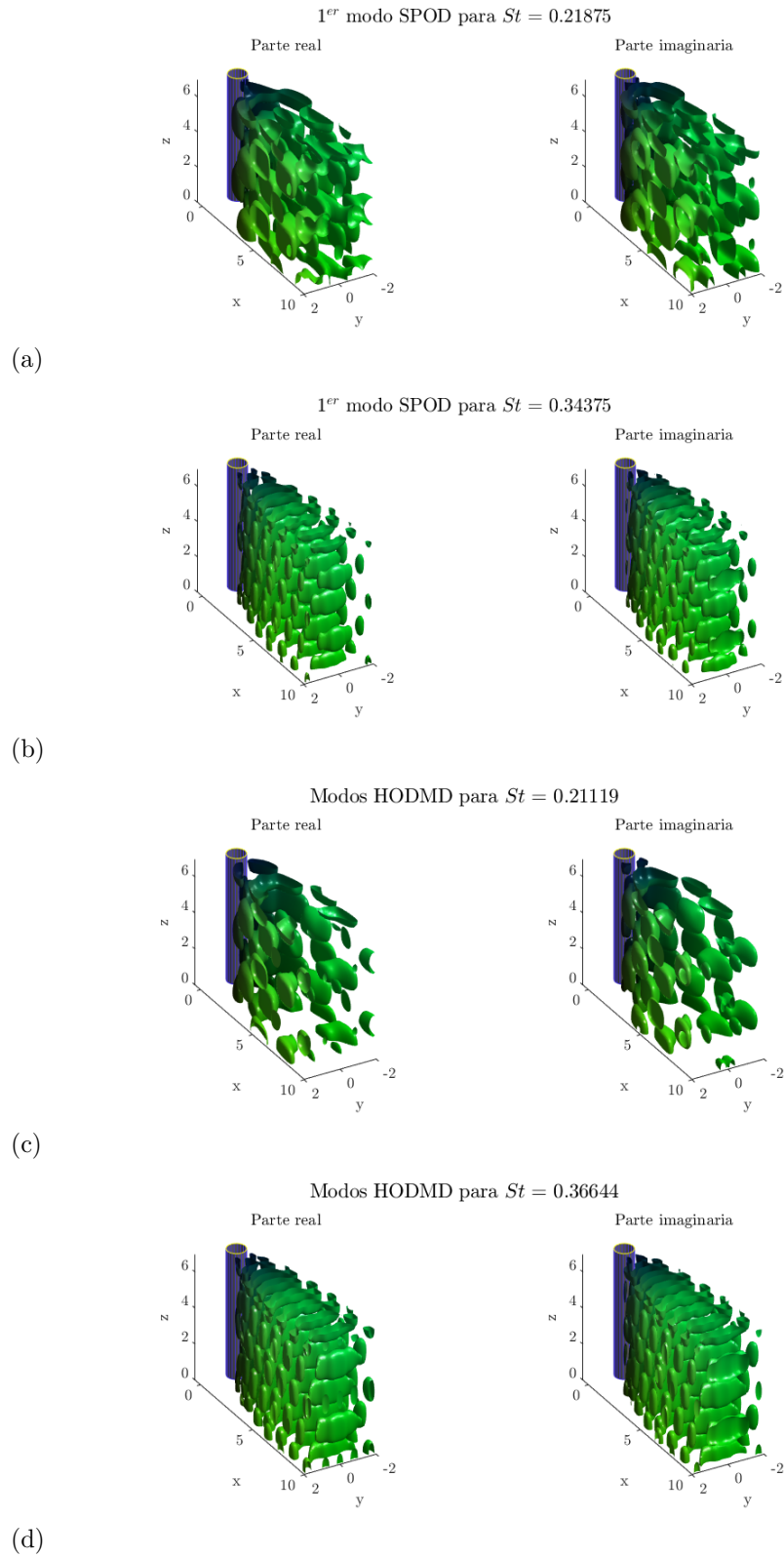


Figura 4.28: TC3, modos SPOD (4.28(a) y 4.28(b)) y HODMD (4.28(c) y 4.28(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente)

La Figura 4.29 presenta los espectros SPOD (4.29(a)) y HODMD (4.29(b)) para el TC4 (conjunto de datos completo). El primer modo SPOD es el más energético a $f = 450,2Hz$ seguido de $f = 306,64Hz$. Al aplicar HODMD con $d = 1100$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-2}$, se consiguen identificar patrones claros en $f = 450,29Hz$ y $f = 306,23Hz$. Para el TC4 (conjunto de datos completo), y a diferencia del DMD clásico, el SPOD y el HODMD logran detectar las frecuencias objetivo. Además, el HODMD permite obtener un espectro más limpio. En la Figura 4.30 podemos ver que el soporte espacial de los modos asociados a las frecuencias se puede calcular correctamente tanto para el HODMD como el SPOD. Por último, señalar que a pesar de que el SPOD esté diseñado para datos estadísticamente estacionarios, su rendimiento es satisfactorio en la detección de frecuencias dominantes y estructuras coherentes para el TC4.

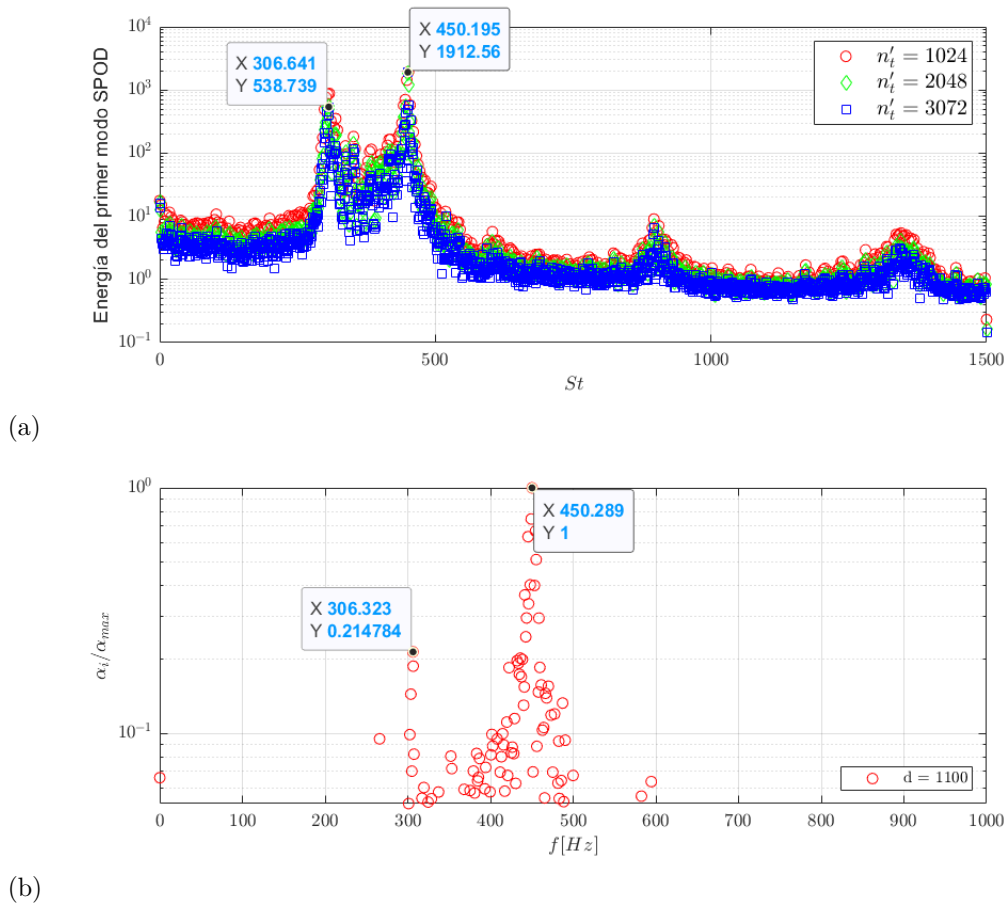


Figura 4.29: TC4, conjunto de datos completo, análisis SPOD y HODMD. Energía del primer modo SPOD vs $f[Hz]$, y sensibilidad a la longitud de ventana n'_t (4.29(a)). HODMD α_i vs $f[Hz]$ para $d = 1100$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ (4.29(b)).

Las ventajas de utilizar el SPOD y el HODMD en flujos complejos en comparación con los clásicos POD, DMD o FFT están claras. Tanto el SPOD como el HODMD ofrecen resultados más limpios y precisos que las otras técnicas. Esto es muy útil para desarrollar los ROMs, capaces de reconstruir los conjuntos de datos originales (ver referencias Kou et al., 2018; Le

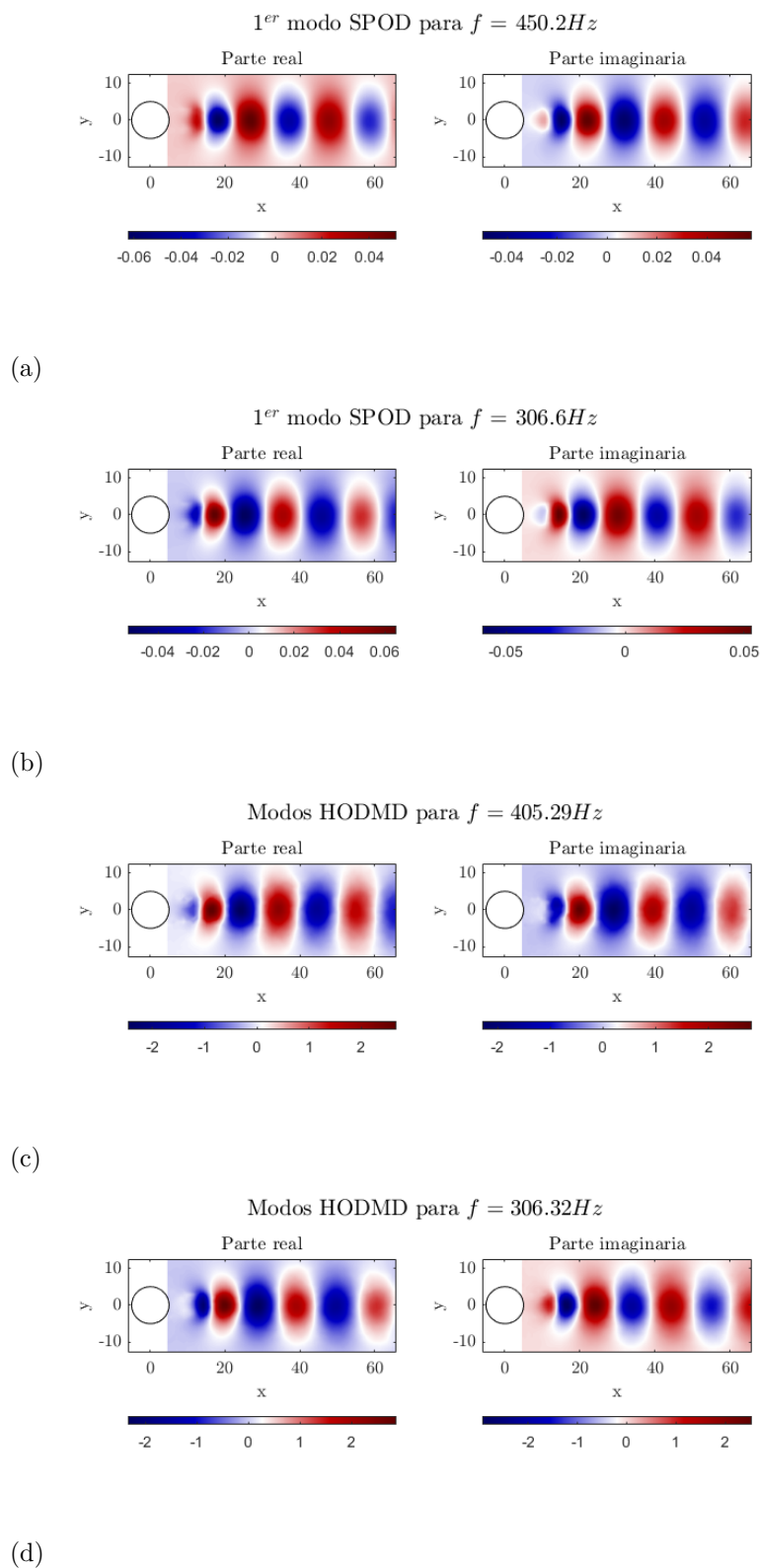


Figura 4.30: TC4, conjunto de datos completo, modos SPOD (4.30(a) y 4.30(b)) y HODMD (4.30(c) y 4.30(d)) más relevantes (mayor energía/amplitud, respectivamente).

Clainche y Vega, 2017a; Le Clainche et al., 2018b). Por último, se investiga el rendimiento de estos dos métodos en ambos regímenes, saturado y transitorio del TC3 (ver Figuras 4.27 y 4.28). Los resultados del caso transitorio no se incluyen por su similitud con el caso saturado, así como por brevedad. También se ha investigado el rendimiento de estas técnicas en el caso transitorio-turbulento, TC4 (véanse las figuras 4.29 y 4.30). La ventaja del HODMD está en las dos tolerancias del algoritmo, que son capaces de reducir la dimensionalidad de los datos, eliminar las redundancias espaciales, y luego retener los modos DMD más relevantes.

4.1.3 Análisis multirresolución: mPOD y mrDMD

Las técnicas multirresolución mPOD y mrDMD, extensiones del POD y del DMD respectivamente, nos dan la oportunidad de un análisis híbrido entre el POD y el FFT (mPOD) o cambiar entre resolución temporal y espectral (mrDMD). Estas técnicas tienen parámetros adicionales que deben calibrarse cuidadosamente, por lo que es necesario un conocimiento previo del caso de estudio. La capacidad de ambos métodos para segregar frecuencias altas y bajas es muy sensible al tamaño de la ventana (para el mrDMD) y al banco de filtros de frecuencias (para el mPOD). Estos métodos, y especialmente el mrDMD, requieren una cuidadosa calibración, con el fin de obtener resultados robustos, y ser capaces de diferenciar las frecuencias altas con sentido físico de las frecuencias altas espúreas. Las Figuras 4.31, 4.32, 4.33 y 4.34 muestran los tres modos mPOD más energéticos y sus correspondientes frecuencias para los cuatro casos de prueba, así como los bancos de filtros (f_c) empleados. En el TC1, puesto que queremos capturar la frecuencia adimensional principal, $St = 0,16$, y sus armónicos, el filtro de frecuencia elegido es $f_c = [0,2, 0,25]$. Para el TC2, como queremos capturar dos frecuencias, $St = 0,6$ y $St = 0,44$, el filtro de frecuencia es $f_c = [0,47, 0,5]$. Siguiendo la misma lógica para el TC3 el filtro de frecuencia es $f_c = [0,15, 0,40]$ y para el TC4 es $f_c = [250, 365, 515]$.

Los espectros mrDMD se muestran en la Fig. 4.35. Para el TC1 y el TC3 es relativamente fácil identificar la frecuencia dominante, pero para el TC2 existen varios rangos de frecuencia dominante en virtud de la turbulencia del flujo. Para el TC4 (primera parte estacionaria) es fácil detectar la frecuencia que aparecen como relevantes. La ventaja del mrDMD es que tenemos información no sólo en frecuencia sino también en tiempo. Aunque necesitamos tener un conocimiento previo de la dinámica del flujo para calibrar los parámetros del mrDMD.

A pesar de la discusión previa, los modos espaciales de todos los casos de prueba son visualmente indistinguibles de los mostrados en las Figuras 4.2, 4.6, 4.10, y -en aras de la brevedad- no se muestran aquí.

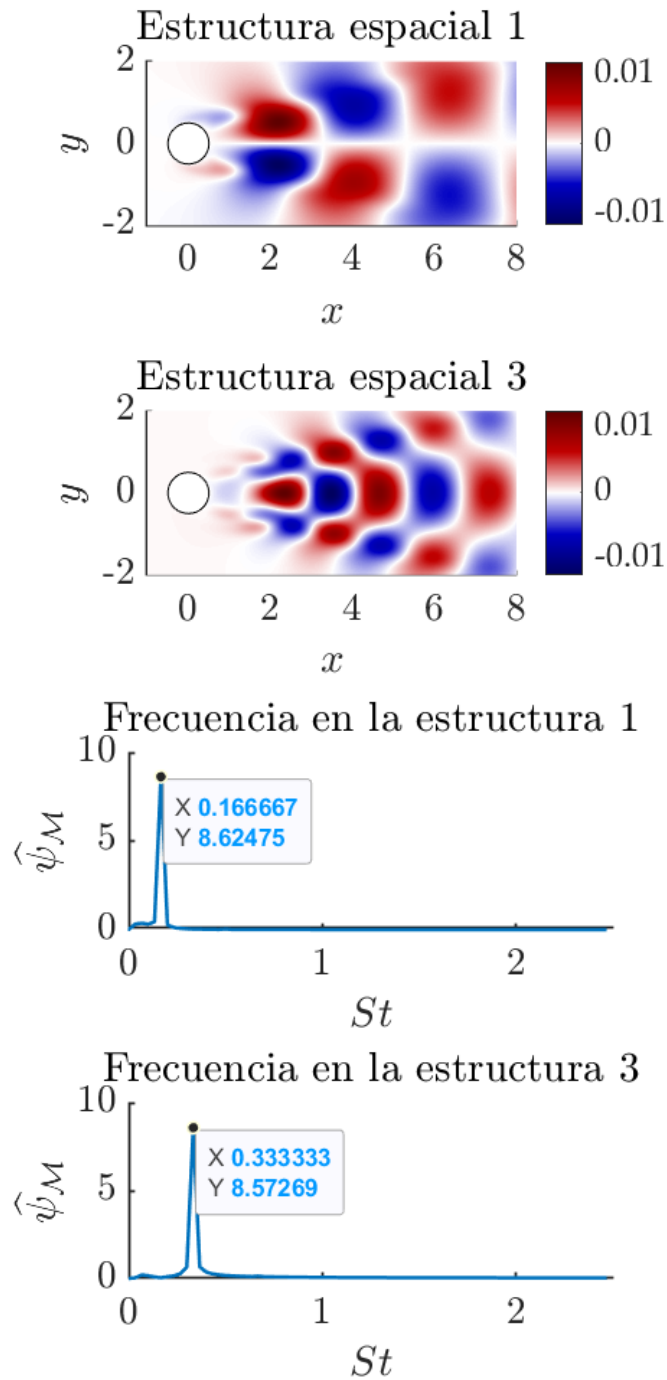


Figura 4.31: Modos mPOD y su correspondiente espectro de frecuencias para el TC1, $f_c = [0,2,0,25]$. Desde arriba hacia abajo: de los modos más a los menos energéticos.

