

Matemáticas de la Especialidad de Técnicas Energéticas

Curso 2022-2023

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

E.T.S. de Ingenieros Industriales
Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial
Universidad Politécnica de Madrid

©2023 José M. Chaquet Ulldemolins
v0.7 (28/05/2023)

Thanks to Professor Pedro Galán del Sastre for
sharing all the material for this course.

This document has been generated
with \LaTeX using *Lyx*, *Veusz*, *Octave* and
other open-source tools.

Contenidos

1	Interpolación polinómica en un intervalo de la recta real	8
1.1	Polinomio interpolador de Lagrange	8
1.2	Fórmula de error del polinomio interpolador de Lagrange	15
1.3	Polinomio interpolador de Hermite	20
1.4	Fórmula de error del polinomio interpolador de Hermite	23
1.5	Ejercicios	25
2	Interpolación por elementos finitos en un intervalo de la recta real	28
2.1	Interpolación por elementos finitos lineales	28
2.2	Interpolación por elementos finitos cuadráticos	33
2.3	Interpolación por elementos finitos con polinomios de Hermite	38
2.4	Fórmula del error de interpolación	40
2.5	Ejercicios	43
3	Interpolación en el plano por elementos finitos conformes	45
3.1	Mallados formados por triángulos	47
3.2	Mallados formados por cuadriláteros	51
3.3	Estimación del error de interpolación	53
3.4	Ejercicios	55
4	Integración numérica	58
4.1	Fórmulas cerradas de cuadratura de Newton-Côtes	59
4.1.1	Regla del rectángulo	59
4.1.2	Regla del trapecio	60
4.1.3	Regla de Simpson	62
4.1.4	Estimación de errores de cuadratura	64
4.2	Fórmulas cerradas de cuadratura de Gauss-Legendre	66
4.3	Fórmulas cerradas de cuadratura compuesta	74
4.4	Integración numérica en 2D	76

4.4.1	Reglas de cuadratura en cuadriláteros	77
4.4.2	Reglas de cuadratura en triángulos	80
4.5	Ejercicios	83
5	Ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden: Marco funcional	90
5.1	Introducción	90
5.1.1	EDPs lineales de segundo orden en 2D	90
5.1.2	EDPs lineales de segundo orden en n dimensiones	91
5.2	Algunos ejemplos de EDPs lineales de segundo orden	92
5.2.1	Ecuación del calor	92
5.2.1.1	Condiciones de contorno	95
5.2.1.2	Condiciones iniciales	96
5.2.1.3	Problema completo	96
5.2.1.4	Caso bidimensional	97
5.2.2	Ley de balance de solutos en un medio	100
5.3	Introducción a los espacios funcionales L^2 y H^1	101
5.4	Problema elíptico lineal de segundo grado	103
5.4.1	Problema con condición de contorno $u _{\partial D} = 0$	103
5.4.2	Problema con condición de contorno $u _{\partial D} = u_D$	108
5.4.3	Problema 1D con condición de contorno $u(0) = u_0$ y $u'(1) = u_1$	109
5.5	Ejercicios	111
6	Resolución de problemas elípticos mediante el método de elementos finitos	115
6.1	Planteamiento del problema	115
6.2	Sistema lineal: Matrices de masas, rigidez y convección	118
6.2.1	Elementos finitos lineales	119
6.2.2	Elementos finitos cuadráticos	125
6.2.3	Elementos finitos con polinomios de Hermite	128
6.3	Condiciones de contorno	133
6.3.1	Condición tipo <i>Dirichlet</i> en ambos extremos	133
6.3.2	Condición tipo <i>Neumann</i> en ambos extremos	135
6.3.3	Condición tipo <i>Robin</i> en ambos extremos	135
6.3.4	Condiciones mixtas	136
6.4	Problema bidimensional	137
6.4.1	Matrices de masa, convección y rigidez para elementos lineales en triángulos	138
6.4.2	Función <code>fem_mrc</code>	145
6.4.3	Condiciones de contorno	146
6.4.4	Función <code>fem_robin</code>	151
6.4.5	Cálculo del gradiente de un campo	151

6.5	Acotación de errores	153
6.6	Ejercicios	156
6.7	Soluciones problemas 2D	161
7	Resolución de problemas parabólicos mediante el método de elementos finitos	163
7.1	Introducción	163
7.2	Problema de valor inicial	163
7.2.1	Definición y ejemplos	163
7.2.2	Estimación de errores	167
7.3	Resolución numérica de problemas parabólicos	169
7.3.1	Esquema Euler Explícito	169
7.3.2	Esquema Euler Implícito	170
7.3.3	Esquema Crank-Nicolson	171
7.3.4	Condiciones de contorno 1D	172
7.3.5	Condiciones de contorno 2D	175
7.4	Algunas propiedades de los problemas parabólicos	176
7.5	Error de truncación	178
7.6	Ejercicios	179
8	Apéndice: Generación de mallas	184
9	Apéndice: Rutinas <i>Octave</i>	187
9.1	Rutina <code>fem_mrc</code>	187
9.2	Rutina <code>fem_robin</code>	191
9.3	Rutina <code>fem_gradient</code>	192
9.4	Rutina <code>mesh_block</code>	195
9.5	Rutina <code>mesh_block_hermite</code>	197
9.6	Rutina <code>mesh_triangle</code>	199
9.7	Rutina <code>mesh_meld</code>	201
9.8	Rutina <code>mesh_remove</code>	202
9.9	Ejemplo 7.1	204

Capítulo 1

Interpolación polinómica en un intervalo de la recta real

1.1 Polinomio interpolador de Lagrange

Sea la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Buscamos aproximarla a partir de sus valores en ciertas coordenadas $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n} \subset [a, b]$. Usaremos la notación $f(x_i) \equiv f_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\frac{x \mid x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_n}{f(x) \mid f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_n}$$

Elegimos aproximar la función mediante un polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Buscamos por tanto un polinomio de grado n . Para ello debemos obtener $n+1$ incógnitas a_i . Obsérvese que disponemos de $n+1$ datos de la forma $f(x_i) = f_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.

Se obtiene un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f_0 \\ p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = f_1 \\ &\quad \dots \\ p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f_n \end{aligned} \right\}$$

El sistema lineal anterior puede expresarse matricialmente mediante la llamada *matriz de Vandermonde*:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

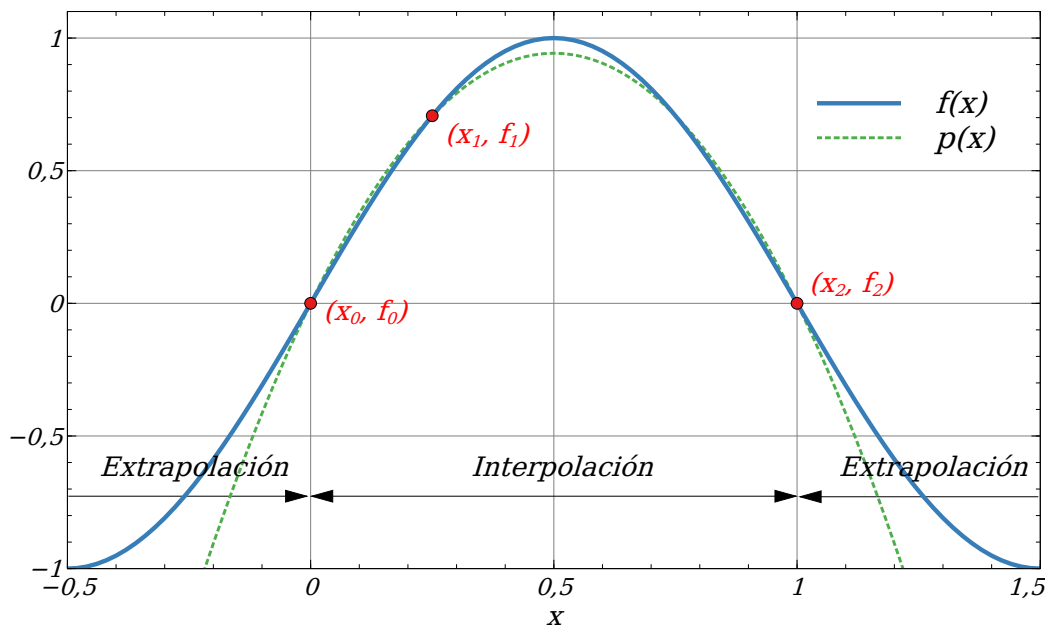


Figura 1.1: Interpolación de una función $f(x)$ dados 3 nodos.

Ejemplo: $\frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{array} \right.$ Al ser $n = 1$ se trata de una recta. Resolviendo el sistema trivial, se obtiene la solución

$$p_1(x) = 3 - x$$

□¹

Ejemplo: $\frac{x_i}{f_i} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1/2 & 1 \\ 3 & 9/4 & 2 \end{array} \right.$ $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

$$\left. \begin{array}{l} p_2(0) = a_0 = 3 \\ p_2(0.5) = a_0 + a_1 \frac{1}{2} + a_2 \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \\ p_2(2) = a_0 + a_1 + a_2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_0 = 3 \\ 2a_1 + a_2 = -3 \\ a_1 + a_2 = -1 \end{array} \left. \begin{array}{l} a_0 = 3 \\ a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \end{array} \right\}$$

La solución es la parábola $p_2(x) = 3 - 2x + x^2$. A continuación se muestra un pequeño código OCTAVE para resolver el problema:

```
x = [0; 1/2; 1];
f = [3; 9/4; 2];
A = [1 x(1) x(1)^2; 1 x(2) x(2)^2; 1 x(3) x(3)^2];
a = A \ f
```

¹Con este símbolo (□) denotamos el fin de un teorema, proposición o ejemplo.

```
p = @(x) a(1)+a(2).*x+a(3).*x.^2;
xi = -0.5:0.1:1.5; figure(1);
plot(x,f,'o',xi,p(xi));
```

□

Teorema: Sean $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n} \subset \mathbb{R}$ y $\{f_i\}_{i=0,1,\dots,n} \subset \mathbb{R}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Entonces existe un único polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que n que verifica que $p_n(x_i) = f_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. □

Demostración:

Existencia: Sea

$$l_{n,i}(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (1.1)$$

Es fácil comprobar que la expresión anterior es equivalente a

$$l_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Observamos que $l_{n,i}(x_j) = \delta_{ij}$ con $0 \leq i, j \leq n$ y que $l_{n,i}(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo n . Entonces podemos expresar el polinomio $p_n(x)$ de la siguiente forma

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_{n,i}(x) \quad (1.2)$$

ya que $p_n(x_i) = f_i$ y $p_n(x)$ es un polinomio de grado igual o menor que n (al ser suma de polinomios de grado $\leq n$).

Unicidad: Supongamos que $q_n(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ tal que $q_n(x_i) = f_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Sea $r_n(x) = p_n(x) - q_n(x)$, entonces $r_n(x_i) = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$. Pero como r_n es un polinomio de grado $\leq n$ y tiene $n + 1$ raíces distintas, necesariamente $r_n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto queda demostrado que $p_n(x) = q_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. □²

Observaciones:

1. A los puntos $\{x_i\}$ se les llama *nodos de interpolación*.
2. A los polinomios $l_{n,i}(x)$ se les denomina *polinomios interpolantes de Lagrange*, y son linealmente independientes³.
3. Al polinomio $p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_{n,i}(x)$ se le denomina *polinomio interpolador de Lagrange*.

²Con este símbolo (□) denotamos el fin de una demostración.