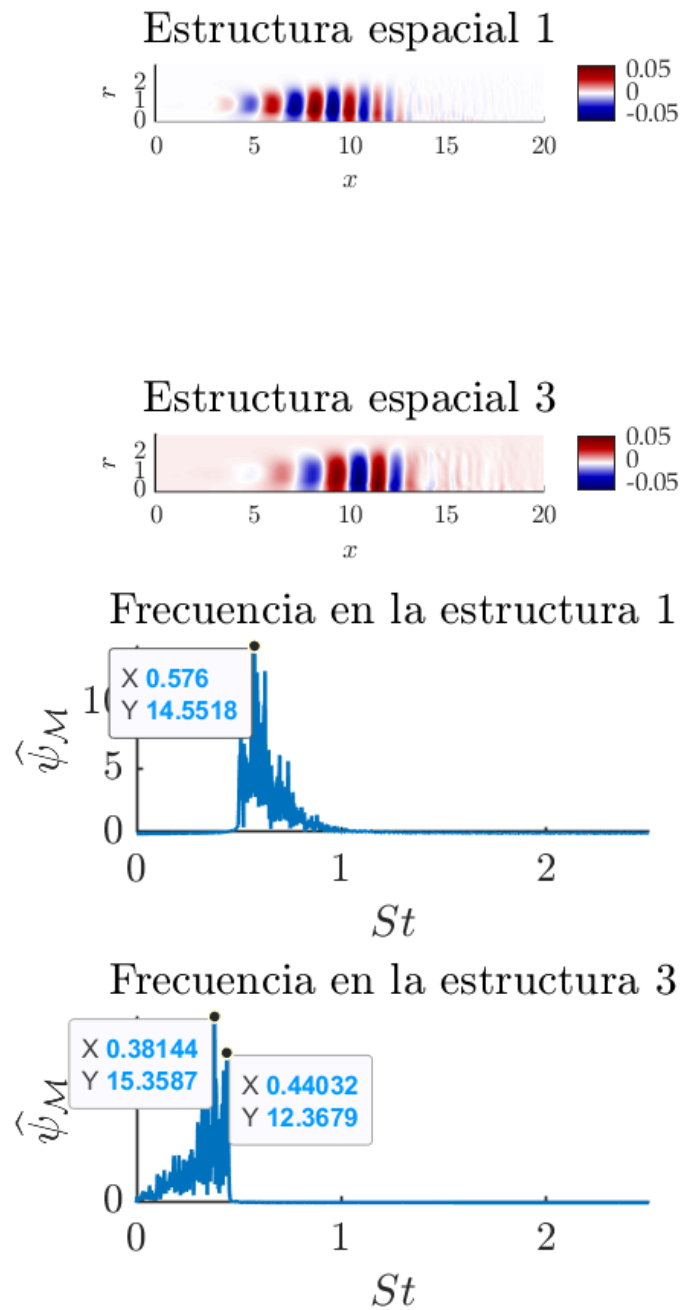
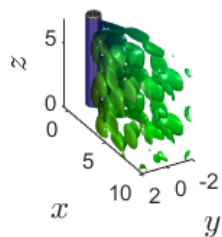
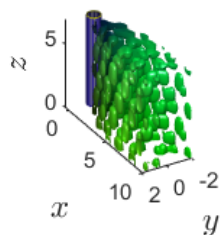


Figura 4.32: Modos mPOD y su correspondiente espectro de frecuencias para el TC2, $f_c = [0,47, 0,5]$. Desde arriba hacia abajo: de los modos más a los menos energéticos.

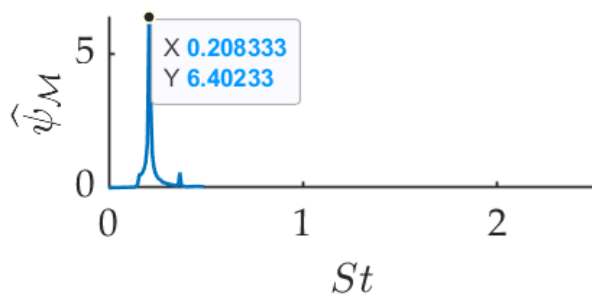
Estructura espacial 1



Estructura espacial 3



Frecuencia en la estructura 1



Frecuencia en la estructura 3

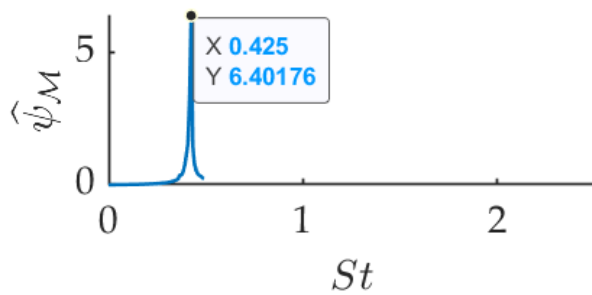


Figura 4.33: Modos mPOD y su correspondiente espectro de frecuencias para el TC3, $f_c = [0,15,0,40]$. Desde arriba hacia abajo: de los modos más a los menos energéticos.

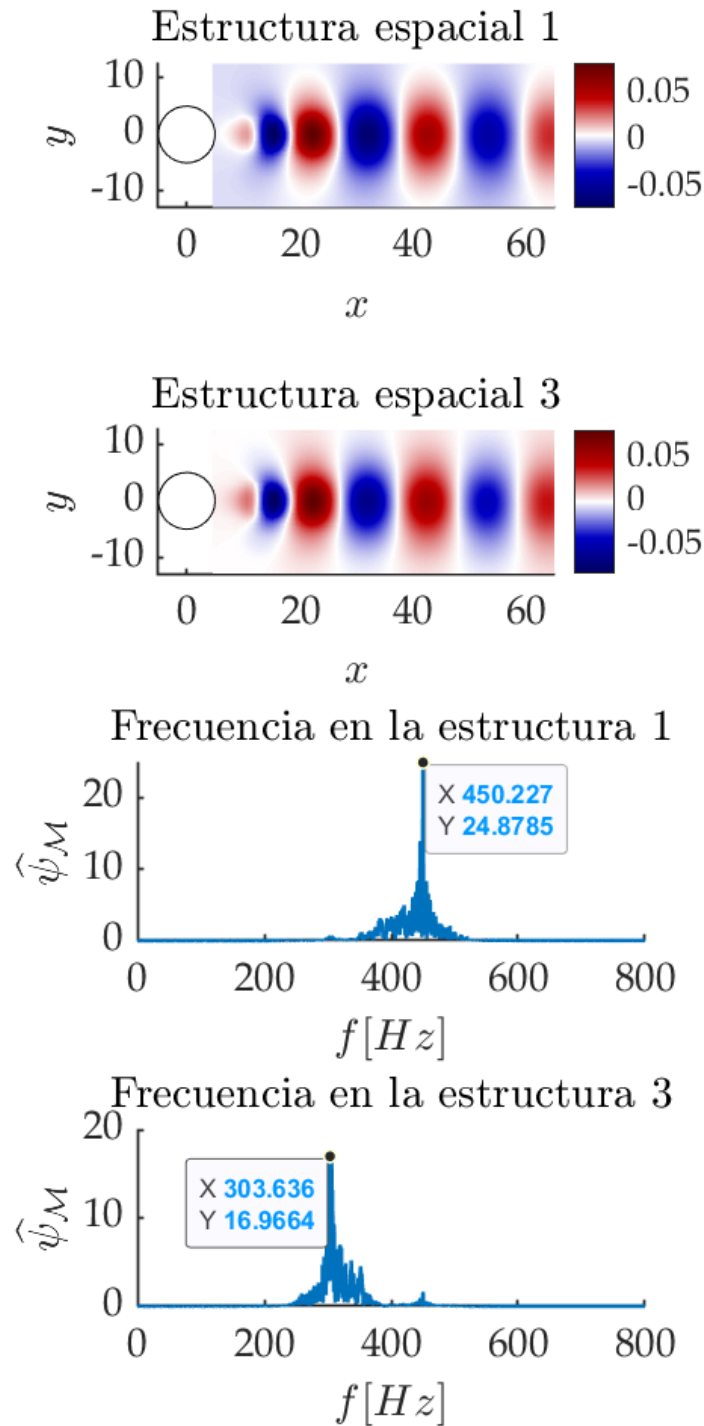


Figura 4.34: Modos mPOD y su correspondiente espectro de frecuencias para el TC4, $f_c = [250, 365, 515]$. Desde arriba hacia abajo: de los modos más a los menos energéticos.

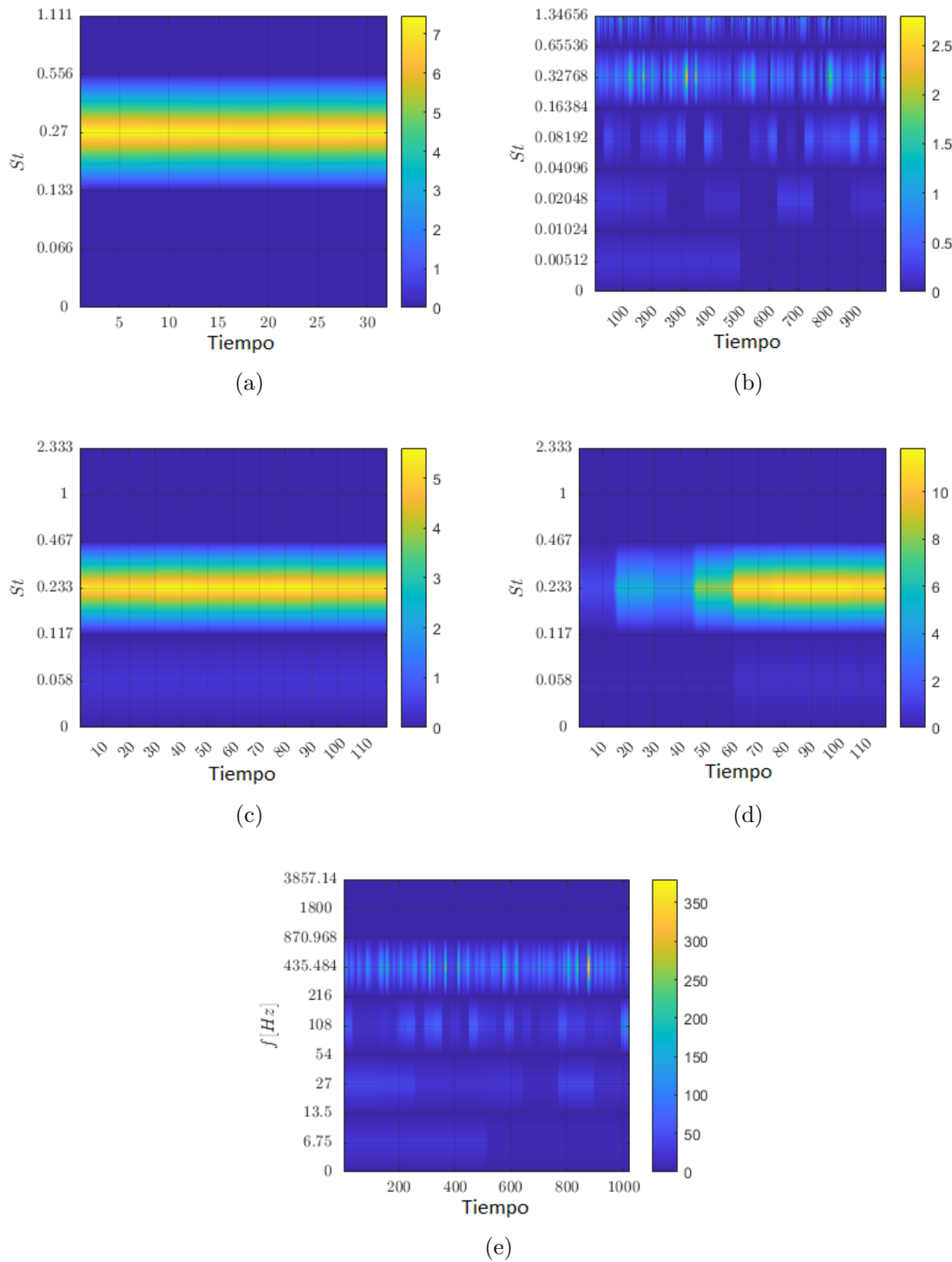


Figura 4.35: Espectro mrDMD para el TC1 (4.35(a)), el TC2 (4.35(b)) (es difícil interpretar la dinámica en este caso), el TC3, régimen saturado (4.35(c)), el TC3, régimen transitorio (4.35(d)) y el TC4, primer régimen estacionario (4.35(e))

4.1.4 Análisis del operador resolvente

En esta sección se explora el rendimiento del análisis del operador resolvente basado en datos (RA) en los cuatro casos de estudio investigados en este trabajo.

La Figura. 4.36 muestra cómo la técnica RA capta las frecuencias en todos los casos. En el caso TC1, y como puede observarse en la Fig. 4.36(a), el RA fue capaz de capturar la frecuencia deseada (0,16), pero no como frecuencia dominante única, pues se identifican otros dos armónicos como frecuencias dominantes. Asimismo, como podemos ver en la Fig. 4.37(a) los modos de forzamiento y respuesta son similares, y esto es debido a que el flujo está saturado.

Podemos observar un comportamiento similar también en el TC2, donde el RA capta las frecuencias relevantes, pero da más importancia a bajas frecuencias (véase la Fig. 4.36(b)), y sólo se pueden obtener resultados más precisos cuando las frecuencias son re-escaladas (a través de la multiplicación por St) como se muestra en la Fig. 4.36(c). En TC2 las tasas de crecimiento cambian continuamente debido a la naturaleza turbulenta del flujo. Esto conduce a la diferencia entre los modos de forzamiento y respuesta como se ve en la Fig. 4.37(b), sin embargo, el modo de respuesta es similar a los modos DMD y POD.

Los mismos comentarios pueden aplicarse también a los resultados de el TC3. Una vez más, las frecuencias relevantes se capturan tanto en el régimen transitorio (Fig. 4.36(d)) como en el régimen saturado (Fig. 4.36(e)), pero también se capturan otros armónicos como frecuencias dominantes. Los modos de forzamiento y respuesta son diferentes como se ve en la Fig. 4.37(c), pero de nuevo, el modo de respuesta es similar al modo DMD.

En cuanto al TC4, se identifica una frecuencia de $f = 390Hz$, que no parece ser físicamente relevante. La Fig. 4.38 muestra los modos RA para dos frecuencias diferentes, $f = 390Hz$ en la Fig. 4.38(b) y $f = 450Hz$ en la Fig. 4.38(c). Si los modos RA se calculan con la frecuencia dominante detectada ($f = 390Hz$), obtenemos un modo de *respuesta* cualitativamente similar a los modos POD. Sin embargo, si se utiliza la frecuencia objetivo ($f = 450Hz$), el modo de *respuesta* es ligeramente diferente. Obsérvese que el DMD no era capaz de captar la estructura coherente. Sin embargo, aunque el RA se basa en el DMD, el RA es capaz de captar la estructura coherente.

Puede surgir la duda de por qué el RA no ofrece resultados similares al HODMD (que también se basa en el DMD). Recordemos que, aunque ambos métodos se basan en el formalismo de Koopman, sus perspectivas son diferentes. Por un lado, el HODMD se basa en una hipótesis de Koopman de orden superior (utilizando d *snapshots* con desfase temporal), para mejorar las propiedades del DMD clásico. Por otra parte, la técnica RA basada en datos que se considera en este trabajo aplica el formalismo de entrada-salida, utilizando también una variante del DMD clásico (es decir, el *snapshot* $k + 1$ sólo depende del *snapshot* k anterior). Al considerar explícitamente el enfoque entrada-salida, el algoritmo RA es también una excelente herramienta para comprender el comportamiento de los flujos excitados por un término forzante. El conjunto de las consideraciones anteriores puede justificar los diferentes comportamientos del HODMD y del RA. Sin embargo, su raíz común sobre el DMD sirve para explicar por qué el RA sigue capturando las frecuencias objetivo (aunque éstas no sean dominantes) además de proporcionar modos de *respuesta* comparables con los modos

obtenidos mediante el HODMD.

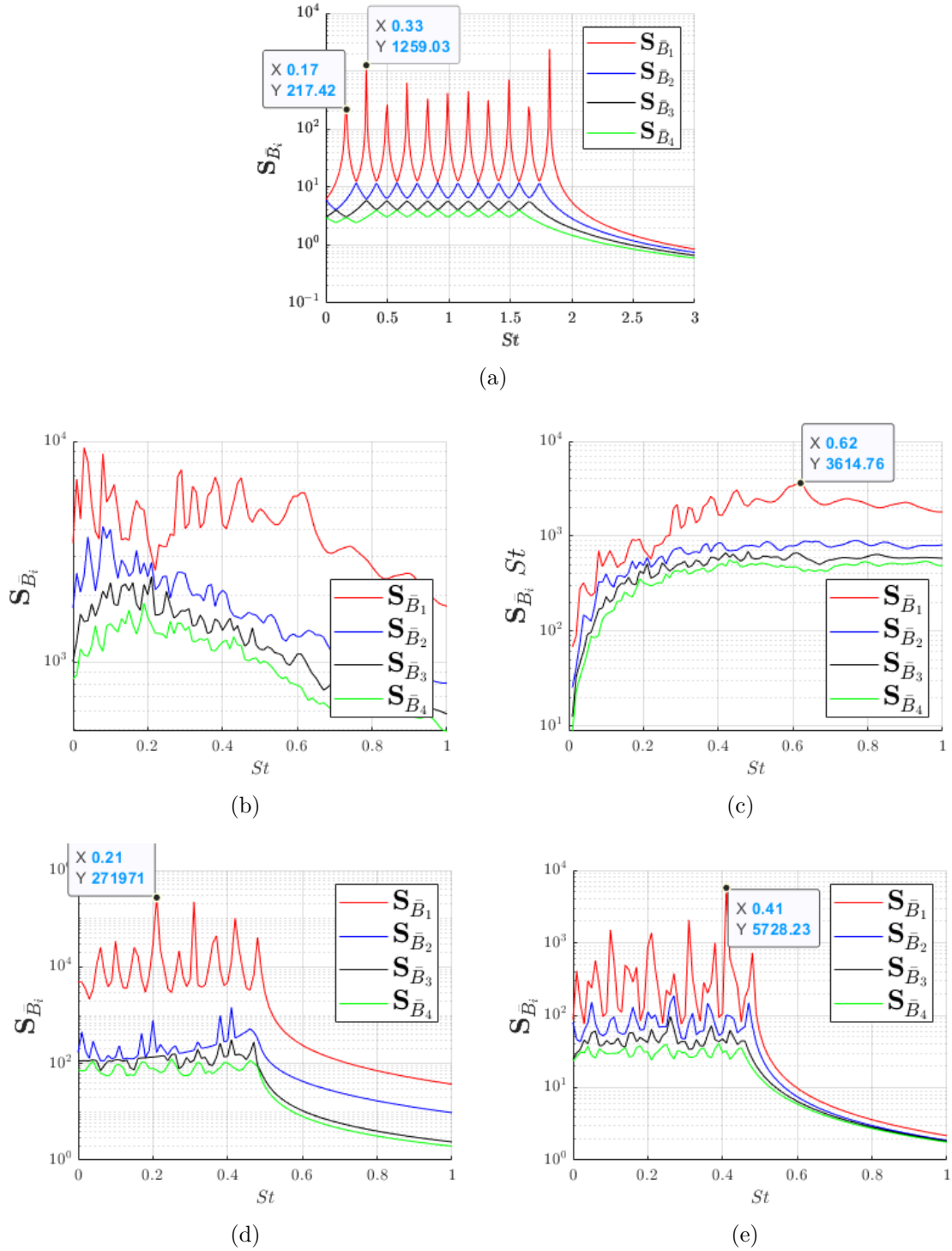


Figura 4.36: Espectro del análisis del operador resolvente comparando la frecuencia con $S_{\bar{B}}$ (ver Ec. (2.36)) para (4.36(a)) TC1, (4.36(b)) y (4.36(c)) TC2, (4.36(d)) y (4.36(e)) TC3 en régimen transitorio y saturado, respectivamente.