³La única solución del sistema lineal $\sum_{i=0}^n \alpha_i l_{n,i}(x) = 0 \forall x$ es la solución trivial $\alpha_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$

4. Cuando $n = 1, 2$ ó 3 hablamos de interpolación *lineal*, *cuadrática* o *cúbica* respectivamente.
5. Suponiendo que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, entonces si $x \in (x_0, x_n)$, el valor $p_n(x)$ se conoce como *valor interpolado*, mientras que si $x < x_0$ o $x_n < x$, se dice que $p_n(x)$ es *valor extrapolado*.
6. Si $q_m(x)$ es un polinomio de grado m tal que $m \leq n$, entonces el polinomio interpolador de $q_m(x)$, $p_n(x)$, coincide con $q_m(x)$. □

Ejemplo: $\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline f_i & 3 & 9/4 & 2 \end{array}$ Los polinomios interpolantes del Lagrange del ejemplo anterior son

$$l_{2,0}(x) = \frac{(x - 1/2)(x - 1)}{(0 - 1/2)(0 - 1)} = 2(x - 1/2)(x - 1)$$

$$l_{2,1}(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(1/2 - 0)(1/2 - 1)} = -4x(x - 1)$$

$$l_{2,2}(x) = \frac{(x - 0)(x - 1/2)}{(1 - 0)(1 - 1/2)} = 2x(x - 1/2)$$

Y el polinomio interpolador se puede expresar como combinación lineal de dichos polinomios interpolantes mediante los coeficientes f_i :

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 3l_{2,0}(x) + \frac{9}{4}l_{2,1}(x) + 2l_{2,2}(x) = \\ &= 6\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) - 9(x^2 - x) + 4\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) = \\ &= x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

□

Otra forma de obtener el polinomio interpolador es utilizando la fórmula o método de *Newton*:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Así, podemos obtener los coeficientes b_i de una forma sistemática empezando por b_0 :

$$p_n(x_0) = b_0 = f_0 = f(x_0) := f[x_0] \Rightarrow b_0 = f[x_0]$$

Una vez obtenido el término independiente, podemos obtener b_1 :

$$p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f_1 \Rightarrow b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} := f[x_0, x_1]$$

Y de forma similar, calculamos b_2 :

$$\begin{aligned}
 p_n(x_2) &= b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \Rightarrow \\
 b_2 &= (f_2 - f_0 - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)) \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\
 &= \left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} + \frac{f_1 - f_0}{x_2 - x_1} \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} - f[x_0, x_1] \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \right) \frac{1}{x_2 - x_0} = \\
 &= \left(f[x_1, x_2] + f[x_0, x_1] \frac{x_1 - x_0 - x_2 + x_0}{x_2 - x_1} \right) \frac{1}{x_2 - x_0}
 \end{aligned}$$

Y finalmente obtenemos

$$b_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} := f[x_0, x_1, x_2]$$

En general, se define la k -ésima *diferencia dividida* de f , y la representamos por DD_k , del siguiente modo:

- Diferencia dividida de orden 0: $f[x_i] := f(x_i) = f_i$
- Diferencia dividida de orden 1: $f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$
- Diferencia dividida de orden 2: $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$
- Diferencia dividida de orden k :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Se puede demostrar que

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
 &\quad \dots + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})
 \end{aligned}$$

El cálculo de estas diferencias divididas puede simplificarse a través de la *tabla de diferencias divididas* de f en x_0, x_1, \dots, x_n :

x_i	DD_0	DD_1	DD_2	DD_3	\dots	DD_{n-1}	DD_n
x_0	f_0	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	\dots	$f[x_0, \dots, x_{n-1}]$	$f[x_0, \dots, x_n]$
x_1	f_1	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	\dots	$f[x_1, \dots, x_n]$	
x_2	f_2	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$			
x_3	f_3	$f[x_3, x_4]$	$f[x_3, x_4, x_5]$	$f[x_3, x_4, x_5, x_6]$			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			
x_{n-3}	f_{n-3}	$f[x_{n-3}, x_{n-2}]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
x_{n-2}	f_{n-2}	$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$				
x_{n-1}	f_{n-1}	$f[x_{n-1}, x_n]$					
x_n	f_n						

Nótese que aunque sólo necesitamos los valores de la primera fila, correspondientes al nodo x_0 , es necesario calcular toda la tabla mostrada. Esto es debido a que los valores de la columna j se calculan usando los valores de la columna anterior $j - 1$.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 3$. Calculemos el polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los puntos $\frac{x_i}{f_i} \mid \begin{array}{c} -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ -5 \quad -3 \quad -1 \quad 1 \end{array}$. Para ello, obtenemos los polinomios interpolantes:

$$l_{3,0}(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 1)(-1 - 2)} = -\frac{1}{6}x(x - 1)(x - 2)$$

$$l_{3,1}(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

$$l_{3,2}(x) = \frac{(x + 1)(x - 0)(x - 2)}{(0 + 1)(1 - 0)(1 - 2)} = -\frac{1}{2}x(x + 1)(x - 2)$$

$$l_{3,3}(x) = \frac{(x + 1)(x - 0)(x - 1)}{(2 + 1)(2 - 0)(2 - 1)} = \frac{1}{6}x(x + 1)(x - 1)$$

Y finalmente el polinomio interpolado será

$$p_3(x) = -5l_{3,0}(x) - 3l_{3,1}(x) - l_{3,2}(x) + l_{3,3}(x).$$

Usemos ahora la fórmula de Newton. Para ello construimos la tabla de diferencias divididas.

x_i	DD_0	DD_1	DD_2	DD_3
-1	-5	2	0	0
0	-3	2	0	
1	-1	2		
2	1			

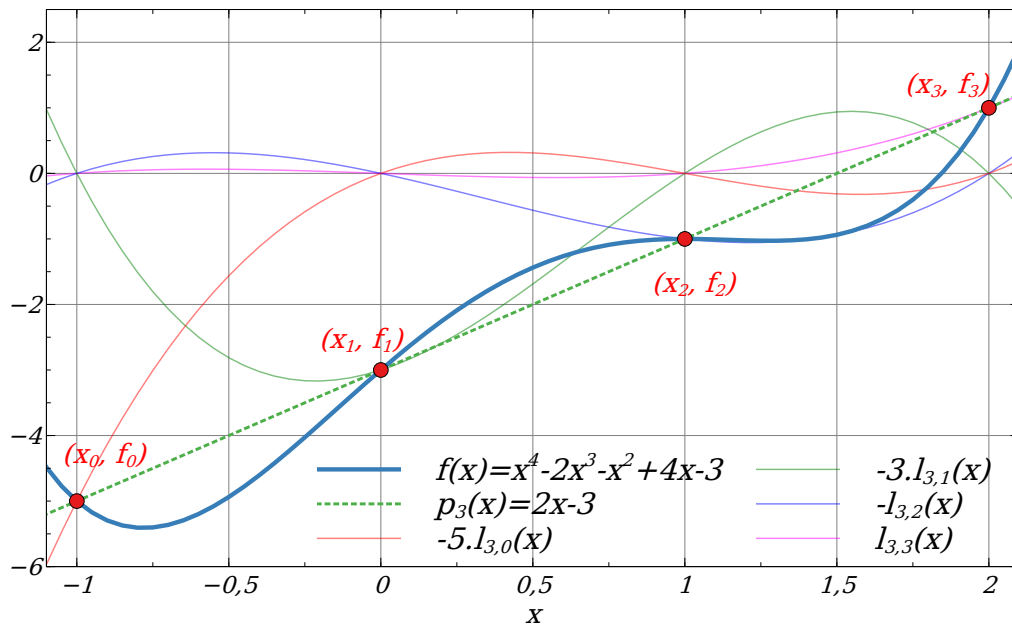


Figura 1.2: Polinomio interpolador de Lagrange como suma de polinomios interpolantes.

Y el polinomio interpolado será

$$p_3(x) = -5 + 2(x + 1) + 0(x + 1)(x - 0) + 0(x + 1)(x - 0)(x - 2) \Rightarrow$$

$$p_3(x) = 2x - 3$$

□

Ejemplo: Sea la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ que deseamos aproximar mediante el polinomio que pasa por los siguientes puntos:

x_i	-2	-1	1	2
f_i	1/5	1/2	1/2	1/5

Calculamos la tabla de diferencias divididas, y posteriormente el polinomio interpolante.

x_i	DD_0	DD_1	DD_2	DD_3
-2	1/5	3/10	-1/10	0
-1	1/2	0	-1/10	
1	1/2	-3/10		
2	1/5			

$$p_3(x) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10}(x + 2) - \frac{1}{10}(x + 2)(x + 1) = \frac{1}{10}(-x^2 + 6)$$

□

Ejemplo: Programar un código en MATLAB/OCTAVE que calcule el polinomio interpolador de Lagrange de la función $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ en el intervalo $[-1, 1]$ con nodos equiespaciados $x_{i+1} - x_i = 0.1$.

```
f=@(x) 1./(1+25*x.^2);

x = -1:.01:1;
xi = -1:.1:1;
yi=f(xi);

p=0*x;
for i=1:length(xi)
    li=0*x+1;
    for j=1:length(xi)
        if i~=j
            li = li.*(x-xi(j))/(xi(i)-xi(j));
        end
    end
    p = p +yi(i)*li;
end

plot(x,f(x),x,p,xi,yi,'o')
grid
axis([-1 1 -1 2])
```

□

1.2 Fórmula de error del polinomio interpolador de Lagrange

Teorema: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^{n+1} y sea $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n} \subset [a, b]$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $c_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) = p_n(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c_x) \quad (1.3)$$

donde p_n es el polinomio interpolador de Lagrange para los nodos dados. □

Demostración: Sea $x \in [a, b]$. Si x es igual a algún x_i , se demuestra trivialmente, pues $f(x_i) = p_n(x_i)$ y para cualquier valor c_x el último sumando es cero.

Sea $x \neq x_i$. Llamando a la función $w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ definimos la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = f(x) - p_n(x) - \lambda w(x)$$

tomando λ tal que $F(\hat{x}) = 0$ para algún $\hat{x} \neq x_i$, es decir,

$$\lambda = \frac{f(\hat{x}) - p_n(\hat{x})}{w(\hat{x})}. \quad (1.4)$$

Como $\forall i = 0, \dots, n \Rightarrow f(x_i) = p_n(x_i)$ y $w(x_i) = 0$ se demuestra trivialmente que $F(x_i) = 0$. Por tanto $F(x)$ tiene $n + 2$ raíces en $[a, b]$: $n + 1$ correspondientes a $\{x_i\}$ y una más \hat{x} . Aplicando el teorema de Rolle⁴ de forma sucesiva:

$$\left. \begin{array}{l} F \text{ tiene } n + 2 \text{ raíces en } [a, b] \\ F \in C^{n+1}([a, b]) \end{array} \right\} \xRightarrow{T.Rolle}$$

$$\left. \begin{array}{l} F' \text{ tiene al menos } n + 1 \text{ raíces en } [a, b] \\ F' \in C^n([a, b]) \end{array} \right\} \xRightarrow{T.Rolle}$$

$$\left. \begin{array}{l} F'' \text{ tiene al menos } n \text{ raíces en } [a, b] \\ F'' \in C^{n-1}([a, b]) \end{array} \right\} \xRightarrow{T.Rolle}$$

...

$$F^{(n+1)} \text{ tiene al menos una raíz en } [a, b]$$

Sea $c_x \in [a, b]$ tal que $F^{(n+1)}(c_x) = 0$. Entonces derivando de forma sucesiva $F(x)$ obtenemos

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p_n^{(n+1)}(x) - \lambda w^{(n+1)}(x) \quad (1.5)$$

Como p_n es un polinomio de grado n , su derivada $n + 1$ es la función nula. Se puede comprobar además que $w^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$. Sustituyendo el valor de λ , ecuación (1.4), en la expresión anterior (1.5)

$$0 = f^{(n+1)}(c_x) - \frac{f(\hat{x}) - p_n(\hat{x})}{w(\hat{x})} (n + 1)!$$

Despejando $f(\hat{x})$ obtenemos la expresión (1.3), con lo que el teorema queda demostrado. \square

Observaciones:

- El polinomio de Taylor t_n centrado en x_0 de la función f tiene similitudes con el polinomio interpolador de Lagrange de la expresión (1.3):

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} := t_n(x) + R_{n+1}(x)$$

pues $f(x)$ también se puede expresar mediante el polinomio interpolador de Lagrange como

$$f(x) = p_n(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c_x) := p_n(x) + E_n(x).$$

⁴Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Definimos el error del polinomio interpolador de Lagrange como $E_n(x) := f(x) - p_n(x)$. Usando la expresión (1.3) podemos acotar el error del siguiente modo

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\max_{x \in [a,b]} |w(x)| \right) \left(\max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \right) \quad (1.6)$$

- Si los nodos $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n} \subset [a, b]$ están equiespaciados⁵, es decir $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ y $x_{i+1} - x_i = h > 0$, la función $w(x)$ puede simplificarse de la siguiente forma

$$w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \prod_{i=0}^n (x - x_0 - ih) = \prod_{i=0}^n (th - ih) = h^{n+1} \prod_{i=0}^n (t - i) = h^{n+1} g_n(t) \quad (1.7)$$

donde $t = \frac{x - x_0}{h}$ y $g_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - i)$. Nótese que $t \in [0, n]$. De esta forma, la expresión del error (1.6) puede acotarse del siguiente modo:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left(\max_{t \in [0,n]} |g_n(t)| \right) \left(\max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \right).$$

- Es fácil comprobar que si $f \in C^{n+1}([a, b])$, $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n} \subset [a, b]$:

- $\forall x \in [x_0, x_1], n = 1: \max_{t \in [0,1]} |g_1(t)| = \frac{1}{4} \Rightarrow |E_1(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$
- $\forall x \in [x_0, x_2], n = 2: \max_{t \in [0,2]} |g_2(t)| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow |E_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} \max_{x \in [a,b]} |f'''(x)|$
- $\forall x \in [x_0, x_3], n = 3: \max_{t \in [0,3]} |g_3(t)| = 1 \Rightarrow |E_3(x)| \leq \frac{h^4}{24} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \quad \square$

Los polinomios de *Chebyshev* de primera especie $T_n(x)$ se definen recursivamente mediante:

$$\left. \begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\}$$

Puede comprobarse que en el intervalo $[-1, 1]$

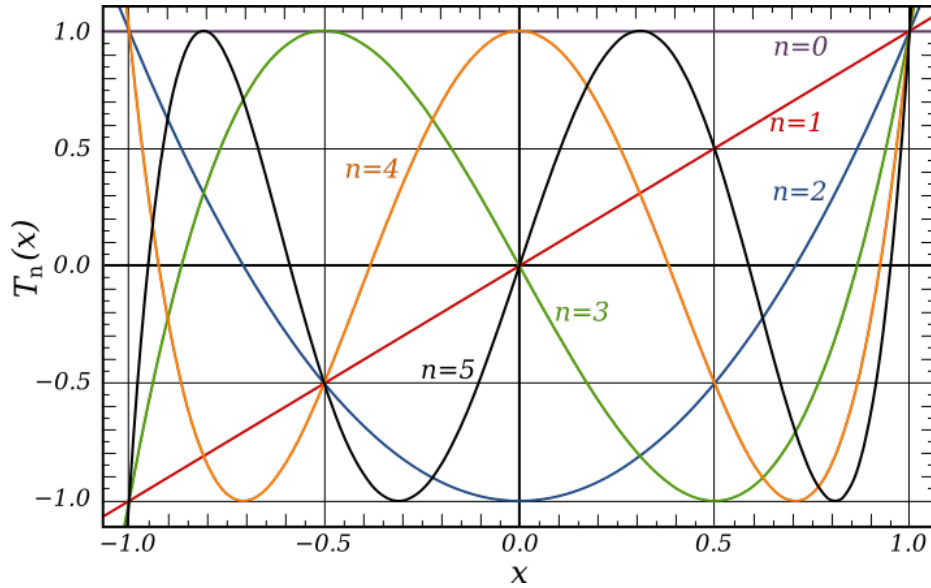
$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

Ya que⁶

$$T_0(x) = \cos(0) = 1$$

⁵También se pueden expresar los nodos como $x_i = x_0 + ih$ para todo $0 \leq i \leq n$.

⁶ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$


 Figura 1.3: Polinomios de Chebyshev de primera especie $n = 0, 1, \dots, 5$ en el intervalo $[-1, 1]$.

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$\left. \begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\arccos x) = \cos(n\arccos x)x - \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x) \\ T_{n-1}(x) &= \cos((n-1)\arccos x) = \cos(n\arccos x)x - \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

Utilizando la expresión (1.8) podemos evaluar los polinomios de Chebyshev en ciertas coordenadas $x \in [-1, 1]$ para cualquier $n \geq 0$:

$$|T_n(x)| \leq 1$$

$$T_n\left(\cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right)\right) = 0 \quad 0 \leq i < n$$

$$T_n\left(\cos\left(\frac{i}{n}\pi\right)\right) = (-1)^i \quad 0 \leq i < n$$

Por tanto, las raíces de T_{n+1} son

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad 0 \leq i \leq n,$$

y así

$$T_{n+1}(x) = 2^n \prod_{i=0}^n (x - x_i) = 2^n w(x).$$

Puede comprobarse el factor 2^n en la expresión anterior obteniendo de forma explícita los primeros polinomios de Chebyshev:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ &\vdots \\ T_n(x) &= 2^{n-1}x^n + \dots \end{aligned}$$

Utilizando la expresión (1.6), si $[a, b] = [-1, 1]$ obtenemos

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{(n+1)!} \left(\max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)| \right). \quad (1.9)$$

Puede probarse que ninguna otra elección de nodos $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ mejora esta cota por el siguiente teorema.

Teorema: Si p es un polinomio mónico⁷ de grado n , entonces

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

□

Es decir, $\max_{x \in [-1, 1]} |w(x)|$ toma el valor más pequeño posible con esta elección de nodos.

Observación: Podemos extender la expresión (1.9) a intervalos diferentes al $[-1, 1]$. Para ello supongamos que la función f es una composición de funciones de la forma $f(x) = h(g(x))$ donde $g(x) = a + bx$ es una transformación afín con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Veamos que la fórmula general del error de interpolación (1.3) adopta la misma forma tras la transformación afín. Como $f^{(n+1)}(x) = b^{n+1}h^{(n+1)}(g(x))$, haciendo el cambio de variable $y = a + bx$ obtenemos

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x) = \\ E_n(y) &= \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_n)}{(n+1)!} h^{(n+1)}(a+b \cdot c_x) \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula de error (1.9) adopta la misma expresión si distribuimos los nodos calculados en el intervalo $[-1, 1]$ en otro intervalo según la transformación $g(x)$:

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{(n+1)!} \left(\max_{y \in [a-b, a+b]} |h^{(n+1)}(y)| \right).$$

⁷ $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

1.3 Polinomio interpolador de Hermite

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Buscamos aproximar la función f a partir de los valores de f y los valores de sus derivadas en unos ciertos nodos $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n} \subset [a, b]$.

Definición: Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f, g \in C^m([a, b])$, $m \geq 0$ y sea $c \in [a, b]$. Se dice que el orden de contacto de f y g es m en c si

$$f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c), \quad 0 \leq k \leq m$$

□

En general, la interpolación de Hermite busca un polinomio con orden de contacto mayor que cero en cada nodo (no necesariamente el mismo). Nosotros nos centraremos en polinomios con orden de contacto 1 en cada nodo, es decir, siendo $0 \leq i \leq n$

$$\left. \begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned} \right\}$$

Representando $f(x_i) = f_i$ y $f'(x_i) = f'_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$ podemos disponer los datos en forma de tabla:

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	\dots	f_n
$f'(x)$	f'_0	f'_1	\dots	f'_n

Tenemos $2n + 2$ condiciones, por lo que buscaremos un polinomio de grado $2n + 1$:

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i$$

$$p'_{2n+1}(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} i a_i x^{i-1}$$

Llegamos al siguiente sistema lineal de $2n + 2$ ecuaciones y $2n + 2$ incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} p_{2n+1}(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_{2n+1} x_0^{2n+1} = f_0 \\ p'_{2n+1}(x_0) &= a_1 + 2a_2 x_0 + \dots + (2n + 1) a_{2n+1} x_0^{2n} = f'_0 \\ &\vdots \\ p'_{2n+1}(x_n) &= a_1 + 2a_2 x_n + \dots + (2n + 1) a_{2n+1} x_n^{2n} = f'_n \end{aligned} \right\}$$

Y en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^{2n+1} \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & \cdots & (2n+1)x_0^{2n} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{2n+1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \cdots & (2n+1)x_1^{2n} \\ & & & & \cdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{2n+1} \\ 0 & 1 & 2x_n & 3x_n^2 & \cdots & (2n+1)x_n^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2n} \\ a_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f'_0 \\ f_1 \\ f'_1 \\ \vdots \\ f_n \\ f'_n \end{pmatrix}$$

Otra posibilidad para construir el polinomio de interpolación de Hermite es mediante la fórmula de Lagrange. Para ello definimos dos familias de polinomios $A_{n,i}$ y $B_{n,i}$ de grado $2n+1$ tal que

$$\left. \begin{aligned} A_{n,i}(x_j) &= \delta_{ij} & 0 \leq i, j \leq n \\ A'_{n,i}(x_j) &= 0 & 0 \leq i, j \leq n \\ B_{n,i}(x_j) &= 0 & 0 \leq i, j \leq n \\ B'_{n,i}(x_j) &= \delta_{ij} & 0 \leq i, j \leq n \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

y de esta forma calculamos en polinomio de interpolación del siguiente modo:

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n f_i A_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^n f'_i B_{n,i}(x) \quad (1.11)$$

Nótese que aplicando las propiedades (1.10) a la expresión (1.11) obtenemos $p_n(x_i) = f_i$ y $p'_n(x_i) = f'_i$ para $0 \leq i \leq n$. Es fácil comprobar que los polinomios auxiliares $A_{n,i}$ y $B_{n,i}$ se calculan del siguiente modo

$$\left. \begin{aligned} A_{n,i}(x) &= (1 - 2(x - x_i) l'_{n,i}(x_i)) l_{n,i}^2(x) & 0 \leq i \leq n \\ B_{n,i}(x) &= (x - x_i) l_{n,i}^2(x) & 0 \leq i \leq n \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

La expresión general de la primera derivada de los polinomios $l_{n,i}$, según su definición dada por la expresión (1.1) es:

$$l'_{n,i}(x) = \frac{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad (1.13)$$

Ejemplo: Calcular el polinomio interpolador de Hermite de la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sin(\pi x)$ y la siguiente tabla:

x_i	0	1
f_i	0	0
f'_i	π	$-\pi$

Al tener sólo dos nodos, $n = 1$. El polinomio de Hermite tendrá grado 3:

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^1 f_i A_{1,i}(x) + \sum_{i=0}^1 f'_i B_{1,i}(x) = \pi B_{1,0}(x) - \pi B_{1,1}(x)$$

Calculando los polinomios $B_{1,i}$ tenemos

$$B_{1,0}(x) = (x - 0) l_{1,0}^2(x) = (x - 0) \left(\frac{x - 1}{0 - 1} \right)^2 = x(1 - x)^2$$

$$B_{1,1}(x) = (x - 1) l_{1,1}^2(x) = (x - 1) \left(\frac{x - 0}{1 - 0} \right)^2 = (x - 1)x^2$$

Finalmente obtenemos el polinomio interpolador:

$$p_3(x) = \pi(x(1 - x)^2 - (x - 1)x^2) = \pi x(1 - x)$$

□

Ejemplo: Calcular el polinomio interpolador de Hermite de la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sin(\pi x)$ y la siguiente tabla:

x_i	0	1/2	1
f_i	0	1	0
f'_i	π	0	$-\pi$

Al tener tres nodos, $n = 2$ y el polinomio de Hermite tendrá grado 5:

$$p_5(x) = \sum_{i=0}^2 f_i A_{2,i}(x) + \sum_{i=0}^2 f'_i B_{2,i}(x) = A_{2,1}(x) + \pi B_{2,0}(x) - \pi B_{2,2}(x)$$

Calculamos $A_{2,1}(x)$:

$$A_{2,1}(x) = \left(1 - 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) l'_{2,1} \left(\frac{1}{2} \right) \right) l_{2,1}^2(x)$$

siendo $l_{2,1}(x) = \frac{x(x-1)}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} = 4(x - x^2)$ y $l'_{2,1}(x) = 4(1 - 2x)$. Luego

$$A_{2,1}(x) = \left(1 - 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) 0 \right) 16(x - x^2)^2 = 16(x - x^2)^2$$

Calculando los polinomios $B_{2,0}$ y $B_{2,1}$ tenemos

$$B_{2,0}(x) = (x - 0) l_{2,0}^2(x) = x \left(\frac{x - 1/2}{0 - 1/2} \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} \right)^2 = 4x(x - 1/2)^2(x - 1)^2$$

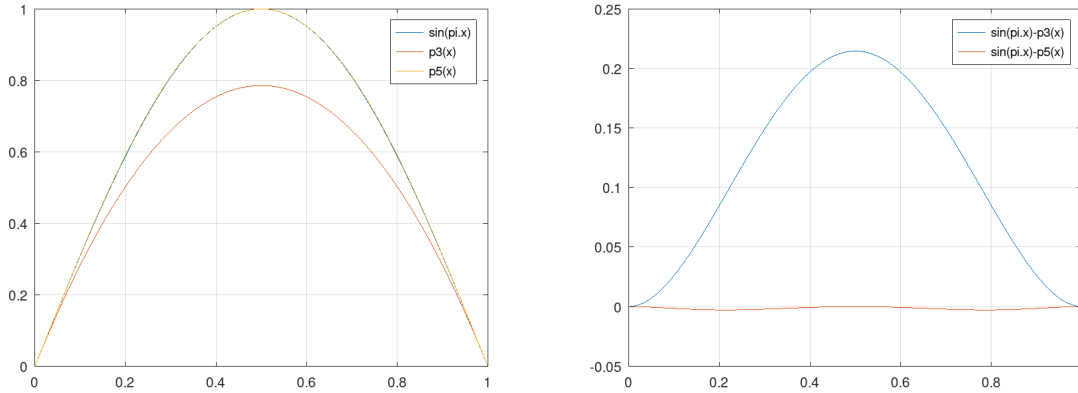


Figura 1.4: Ejemplo de interpolación de $f(x) = \sin(\pi x)$ mediante polinomios de Hermite con dos y tres nodos en el intervalo $[0, 1]$. Polinomios (izquierda) y error (derecha).

$$B_{2,2}(x) = (x-1)l_{2,2}^2(x) = (x-1)\left(\frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-1/2}{1-1/2}\right)^2 = 4(x-1)x^2(x-1/2)^2$$

Luego el polinomio interpolador será

$$p_5(x) = 16x^2(1-x)^2 + 4\pi x(x-1/2)^2(1-x) = 4x(1-x)(4x(1-x) + \pi(x-1/2)^2)$$

□

1.4 Fórmula de error del polinomio interpolador de Hermite

Teorema: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^{2n+2} y sea $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n} \subset [a, b]$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $c_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) = p_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \cdots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c_x) \quad (1.14)$$

donde p_{2n+1} es el polinomio interpolador de Hermite para los nodos dados con orden de contacto 1. □

Demostración: Sea $x \in [a, b]$. Si x es igual a algún x_i , se demuestra trivialmente, pues $f(x_i) = p_{2n+1}(x_i)$ y para cualquier valor c_x el último sumando es cero.