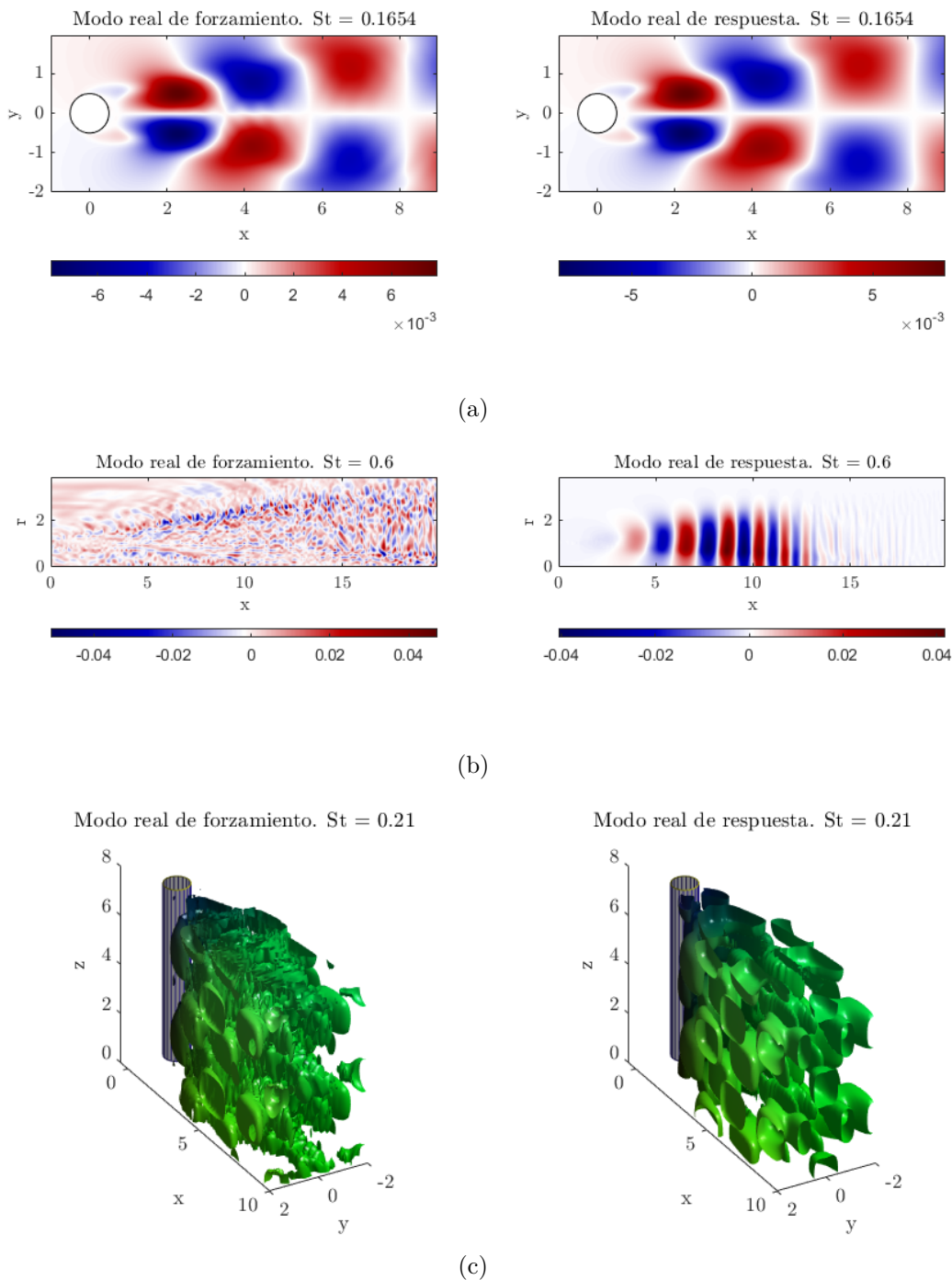
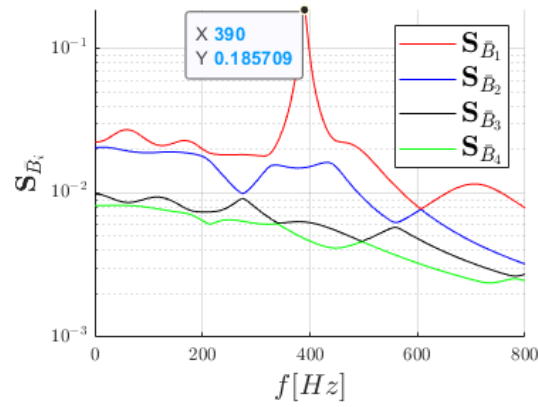
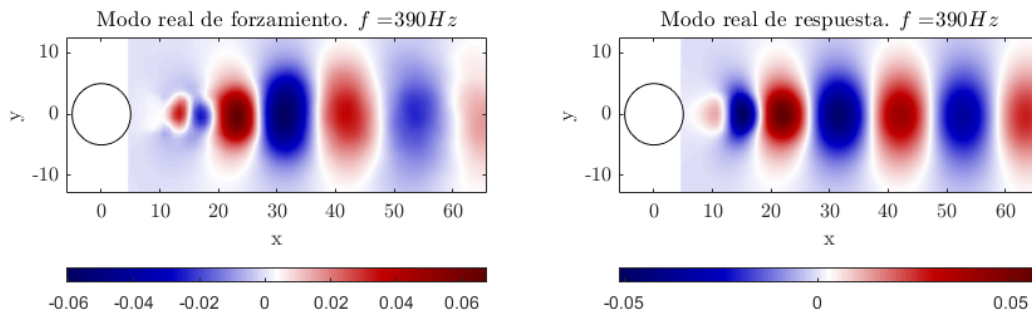


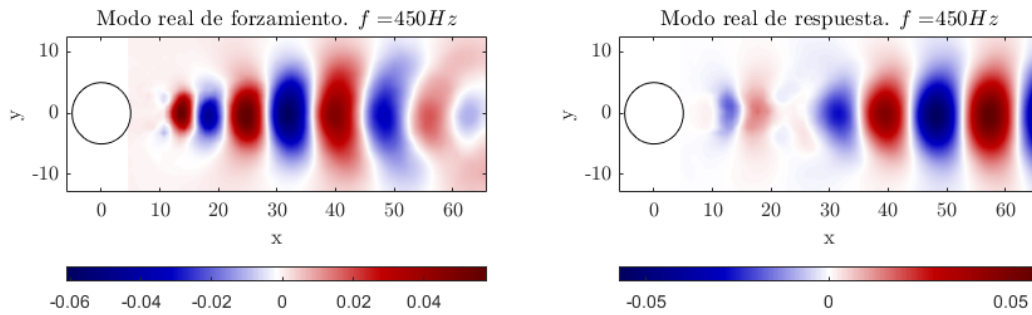
Figura 4.37: Modos del análisis del operador resolvente para (4.37(a)) TC1, (4.37(b)) TC2 y (4.37(c)) TC3 en régimen saturado, modos de *forzamiento* (izquierda) y *respuesta*, (derecha).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.38: Espectro del análisis del operador resolvente comparando la frecuencia con $S_{\bar{B}}$ (4.38(a)) (ver Ec. (2.36)) y los modos obtenidos para TC4 (conjunto de datos completo), para $f = 390 Hz$ (4.38(b)) y $f \approx 450 Hz$ (4.38(c)).

4.1.5 Análisis de Convergencia

En esta sección se estudia el error de reconstrucción para los casos de estudio TC1-TC4, aplicando los métodos POD, FFT, mPOD, DMD, HODMD y SPOD. La convergencia de los métodos en función del número de modos (r) incluidos en la reconstrucción del flujo se evalúa utilizando:

$$\mathcal{E}(r) = \frac{\|\mathbf{V}_1^{n_t} - \sum_{j=1}^r b_j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c}_j^H\|_2}{\|\mathbf{V}_1^{n_t}\|_2}, \quad (4.1)$$

para los métodos POD, FFT, mPOD, DMD y HODMD. En cuanto al análisis de convergencia del SPOD, se sigue la metodología presentada en Towne et al., 2018, que consiste en estudiar la distribución de energía para cada frecuencia: $\mathcal{E}_S(r) = \sum_{j=r}^{j=b} \lambda_j / \sum \lambda$. Nótese que $s_j = \sqrt{\lambda_j}$.

Puesto que se ha definido el criterio de amplitud para la selección de *modos* con el mrDMD y el RA, no se incluyen estas técnicas para este estudio.

Los resultados para el TC1 se muestran en la Fig. 4.39. Como era de esperar, todas las técnicas convergen rápidamente (alrededor de 10 modos).

La Fig. 4.40 presenta los resultados para el TC2. Aquí, en un flujo más complejo (chorro turbulento) observamos como los resultados del DMD y del FFT no pueden converger.

Podemos extraer las mismas conclusiones para el TC3, Fig. 4.41, donde la transitoriedad del fenómeno descrito hace más difícil la convergencia para el DMD y el FFT.

En cuanto al TC4 (véase la Fig. 4.42), el flujo es transitorio y turbulento. Podemos observar que el DMD no converge incluso considerando todos los modos. Obsérvese también que en el TC4, el HODMD converge en un límite inferior. Este límite inferior está relacionado con los valores de ε_1 y ε_2 utilizados para la limpieza del ruido. Nótese que para el HODMD el análisis es para un número específico de modos POD, por eso el error no llega a cero. El error disminuiría al aumentar los modos POD. También observamos que los métodos basados en el POD convergen más rápidamente porque cada modo está asociado a varias frecuencias, mientras que en los métodos basados en el DMD cada modo está asociado a una única frecuencia. En flujos turbulentos el número de frecuencias es alto y necesitamos un mayor número de modos DMD para reducir el error.

La Fig. 4.43 presenta la distribución de energía del SPOD para las frecuencias dominantes, para los casos de prueba TC1-TC4.

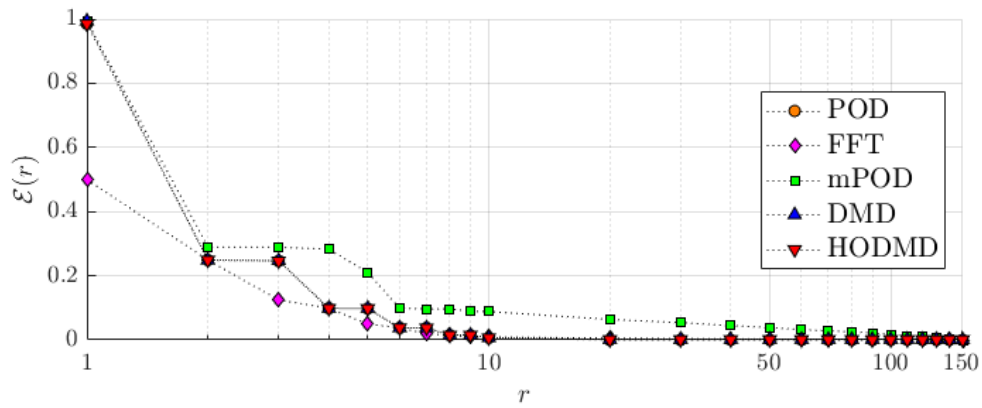


Figura 4.39: TC1: Error de reconstrucción $\mathcal{E}(r)$ en (4.1) en función de los modos retenidos (r).

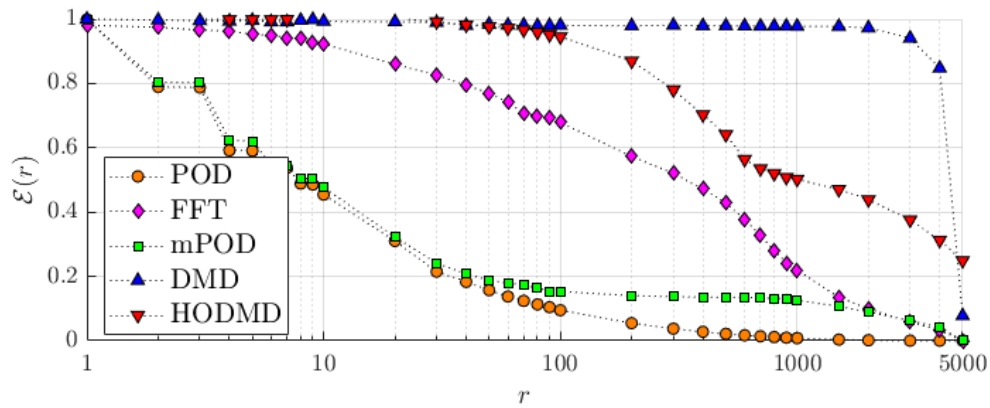


Figura 4.40: TC2: Error de reconstrucción $\mathcal{E}(r)$ en (4.1) en función de los modos retenidos (r)

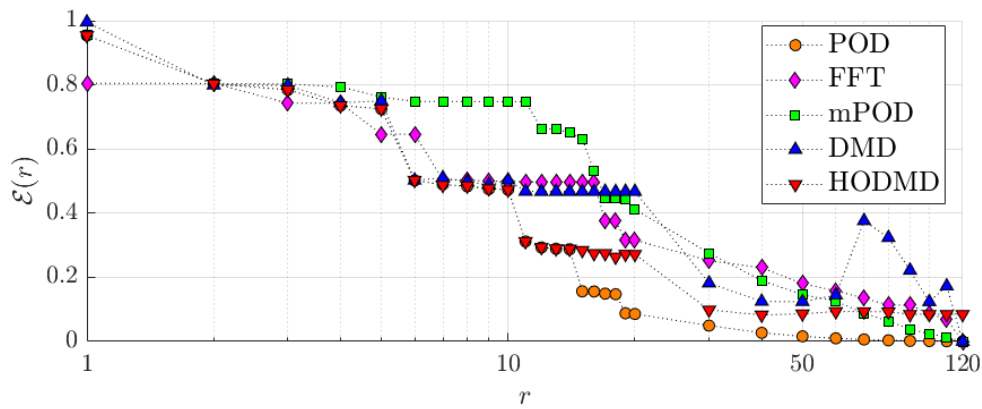


Figura 4.41: TC3 (régimen transitorio): Error de reconstrucción $\mathcal{E}(r)$ en (4.1) en función de los modos retenidos (r).

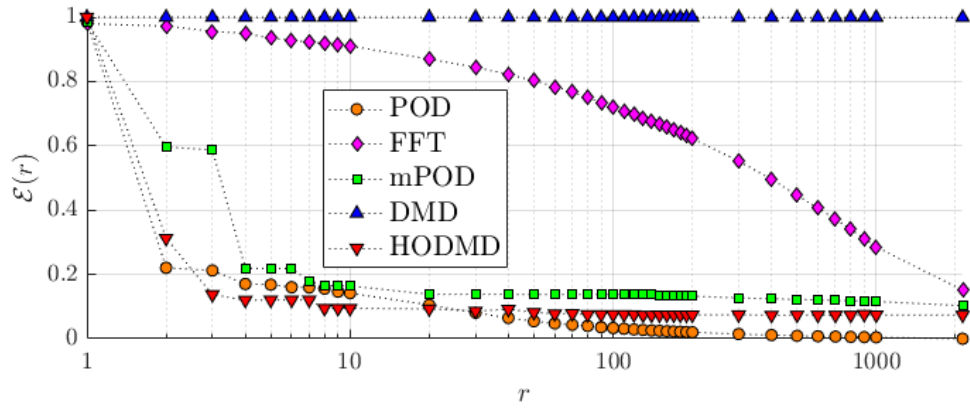


Figura 4.42: TC4 (conjunto completo de datos): Error de reconstrucción $\mathcal{E}(r)$ en (4.1) en función de los modos retenidos (r).

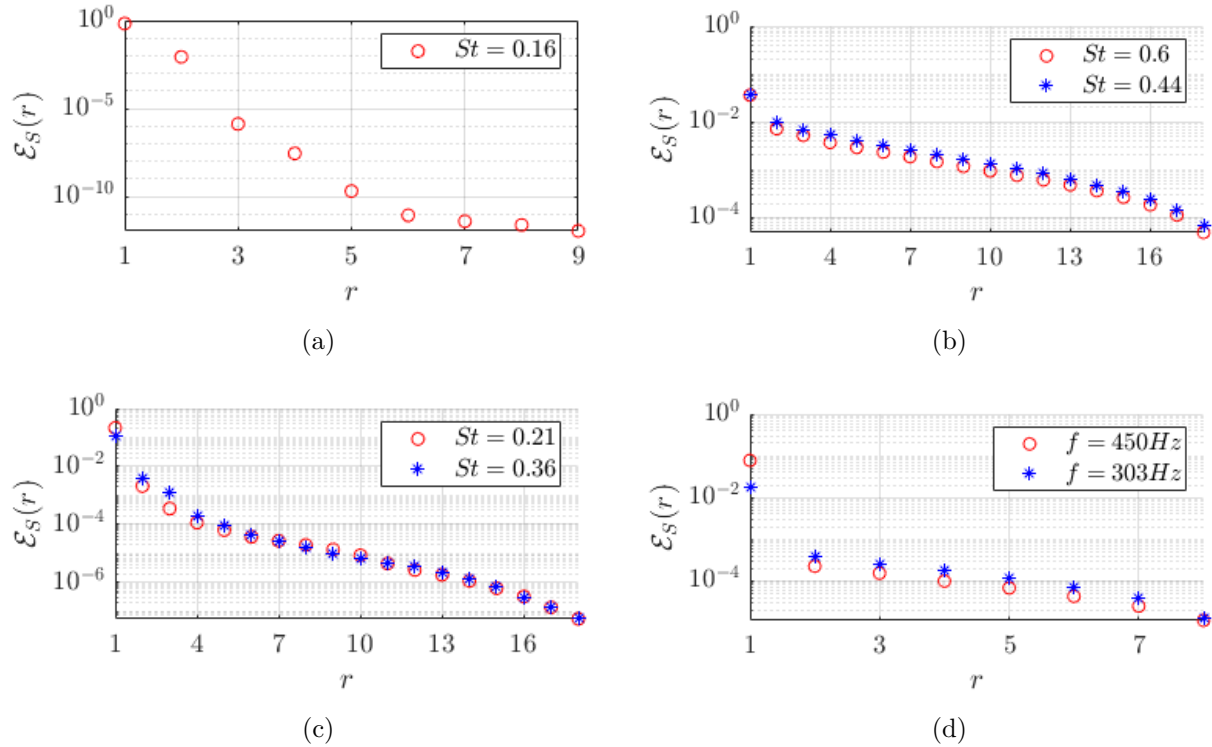


Figura 4.43: $\mathcal{E}_S(r)$ vs r modos retenidos en SPOD, para TC1 (4.43(a)), TC2 (4.43(b)), TC3 (4.43(c)) y TC4 (4.43(d)).

4.2 Efecto de la truncación temporal

En esta segunda parte del estudio, investigaremos cómo de robustas son las capacidades de los descritos métodos para capturar las frecuencias objetivos (véase la Tabla 3.1) conforme se empobrecen los datos al acortarlos progresivamente. A pesar de que este no es el uso típico de los métodos, esta prueba evalúa la eficacia de las distintas técnicas a la hora de extraer información significativa de datos parciales. Además, aunque cada técnica requiere su propia calibración, se han considerado parámetros similares para todas las técnicas, con el fin de proporcionar una comparación lo más justa posible, mostrando las ventajas y limitaciones de cada método.