Sea $x \neq x_i$. Llamando a la función $w(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$ definimos la función $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(t) = f(t) - p_{2n+1}(t) - \lambda(x)w^2(t)$$

tomando $\lambda(x)$ tal que $F(x) = 0$ para algún $x \neq x_i$, es decir,

$$\lambda = \frac{f(x) - p_{2n+1}(x)}{w^2(x)}. \quad (1.15)$$

Como $\forall i = 0, \dots, n \Rightarrow f(x_i) = p_{2n+1}(x_i)$ y $w(x_i) = 0$ se demuestra trivialmente que $F(x_i) = 0$. Por tanto $F(x)$ tiene al menos $n + 2$ raíces en $[a, b]$: $n + 1$ correspondientes a $t = \{x_i\}$ y una más $t = x$. Aplicando el teorema de Rolle de forma sucesiva:

$$\left. \begin{array}{l} F \text{ tiene } n + 2 \text{ raíces en } [a, b] \\ F \in C^{2n+2}([a, b]) \end{array} \right\} \xRightarrow{T.Rolle}$$

$$\left. \begin{array}{l} F' \text{ tiene al menos } n + 1 \text{ raíces en } [a, b] \\ F' \in C^{2n+1}([a, b]) \end{array} \right\} \xRightarrow{T.Rolle}$$

$$\left. \begin{array}{l} F'' \text{ tiene al menos } n \text{ raíces en } [a, b] \\ F'' \in C^{2n}([a, b]) \end{array} \right\} \xRightarrow{T.Rolle}$$

$$\dots$$

$$F^{(2n+2)} \text{ tiene al menos una raíz en } [a, b]$$

Sea $c_x \in [a, b]$ tal que $F^{(2n+2)}(c_x) = 0$. Entonces derivando de forma sucesiva $F(x)$ obtenemos

$$F^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - p_{2n+1}^{(2n+2)}(t) - \lambda(x) (w^2(t))^{(2n+2)} \quad (1.16)$$

Como p_{2n+1} es un polinomio de grado $2n + 1$, su derivada $2n + 2$ es la función nula. Se puede comprobar además que $w^{(2n+2)}(t) = (2n + 2)!$. Sustituyendo el valor de $\lambda(x)$, ecuación (1.15), en la expresión anterior (1.16)

$$0 = f^{(2n+2)}(c_x) - \frac{f(x) - p_{2n+1}(x)}{w^2(x)} (2n + 2)!$$

Despejando $f(x)$ obtenemos la expresión (1.14), con lo que el teorema queda demostrado. \square

Observaciones:

- Despejando el error de interpolación en la expresión (1.14), obtemos una cota máxima

$$|E_{2n+1}(x)| = |f(x) - p_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{(2n + 2)!} \left(\max_{x \in [a, b]} w^2(x) \right) \left(\max_{x \in [a, b]} |f^{(2n+2)}(x)| \right) \quad (1.17)$$

- Como en el caso de los polinomios de Lagrange, si los nodos están equiespaciados $w(x) = h^{n+1} g_n(t)$ con $t \in [0, n]$ y por tanto

$$|E_{2n+1}(x)| \leq \frac{h^{2n+2}}{(2n + 2)!} \left(\max_{t \in [0, n]} g_n^2(t) \right) \left(\max_{x \in [a, b]} |f^{(2n+2)}(x)| \right)$$

- Si el orden de contacto es $m \geq 0$, puede probarse que

$$f(x) = p_k(x) + \frac{(x-x_0)^{m+1}(x-x_1)^{m+1} \cdots (x-x_n)^{m+1}}{(k+1)!} f^{(2n+2)}(c_x) \quad (1.18)$$

con $k = (m+1)(n+1) - 1$.

- La expresión (1.18) se reduce al teorema de Taylor si $n = 1$, es decir, un sólo nodo. \square

Ejemplo: Acotar el error cometido en $x \in [0, 1]$ al aproximar la función $f(x) = \sin(\pi x)$ con tres nodos equiespaciados utilizando el polinomio interpolador de Lagrange y de Hermite.

Los nodos son $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 1$. Al ser tres nodos, $n = 2$. Utilizando la expresión (1.6) obtenemos

$$|E_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \left(\max_{x \in [0,1]} |w(x)| \right) \left(\max_{x \in [0,1]} |f'''(x)| \right)$$

Como $w(x) = x(x - \frac{1}{2})(x - 1) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, es fácil calcular el máximo: $w'(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$, $x_{min} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ y $x_{max} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$. Como $w''(x_{max}) = 6x_{max} - 3 = -\sqrt{3} < 0$, efectivamente en x_{max} se produce el máximo. Su valor aproximado es $\max_{x \in [0,1]} |w(x)| = w\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \approx 0.048112$. El otro factor es fácil de calcular:

$$\max_{x \in [0,1]} |f'''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |-\pi^3 \cos(\pi x)| = \pi^3$$

Por tanto finalmente obtenemos la cota del error de interpolación de Lagrange:

$$|E_2(x)| \leq \frac{1}{6} 0.048112 \cdot \pi^3 \approx 0.2486$$

Este último valor se puede calcular directamente usando las expresiones para nodos equiespaciados con $h = 1/2$:

$$|E_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} \pi^3 \approx 0.2486$$

Si usamos el polinomio de Hermite, la expresión del error es según la ecuación (1.17)

$$|E_5(x)| \leq \frac{1}{6!} 0.048112^2 \cdot \pi^6 \approx 0.0031$$

1.5 Ejercicios

1. Programar en MATLAB/OCTAVE la interpolación de Lagrange de $f(x) = \sin(\pi x)$ con $x \in [0, 1]$ y $x \in [-1, 1]$. Estudiar qué ocurre fuera del segundo intervalo. Concluir las diferencias entre interpolación y extrapolación.

2. Programar en MATLAB/OCTAVE la interpolación de Lagrange de $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$ con $x \in [-1, 1]$. Se denomina función de Runge. ¿Qué ocurre en el caso de nodos equiespaciados? Utilizar nodos de Chebyshev.
3. Acotar el error cometido en $x \in [0, 1]$ al aproximar la función $f(x) = \sin(\pi x)$ con 5 nodos equiespaciados utilizando el polinomio interpolador de Lagrange y de Hermite.
4. Sea $f(x) = (3 + x) \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ $x \in \mathbb{R}$. Use el polinomio interpolador de Lagrange cuadrático con nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ para aproximar $f(2)$, $f(2.4)$, $f(3.5)$ y $f(4)$.
5. Escriba, para las siguientes funciones $f(x)$, el término del error $E_2(x)$ del polinomio interpolador de Lagrange cuadrático con nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

$$(a) f(x) = 4x^2 - 3x + 2$$

$$(b) f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

6. A partir de los datos $\ln 9 = 2.1972$, $\ln 9.5 = 2.2513$ y $\ln 10 = 2.3026$, aproximar $\ln 9.2$ mediante interpolación lineal y cuadrática. Acotar el error cometido.
7. Aproxima el valor de $\sqrt[3]{1/2}$ mediante el polinomio interpolador cuadrático de la función $f(x) = 2^x$ con los nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. Acota el error cometido.
8. ¿Cuál es el polinomio interpolador de Lagrange de grado 20 con nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1, \dots$, $x_{19} = 19$, $x_{20} = 20$ de la función $f(x) = x^5 + 3x^{12}$?
9. Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

calcular y representar gráficamente el polinomio de interpolación de grado 14 con puntos de interpolación equiespaciados en el intervalo $[-5, 5]$.

10. Haciendo uso de la transformación lineal $F : [-1, 1] \rightarrow [-5, 5]$, con $F(x) = 5x$, repetir el ejercicio anterior utilizando como puntos de interpolación $x_i = F(\hat{x}_i)$, donde los puntos $\hat{x}_i \in [-1, 1]$ vienen dados por la fórmula

$$\hat{x}_i = \cos\left(\frac{2i + 1}{2n + 2}\pi\right), \quad 0 \leq i \leq n.$$

11. Escribir un script de MATLAB/OCTAVE que calcule el polinomio de interpolación de Lagrange de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ para un conjunto de nodos $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n} \subset [a, b]$ utilizando la fórmula de Newton y calculando previamente la tabla de diferencias divididas. Aplicar para representar gráficamente dicho polinomio para la función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{arctg}(10x)$$

tomando 20 nodos equiespaciados. Comentar los resultados.

12. Escribir un script de MATLAB/OCTAVE que calcule el polinomio de interpolación de Hermite de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ para un conjunto de nodos $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n} \subset [a, b]$. Aplicar para representar gráficamente dicho polinomio para la función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{arctg}(10x)$$

tomando 10 nodos equiespaciados. Comentar los resultados.

13. Se considera la siguiente ecuación

$$x - e^{-2x} = 0,$$

se pide:

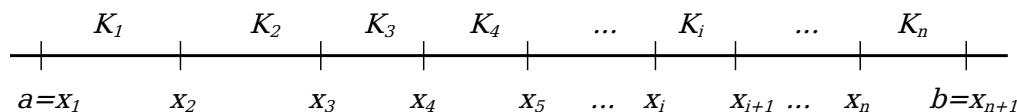
- Demostrar que la ecuación tiene una única solución y encontrar un intervalo de longitud uno que contenga dicha solución.
- Elegir adecuadamente tres puntos equiespaciados y construir un polinomio de interpolación de grado 2 que sirva para aproximar la solución de la ecuación. Calcular la aproximación de dicha solución.
- Estimar el error que se comete al aproximar la solución de la ecuación mediante este método.
- ¿Cómo podría mejorarse este esquema para encontrar una aproximación mejor?

Capítulo 2

Interpolación por elementos finitos en un intervalo de la recta real

Sea una función real $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos a aproximar la función construyendo una partición o *mallado* del intervalo $[a, b]$ compuesto por subintervalos o *elementos* K_i . En cada subintervalo, aproximaremos la función f mediante un polinomio.

2.1 Interpolación por elementos finitos lineales



Sean $n + 1$ nodos¹ $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,n+1} \subset [a, b]$ tal que $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$. Definimos los intervalos o *elementos* $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ para $1 \leq i \leq n$. Los elementos así construidos cumplen

$$[a, b] = \cup_{i=1}^n K_i$$

$$K_i \cap K_{i+1} = \{x_{i+1}\}, 1 \leq i \leq n.$$

Llamaremos D_h a la *partición* del intervalo $[a, b]$

$$D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq n}.$$

¹Para facilitar la implementación en MATLAB/OCTAVE, usaremos notación tipo *Fortran*. Es decir, los índices comenzarán en 1, en lugar de en 0 (notación *C*).

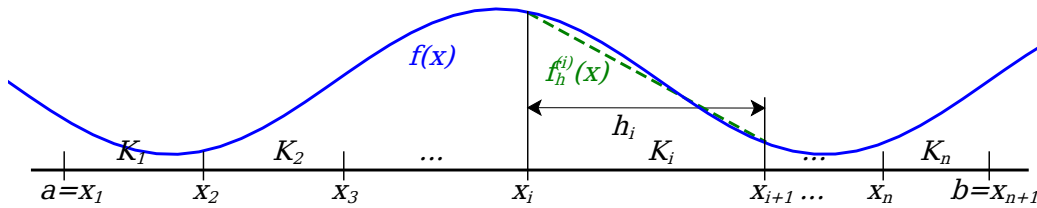
Denotamos N_e al número de elementos, es decir, $N_e = n$. Obsérvese que el número de nodos x_i es $N_n := n + 1$. Representamos la longitud de cada elemento i de la partición como

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

Si $h_i = h$ para todo $1 \leq i \leq N_e$ se dice que el mallado es uniforme y se cumple que

$$h = \frac{b - a}{n}.$$



La aproximación de la función f la hacemos en cada elemento, es decir, se hace una aproximación *local*. Denotamos f_i la evaluación de la función en el nodo i , $f_i = f(x_i)$. Sea $K_i \in D_h$, denotamos por $f_h^{(i)}$ la aproximación de f en K_i por un polinomio de grado 1: $f_h^{(i)} : K_i \rightarrow \mathbb{R}$. Según la expresión (1.2) podemos expresar dicha aproximación del siguiente modo

$$f_h^{(i)}(x) = f_i l_{1,0}(x) + f_{i+1} l_{1,1}(x)$$

Y usando las definiciones de los polinomios $l_{1,0}$ y $l_{1,1}$, la expresión anterior puede expresarse como

$$f_h^{(i)}(x) = f_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}.$$

Usando la notación

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= x_i & f_1^{(i)} &= f_i \\ x_2^{(i)} &= x_{i+1} & f_2^{(i)} &= f_{i+1} \end{aligned}$$

y $\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

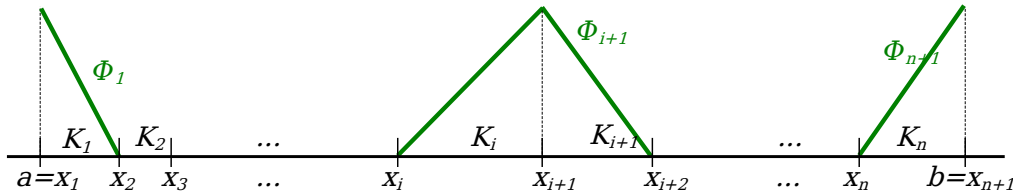
$$\begin{aligned} \phi_1^{(i)}(x) &= \begin{cases} \frac{x_2^{(i)} - x}{h_i} & x \in K_i \\ 0 & x \notin K_i \end{cases} \\ \phi_2^{(i)}(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_1^{(i)}}{h_i} & x \in K_i \\ 0 & x \notin K_i \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

podemos escribir

$$f_h^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^2 f_j^{(i)} \phi_j^{(i)}(x). \quad (2.2)$$

Así, para aproximar f globalmente, lo haremos elemento a elemento. Siendo $f_h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la aproximación global de f , se puede expresar como

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^2 f_j^{(i)} \phi_j^{(i)}(x) \quad x \in [a, b] \quad (2.3)$$



Si definimos las nuevas funciones para $2 \leq i \leq n$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \phi_1^{(i+1)}(x) & x \in K_{i+1} \\ \phi_2^{(i)}(x) & x \in K_i \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases} \quad (2.4)$$

siendo la primera y última función $\phi_1(x) = \phi_1^{(1)}(x)$ y $\phi_{n+1}(x) = \phi_2^{(n)}(x)$, entonces la expresión (2.3) se reduce a un único sumatorio

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \phi_i(x) \quad x \in [a, b]$$

pues

$$f_h(x) = \underbrace{f_1 \phi_1^{(1)}(x)}_{f_1 \phi_1(x)} + \underbrace{f_2 \phi_2^{(1)}(x) + f_1 \phi_1^{(2)}(x)}_{f_2 \phi_2(x)} + \underbrace{f_2 \phi_2^{(2)}(x) + f_1 \phi_1^{(3)}(x)}_{f_3 \phi_3(x)} + \dots$$

Obsérvese que las funciones (2.4) se han construido imponiendo la restricción de continuidad de la función interpolada $f_h(x)$ en los nodos. De esta forma, dichas funciones constituyen una base de un espacio vectorial funcional según veremos seguidamente.

Propiedades:

- $\left. \begin{array}{l} \text{sop } \phi_1 = K_1 \\ \text{sop } \phi_i = K_{i-1} \cup K_i \quad 1 < i < n + 1 \\ \text{sop } \phi_{n+1} = K_n \end{array} \right\}^2$
- $\phi_i \in C([a, b]) \quad 1 \leq i \leq n + 1$
- $\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n + 1$
- $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes.
- $\sum_{i=1}^{n+1} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$
- $\sum_{i=1}^{n+1} \phi'_i(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$

□

Definición: Se define el *espacio de elementos finitos* asociado a la partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de $[a, b]$ como

$$V_h = \{v_h \in C([a, b]) : v_h|_{K_i} \in P_1(K_i), \quad 1 \leq i \leq N_e\}$$

siendo $P_1(K_i)$ el conjunto de polinomios de grado 1 en K_i .

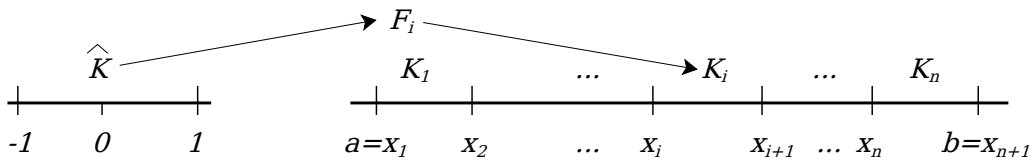
□

Proposición: El espacio de elementos finitos V_h es un *espacio vectorial* de dimensión $n + 1$ y el conjunto $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ es una base de V_h .

□

Desde el punto de vista computacional, es conveniente definir el *elemento de referencia*

$$\hat{K} = [-1, 1].$$



Para ello se hace uso de las funciones *afines*³ $F_i : \hat{K} \rightarrow K_i$ definidas del siguiente modo:

$$x = F_i(\hat{x}) = a_i + b_i \hat{x} \tag{2.5}$$

²El soporte de una función $f(x)$ es la clausura del conjunto de puntos en los que $f(x) \neq 0$.

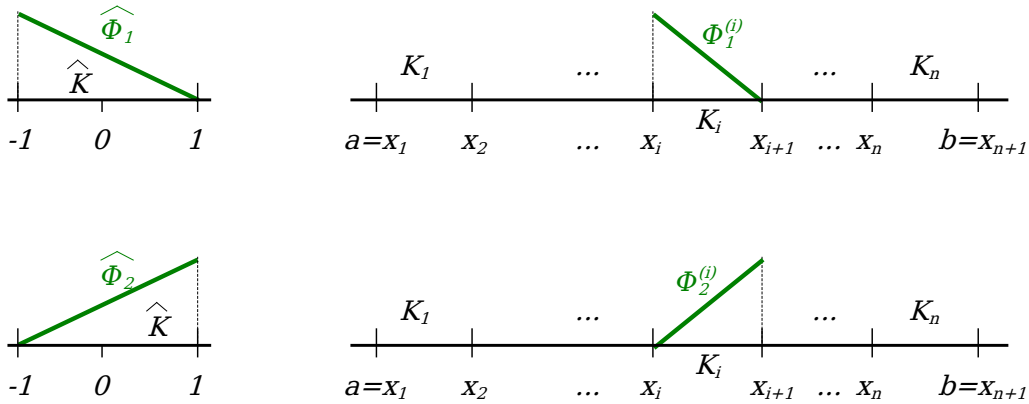
³Una función afín es de la forma $f(x) = ax + b$, es decir, tras una transformación lineal, se aplica una traslación. Obsérvese que las funciones afines son *biyectivas* (correspondencia uno a uno), y por tanto, invertibles.

para todo $\hat{x} \in \hat{K}$ donde los coeficientes se calculan como

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i) = \frac{1}{2}(x_2^{(i)} + x_1^{(i)}) \\ b_i &= \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2}(x_2^{(i)} - x_1^{(i)}) = \frac{1}{2}h_i \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Sustituyendo en la expresión (2.1) las relaciones (2.5) y (2.6) obtenemos finalmente⁴:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^{(i)}(x) &= \frac{1}{2}(1 - \hat{x}) \\ \phi_2^{(i)}(x) &= \frac{1}{2}(1 + \hat{x}) \end{aligned} \right\}$$



Por tanto podemos escribir la aproximación local de la función, expresión (2.2), del siguiente modo:

$$f_h^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^2 f_j^{(i)} \phi_j^{(i)}(x) = f_h^{(i)}(F_i(\hat{x})) = \hat{f}_h(\hat{x}) = \sum_{j=1}^2 \hat{f}_j \hat{\phi}_j(\hat{x})$$

donde $\hat{f}_j = f_j^{(i)}$. Usando las expresiones (2.5) y (2.6), podemos obtener fácilmente la función inversa $F_i^{-1}(x)$:

$$\hat{x} = F_i^{-1}(x) = \frac{x - a_i}{b_i} = \frac{2x - x_2^{(i)} - x_1^{(i)}}{h_i}. \quad (2.7)$$

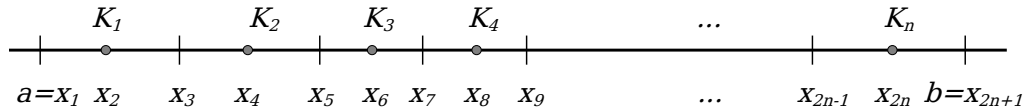
Propiedades:

⁴Hemos hecho $\phi_j^{(i)}(x) = \phi_j^{(i)}(F_i(\hat{x}))$

- $\hat{\phi}_i(\hat{x}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq 2$
- $\{\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes. Además, $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$ es una base de $P_1(\hat{K})$.
- $\sum_{i=1}^2 \hat{\phi}_i(\hat{x}) = 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$
- $\sum_{i=1}^2 \hat{\phi}'_i(\hat{x}) = 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$
- $\phi_j^{(i)}(x) = \phi_j^{(i)}(F_i(\hat{x})) = \hat{\phi}_j(\hat{x}) = \hat{\phi}_j(F_i^{-1}(x))$. Obsérvese que $x = F_i(\hat{x}) \iff \hat{x} = F_i^{-1}(x)$.

□

2.2 Interpolación por elementos finitos cuadráticos



En el caso de interpolación cuadrática, los elementos finitos tendrán un nodo intermedio. Sean $2n + 1$ nodos $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,2n+1} \subset [a, b]$ tal que $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} = b$. Definimos los intervalos o *elementos* $K_i = [x_{2i-1}, x_{2i+1}]$ para $1 \leq i \leq n$. Nótese que los nodos de índice par son nodos intermedios. Se asume que dichos nodos se localizan en la mitad de los elementos, es decir, $x_{2i} = \frac{1}{2}(x_{2i-1} + x_{2i+1})$. Los elementos así construidos cumplen

$$[a, b] = \cup_{i=1}^n K_i$$

$$K_i \cap K_{i+1} = \{x_{2i+1}\}, 1 \leq i \leq n.$$

Al igual que en el caso lineal, llamaremos $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq n}$ a la *partición* del intervalo $[a, b]$. En este caso el número de elementos N_e es igual a n , si bien el número de nodos es $2n + 1$. De igual modo definimos $h_i = x_{2i+1} - x_{2i-1}$ y $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$.

En el caso cuadrático usamos exactamente las mismas funciones afines de la expresión (2.5) para utilizar el elemento de referencia. Sin embargo los coeficientes a_i y b_i se calculan según la siguiente expresión:

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2}(x_{2i+1} + x_{2i-1}) = \frac{1}{2}(x_3^{(i)} + x_1^{(i)}) \\ b_i &= \frac{1}{2}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) = \frac{1}{2}(x_3^{(i)} - x_1^{(i)}) = \frac{1}{2}h_i \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Computacionalmente es útil almacenar la información en dos tablas: una tabla de *coordenadas* y otra de *conexiones*. Siendo $N_n = 2n + 1$ el número de nodos y $N_e = n$ el número de elementos, la tabla de coordenadas tendrá un tamaño de $1 \times N_n$ y la tabla de conexiones $3 \times N_n$. La tabla de conexiones es trivial en estos casos unidimensionales, pero es necesaria para casos bidimensionales según veremos en temas posteriores.

Ejemplo: Interpolación cuadrática.

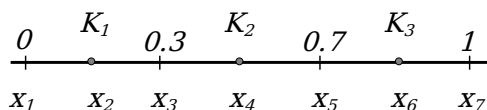


Tabla de nodos:

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
x	0	0.15	0.3	0.5	0.7	0.85	1

Tabla de conexiones:

	N_{2i-1}	N_{2i}	N_{2i+1}
K_1	1	2	3
K_2	3	4	5
K_3	5	6	7

□

Ejemplo: Mismo ejemplo con interpolación lineal.

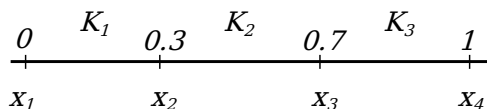


Tabla de nodos:

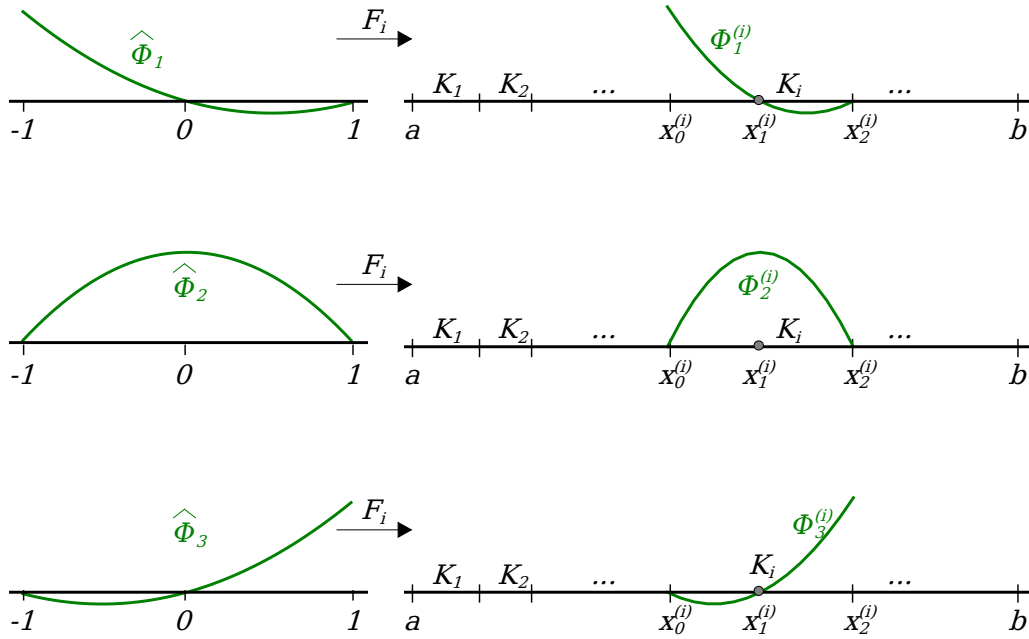
	N_1	N_2	N_3	N_4
x	0	0.3	0.7	1

Tabla de conexiones:

	N_i	N_{i+1}
K_1	1	2
K_2	2	3
K_3	3	4

□

Construimos primero las funciones base en el elemento de referencia, y a partir de éstas, construimos las funciones locales y globales.