Comenzamos considerando los resultados para el TC1, como puede verse en la Fig. 4.44(a), los métodos basados en el DMD funcionan muy bien en la identificación de la frecuencia dominante, incluso cuando los datos disponibles son limitados (acortados). Sin embargo, si observamos en la Fig. 4.44(b), podemos ver que las técnicas basadas en el FFT y el POD no funcionan tan bien en comparación con los métodos basados en el DMD. Si consideramos el FFT como ejemplo, podemos ver que esta técnica sólo identifica las frecuencias correctas cuando el número de *snapshots* tomados es múltiplo de 30, de lo contrario la técnica experimenta lo que se denomina “*spectral leakage*”, que también afecta al POD, SPOD o mPOD. Por lo tanto, estas técnicas pueden funcionar de forma menos óptima en caso de datos insuficientes, a diferencia de los enfoques basados en el DMD. Además, para obtener resultados similares, el FFT requiere una secuencia de datos más larga que los otros métodos, lo que puede ser una desventaja para grandes bases de datos. Sin embargo, el FFT es un método robusto que siempre identifica la dinámica relevante, incluso cuando la complejidad espectral es mucho mayor que la complejidad espacial, lo cual es un caso común en el rendimiento de las mediciones de sensores experimentales.

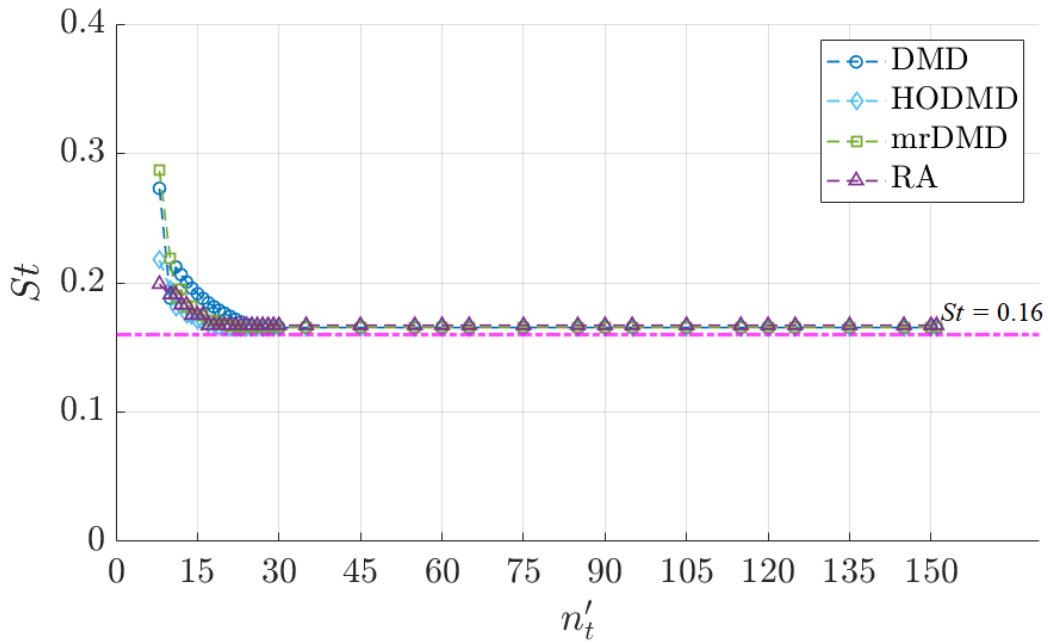
En el caso TC2, el conjunto de datos describe un campo de presión complejo y turbulento. Como es habitual en los flujos turbulentos, es necesario un gran número de muestras temporales para proporcionar una buena representación del proceso físico subyacente. De este modo, el número inicial de muestras ($n_t' = 5000$) justifica que los resultados proporcionados por los distintos métodos sean razonablemente buenos, como podemos ver en las Figuras 4.45(a) y 4.45(b). El gran número de escalas espacio-temporales que determinan la dinámica de los flujos turbulentos dificulta la identificación de las dinámicas más relevantes. Sin embargo, en el presente caso estudiado, los principales cambios en el flujo están impulsados por una fuerte inestabilidad global del flujo, que todos los métodos son capaces de identificar. La definición del resto de la dinámica varía en función del método utilizado, variando en consecuencia el error de reconstrucción de la base de datos principal.

En el caso TC3, los métodos son capaces de capturar la dinámica principal, incluso en el régimen transitorio. De forma similar al caso TC2, las inestabilidades del flujo están bien definidas. Las diferencias de los métodos se encuentran en la precisión de las frecuencias capturadas de la dinámica principal (como se muestra en las Figuras 4.46(a) y 4.46(b)).

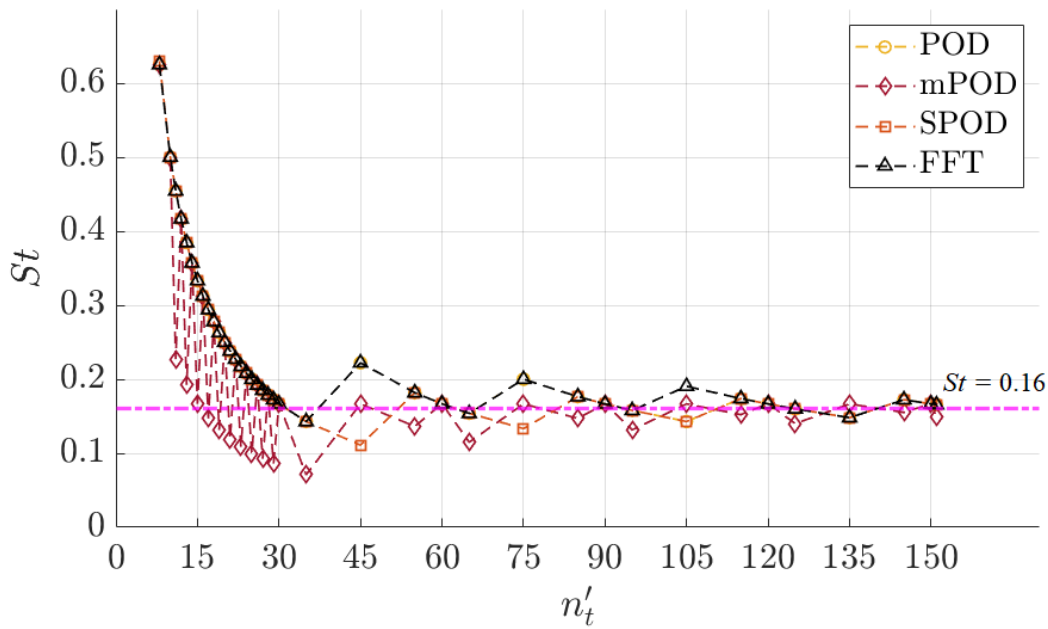
Finalmente, dado que TC4 es un caso particularmente complejo (involucra turbulencia y fenómenos transitorios con un número de Reynolds variable en el tiempo), hemos elegido las

versiones acortadas del conjunto de datos de forma que tenemos múltiples subsecuencias en el primer régimen estacionario ($t \in [0, 1,34]$ segundos o $n'_t = 4000$ *snapshots*, *i.e.* $k \in [1, 4000]$), donde podemos observar la convergencia de los métodos con datos parciales. La siguiente subsecuencia ($n'_t = 7000$) es justo después del final de la fase transitoria y *antes* (*i.e.* para n'_t comparativamente menores) de comenzar el segundo régimen estacionario. A continuación, tenemos una subsecuencia donde los últimos 2000 *snapshots* incluyen el comienzo del segundo régimen estacionario ($n'_t = 9000$) y finalmente el conjunto de datos completo ($n'_t = n_t = 13200$). Fig. 4.47 muestra los resultados para el TC4, donde podemos ver que, al igual que para el TC1, los métodos DMD, HODMD, mrDMD y RA son capaces de detectar antes la frecuencia relevante. Aunque, cuando el número de Reynolds cambia ($n'_t > 4000$), la frecuencia dominante ya no se detecta con el DMD y el RA. Una vez detectada la primera frecuencia relevante del flujo ($f \approx 450Hz$), se ha buscado también la segunda frecuencia relevante ($f \approx 303Hz$), pero cuando se produce el segundo régimen estacionario en el conjunto de datos ($n'_t > 7000$). Podemos ver en la Fig. 4.47(a) que los métodos basados en el DMD convergen antes, el HODMD y el mrDMD siguen obteniendo la frecuencia relevante ($f \approx 450Hz$) del flujo con el conjunto de datos completo y sólo el HODMD es capaz de detectar la segunda frecuencia relevante ($f \approx 303Hz$). En la Fig. 4.47(b) podemos observar que los métodos POD, mPOD, SPOD y FFT convergen después de aproximadamente 200 *snapshots*. También podemos ver que estos métodos pueden detectar la segunda frecuencia relevante, sin embargo el POD y el mPOD son ligeramente más precisos.

Por lo tanto, en cuanto a la consecución del objetivo principal, que es capturar las frecuencias dominantes $-St \approx 0,16$ para TC1, $St \approx 0,6$ para TC2, $St \approx 0,21$ y $St \approx 0,36$ para TC3 y $f \approx 450Hz$ y $f \approx 303Hz$ para TC4, todos los métodos tuvieron éxito, especialmente en el TC1. En los casos más complejos, como en TC2, TC3 y TC4, podemos notar pequeñas variaciones en las frecuencias dependiendo del número de *snapshots*, donde algunos métodos pueden sufrir *spectral leakage* y otros pueden identificar varias frecuencias con niveles de amplitud comparables. Sin embargo, estos resultados se consideran razonables debido a la complejidad del flujo, que es mayor en los flujos turbulentos y/o transitorios. En consecuencia, se espera que los métodos tengan dificultades para identificar la dinámica dominante y evitar los componentes relacionados con las pequeñas escalas de flujo del régimen transitorio o turbulento. No obstante, todos los métodos acaban convergiendo y podemos destacar el hecho de que el algoritmo HODMD es el que identifica antes la frecuencia objetivo en todos los casos considerados.

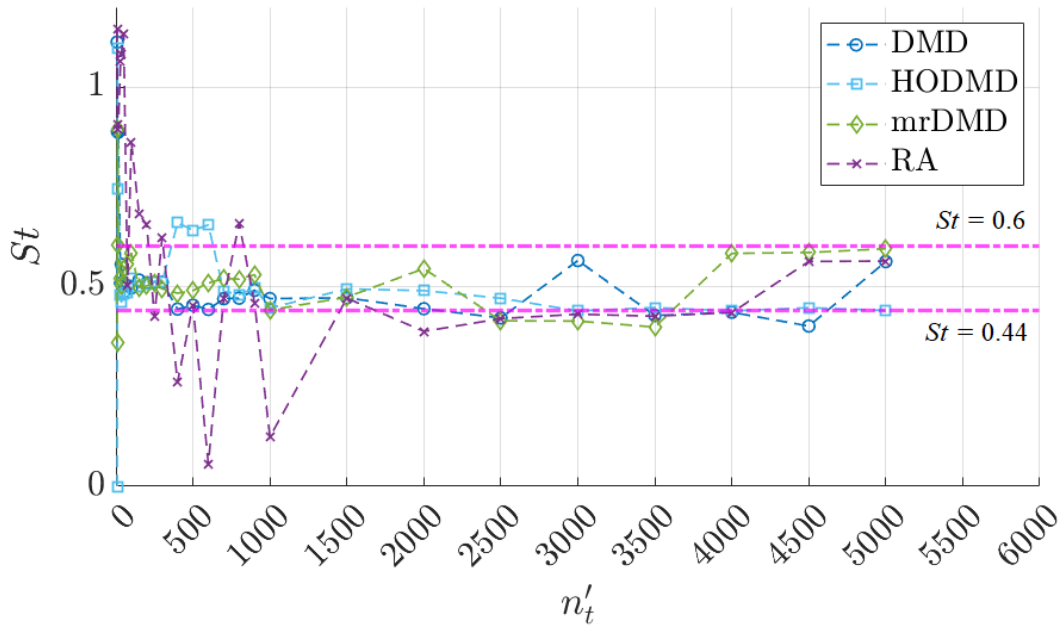


(a)

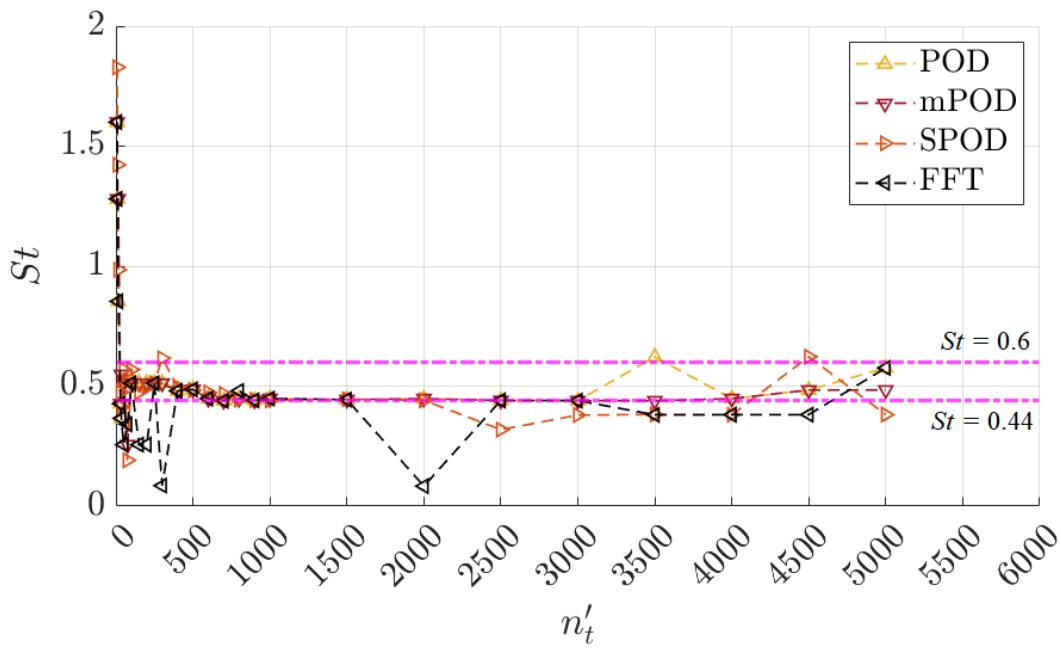


(b)

Figura 4.44: TC1: St dominante detectado *vs* longitud temporal del conjunto de datos para DMD, HODMD, mrDMD, RA (4.44(a)) y POD, mPOD, SPOD, FFT (4.44(b)).

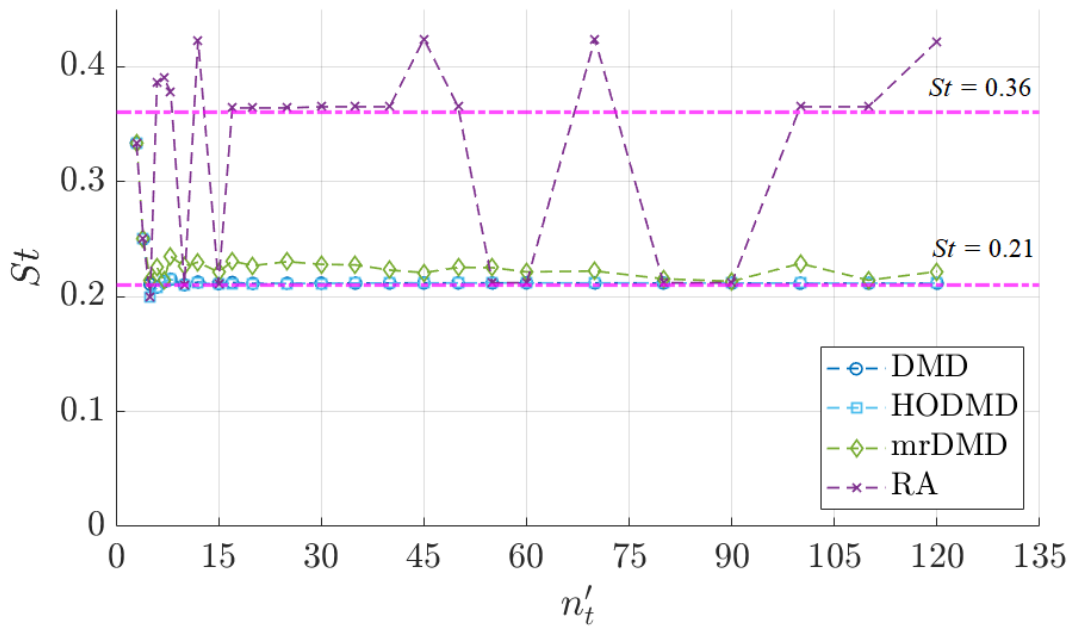


(a)

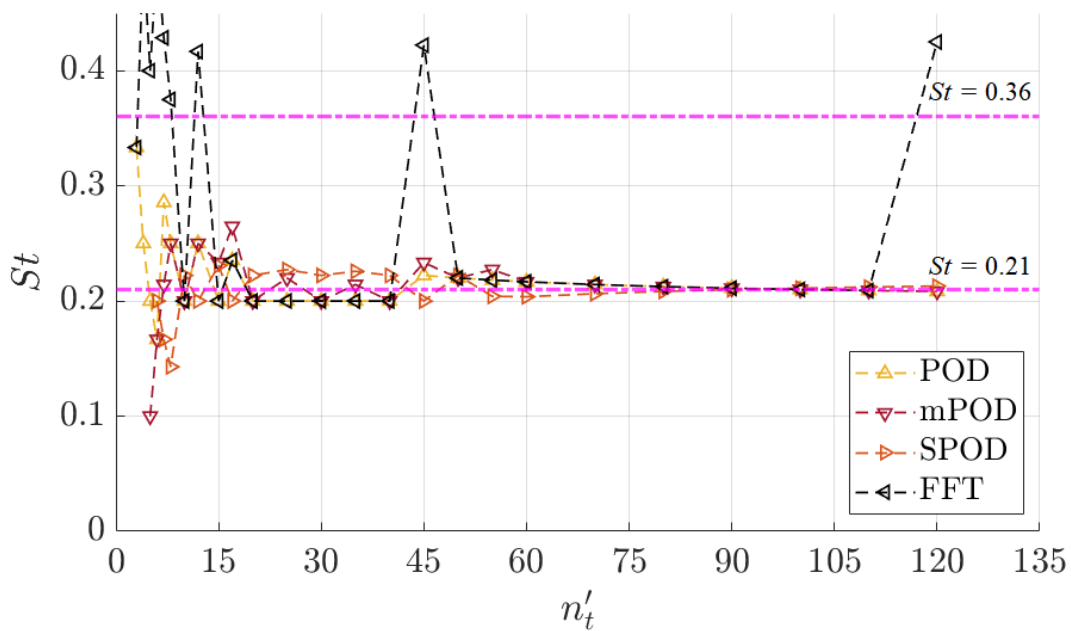


(b)

Figura 4.45: TC2: St dominante detectado vs longitud temporal del conjunto de datos para DMD, HODMD, mrDMD, RA (4.45(a)) y POD, mPOD, SPOD, FFT (4.45(b)).

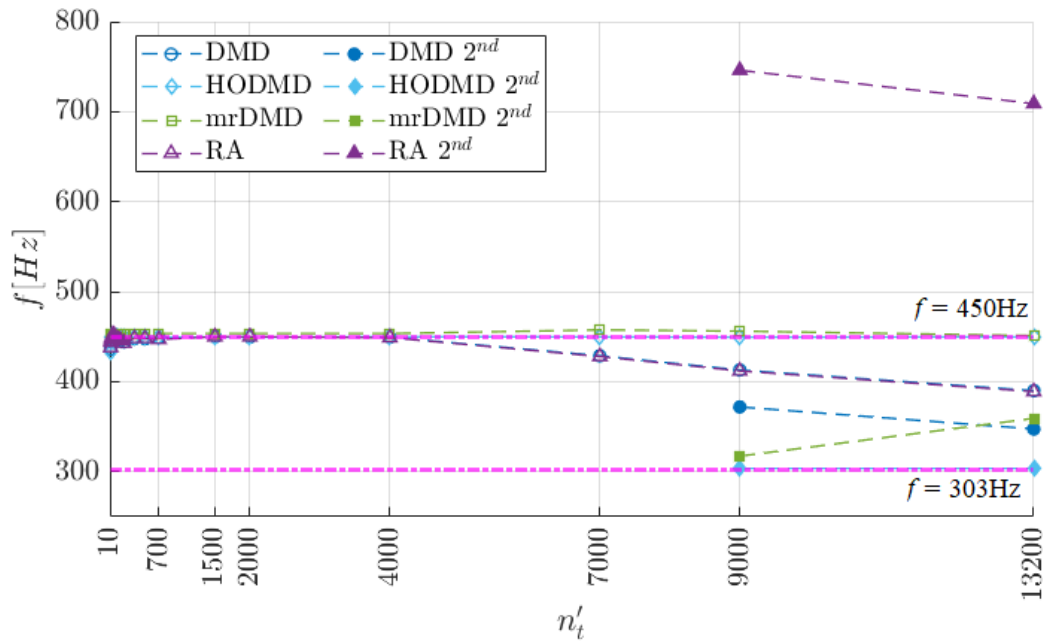


(a)

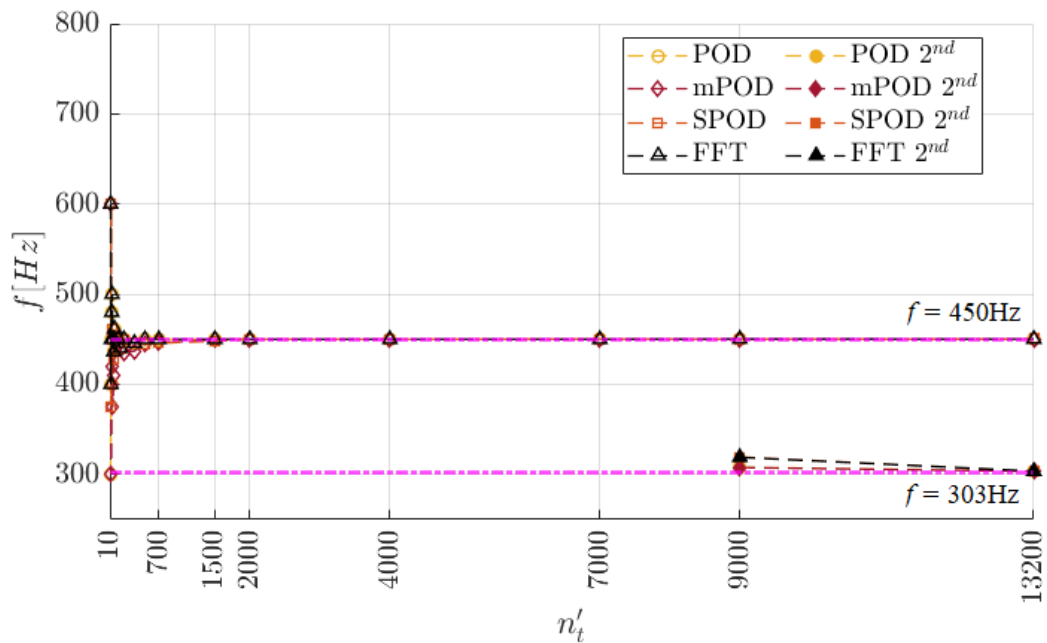


(b)

Figura 4.46: TC3: St dominante detectado vs longitud temporal del conjunto de datos para DMD, HODMD, mrDMD, RA (4.46(a)) y POD, mPOD, SPOD, FFT (4.46(b)).



(a)



(b)

Figura 4.47: TC4: St dominante detectado vs longitud temporal del conjunto de datos para DMD, HODMD, mrDMD, RA (4.47(a)) y POD, mPOD, SPOD, FFT (4.47(b)).

4.3 Escalabilidad de cálculo distribuido

Como se ha mencionado en la introducción, la extensión de los algoritmos de descomposición modal basados en datos a aplicaciones industriales requiere de su paralelización. Para tal fin, se ha iniciado un proyecto en colaboración con el Centro de Supercomputación de Barcelona (BSC) en el que se está abordando la paralelización de los métodos estudiados en esta tesis. En el momento de redactar esta disertación se han paralelizado los métodos POD, DMD y SPOD y se ha aplicado el POD paralelizado a una base de datos de un avión que tiene 273 millones de elementos. Para este caso, el tiempo de ejecución del algoritmo POD se ha reducido hasta 3,125 segundos con 4032 CPUs. La Fig. 4.48 muestra la escalabilidad de POD paralelo. Se define la *Aceleración* como la relación entre el tiempo de ejecución del algoritmo en un solo procesador (o la versión secuencial del algoritmo) y el tiempo de ejecución del algoritmo en p procesadores (o la versión paralela del algoritmo). Matemáticamente, la aceleración (S_p) para p procesadores se define como: $S_p = T_1/T_p$, donde T_1 es el tiempo de ejecución del algoritmo en un solo procesador (versión secuencial) y T_p es el tiempo de ejecución del algoritmo en p procesadores (versión paralela). Se puede observar en la Fig. 4.48 que la escalabilidad real se aproxima a la escalabilidad teórica. Para más información sobre la metodología de paralelización, la base de datos y los resultados véanse las referencias Eiximeno et al., 2023; Eiximeno, Begiashvili, Miro, Valero y Lehmkuhl, 2022; Eiximeno, Miró et al., 2022.

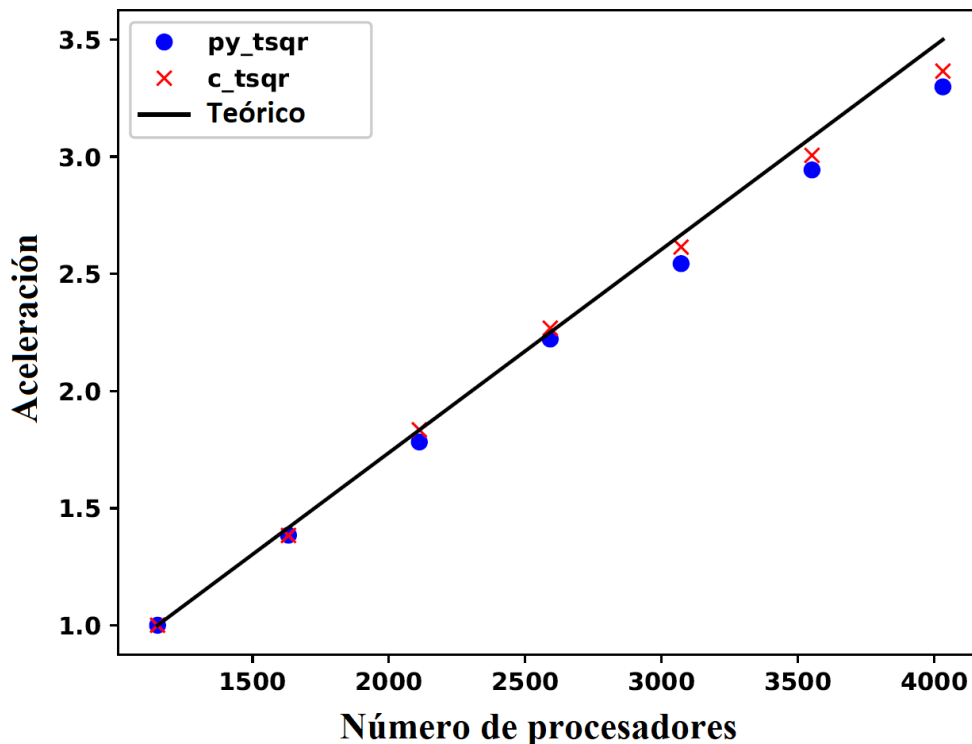


Figura 4.48: Escalabilidad del algoritmo SVD para las versiones *Python* y *Cython*. Adaptado de Eiximeno et al., 2023.

Capítulo 5

Más Allá de la Ingeniería Aeroespacial

El campo de la ingeniería aeroespacial ha experimentado avances significativos gracias a la implementación de técnicas de descomposición modal. Estas técnicas, fundamentales en el análisis de dinámicas de fluidos y estructuras complejas, están encontrando nuevos terrenos en disciplinas, como por ejemplo en el análisis de imagen médica.

Este capítulo explora la adaptación y aplicación de estos métodos avanzados de ingeniería aeroespacial en el ámbito de la medicina. Al hacerlo, no solo destacamos la versatilidad y eficacia de estas técnicas, sino que también abrimos un diálogo entre campos que, a primera vista, parecen distantes pero que comparten desafíos desde el punto de vista técnico. La transferencia de conocimientos y técnicas entre la ingeniería aeroespacial y la medicina no solo enriquece ambos campos, sino que también fomenta un enfoque más integrado y colaborativo en la ciencia y la tecnología.

En este capítulo, exploraremos los principios de la descomposición modal en ingeniería aeroespacial y discutiremos su adaptación y aplicación en el análisis médico de imágenes, enfocándonos en ecocardiografías. Mediante un caso de estudio, mostraremos los beneficios y desafíos de este enfoque interdisciplinario. Finalmente, consideraremos algunos desafíos y el potencial de estas técnicas en otros campos más allá de la ingeniería aeroespacial.

5.1 Estado del Arte

A continuación, nos adentraremos en el estado del arte de los métodos de descomposición modal avanzada, extendiendo nuestra mirada más allá de los confines tradicionales de la ingeniería aeroespacial. Proporcionamos una comprensión actualizada de cómo estas técnicas, inicialmente concebidas para abordar los desafíos de la ingeniería aeroespacial, están siendo adoptadas y adaptadas por otras disciplinas para resolver problemas igualmente complejos y variados.

Este análisis no solo destaca las innovaciones actuales, sino que también identifica tendencias emergentes y áreas de oportunidad, estableciendo un puente entre diversas áreas de investigación. Al hacerlo, esta sección no solo enriquece la comprensión del lector sobre los métodos de descomposición modal, sino que también subraya la importancia de la interdisciplinariedad

en el avance tecnológico y científico.

En Polinati et al., 2021 se propone un nuevo enfoque de fusión de imágenes basado en la descomposición modal variacional para combinar información de imágenes por resonancia magnética (MRI) y tomografía computarizada (CT), mejorando la extracción de características patológicas y ofreciendo resultados prometedores en comparación con métodos previos. En Maqsood y Javed, 2020 se introduce un esquema de fusión de imágenes multimodales basado en la descomposición de imágenes a dos escalas, mejorando la visualización y precisión diagnóstica.

Yang y Wang, 2021 combinan la descomposición empírica modal conjunta (EEMD) con una red neuronal para mejorar la precisión en la predicción de precios energéticos, demostrando su superioridad frente a modelos tradicionales. En Cao et al., 2019 se proponen dos modelos híbridos que combinan la Descomposición Empírica de Modo (EMD) con una red neuronal para mejorar la predicción de precios en la bolsa. Estos modelos combinados, validados en índices bursátiles globales, superan en rendimiento a la red neuronal por sí sola.

En ciencias marinas, se presenta una aplicación del EMD junto con el Análisis Espectral de Hilbert (HSA) para analizar series temporales no lineales y no estacionarias. Usando datos de temperatura de las aguas cercanas a la isla de la Reunión, se identifican ondas de marea de baja frecuencia y se evalúan correlaciones, concluyendo que las tendencias están perfectamente correlacionadas, mientras que los modos de alta frecuencia presentan baja correlación (Kbaier Ben Ismail et al., 2015). En Wu et al., 2018 se propone el uso del EMD para descomponer eficientemente señales de temperatura. Se introduce un criterio de parada objetivo y técnicas para mejorar la convergencia, logrando una descomposición más concisa con menor tiempo computacional.

En el ámbito de la ingeniería civil, Xu y Chen, 2004 usaron el EMD para identificar daños estructurales debido a cambios repentinos en la rigidez estructural. Utilizando un modelo de edificio de tres pisos con rigidez adicional proporcionada por dos resortes. Tras realizar diversas pruebas de vibración y simulaciones de terremoto, el EMD permitie detectar con precisión los instantes y ubicaciones de los daños basándose en los picos extraídos directamente de los datos medidos. Salehi et al., 2023 revisan la aplicación de métodos de descomposición de matrices y tensores en ingeniería civil, destacando su capacidad para analizar datos complejos y discutiendo ventajas, desafíos y futuras tendencias.

En el panorama actual de la descomposición modal, diversos métodos, como el EMD, han ganado notoriedad en campos variados debido a sus capacidades analíticas. Sin embargo, cuando nos adentramos en el ámbito específico de imágenes cardíacas, las características y singularidades de estos datos exigen técnicas adaptadas a su naturaleza. En este contexto, el HODMD emerge como una herramienta potencialmente más adecuada. Esta técnica se distingue por su capacidad para descomponer y analizar estructuras complejas en datos (no solo en el tiempo sino también en el espacio), lo que la convierte en una opción prometedora para el estudio detallado de imágenes cardíacas.

5.2 Aplicación

La Descomposición en Modos Dinámicos de Alto Orden (HODMD) representa una evolución significativa de las técnicas de descomposición modal, especialmente adecuada para el análisis detallado de sistemas dinámicos complejos Le Clainche y Vega, 2017b. Originada en el campo de la ingeniería aeroespacial, el HODMD ha demostrado ser una herramienta útil para descomponer y analizar flujos turbulentos y estructuras complejas.

Esta técnica es una extensión del método de Descomposición en Modos Dinámicos (DMD), que facilita la descomposición de datos de sistemas dinámicos en modos que representan patrones fundamentales. A diferencia del DMD clásico, el HODMD permite una mayor precisión y capacidad de resolución cuando se trabaja con sistemas complejos. El valor del HODMD radica en su habilidad para capturar y separar fenómenos sujetos a ruido, lo que es particularmente útil en la ingeniería aeroespacial donde los sistemas pueden exhibir una amplia gama de comportamientos dinámicos complejos (véanse más detalles en el Capítulo 2). Esta capacidad de resolución es lo que nos permite extender su aplicación más allá de la ingeniería aeroespacial, especialmente en el campo de la medicina.

En el contexto de la imagen médica, y específicamente en el análisis de ecocardiografías, el HODMD se presenta como una herramienta prometedora. Su aplicación en el análisis de ecocardiografías puede ofrecer una visión detallada de la dinámica cardíaca, permitiendo una caracterización más precisa de las funciones y disfunciones cardíacas. Este enfoque podría revolucionar la forma en que interpretamos y utilizamos las ecocardiografías, proporcionando no solo una mayor comprensión de la función cardíaca normal y anormal, sino también abriendo nuevas vías para diagnósticos más precisos y estrategias de tratamiento personalizadas.

Esta sección se centra en cómo la técnica HODMD se adapta y se aplica en el análisis de ecocardiografías. Con este fin, comentamos brevemente los resultados descritos en Groun et al., 2023 que consiste en la aplicación del HODMD a un caso de estudio con diferentes cardiopatías:

1. Sano
2. Infarto
3. Obesidad
4. Hipertrofia
5. Diabético

La base de datos consta de cinco conjuntos de datos de ecocardiografía, uno tomado de un sujeto sano y cuatro tomados de sujetos (ratones) diagnosticados de miocardiopatía diabética, obesidad, hipertrofia TAC o infarto de miocardio. Cada conjunto de datos consta de dos vistas, una de eje largo (LAX) y otra de eje corto (SAX). Los vídeos capturan varios latidos del corazón, con un número de $n_t = 200$ *snapshots*. Las imágenes presentadas tienen una resolución de 896×1208 píxeles, donde cada píxel está compuesto por tres canales de color (rojo, verde y azul), siendo la dimensión de cada imagen $896 \times 1208 \times 3$ y teniendo un intervalo de adquisición $\Delta t = 4 \times 10^{-3} s$.

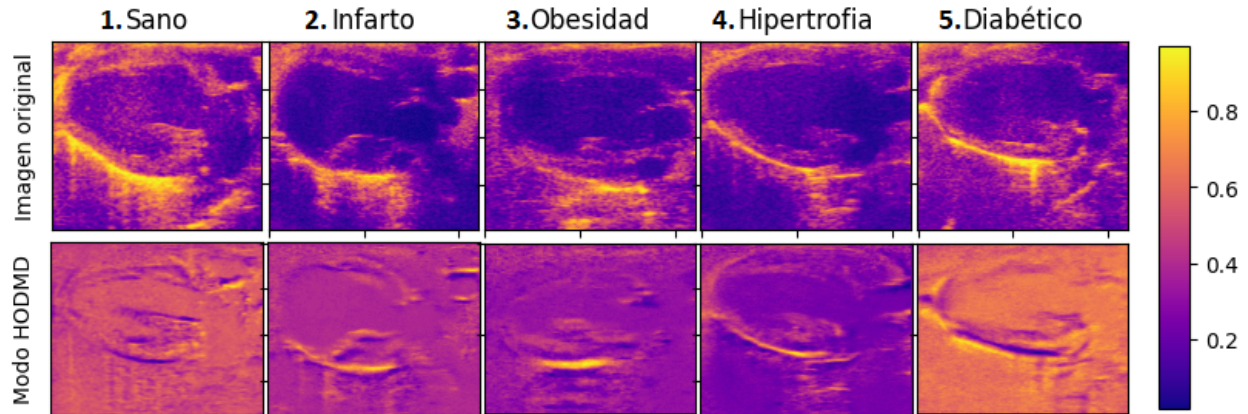


Figura 5.1: Imágenes y modos HODMD de la base de datos médica. Adaptado de Groun et al., 2023.

En esta contribución, el HODMD se utiliza como una técnica de detección de patrones, donde, incluso cuando se analiza una pequeña cantidad de datos (200 imágenes), el HODMD sigue siendo capaz de identificar y extraer los patrones dominantes relacionadas con las diferentes enfermedades cardíacas y representarlas en conjuntos de modos DMD. Estos modos DMD podrían ser muy útiles para apoyar la toma de decisiones en el diagnóstico de enfermedades cardíacas, ya que podrían utilizarse como entrada de una red neuronal convolucional (CNN) en lugar de las imágenes de ecocardiografía originales, con el fin de clasificar las diferentes enfermedades cardíacas.

La técnica HODMD ha mostrado su capacidad para extraer información detallada y relevante de los datos de ecocardiografías. Este ejemplo ilustra cómo esta técnica, al ser aplicada más allá de su uso convencional en ingeniería aeroespacial, puede proporcionar información valiosa en el campo médico. La adaptabilidad y precisión del HODMD la convierten en una herramienta prometedora para futuras investigaciones y aplicaciones clínicas. Este cruce interdisciplinario no solo realza la importancia de la innovación y la colaboración en la ciencia y la tecnología, sino que también abre nuevas vías para el avance del conocimiento interdisciplinario.

5.3 Desafíos y limitaciones

La adaptación de la técnica de descomposición modal a la medicina es un proceso complejo. Implica no solo ajustes técnicos, sino también una comprensión profunda de las necesidades y limitaciones específicas de la medicina, en especial en el ámbito de la cardiología. La aplicación de estas técnicas en imágenes médicas, como las ecocardiografías, exige una calibración precisa para asegurar su relevancia y precisión clínica. Esto puede incluir la modificación de algoritmos para su compatibilidad con el equipo y protocolos médicos, así como una validación clínica rigurosa para confirmar su eficacia y seguridad.