Las funciones base en el elemento de referencia son $\hat{\phi}_j : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$, según la expresión (1.1):

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(\hat{x}) &= l_{2,0}(\hat{x}) = -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x}) \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}) &= l_{2,1}(\hat{x}) = 1-\hat{x}^2 \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}) &= l_{2,2}(\hat{x}) = \frac{1}{2}\hat{x}(1+\hat{x})\end{aligned}\tag{2.9}$$

Las funciones base locales pueden construirse fácilmente utilizando las funciones inversa F_i^{-1} según la expresión (2.7) y (2.8), teniendo en cuenta además que $x_2^{(i)} = (x_1^{(i)} + x_3^{(i)})/2 = a_i$:

$$\begin{aligned}\phi_1^{(i)}(x) &= \hat{\phi}_1(F_i^{-1}(x)) = \frac{2}{h_i^2}(x-x_2^{(i)})(x-x_3^{(i)}) \\ \phi_2^{(i)}(x) &= \hat{\phi}_2(F_i^{-1}(x)) = -\frac{4}{h_i^2}(x-x_1^{(i)})(x-x_3^{(i)}) \\ \phi_3^{(i)}(x) &= \hat{\phi}_3(F_i^{-1}(x)) = \frac{2}{h_i^2}(x-x_1^{(i)})(x-x_2^{(i)})\end{aligned}\tag{2.10}$$

Las funciones globales se definen de forma análoga al caso lineal, siendo $1 < i < N_e = n$:

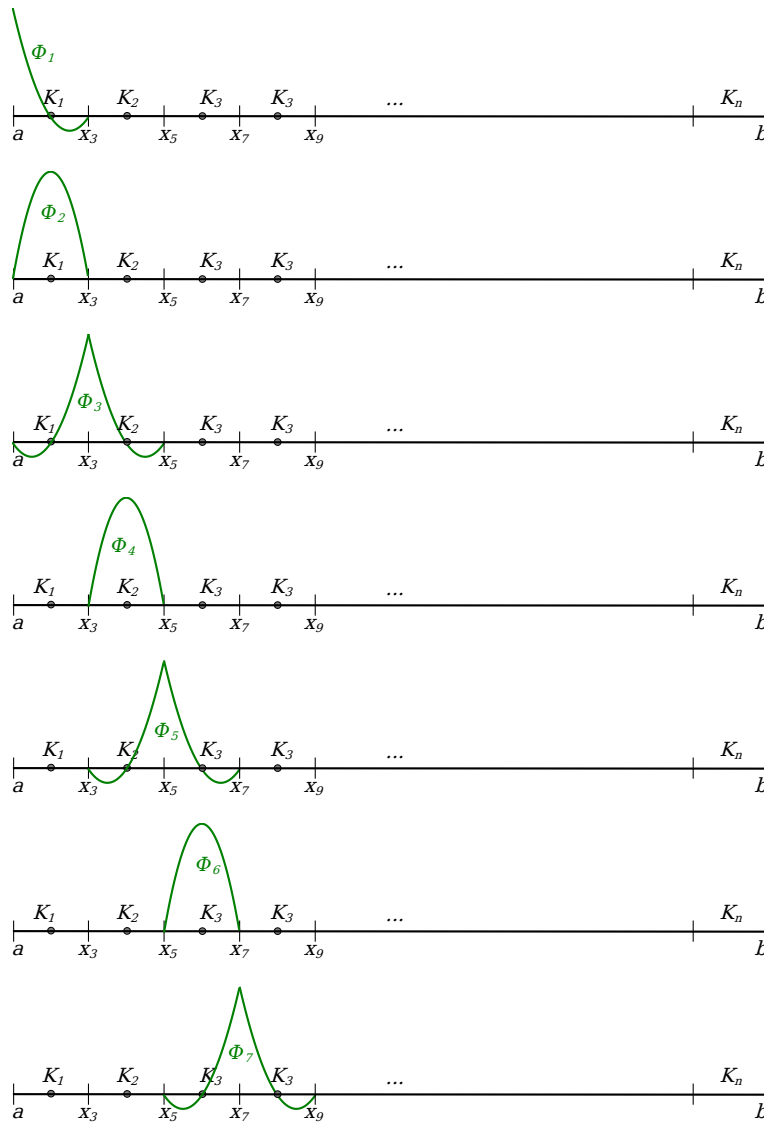
$$\phi_{2i}(x) = \begin{cases} \phi_3^{(2i-2)}(x) & x \in K_{2i-1} \\ \phi_1^{(2i-1)}(x) & x \in K_{2i} \\ 0 & x \notin K_{2i-1} \cup K_{2i} \end{cases}\tag{2.11}$$

$$\phi_{2i+1}(x) = \phi_2^{(2i)}(x)$$

Y las funciones del primer y último elemento:

$$\phi_1(x) = \phi_1^{(1)}(x)$$

$$\phi_{2n+1}(x) = \phi_3^{(2n)}(x)$$



De esta forma conseguimos que las combinaciones lineales de las funciones globales sean continuas.

Observación: Todas las propiedades que cumplían las funciones $\phi_j^{(i)}$, $\hat{\phi}_j$ y ϕ_j en el caso de interpolación lineal, también se satisfacen ahora ($\sum_{i=1}^{2n+1} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$, $\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq 2n+1$, $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq 2n+1}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes, ...). Además, en el caso cuadrático

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} f_i \phi_i(x) \quad x \in [a, b]$$

$$V_h = \{v_h \in C([a, b]) : v_h|_{K_i} \in P_2(K_i), \quad 1 \leq i \leq N_e\}$$

siendo $P_2(K_i)$ el conjunto de polinomios de grado 2 en K_i .

□

Ejercicio propuesto: Repetir el estudio anterior utilizando interpolación cúbica.

□

Ejemplo: Programar un código en MATLAB/OCTAVE que calcule una aproximación de la función $f(x) = \sin(\pi x)$ en el intervalo $[0, 2]$ mediante el método de elementos finitos cuadráticos usando 4 elementos equiespaciados.

```
f=@(x) sin(pi*x);

a=0;
h=0.5;

for ii=1:4
    x = a:0.01:a+h;

    xi=[a a+h*0.5 a+h];
    fi=f(xi);

    p = 0*x;
    for i=1:length(xi)
        lni = 0*x + 1;
        for k=1:length(xi)
            if k~= i
                lni =lni.*(x-xi(k))/(xi(i)-xi(k));
            end
        end
        p = p +fi(i)*lni;
    end

    plot(x,f(x),'b',x,p,'r',xi,fi,'ko','linewidth',2)
    hold on
    a=a+h;
end
hold off
```

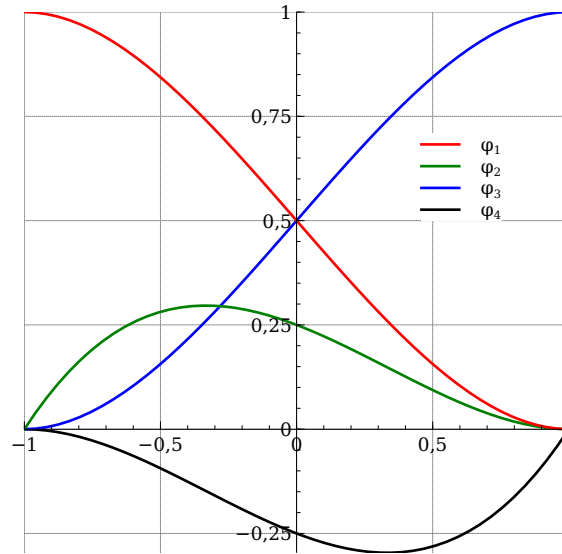


Figura 2.1: Base en el elemento de referencia usando dos nodos y polinomios de Hermite.

□

2.3 Interpolación por elementos finitos con polinomios de Hermite

Usaremos dos nodos en cada elemento finito. Particularizando las expresiones (1.12) para $n = 1$ en los nodos $\hat{x}_1 = -1$ y $\hat{x}_2 = 1$ obtenemos una base de funciones en el elemento de referencia:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}) &= A_{1,0}(\hat{x}) = \frac{1}{4}(2 + \hat{x})(1 - \hat{x})^2 \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}) &= B_{1,0}(\hat{x}) = \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{x})^2 \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}) &= A_{1,1}(\hat{x}) = \frac{1}{4}(2 - \hat{x})(1 + \hat{x})^2 \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}) &= B_{1,1}(\hat{x}) = \frac{1}{4}(-1 + \hat{x})(1 + \hat{x})^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

La figura 2.1 muestra las cuatro funciones. Podemos comprobar que podemos ajustar los valores en los extremos del elemento, así como la primera derivada.

Usando las mismas funciones afines que en el caso lineal, expresiones (2.5) y (2.6) obtenemos fácilmente las funciones base locales:

$$\phi_j^{(i)}(x) = \hat{\phi}_j(F_i^{-1}(x)) = \hat{\phi}_j\left(\frac{2x - x_2^{(i)} - x_1^{(i)}}{h_i}\right) \quad j = 1, 2, 3, 4; i = 1, \dots, N_e$$

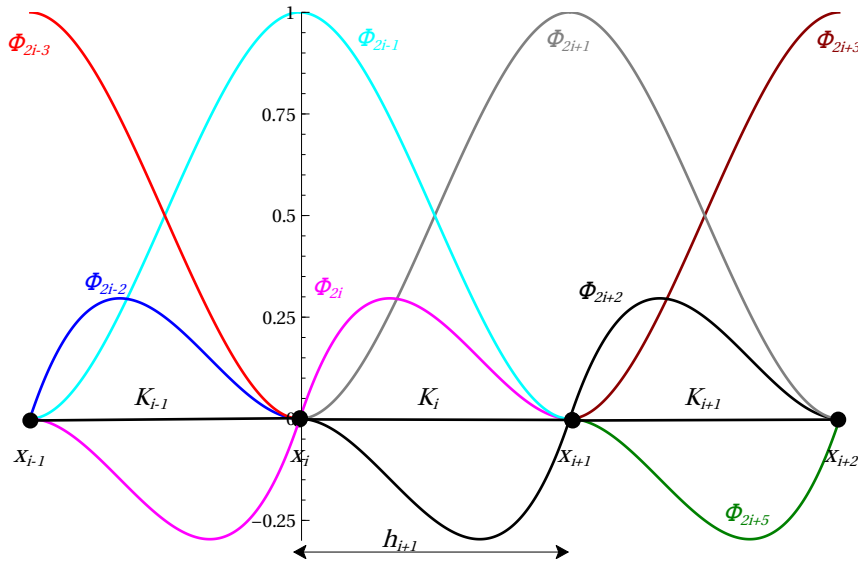


Figura 2.2: Funciones globales con polinomios de Hermite.

Las funciones globales se definen de forma análoga a los casos lineal y cuadrático, siendo $1 < i < N_e$:

$$\phi_{2i}(x) = \begin{cases} \phi_4^{(i)}(x) & x \in K_{i-1} \\ \phi_2^{(i+1)}(x) & x \in K_i \\ 0 & x \notin K_{i-1} \cup K_i \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\phi_{2i+1}(x) = \begin{cases} \phi_3^{(i)}(x) & x \in K_{i-1} \\ \phi_1^{(i+1)}(x) & x \in K_i \\ 0 & x \notin K_{i-1} \cup K_i \end{cases}$$

La figura 2.2 muestra las funciones globales.

Y las funciones del primer y último elemento:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x) &= \phi_1^{(1)}(x) \\ \phi_2(x) &= \phi_2^{(1)}(x) \end{aligned} \right\} \quad x \in K_1$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{2N_e+1}(x) &= \phi_3^{(N_e)}(x) \\ \phi_{2N_e+2}(x) &= \phi_4^{(N_e)}(x) \end{aligned} \right\} \quad x \in K_{N_e}$$

Observación: Todas las propiedades que cumplían las funciones $\phi_j^{(i)}$, $\hat{\phi}_j$ y ϕ_j en el caso de interpolación lineal y cuadrática, también se satisfacen ahora ($\sum_{i=1}^{2n+2} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$),

$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $1 \leq i, j \leq 2n+2$, $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq 2n+2}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes, ...). Además

$$f_h(x) = \sum_{i=1}^{2n+2} f_i \phi_i(x) \quad x \in [a, b]$$

$$V_h = \{v_h \in C([a, b]) : v_h|_{K_i} \in P_3(K_i), \quad 1 \leq i \leq N_e\}$$

siendo $P_3(K_i)$ el conjunto de polinomios de grado 3 en K_i .

□

Observación: La siguiente tabla resume los tres tipos de interpolaciones por elementos finitos comentados hasta ahora.

	Nº Elementos	Nº Nodos	Grado polinomios	$dim(\hat{K})$	$dim(V_h)$
Elem. lineales	N_e	$N_e + 1$	1	2	$N_e + 1$
Elem. cuadráticos	N_e	$2N_e + 1$	2	3	$2N_e + 1$
Polinomios de Hermite	N_e	$N_e + 1$	3	4	$2N_e + 2$

□

2.4 Fórmula del error de interpolación

Vamos a estudiar el error en dos normas distintas: $\|f - f_h\|_{L^\infty([a,b])}$ y $\|f - f_h\|_{L^2([a,b])}$. Para ello definimos primero dos espacios vectoriales⁵ sobre los que aplicaremos las normas anteriores. En primer lugar, las funciones reales continuas sobre el intervalo $[a, b]$:

$$C([a, b]) = \{v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / v \text{ es continua en } [a, b]\}$$

Y las funciones de integral finita en el intervalo $[a, b]$:

$$L^2([a, b]) = \left\{ v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / \int_a^b |v(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Una vez definidos los espacios vectoriales, definimos dos normas para cualquier función $v \in C([a, b])$:

$$\|v\|_{L^\infty([a,b])} = \max_{x \in [a,b]} |v(x)|$$

$$\|v\|_{L^2([a,b])} = \left(\int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

⁵De dimensión infinita.

De esta forma, podemos aplicar las normas anteriores a los espacios vectoriales, obteniendo los espacios normados

$$\left(L^\infty([a, b]), \|\cdot\|_{L^\infty([a, b])} \right)$$

$$\left(L^2([a, b]), \|\cdot\|_{L^2([a, b])} \right)$$

Obsérvese que la norma L^2 proviene de un producto escalar:

$$(u, v)_{L^2([a, b])} = \int_a^b u(x) v(x) dx$$

Teorema: Sea $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ una partición del intervalo $[a, b]$, V_h el espacio de elementos finitos de grado m asociado a D_h . Entonces si $f \in C^{m+1}(K_i)$ existe una constante $c > 0$ que no depende de K_i tal que

- $\|f - f_h\|_{L^\infty(K_i)} \leq c \cdot h_i^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty(K_i)}$
- $\|f - f_h\|_{L^2(K_i)} \leq c \cdot h_i^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^2(K_i)}$
- $\|f' - f'_h\|_{L^\infty(K_i)} \leq c \cdot h_i^m \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty(K_i)}$
- $\|f' - f'_h\|_{L^2(K_i)} \leq c \cdot h_i^m \|f^{(m+1)}\|_{L^2(K_i)}$

□

Demostración: Sean las funciones $\hat{f}, \hat{f}_h : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en el elemento de referencia

$$\hat{f}(\hat{x}) = f(F_i(\hat{x})) = f(x)$$

$$\hat{f}_h(\hat{x}) = f_h(F_i(\hat{x})) = f_h(x)$$

Puesto que $\hat{f}_h \in P_m(\hat{K})$ y $\hat{f}_h(\hat{x}_j) = f_h(x_j)$ con $0 \leq j \leq m$, entonces según la expresión (1.3)

$$\hat{f}(\hat{x}) = \hat{f}_h(\hat{x}) + \underbrace{\frac{(\hat{x} - \hat{x}_0)(\hat{x} - \hat{x}_1) \cdots (\hat{x} - \hat{x}_m)}{(m+1)!} \hat{f}^{(m+1)}(\hat{c}(\hat{x}))}_{E_m(\hat{x})}$$

con $\hat{c}(\hat{x}) \in \hat{K}$. Entonces definiendo $\hat{w}(\hat{x}) = \prod_{j=0}^m (\hat{x} - \hat{x}_j)$, para cada $x \in K_i$,

$$|f(x) - f_h(x)| = \left| \hat{f}(\hat{x}) - \hat{f}_h(\hat{x}) \right| = \frac{|\hat{w}(\hat{x})|}{(m+1)!} \left| \hat{f}^{(m+1)}(\hat{c}(\hat{x})) \right| \leq \frac{1}{(m+1)!} \max_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{w}(\hat{x})| \max_{\hat{x} \in \hat{K}} \left| \hat{f}^{(m+1)}(\hat{x}) \right|$$

Por otro lado, derivando $m + 1$ veces y utilizando las expresiones (2.5) y (2.6)

$$\hat{f}^{(m+1)}(\hat{x}) = \left(\frac{h_i}{2}\right)^{m+1} f^{(m+1)}(F_i(\hat{x})) = \left(\frac{h_i}{2}\right)^{m+1} f^{(m+1)}(x).$$

Por tanto

$$\max_{\hat{x} \in \hat{K}} \left| \hat{f}^{(m+1)}(\hat{x}) \right| = \left(\frac{h_i}{2}\right)^{m+1} \max_{x \in K_i} |f^{(m+1)}(x)| = \left(\frac{h_i}{2}\right)^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty(K_i)}$$

Así, si definimos

$$c = \frac{\max_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{w}(\hat{x})|}{2^{m+1} (m+1)!} \quad (2.14)$$

queda demostrado las expresiones basadas en la norma infinito. De una forma similar se puede demostrar las expresiones basadas en la norma L^2 . \square

Observación: Es fácil determinar el valor de la constante c de la expresión (2.14). Así, $c = 1/8$ para $m = 1$ y $c = 1/(72\sqrt{3})$ para $m = 2$. \square

Teorema: Sea $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ una partición del intervalo $[a, b]$, V_h el espacio de elementos finitos de grado m asociado a D_h . Entonces si $f \in C^{m+1}([a, b])$ existe una constante $c > 0$ tal que

- $\|f - f_h\|_{L^\infty([a,b])} \leq c \cdot h^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty([a,b])}$
- $\|f - f_h\|_{L^2([a,b])} \leq c \cdot h^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^2([a,b])}$
- $\|f' - f'_h\|_{L^\infty([a,b])} \leq c \cdot h^m \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty([a,b])}$
- $\|f' - f'_h\|_{L^2([a,b])} \leq c \cdot h_i^m \|f^{(m+1)}\|_{L^2([a,b])}$ \square

Demostración: Demostramos el primer punto. Sea $x \in [a, b]$, entonces $\exists i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq N_e$ tal que $x \in K_i$. Por el teorema anterior, existirá una constante c tal que

$$|f(x) - f_h(x)| \leq c \cdot h_i^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty(K_i)} \leq c \cdot h^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty([a,b])}$$

Y por tanto queda demostrado.

Demostremos ahora el segundo punto:

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{L^2([a,b])} &= \sum_{i=1}^{N_e} \|f - f_h\|_{L^2(K_i)} \leq \sum_{i=1}^{N_e} c^2 h_i^{2(m+1)} \|f^{(m+1)}\|_{L^2(K_i)}^2 \leq \\ &c^2 h^{2(m+1)} \sum_{i=1}^{N_e} \|f^{(m+1)}\|_{L^2(K_i)}^2 = c^2 h^{2(m+1)} \|f^{(m+1)}\|_{L^2([a,b])}^2 \end{aligned}$$

\square

Observación: Si $f \in C^r([a, b])$, con $r < m + 1$, el resultado queda

- $\|f - f_h\|_{L^\infty([a,b])} \leq c \cdot h^r \|f^{(r)}\|_{L^\infty([a,b])}$
- $\|f - f_h\|_{L^2([a,b])} \leq c \cdot h^r \|f^{(r)}\|_{L^2([a,b])}$

□

Ejemplo: Sea $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sin(\pi x)$. Tomando $m = 1$, construir V_h con D_h equiespaciado tal que $\|f - f_h\|_{L^\infty([a,b])} < \delta = 10^{-6}$.

Sabemos que $\|f - f_h\|_{L^\infty([-2,2])} \leq c \cdot h^2 \|f''\|_{L^\infty([-2,2])}$ y además la constante c se puede calcular como

$$c = \frac{\max_{\hat{x} \in \hat{K}} |\hat{w}(\hat{x})|}{2^2 2!} = \frac{\max_{\hat{x} \in [-1,1]} |(\hat{x} + 1)(\hat{x} - 1)|}{2^2 2!} = \frac{1}{8}$$

Como $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$ y $f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x)$, entonces $\|f''\|_{L^\infty([-2,2])} = \pi^2$. Luego

$$\|f - f_h\|_{L^\infty([-2,2])} \leq \frac{1}{8} h^2 \pi^2 < \delta \Rightarrow h < \frac{2\sqrt{2\delta}}{\pi} \simeq 9.003 \cdot 10^{-4}$$

Podemos calcular el número de elementos $n = \frac{b-a}{h} \simeq \frac{4}{9.003 \cdot 10^{-4}} \simeq 4443$.

□

Ejercicio propuesto: Repetir el ejercicio anterior con $m = 2$ y $m = 4$.

□

2.5 Ejercicios

1. Dado el intervalo $[0, 2]$, se genera un mallado D_h formado por elementos de anchura $h = 0.5$ y sea V_h el espacio de elementos finitos generado con polinomios de grado 1 ó 2. Se considera la función $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(\pi x)$ y sea $f_h \in V_h$ una aproximación de f en el espacio V_h verificando que $f(x_i) = f_h(x_i)$ para todo x_i nodo del mallado. Se pide:
 - (a) Calcular $|f(0.8) - f_h(0.8)|$.
 - (b) Repetir el ejercicio utilizando $h = 1/2^j$, $j = 2, 3, 4$.
 - (c) Para que valor de h podemos afirmar que el error está por debajo de una tolerancia $\delta = 10^{-6}$.
2. Calcular la aproximación $f_h \in V_h$ de la función $f = 1/(1+x^2)$ en un mallado formado por 7 elementos de igual anchura h utilizando polinomios de grado 1, 2 y 4. Representar gráficamente la solución obtenida.
3. Repetir el ejercicio 2 utilizando para construir V_h :

- (a) $h = \frac{5}{6}$ y polinomios de grado 1.
- (b) $h = \frac{5}{3}$ y polinomios de grado 2.
- (c) $h = \frac{10}{3}$ y polinomios de grado 4.
- (d) $h = \frac{5}{12}$ y polinomios de grado 1.
- (e) $h = \frac{5}{6}$ y polinomios de grado 2.
- (f) $h = \frac{5}{3}$ y polinomios de grado 4.

4. Determinar el valor de h para que la aproximación $f_h \in V_h$ de la función f verique que

$$\|f - f_h\|_{L^\infty([a,b])} < \delta$$

suponiendo que el mallado asociado a V_h es equiespaciado, que el grado de los polinomios para construir V_h es $m = 1$ ó 2 , que $\delta = 10^{-8}$ y para las siguientes funciones f :

- (a) $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{sen} x$.
- (b) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.
- (c) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(10x)$.
- (d) $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

Capítulo 3

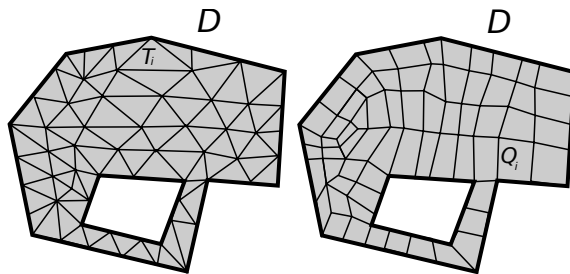
Interpolación en el plano por elementos finitos conformes

Sea $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con frontera ∂D poligonal¹.

Buscamos una función $f_h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ que aproxime f de tal manera que $f(x_i, y_i) = f_h(x_i, y_i)$ para todo (x_i, y_i) , nodos del mallado. Para ello definimos una partición (o mallado) de \bar{D} como

$$D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$$

donde K_i son los elementos de la partición. Si son triángulos, los denotaremos por T_i , mientras que si son cuadriláteros, los representaremos por Q_i .



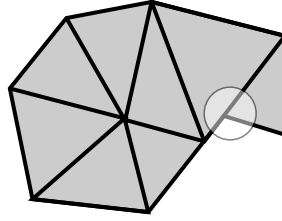
Diremos que una partición D_h es conforme si se cumplen estas dos propiedades:

$$\bar{D} = \cup_{i=1}^{N_e} K_i$$
$$\forall i \neq j \Rightarrow K_i \cap K_j = \begin{cases} (x_k, y_k) & \text{o} \\ \Gamma_{ij} & \text{o} \\ \emptyset \end{cases}$$

Es decir, la intersección de dos elementos sólo puede ser un vértice común, o un lado común, o el conjunto vacío.