Uno de los retos más significativos es la superación de las diferencias conceptuales y educativas entre la ingeniería aeroespacial y la medicina. Los expertos en cada campo suelen

trabajar con paradigmas y terminologías distintas. Por lo tanto, una colaboración efectiva requiere la transferencia de conocimientos técnicos y un esfuerzo significativo en formación interdisciplinaria y desarrollo de un lenguaje común para una comunicación y entendimiento mutuo efectivos.

La integración de nuevas tecnologías en la medicina también conlleva consideraciones éticas y regulatorias importantes. La seguridad del paciente es fundamental, y cualquier nueva técnica debe pasar por pruebas rigurosas y obtener aprobaciones regulatorias antes de su uso clínico. Esto puede implicar estudios clínicos extensos y un proceso de aprobación prolongado y costoso. La privacidad y confidencialidad de los datos de los pacientes son cruciales, especialmente al integrar tecnologías innovadoras que manejan grandes cantidades de información sensible.

Los desafíos logísticos y de integración también deben ser considerados. Implementar nuevas técnicas en hospitales y clínicas requiere adaptar herramientas existentes y capacitar al personal médico. Es esencial una coordinación efectiva entre ingenieros, científicos, médicos y administradores para asegurar una integración fluida y eficiente de nuevas tecnologías, beneficiando así a los pacientes.

En conclusión, aunque la aplicación de técnicas de ingeniería aeroespacial en la medicina tiene un gran potencial, los desafíos técnicos, conceptuales, éticos, regulatorios, logísticos y de integración necesitan una consideración cuidadosa. Superar estos obstáculos es vital no solo para el éxito de estas aplicaciones interdisciplinarias, sino también para el progreso de la medicina y la mejora de la atención al paciente.

5.4 Conclusión

La colaboración entre la ingeniería aeroespacial y la medicina va más allá de la mera transferencia de herramientas técnicas; representa un cambio fundamental en nuestro enfoque hacia problemas complejos. Esta interacción resalta la relevancia de las perspectivas interdisciplinarias en ciencia y tecnología, donde las soluciones novedosas a menudo surgen en la intersección de campos distintos. Al ampliar nuestra visión más allá de las barreras tradicionales de las disciplinas, descubrimos métodos inesperados y más efectivos para enfrentar los retos, evidenciando que la innovación frecuentemente necesita una mentalidad que supera las fronteras convencionales del conocimiento.

La adaptación exitosa de técnicas de la ingeniería aeroespacial en la medicina no solo subraya la versatilidad de estas técnicas, sino que también ilumina el potencial sinérgico de las colaboraciones interdisciplinarias. De esta forma se puede mejorar significativamente nuestra capacidad para resolver problemas complejos y avanzar en múltiples campos simultáneamente. Esta sinergia tiene el potencial no solo de avanzar en la ciencia y la tecnología, sino también de mejorar la calidad de vida y el bienestar humano.

Mirando hacia el futuro, esta colaboración interdisciplinaria abre un nuevo horizonte de oportunidades y desafíos. Mientras continuamos explorando y desarrollando estas técnicas, también debemos ser conscientes de los obstáculos, tanto prácticos como conceptuales, que podrían surgir. La clave para el éxito futuro radica en nuestra capacidad para anticipar,

entender y abordar estos desafíos de manera proactiva, asegurando así que los beneficios de tales colaboraciones sean plenamente realizados.

En conclusión, este capítulo destaca cómo la integración de la ingeniería aeroespacial en la medicina, especialmente a través de la aplicación de técnicas de descomposición modal en ecocardiografías, no es solo una promesa de progreso técnico, sino también un testimonio de la importancia de la colaboración interdisciplinaria.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

La ingeniería aeroespacial, como disciplina, se enfrenta constantemente a desafíos que requieren una comprensión profunda de fenómenos complejos. La dinámica de fluidos, en particular, presenta escenarios donde la interacción de múltiples factores y variables puede dar lugar a comportamientos y patrones intrincados. Las técnicas de descomposición modal han surgido como herramientas eficaces en este contexto, permitiendo a los investigadores desentrañar y comprender la esencia de estos sistemas dinámicos al descomponer conjuntos de datos complejos en modos o componentes dominantes.

En la era actual de la ciencia de datos, los métodos basados en datos, o *data-driven*, han ganado relevancia en diversas disciplinas científicas. Estos métodos, que se basan en el análisis directo de grandes conjuntos de datos en lugar de modelos teóricos preestablecidos, ofrecen una perspectiva única para identificar y extraer patrones y características subyacentes en sistemas complejos. En el ámbito de la ingeniería aeroespacial, la adopción de técnicas *data-driven* ha demostrado ser una herramienta valiosa, permitiendo abordar problemas con una perspectiva renovada y un enfoque más directo de la información contenida en los datos.

A lo largo de los años, se han desarrollado y refinado diversos métodos de descomposición modal, cada uno con sus propias características y aplicaciones. Esta tesis se ha centrado en proporcionar una evaluación detallada y sistemática de las técnicas de descomposición modal más prominentes en la actualidad, con un énfasis especial en su naturaleza basada en datos y su aplicabilidad tanto en el contexto de la ingeniería aeroespacial como en campos más allá de esta disciplina.

6.1 Conclusiones

En esta tesis, se han comparado ocho técnicas diferentes de descomposición modal con el objetivo de introducir una evaluación crítica sobre cuáles son las principales ventajas y limitaciones de cada método en función de su aplicación. Esta comparación afecta a tres métodos clásicos Transformada Rápida de Fourier (FFT), Descomposición en modos Propios Ortogonales (POD) y Descomposición en Modos Dinámicos (DMD); cuatro extensiones de los métodos clásicos: SPOD, mPOD, HODMD y mrDMD; y por último, la implementación

basada en datos del análisis del operador de la resolvente (RA).

Para que la comparación sea lo más informativa posible, todas las técnicas se han aplicado a cuatro casos de estudio. Los casos de estudio se han codificado como TC1, TC2, TC3 y TC4 y se han ordenado en función de su nivel de complejidad. Los conjuntos de datos utilizados, que están públicamente disponibles, son los siguientes: TC1 describe el campo de velocidad de la estela laminar alrededor de un cilindro a $Re_D = 100$; el segundo caso de estudio, TC2, describe el campo de presión de un chorro turbulento a $Re_D = 10^6$, y $M = 0,4$. El tercer caso de estudio, TC3, es el campo de velocidad de la estela transitoria tridimensional alrededor de un cilindro a $Re_D = 280$; y el cuarto y último caso de estudio, TC4, es una estela transitoria y turbulenta alrededor de un cilindro, obtenida a partir de experimentos realizados en el túnel de viento de baja velocidad (esencialmente incompresible), con un número de Reynolds que parte de $Re_D = 4000$ y va disminuyendo hasta $Re_D = 2600$.

La primera contribución significativa de esta tesis radica en la presentación sistemática y uniforme de diversos métodos de descomposición modal basados en datos. Esta uniformización proporciona un marco coherente y estructurado que facilita la comprensión y comparación de las características intrínsecas y las capacidades de cada método. Además, se ha introducido una taxonomía meticulosa que categoriza estos métodos en función de sus características fundamentales: clásica (POD, DMD, FFT), redundancia (SPOD, HODMD), multirresolución (mPOD, mrDMD) y entrada-salida (RA). Esta clasificación no solo permite una identificación más precisa de cada técnica, sino que también destaca sus aplicabilidades y limitaciones en contextos específicos, proporcionando así una herramienta esencial para la selección adecuada del método en función de la naturaleza y requisitos del problema en cuestión.

A continuación, se evalúa exhaustivamente el rendimiento de estos algoritmos en lo que respecta tanto a la precisión de los resultados como a su funcionamiento con cantidades limitadas de datos.

En cuanto a los *métodos clásicos*, POD, DMD y FFT, todos los métodos fueron capaces de identificar la frecuencia dominante como $St \approx 0,16$ para el TC1; sin embargo, no han funcionado tan bien para el TC2, ya que todos han presentado dificultades para la separación de la frecuencia relevante en $St \approx 0,6$ de otras estructuras. Para el TC3, cuando el DMD fue capaz de captar fácilmente las frecuencias principales en $St \approx 0,21$ y $St \approx 0,36$, tanto el POD como el FFT tuvieron algunas dificultades para identificar las frecuencias exactas. En el caso del TC4, que presenta fenómenos complejos como transitorios-turbulentos, el DMD no fue capaz de extraer estructuras coherentes ni la frecuencia dominante ($f = 450Hz$ o $f = 303Hz$) al estudiar el conjunto de datos completo.

En cuanto a los métodos mejorados, comenzamos con los resultados obtenidos con el SPOD y el HODMD. Los resultados obtenidos por el algoritmo HODMD han sido bastante precisos y robustos, ya que ha sido capaz de capturar las frecuencias relevantes en todos los casos de prueba. Para el SPOD, las técnicas fueron capaces de capturar las frecuencias deseadas, aunque esta técnica, que normalmente trata con datos estadísticamente estacionarios, podría sufrir de *spectral leakage*, ya que depende del FFT. Sin embargo, aunque el TC4 sea un caso transitorio, el SPOD fue capaz de detectar ambas frecuencias dominantes.

En cuanto al mPOD y mrDMD, ambos métodos han identificado sin problemas la frecuencia

principal en el TC1. Sin embargo, se ha observado un ligero error en las frecuencias en el TC2 y el TC3. En cuanto a los modos espaciales obtenidos por todos los métodos mencionados anteriormente, todos eran visualmente indistinguibles y coherentes.

En cuanto a los resultados del RA: para los casos de estudio considerados, el RA ha sido capaz de captar las frecuencias objetivo, pero no como dominantes: siempre ha habido otros modos a los que se ha dado más importancia. Además, los modos de *forzamiento* y *respuesta* son similares en el TC1, debido a la simplicidad del caso de estudio. En los casos de estudio más complejos, el modo de *forzamiento* y el modo de *respuesta* son notablemente diferentes. Sin embargo, los modos de *respuesta* son siempre similares a los modos obtenidos por las otras técnicas. A pesar de que el RA se basa en el DMD y el DMD no pudo extraer la estructura espacial coherente en el TC4, el RA ha sido capaz de capturar la estructura coherente cuando se trabaja con el conjunto de datos completo.

A continuación, se condujo un análisis comparativo entre el rendimiento de estos métodos en la identificación de las frecuencias relevantes cuando se trunca la extensión temporal de las bases de datos. Los resultados obtenidos implican lo siguiente: en los casos en que los datos son limitados, los métodos basados en el DMD superan a los métodos basados en el FFT y el POD. Como los métodos basados en el DMD ofrecen resultados precisos, en su mayoría independientemente del tamaño del conjunto de datos y de la longitud de la ventana, mientras que los métodos basados en el POD pueden verse afectados por *spectral leakage*, si no se calculan cuidadosamente. No obstante, cuando se toman grandes cantidades de datos, todos los métodos ofrecen, de un modo u otro, resultados comparables. Además, para algunos de los métodos la frecuencia dominante detectada fluctúa en función de la cantidad de datos disponibles, y esto está relacionado con la complejidad del flujo.

Con respecto al cálculo distribuido, se ha abordado con profundidad la necesidad y la eficacia de la paralelización de algoritmos de descomposición modal, especialmente en contextos industriales ante problemas con una gran huella en memoria. A través de una colaboración fructífera con el Centro de Supercomputación de Barcelona (BSC), se han optimizado y paralelizado los métodos de descomposición modal, poniendo un énfasis particular, hasta la fecha, en los algoritmos POD y DMD.

La implementación paralelizada del algoritmo POD ha demostrado ser eficaz, como se evidencia al aplicarlo a una base de datos de un avión con 273 millones de elementos y 3 variables (componentes de velocidad), $n_s = n_p \times n_v = 273 \cdot 10^6 \times 3 = 819 \cdot 10^6$. Esta adaptación ha logrado una reducción importante en el tiempo de ejecución, alcanzando un tiempo de solo 3,125 segundos con el uso de 4032 CPUs. Esta mejora en la eficiencia computacional no solo confirma la importancia de la paralelización en el análisis de sistemas dinámicos en ingeniería aeroespacial, sino que también establece un precedente para futuras investigaciones.

Estos avances en cálculo distribuido y paralelización, junto con la aplicación de métodos de descomposición modal en contextos variados, subrayan la versatilidad y aplicabilidad de las técnicas presentadas en esta tesis. Eiximeno et al., 2023; Eiximeno, Begiashvili, Miro, Valero y Lehmkuhl, 2022; Eiximeno, Miró et al., 2022 proporcionan una base detallada para futuras investigaciones y desarrollos en el campo del análisis de sistemas dinámicos.

6.2 Trabajos futuros

El estudio y aplicación de métodos de descomposición modal, especialmente aquellos basados en datos, ha abierto un abanico de posibilidades en el análisis de sistemas dinámicos. A pesar de los avances presentados en esta tesis, hay varias direcciones que merecen ser exploradas en el futuro:

- Avances en métodos de descomposición modal: ante la creciente complejidad de los sistemas y conjuntos de datos, emerge la imperativa necesidad de concebir y desarrollar metodologías avanzadas de descomposición modal. Estas metodologías, idealmente, estarían diseñadas para abordar eficientemente fenómenos no lineales, adaptarse a escalas de datos variables y exhibir robustez frente a perturbaciones y ruido inherente.
- Optimización y paralelización: si bien se ha logrado paralelizar algoritmos como el DMD y el POD, existe un potencial significativo en la paralelización de otros métodos de descomposición modal y en la optimización de los ya paralelizados para garantizar una escalabilidad y eficiencia aún mayores.
- Exploración de campos: aunque hemos abordado la ingeniería aeroespacial y el análisis de imágenes cardíacas, los métodos de descomposición modal basados en datos tienen un amplio espectro de aplicaciones en otros campos. Sería relevante investigar su utilidad en áreas como la meteorología, la oceanografía, y otros campos de la ciencia y la ingeniería.
- Integración con técnicas avanzadas de aprendizaje automático: la combinación de métodos de descomposición modal con técnicas avanzadas de aprendizaje automático, como redes neuronales, podría ofrecer capacidades mejoradas para capturar fenómenos inherentes y no lineales en conjuntos de datos complejos.
- Desarrollo de herramientas y *software*: a medida que estos métodos se vuelven más populares y su aplicabilidad se expande, será esencial desarrollar herramientas y *software* más amigables y eficientes que faciliten su implementación en diferentes contextos.
- Estudios comparativos: Aunque se ha realizado una comparativa exhaustiva de varios métodos en esta tesis, siempre hay espacio para incluir más técnicas emergentes y realizar comparativas (incluso con diferentes enfoques) en conjuntos de datos aún más desafiantes.

En conclusión, los métodos de descomposición modal basados en datos presentan un futuro lleno de oportunidades y desafíos. A medida que la tecnología y las técnicas avanzan, es esencial continuar con la investigación y exploración en este campo, buscando siempre mejorar y expandir las capacidades de estos métodos.

Referencias

- Abreu, L. I., Cavalieri, A. V., Schlatter, P., Vinuesa, R., & Henningson, D. S. (2020). Spectral proper orthogonal decomposition and resolvent analysis of near-wall coherent structures in turbulent pipe flows. *J. Fluid Mech.*, 900.
- Amor, C., Schlatter, P., Vinuesa, R., & Le Clainche, S. (2023). Higher-order dynamic mode decomposition on-the-fly: A low-order algorithm for complex fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 475, 111849.
- Barkley, D., & Henderson, R. (1996). Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 322, 215-241.
- Barros, G. F., Grave, M., Viguerie, A., Reali, A., & Coutinho, A. L. (2022). Dynamic mode decomposition in adaptive mesh refinement and coarsening simulations. *Eng. Comput.*, 38(5), 4241-4268.
- Begiashvili, B., Groun, N., Garicano-Mena, J., Le Clainche, S., & Valero, E. (2023). Data-driven modal decomposition methods as feature detection techniques for flow problems: A critical assessment [041301]. *Phys. Fluids*, 35(4).
- Begiashvili, B., Garicano-Mena, J., Le Clainche, S., & Valero, E. Feature detection algorithms and modal decomposition methods. En: *The 8th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences; Engineering*, 2022.
- Beltrán, V., Le Clainche, S., & Vega, J. M. (2022). An Adaptive Data-Driven Reduced Order Model Based on Higher Order Dynamic Mode Decomposition. *J. Comput. Phys.*, 92(1), 12.
- Berkooz, G., Holmes, P., & Lumley, J. (1993). The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 25(1), 539-575.
- Blackburn, H., Marques, F., & Lopez, J. (2005). Symmetry breaking of two-dimensional time-periodic wakes. *J. Fluid Mech.*, 522, 395-411.
- Borée, J. (2003). Extended proper orthogonal decomposition: a tool to analyse correlated events in turbulent flows. *Exp. Fluids*, 35(2), 188-192.
- Boyce, W., DiPrima, R., & Meade, D. (2017). *Boyce's Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley.
- Brunton, S. L., & Kutz, J. (2019). *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press.
- Cao, J., Li, Z., & Li, J. (2019). Financial time series forecasting model based on CEEMDAN and LSTM. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 519, 127-139.
- Cavalieri, A. V., & da Silva, A. F. (2021). Cross proper orthogonal decomposition. *Phy. Rev. Fluids*, 6(1), 014602.

- Chen, K., Tu, J., & Rowley, C. (2012). Variants of Dynamic Mode Decomposition: boundary condition, Koopman, and Fourier Analyses. *J. Nonlinear Sci.*, *22*(6), 887-915.
- Climaco, P., Garcke, J., & Iza-Teran, R. (2021). Multi-resolution Dynamic Mode Decomposition for Early Damage Detection in Wind Turbine Gearboxes. *arXiv preprint arXiv:2110.04103*.
- Cooley, J. W., & Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.*, *19*(2), 297-301.
- Corrochano, A., & Le Clainche, S. (2022). Structural sensitivity in non-linear flows using direct solutions. *Comput. Math. Appl.*, *128*, 69-78.
- Del Pino, C., Lopez-Alonso, J., Parras, L., & Fernandez-Feria, R. (2011). Dynamics of the wing-tip vortex in the near field of a NACA 0012 aerofoil. *Aeronaut. J.*, *115*(1166), 229-239.
- Derebail Muralidhar, S., Podvin, B., Mathelin, L., & Fraigneau, Y. (2019). Spatio-temporal proper orthogonal decomposition of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, *864*, 614-639.
- Duke, D., Soria, J., & Honnery, D. (2012). An error analysis of the dynamic mode decomposition. *Exp. Fluids*, *52*(2), 529-542.
- Eivazi, H., Le Clainche, S., Hoyas, S., & Vinuesa, R. (2022). Towards extraction of orthogonal and parsimonious non-linear modes from turbulent flows. *Expert Syst. Appl.*, *202*, 117038.
- Eiximeno, B., Begiashvili, B., Miro, A., Valero, E., & Lehmkuh, O. Towards parallel data driven methods, an HPC suite for POD/DMD. En: 3rd High-Fidelity Industrial LES/DNS Symposium, 2023.
- Eiximeno, B., Begiashvili, B., Miro, A., Valero, E., & Lehmkuhl, O. (2022). pyLOM: Low order modelling in python.
- Eiximeno, B., Miró, A., Cajas, J. C., Lehmkuhl, O., & Rodriguez, I. (2022). On the Wake Dynamics of an Oscillating Cylinder via Proper Orthogonal Decomposition. *Fluids*, *7*(9), 292.
- Esposito, C., Mendez, M. A., Steelant, J., & Vetrano, M. R. (2021). Multi-Scale Proper Orthogonal Decomposition for Cavitating Flows: Applications to Isothermal and Thermosensitive Cavitation. *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980: proceedings of a 11th symposium held at the University of Warwick 1979/80*.
- Fukami, K., Nakamura, T., & Fukagata, K. (2020). Convolutional neural network based hierarchical autoencoder for nonlinear mode decomposition of fluid field data. *Phys. Fluids*, *32*(9), 095110.
- Garicano-Mena, J., Li, B., Ferrer, E., & Valero, E. (2019). A composite dynamic mode decomposition analysis of turbulent channel flows. *Phys. Fluids*, *31*(11), 115102.
- Gómez, F., Le Clainche, S., Paredes, P., Hermanns, M., & Theofilis, V. (2012). Four Decades of Studying Global Linear Instability: Progress and Challenges. *AIAA J.*, *50*(12), 2731-2743.
- Gonzales, J., Sakaue, H., & Jemcov, A. (2022). Multi-Resolution Dynamic Mode Decomposition Analysis of the Pressure Profile Over a Fluttering Wing. *AIAA SCITECH 2022 Forum*, 1661.

- Groun, N., Begiashvili, B., Valero, E., Garicano-Mena, J., & Le Clainche, S. (2023). Higher Order Dynamic Mode Decomposition Beyond Aerospace Engineering. *Results Eng.*, 101471.
- Groun, N., Begiashvili, B., Valero, E., Garicano-Mena, J., & Le Clainche, S. Data-driven Methods Beyond Aerospace Field. En: International Symposium on Unmanned Systems; the Defense Industry, 2022.
- Groun, N., Villalba-Orero, M., Lara-Pezzi, E., Valero, E., Garicano-Mena, J., & Le Clainche, S. (2022a). Higher order dynamic mode decomposition: From fluid dynamics to heart disease analysis. *Comput. Biol. Med.*, 144, 105384.
- Groun, N., Villalba-Orero, M., Lara-Pezzi, E., Valero, E., Garicano-Mena, J., & Le Clainche, S. (2022b). A novel data-driven method for the analysis and reconstruction of cardiac cine MRI. *Comput. Biol. Med.*, 151, 106317.
- Gutierrez-Castillo, P., Garrido-Martin, M., B lle, T., Garc a-Ortiz, J. H., Aguilar-Cabello, J., & del Pino, C. (2022). Higher order dynamic mode decomposition of an experimental trailing vortex. *Phys. Fluids*, 34(10), 107116.
- Herrmann, B., Baddoo, P. J., Semaan, R., Brunton, S. L., & McKeon, B. J. (2021). Data-driven resolvent analysis. *J. Fluid Mech.*, 918, A10.
- Jackson, C. P. (1987). A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J. Fluid Mech.*, 182, 23-45.
- Jovanovi c, M. R. (2021). From Bypass Transition to Flow Control and Data-Driven Turbulence Modeling: An Input–Output Viewpoint. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 53(1), 311-345.
- Jovanovi c, M. R., Schmid, P. J., & Nichols, J. W. (2014). Sparsity-promoting Dynamic Mode Decomposition. *Phys. Fluids*, 26(2).
- Jovanovi c, M. R., & Bamieh, B. (2005). Componentwise energy amplification in channel flows. *J. Fluid Mech.*, 534, 145-183.
- Karami, S., & Soria, J. (2018). Analysis of Coherent Structures in an Under-Expanded Supersonic Impinging Jet Using Spectral Proper Orthogonal Decomposition (SPOD). *Aerospace*, 5(3), 73.
- Kbaier Ben Ismail, D., Lazure, P., & Puillat, I. (2015). Advanced Spectral Analysis and Cross Correlation Based on the Empirical Mode Decomposition: Application to the Environmental Time Series. *IEEE Geosci. Remote. Sens. Lett.*, 12(9), 1968-1972.
- Kou, J., Le Clainche, S., & Zhang, W. (2018). A reduced-order model for compressible flows with buffeting condition using higher order dynamic mode decomposition with a mode selection criterion. *Phys. Fluids*, 30(1), 016103.
- Kou, J., & Zhang, W. (2017). An improved criterion to select dominant modes from dynamic mode decomposition. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 62, 109-129.
- Kutz, J. N., Brunton, S. L., Brunton, B. W., & Proctor, J. L. (2016a). *Dynamic Mode Decomposition: data-driven modeling of complex systems*. SIAM–Society for Industrial; Applied Mathematics.
- Kutz, J. N., Brunton, S. L., Brunton, B. W., & Proctor, J. L. (2016b). *Dynamic mode decomposition: data-driven modeling of complex systems*. SIAM.
- Kutz, J. N., Fu, X., & Brunton, S. L. (2016). Multi-resolution Dynamic Mode Decomposition. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 15(2), 713-735.

- Lazpita, E., Begiashvili, B., Garicano-Mena, J., Le Clainche, S., & Valero, E. Efficient data-driven algorithms to identify patterns in aeronautical industrial problems. En: International Symposium on Unmanned Systems; the Defense Industry, 2022.
- Le Clainche, S., Han, Z., & Ferrer, E. (2019a). An alternative method to study cross-flow instabilities based on high order dynamic mode decomposition. *Phys. Fluids*, *31*(9), 094101.
- Le Clainche, S., Izbassarov, D., Rosti, M., Brandt, L., & Tammisola, O. (2020a). Coherent structures in the turbulent channel flow of an elastoviscoplastic fluid. *J. Fluid Mech.*, *888*, A5.
- Le Clainche, S., Pérez, J. M., & Vega, J. M. (2018a). Spatio-temporal flow structures in the three-dimensional wake of a circular cylinder. *Fluid Dyn. Res.*, *50*(5), 051406.
- Le Clainche, S., Rosti, M., & Brandt, L. (2020b). Flow structures and shear-stress predictions in the turbulent channel flow over an anisotropic porous wall. *J. Phys. Conf. Ser.*, *1522*(1), 012016.
- Le Clainche, S., & Vega, J. M. (2017a). Higher order dynamic mode decomposition to identify and extrapolate flow patterns. *Phys. Fluids*, *29* (8), 084102.
- Le Clainche, S., & Vega, J. M. (2018). Spatio-Temporal Koopman Decomposition. *J. Nonlin. Sci.*, *28* (3), 1-50.
- Le Clainche, S., Vega, J. M., & Soria, J. (2017). Higher order dynamic mode decomposition of noisy experimental data: The flow structure of a zero-net-mass-flux jet. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, *88*, 336-353.
- Le Clainche, S. (2019). Prediction of the optimal vortex in synthetic jets. *Energies*, *12*(9), 1635.
- Le Clainche, S. (2020). An Introduction to Some Methods for Soft Computing in Fluid Dynamics. En F. Martínez Álvarez, A. Troncoso Lora, J. A. Sáez Muñoz, H. Quintián & E. Corchado (Eds.), *14th International Conference on Soft Computing Models in Industrial and Environmental Applications (SOCO 2019)* (pp. 557-566). Springer International Publishing.
- Le Clainche, S., Li, I., Theofilis, V., & Soria, J. (2012). Time-resolved Particle Image Velocimetry and Structural Analysis on An Hemisphere-Cylinder at Low Reynolds Numbers and Large Angle of Incidence. *AIAA Paper No. 2012-3215*.
- Le Clainche, S., Lorente, L. S., & Vega, J. M. (2018b). Wind predictions upstream wind turbines from a LiDAR database. *Energies*, *11*(3), 543.
- Le Clainche, S., Moreno-Ramos, R., Taylor, P., & Vega, J. M. (2019b). New Robust Method to Study Flight Flutter Testing. *J. Aircr.*, *56*(1), 336-343.
- Le Clainche, S., & Vega, J. M. (2017b). Higher Order Dynamic Mode Decomposition. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, *16*(2), 882-925.
- Le Clainche, S., & Vega, J. M. (2020). *Higher Order Dynamic Mode Decomposition and Its Applications*. Elsevier.
- Li, B., Garicano-Mena, J., & Valero, E. (2022). A dynamic mode decomposition technique for the analysis of non-uniformly sampled flow data. *J. Comp. Physics*, 111495.
- Li, B., Garicano-Mena, J., Zheng, Y., & Valero, E. (2020). Dynamic Mode Decomposition Analysis of Spatially Agglomerated Flow Databases. *Energies*, *13*(9).

- Luhar, M., Sharma, A., & McKeon, B. (2014). On the structure and origin of pressure fluctuations in wall turbulence: predictions based on the resolvent analysis. *J. Fluid Mech.*, 751, 38-70.
- Lumley, J. L. (1967). The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows. *1967 Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation (HC/DJ) Proceedings*.
- Maqsood, S., & Javed, U. (2020). Multi-modal Medical Image Fusion based on Two-scale Image Decomposition and Sparse Representation. *Biomedical Signal Processing and Control*, 57, 101810.
- Mateo-Gabín, A., Chávez, M., Garicano-Mena, J., & Valero, E. (2021). Wavy Walls, a Passive Way to Control the Transition to Turbulence. Detailed Simulation and Physical Explanation. *Energies*, 14(13).
- McKeon, B. J., & Sharma, A. S. (2010). A critical-layer framework for turbulent pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 658, 336-382.
- Mendez, C., Le Clainche, S., Moreno, R., & Vega, J. (2021). A new automatic, very efficient method for the analysis of flight flutter testing data. *Aerosp. Sci. Tech.*, 114, 106749.
- Mendez, M. A., Balabane, M., & Buchlin, J.-M. (2019). Multi-scale proper orthogonal decomposition of complex fluid flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 870, 988-1036.
- Mendez, M. A., Hess, D., Watz, B. B., & Buchlin, J.-M. (2020). Multiscale proper orthogonal decomposition (mPOD) of TR-PIV data—a case study on stationary and transient cylinder wake flows. *Meas. Sci. Technol.*, 31(9), 094014.
- Mendez, M., Gosset, A., & Buchlin, J.-M. (2019). Experimental analysis of the stability of the jet wiping process, part II: Multiscale modal analysis of the gas jet-liquid film interaction. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 106, 48-67.
- Mendez, M., Scelzo, M., & Buchlin, J.-M. (2018). Multiscale modal analysis of an oscillating impinging gas jet. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 91, 256-276.
- Mendez, M. A. (2022). Generalized and Multiscale Modal Analysis. *arXiv preprint arXiv:2208.12630*.
- Moore, B. (1981). Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Trans. Autom. Control*, 26(1), 17-32.
- Murata, T., Fukami, K., & Fukagata, K. (2020). Nonlinear mode decomposition with convolutional neural networks for fluid dynamics. *J. Fluid Mech.*, 882, A13.
- Nekkanti, A., & Schmidt, O. T. (2021). Frequency–time analysis, low-rank reconstruction and denoising of turbulent flows using SPOD. *J. Fluid Mech.*, 926.
- Oberleithner, K., Sieber, M., Nayeri, C. N., Paschereit, C. O., Petz, C., Hege, H., Noack, B. R., & Wygnanski, L. (2011). Three-dimensional coherent structures in a swirling jet undergoing vortex breakdown: stability analysis and empirical mode construction. *J. Fluid Mech.*, 679, 383-414.
- Polinati, S., Bavirisetti, D. P., Rajesh, K. N. V. P. S., Naik, G. R., & Dhuli, R. (2021). The Fusion of MRI and CT Medical Images Using Variational Mode Decomposition. *Appl. Sci.*, 11(22).
- Procacci, A., Kamal, M. M., Mendez, M. A., Hochgreb, S., Coussement, A., & Parente, A. (2022). Multi-Scale Proper Orthogonal Decomposition analysis of instabilities in swirled and stratified flames. *Phys. Fluids*.
- Proctor, J. L., Brunton, S. L., & Kutz, J. N. (2016). Dynamic mode decomposition with control. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 15(1), 142-161.

- Rowley, C., & Dawson, S. (2017). Model Reduction for Flow Analysis and Control. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 49(1), 387-417.
- Rowley, C., Mezić, I., Bagheri, S., Schlatter, P., & Henningson, D. (2009). Spectral analysis of nonlinear flows. *J. Fluid Mech.*, 641, 115-127.
- Roy, C., & Leweke, T. (2008). Experiments on vortex meandering. *FARWake Technical Report AST4-CT-2005-012238, CNRS-IRPHE*.
- Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J. (1986). Learning Internal Representations by Error Propagation. En *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Vol. 1: Foundations* (pp. 318-362). MIT Press.
- Salehi, H., Gorodetsky, A., Solhmirzaei, R., & Jiao, P. (2023). High-dimensional data analytics in civil engineering: A review on matrix and tensor decomposition. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 125, 106659.
- Sayadi, T., Schmid, P. J., Richecoeur, F., & Durox, D. (2015). Parametrized data-driven decomposition for bifurcation analysis, with application to thermo-acoustically unstable systems. *Phys. Fluids*, 27(3), 037102.
- Schmid, P. J. (2010). Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *J. Fluid Mech.*, 656, 5-28.
- Schmid, P. J., Li, L., Juniper, M. P., & Pust, O. (2011). Applications of the dynamic mode decomposition. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 25(1), 249-259.
- Schmidt, O., & Colonius, T. (2020). Guide to spectral Proper Orthogonal Decomposition. *AIAA J.*, 58, 1-11.
- Sieber, M., Paschereit, C. O., & Oberleithner, K. (2016). Spectral proper orthogonal decomposition. *J. Fluid Mech.*, 792, 798-828.
- Sieber, M., Paschereit, C. O., & Oberleithner, K. (2017). On the nature of spectral proper orthogonal decomposition and related modal decompositions. *arXiv preprint arXiv:1712.08054*.
- Sirovich, L. (1987). Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures. *Q. Appl. Math.*, 45(3), 561-571.
- Smith, E., Variansyah, I., & McClarren, R. (2022). Variable Dynamic Mode Decomposition For Estimating Time Eigenvalues in Nuclear Systems. *Nucl. Sci. Eng.*, 1-10.
- Smith, T. R., Moehlis, J., & Holmes, P. (2005). Low-dimensional modelling of turbulence using the proper orthogonal decomposition: a tutorial. *Nonlinear Dyn.*, 41(1), 275-307.
- Strang, G. (1986). *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press.
- Taira, K., Brunton, S. L., Dawson, S. T., Rowley, C. W., Colonius, T., McKeon, B. J., Schmidt, O. T., Gordeyev, S., Theofilis, V., & Ukeiley, L. S. (2017). Modal analysis of fluid flows: An overview. *AIAA J.*, 55(12), 4013-4041.
- Taira, K., Hemati, M. S., Brunton, S. L., Sun, Y., Duraisamy, K., Bagheri, S., Dawson, S. T., & Yeh, C.-A. (2020). Modal analysis of fluid flows: Applications and outlook. *AIAA J.*, 58(3), 998-1022.
- Takens, F. (2006). Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980: proceedings of a symposium held at the University of Warwick 1979/80*, 366-381.
- Tang, Z., Fan, Z., Ma, X., Jiang, N., Wang, B., Huang, Y., Qiu, X., Zhou, Q., Lu, Z., & Liu, Y. (2020). Tomographic particle image velocimetry flow structures downstream

- of a dynamic cylindrical element in a turbulent boundary layer by multi-scale proper orthogonal decomposition. *Phys. Fluids*, 32(12), 125109.
- Towne, A., Schmidt, O., & Colonius, T. (2018). Spectral proper orthogonal decomposition and its relationship to dynamic mode decomposition and resolvent analysis. *J. Fluid Mech.*, 847, 821-867.
- Tu, J., Rowley, C., Luchtenburg, D., Brunton, S., & Kutz, J. (2014). On dynamic mode decomposition: Theory and applications. *J. Comput. Dyn.*, 1(2), 391-421.
- Volkwein, S. (2012). Proper Orthogonal Decomposition: Theory and Reduced-Order Modelling. *Lecture Notes, University of Konstanz*.
- Welch, P. (1967). The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, 15(2), 70-73.
- Willcox, K., & Peraire, J. (2002). Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition. *AIAA J.*, 40(11), 2323-2330.
- Williams, M. O., Kevrekidis, I. G., & Rowley, C. W. (2015). A data-driven approximation of the koopman operator: Extending dynamic mode decomposition. *J. Nonlinear Sci.*, 25(6), 1307-1346.
- Wu, W.-H., Chen, C.-C., Jhou, J.-W., & Lai, G. (2018). A Rapidly Convergent Empirical Mode Decomposition Method for Analyzing the Environmental Temperature Effects on Stay Cable Force. *Comput.-Aided Civ. Infrastruct. Eng.*, 33(8), 672-690.
- Xu, Y. L., & Chen, J. (2004). Structural Damage Detection Using Empirical Mode Decomposition: Experimental Investigation. *J. Eng. Mech.*, 130(11), 1279-1288.
- Yang, Y., & Wang, J. (2021). Forecasting wavelet neural hybrid network with financial ensemble empirical mode decomposition and MCID evaluation. *Expert Syst. Appl.*, 166, 114097.
- Yeh, C.-A., & Taira, K. (2019). Resolvent-analysis-based design of airfoil separation control. *J. Fluid Mech.*, 867, 572-610.
- Zeng, X., Zhang, Y., He, C., & Liu, Y. (2023). Time-and frequency-domain spectral proper orthogonal decomposition of a swirling jet by tomographic particle image velocimetry. *Exp. Fluids*, 64(1), 5.
- Zhang, Z., Chen, H., Yin, J., Ma, Z., Gu, Q., Lu, J., & Liu, H. (2021). Unsteady flow characteristics in centrifugal pump based on proper orthogonal decomposition method. *Phys. Fluids*, 33(7), 075122.
- Zhou, L., Tse, K., Hu, G., & Li, Y. (2021). Higher order dynamic mode decomposition of wind pressures on square buildings. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, 211, 104545.

Amplitudes de DMD

Es bien sabido que los métodos basados en POD ordenan de forma automática los modos POD, de acuerdo a su *energía*, mientras que las técnicas DMD no ofrecen una ordenación estricta (Jovanović et al., 2014; Schmid, 2010). Un posible criterio (aunque no el único) clasifica los modos de acuerdo a sus amplitudes. Sin embargo, existen varias formas de calcular dichas amplitudes (en la Ec. (1) y la Ec. (3)), y el método utilizado influye en la elección de los modos que conforman la expansión DMD y por tanto en el modelo de orden reducido resultante. Esta sección final resume el rendimiento de los algoritmos basados en DMD presentados anteriormente en función de su amplitud, detallando cuidadosamente cuál es la mejor selección para cada caso para mejorar la reducción de dimensionalidad y las propiedades de modelado de los métodos basados en DMD bajo estudio.

Cálculo de las amplitudes DMD

Desde la introducción del método DMD original (Rowley et al., 2009; Schmid, 2010), se han propuesto diversas estrategias para discriminar la importancia relativa de los modos dinámicos identificados. Uno de los primeros enfoques, aplicado en el contexto de la matriz de compañía DMD, simplemente compara la norma de los modos (Rowley et al., 2009).

Otras alternativas recurren al modelo de factorización de la Ec. (2.14); estos enfoques tienen como objetivo identificar las *amplitudes* α_i . Una estrategia obtiene los α_i proyectando el primer *snapshot* sobre la base DMD (Kutz, Brunton et al., 2016a) mediante pseudoinversión de Moore-Penrose, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Phi}^+ \mathbf{v}_1$. Nótese que, dado que la matriz \mathbf{L}_0 es unitaria, este paso también puede realizarse con un coste computacional reducido utilizando la matriz cronos reducida:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Psi}^+ \mathbf{c}_1. \quad (1)$$

Otra alternativa, basada también en el marco de factorización de la Ec. (2.14), plantea y resuelve un problema de minimización en la norma de Frobenius (Jovanović et al., 2014):

$$\min_{\alpha_i} \|\mathbf{V}_1^{n_t-1} - \boldsymbol{\Phi} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{V}_\mu\|_F^2, \quad (2)$$

Una vez más, el hecho de que la matriz \mathbf{L}_0 sea ortogonal y no afecte a la norma en la Ec. 2, conduce al siguiente problema de optimización:

$$\min_{\alpha_i} \|\mathbf{C}_1^{n_t-1} - \boldsymbol{\Psi} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{V}_\mu\|_F^2. \quad (3)$$

La Figura 1 ilustra los conceptos tratados en la discusión anterior utilizando el conjunto de datos TC1. La figura compara la importancia relativa de los modos DMD identificados por los algoritmos DMD de la matriz de compañía (Rowley et al., 2009) (Capítulo 2) y de transformación de semejanza (Jovanović et al., 2014), obteniendo las amplitudes con la Ec. (3). En ambos casos, se identifica claramente la frecuencia asociada al desprendimiento de vórtices de la estela (véase la Fig. 4.2). Obsérvese también cómo la Fig. 1(b) confirma que tanto el algoritmo DMD basado en la matriz de compañía como el basado en la transformación de semejanza identifican los mismos valores de Ritz. Finalmente, la Fig. 1(c) ilustra la diferencia en las amplitudes obtenidas proyectando simplemente sobre el primer *snapshot* (Ec. (1)) o sobre toda la matriz de datos (Ec. (3)). La Tabla 1 ofrece información complementaria sobre el error de reconstrucción $\min_{\alpha_i} \|\mathcal{C}_1^{n_t-1} - \Psi \mathbf{D}_\alpha \mathbf{V}_\mu\|_F^2$ alcanzado y el esfuerzo computacional requerido para cada enfoque, promediado para tres realizaciones diferentes.

En vista de este análisis, en esta contribución se ha favorecido el enfoque dado en la Ec. (3) para el cálculo de las amplitudes.

Método	Error de reconstrucción	Tiempo de ejecución [s]
DMD matriz de compañía (Rowley et al., 2009)	N.A.	$4,72 \times 10^{-2}$
Ec. (1)	$1,64 \times 10^{-6}$	1,85
Ec. (3)	$5,85 \times 10^{-13}$	$6,53 \times 10^{-4}$

Tabla 1: Estela laminar bidimensional alrededor de un cilindro a $Re_D = 100$: Comparación de estrategias para evaluar la importancia relativa de los distintos modos DMD, utilizando diferentes técnicas.

Cálculo de las amplitudes HODMD

La identificación de amplitudes en el método HODMD requiere resolver un sistema de ecuaciones sobredeterminado dado por (véase Le Clainche et al., 2017; Le Clainche y Vega, 2020):

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}, \quad (4)$$

donde la matriz de coeficientes \mathbf{C} se define como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \Psi' \\ \Psi' \mathbf{D}_\mu \\ \vdots \\ \Psi' \mathbf{D}_\mu^{n_t-1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

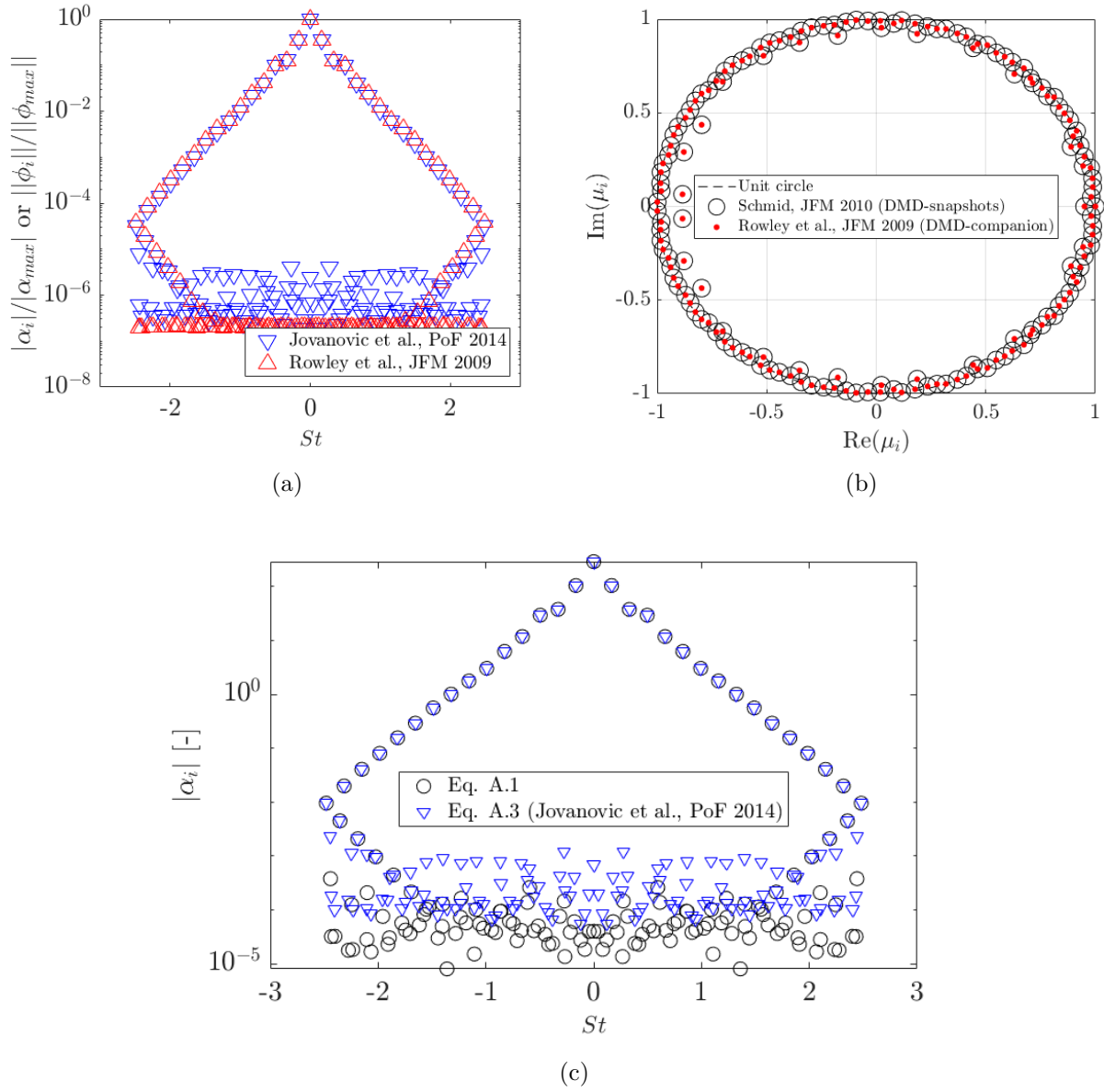


Figura 1: Estela laminar bidimensional alrededor de un cilindro a $Re_D = 100$: comparación de la importancia relativa de los diferentes modos DMD, utilizando diferentes técnicas.

con \mathbf{D}_μ una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son los valores de Ritz μ_i . El término forzante \mathbf{r} viene dado por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_t} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Este sistema lineal se resuelve por mínimos cuadrados, lo que de hecho involucra al sistema asociado:

$$\mathbf{C}^H \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^H \mathbf{r}, \quad (7)$$

que podemos resolver mediante pseudoinversión basada en SVD.

En el caso de algunas bases de datos de gran tamaño, la memoria necesaria para calcular la pseudo-inversa de $\mathbf{C}^H \mathbf{C}$ puede superar la RAM disponible. En esos casos, la estructura de \mathbf{C} todavía puede utilizarse para obtener $\boldsymbol{\alpha}$. De hecho, la matriz $\mathbf{C}^H \mathbf{C}$ se puede exponer como:

$$\mathbf{C}^H \mathbf{C} = \sum_{k=1}^{n_t} (\mathbf{D}_\mu^{k-1})^H \boldsymbol{\Psi}'^H \boldsymbol{\Psi}' \mathbf{D}_\mu^{k-1}, \quad (8)$$

mientras que el producto $\mathbf{C}^H \mathbf{r}$ resulta ser:

$$\mathbf{C}^H \mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n_t} (\mathbf{D}_\mu^{k-1})^H \boldsymbol{\Psi}'^H \mathbf{c}_k. \quad (9)$$

De este modo, se evita formar una matriz potencialmente grande. La Fig. 2 muestra el resultado de esta estrategia alternativa para el caso TC1, mostrando que ambas estrategias dan exactamente el mismo resultado.

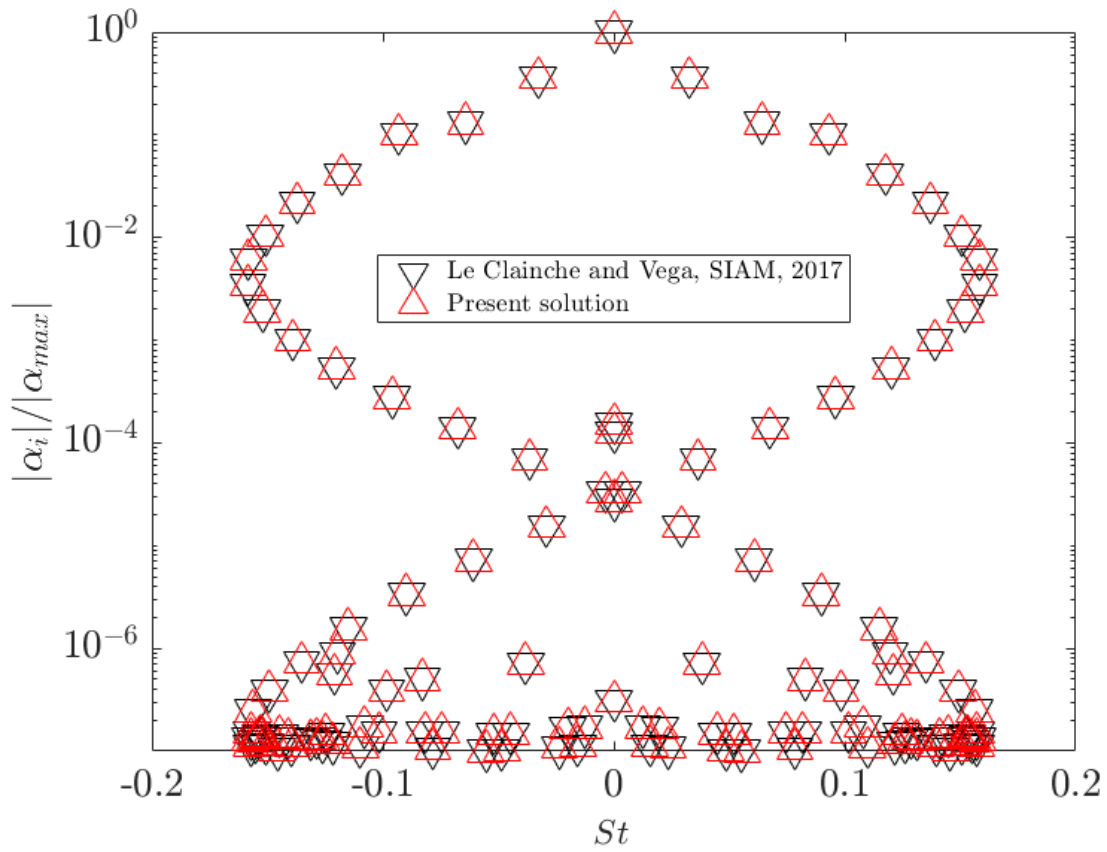


Figura 2: Estela laminar bidimensional alrededor de cilindro a $Re_D = 100$: comparación de las estrategias para calcular las amplitudes HODMD dadas en Le Clainche y Vega, 2017b y en Ecs. 7-9 ($d = 15$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-14}$).

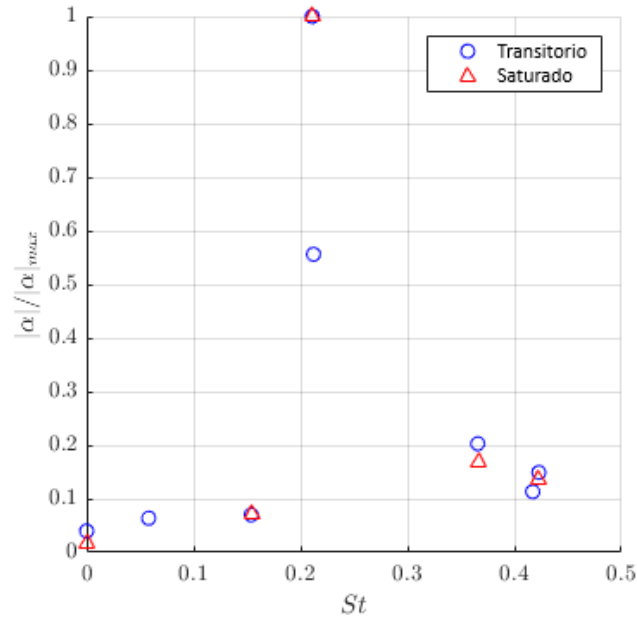
Selección de las amplitudes DMD

En el capítulo 2 se ha discutido cómo, y a diferencia de los valores propios obtenidos en los modos basados en POD (*i.e.*, $s_j = \sqrt{\lambda_j}$), las amplitudes DMD no tienen una interpretación directa como *energías*. Esto implica que los modos DMD no pueden ordenarse rigurosamente según el módulo $|\alpha_i|$: *e.g.*, los modos con elevados coeficientes $|\alpha_i|$ podrían estar decayendo rápido, es decir, tienen gran tasa de disminución $\text{Re}(\lambda_i) \ll 0$, o alternativamente, modos con coeficientes no tan altos $|\alpha_i|$ podría ser de larga duración ($\text{Re}(\lambda_i) \approx 0$) o incluso inestables ($\text{Re}(\lambda_i) > 0$).

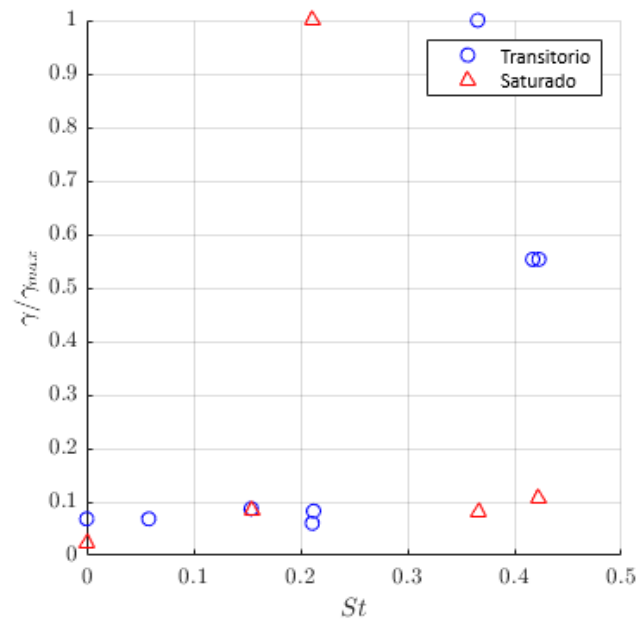
Se han derivado varios criterios para identificar tales situaciones, véase *e.g.* Kou y Zhang, 2017; Sayadi et al., 2015. En este trabajo, consideramos el criterio propuesto inicialmente en Mateo-Gabín et al., 2021 para investigar la transición en canales turbulentos. El criterio ordena los modos según la siguiente cantidad:

$$\gamma_i = |\alpha_i| \frac{e^{\text{Re}(\lambda_i)\Delta t} - 1}{\text{Re}(\lambda_i)}. \quad (10)$$

Este criterio se ha aplicado al conjunto de datos TC3, tanto para el régimen transitorio como para el saturado, véase Fig. 3-4. Como se observa en la Fig. 3(a), siguiendo el criterio de las amplitudes, se detectan números de St dominantes cualitativamente similares en los casos transitorio y saturado. Sin embargo, si nos fijamos en la Fig. 3(b), en el caso saturado se detecta como modo dominante con $St \approx 0,21$ y en el caso transitorio $St \approx 0,36$, debido a la transición a un flujo cuasi-periódico tridimensional (véase la Fig. 3.3). Se observa un fenómeno similar en la Fig. 4, pero con otro valor de ε_1 (menor), pero con mayor número de modos calculados.

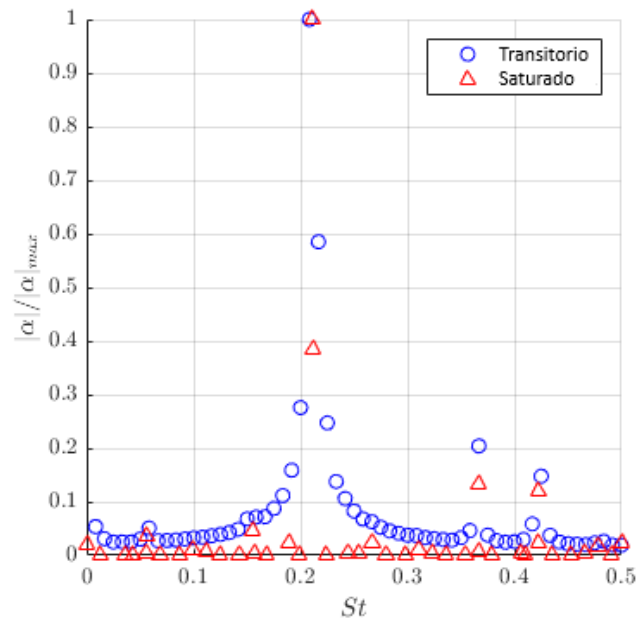


(a)

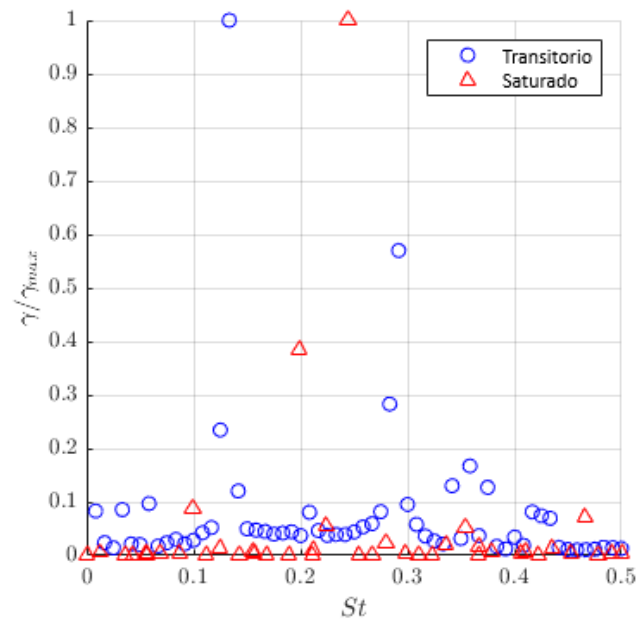


(b)

Figura 3: TC3, análisis DMD, $\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-2}$: α_i vs St (3(a)) y tasas de crecimiento escaladas vs St (3(b)) para los regímenes transitorio y saturado.



(a)



(b)

Figura 4: TC3, análisis DMD, $\varepsilon_1 = 1 \cdot 10^{-5}$: α_i vs St (4(a)) y tasas de crecimiento escaladas vs St (4(b)) para los regímenes transitorio y saturado.