¹ $\bar{D} = D \cup \partial D$

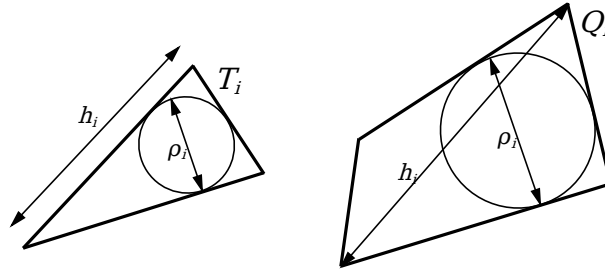
No conforme



Para cada elemento K_i definimos siendo B cualquier círculo en el plano

$$h_i = \text{diam}(K_i)$$

$$\rho_i = \max \{ \text{diam } B : B \subset K_i \}$$



Dada una familia de particiones $\{(D_h)_j\}$, posiblemente infinita, diremos que es regular si es conforme y se verifica que existe una constante $\nu > 0$ tal que $\frac{h_i}{\rho_i} \leq \nu$ para todo $1 \leq i \leq N_e$. >

Para una partición dada D_h , definimos $h = \max_{1 \leq i \leq N_e} h_i$. Diremos que la partición es *cuasi uniforme* si $\exists \mu > 0$ tal que $\frac{h}{h_j} \leq \mu$ para todo $1 \leq i \leq N_e$.

La aproximación f_h de f la buscaremos en

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{D}) : v_h|_{K_i} \in p_m(K_i)\} \tag{3.1}$$

es decir, $f_h \in V_h$ y por tanto está formada por polinomios de grado m . Por ello $\dim V_h < \infty$ y por tanto el conjunto de polinomios $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N_n}$ es una base de V_h y además verifica que

$$\phi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq i, j \leq N_n$$

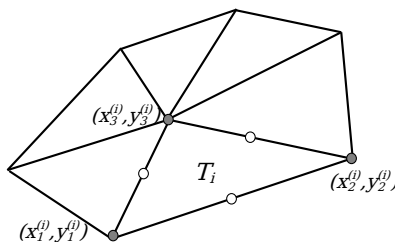
siendo N_n el número de nodos de la partición D_h . Entonces llamando $f_i = f(x_i, y_i)$ podemos expresar la función interpolada como combinación lineal de las funciones de la base

$$f_h(x, y) = \sum_{i=1}^{N_n} f_i \phi_i(x, y)$$

Por tanto el problema de interpolación queda resuelto si sabemos calcular $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N_n}$ y los nodos asociados a la partición D_h , $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq N_n}$.

3.1 Mallados formados por triángulos

Supongamos un mallado $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ formado por N_e triángulos. Cada elemento T_i tendrá tres nodos que los representaremos por $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})$, $(x_2^{(i)}, y_2^{(i)})$ y $(x_3^{(i)}, y_3^{(i)})$ según vemos en la siguiente figura.



Si elegimos $m = 1$ para construir los polinomios, sólo necesitaremos 3 nodos para calcular p_1 : los vértices del triángulo T_i .

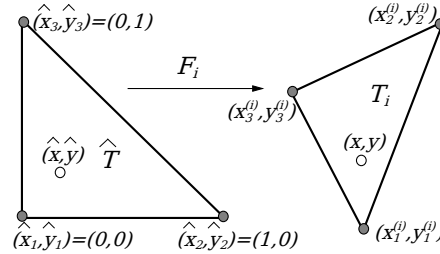
$$p_1(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (3.2)$$

Si por el contrario elegimos interpolación cuadrática ($m = 2$), necesitaremos 6 nodos para calcular p_2 : los tres vértices de T_i y los puntos medios de los tres segmentos de cada lado del triángulo.

$$p_2(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2$$

Volviendo al caso lineal, debemos encontrar las tres incógnitas a_0 , a_1 y a_2 del polinomio (3.2) resolviendo el siguiente sistema lineal:

$$\left. \begin{aligned} p_1 \left(x_1^{(i)}, y_1^{(i)} \right) &= a_0 + a_1x_1^{(i)} + a_2y_1^{(i)} = f \left(x_1^{(i)}, y_1^{(i)} \right) \\ p_1 \left(x_2^{(i)}, y_2^{(i)} \right) &= a_0 + a_1x_2^{(i)} + a_2y_2^{(i)} = f \left(x_2^{(i)}, y_2^{(i)} \right) \\ p_1 \left(x_3^{(i)}, y_3^{(i)} \right) &= a_0 + a_1x_3^{(i)} + a_2y_3^{(i)} = f \left(x_3^{(i)}, y_3^{(i)} \right) \end{aligned} \right\}$$


 Figura 3.1: Triángulo de referencia y aplicación afín F_i . Caso de polinomio de grado 1.

Matricialmente puede expresarse de forma equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^{(i)} & y_1^{(i)} \\ 1 & x_2^{(i)} & y_2^{(i)} \\ 1 & x_3^{(i)} & y_3^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{(i)} \\ f_2^{(i)} \\ f_3^{(i)} \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso uni-dimensional, es útil definir un elemento triangular de referencia \hat{T} y una aplicación afín F_i que haga la transformación del elemento de referencia \hat{T} al elemento T_i .

La aplicación afín $F_i : \hat{T} \rightarrow T_i$ se define de modo que $F_i(\hat{x}_j, \hat{y}_j) = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$ para $1 \leq j \leq 3$. Es fácil ver que

$$F_i(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ y_1^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^{(i)} - x_1^{(i)} & x_3^{(i)} - x_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} - y_1^{(i)} & y_3^{(i)} - y_1^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o en forma más compacta:

$$F_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}_1^{(i)} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \quad (3.3)$$

Es interesante según veremos expresar la función inversa $F_i^{-1} : T_i \rightarrow \hat{T}$

$$F_i^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^{(i)}) = \hat{\mathbf{x}}$$

donde es fácil calcular la matriz inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{pmatrix} x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \\ y_3^{(i)} - y_1^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3^{(i)} - y_1^{(i)} \\ x_3^{(i)} - x_1^{(i)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_3^{(i)} - x_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} - y_1^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2^{(i)} - y_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_3^{(i)} - y_1^{(i)} & -x_3^{(i)} + x_1^{(i)} \\ -y_2^{(i)} + y_1^{(i)} & x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Entonces definimos las tres funciones sobre el triángulo de referencia $\hat{\phi}_i : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\hat{\phi}_i \in P_1(\hat{T})$ y $\hat{\phi}_i(\hat{x}_j, \hat{y}_j) = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq 3$. Es fácil ver en la figura 3.1 que las funciones se definen del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y} \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x} \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

y por tanto obtenemos finalmente

$$\phi_j^{(i)}(x, y) = \hat{\phi}_j(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\phi}_j(F_i^{-1}(x, y)) \quad 1 \leq j \leq 3$$

Así, dado un mallado D_h necesitamos numerar los nodos para poder construir la base $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N_n}$ de V_h . La información del mallado queda guardada a través de dos tablas (tabla de *coordenadas* y tabla de *conexiones* o *conectividad*) al igual que vimos en el caso unidimensional (1D).

De esta forma, particularizando la expresión general (3.1) diremos que el espacio de elementos finitos V_h asociado al mallado D_h podemos escribirlo como

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{D}) : v_h|_{T_i} = \hat{p} \circ F_i^{-1} \in p_1(T_i), 1 \leq i \leq N_e\} \quad (3.6)$$

Obsérvese que $\hat{p} \in p_1(\hat{T})$. Una base de este espacio será $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N_n}$. Es decir, la dimensión de V_h es igual a N_n , número de nodos de la malla.

Ejemplo: Las tablas de coordenadas y conexiones correspondientes al siguiente mallado se reproducen a continuación.

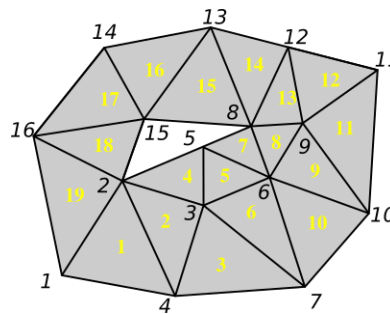


Tabla de coordenadas:

	N_1	N_2	N_3	\dots	N_{16}
x	x_1	x_2	x_3	\dots	x_{16}
y	y_1	y_2	y_3	\dots	y_{16}

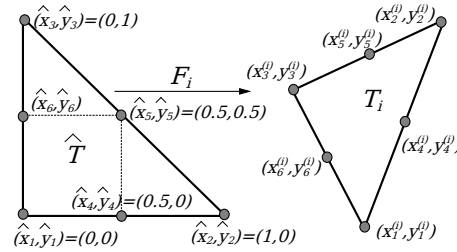


Figura 3.2: Triángulo de referencia y aplicación afín F_i para polinomios de grado dos.

Tabla de conexiones:

	nodo 1	nodo 2	nodo 3
T_1	1	4	2
T_2	4	3	2
T_3	4	7	3
T_4	2	3	5
T_5	3	6	5
T_6	6	3	7
...			
T_{18}	2	15	16
T_{19}	1	2	16

Al tener 16 nodos, la dimensión de V_h en este caso es 16. La base de funciones estará constituida por $\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_{16}(\mathbf{x})$. Así, por ejemplo, fijándonos en el nodo 3, pertenece a los elementos T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6 . Según la tabla de conexiones, cada nodo en cada elemento tiene una ordenación del 1 al 3. Así, por ejemplo, el triángulo T_2 tiene como primer nodo el 4, como segundo nodo el 3 y como tercer nodo el 2. Con toda esta información construimos la función ϕ_3 del siguiente modo:

$$\phi_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} \phi_2^{(2)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in T_2 \\ \phi_3^{(3)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in T_3 \\ \phi_2^{(4)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in T_4 \\ \phi_1^{(5)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in T_5 \\ \phi_2^{(6)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in T_6 \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 \end{cases}$$

□

En caso de utilizar polinomios de segundo grado, la aplicación afín $F_i : \hat{T} \rightarrow T_i$ es la misma que para el caso de grado uno, según vemos en la figura 3.2.

Las funciones $\hat{\phi}_i : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}$ serán polinomios de segundo grado ($\hat{\phi}_i \in P_2(\hat{T})$) tales que $\hat{\phi}_i(\hat{x}_j, \hat{y}_j) = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq 6$. Podemos comprobar que las siguientes funciones cumplen esas propiedades:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y})(1 - 2\hat{x} - 2\hat{y}) \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}(2\hat{x} - 1) \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}(2\hat{y} - 1) \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \\ \hat{\phi}_5(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{x}\hat{y} \\ \hat{\phi}_6(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \end{aligned} \right\}$$

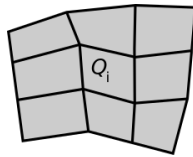
Como en el caso de grado uno, las funciones en los triángulos se obtienen mediante la función inversa F^{-1} :

$$\phi_j^{(i)}(x, y) = \hat{\phi}_j(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\phi}_j(F_i^{-1}(x, y)) \quad 1 \leq j \leq 6$$

Obsérvese que en el caso cuadrático, la tabla de conexiones tendrá un tamaño igual a seis veces el número de triángulo ($6 \times N_e$).

	nodo 1	nodo 2	nodo 3	nodo 4	nodo 5	nodo 6
T_1						
T_2						
T_3						
\dots						
T_{N_e}						

3.2 Mallados formados por cuadriláteros



Consideremos ahora la partición hecha con cuadriláteros $D_h = \{Q_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$. Primero calculamos las funciones $F_i : \hat{Q} \rightarrow Q_i$ tales que transforman el cuadrado de referencia \hat{Q} en el cuadrilátero Q_i . Dichas funciones deben cumplir que $F_i(\hat{x}_j, \hat{y}_j) = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$ para $1 \leq j \leq 4$.

En general, dado un polinomio $\hat{p} : \hat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ vamos a pedir que sea *bilineal*

$$\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) = (b_0 + b_1\hat{x})(c_0 + c_1\hat{y})$$

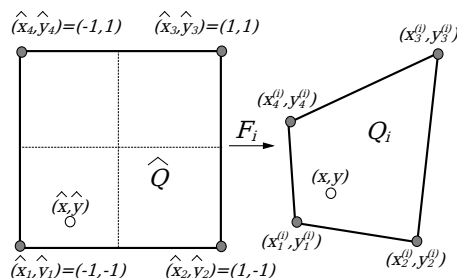


Figura 3.3: Cuadrado de referencia y aplicación F_i .

o bicuadrático

$$\hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) = (b_0 + b_1\hat{x} + b_2\hat{x}^2)(c_0 + c_1\hat{y} + c_2\hat{y}^2)$$

Así, para polinomios bilineales se demuestra fácilmente que una base funcional está constituida por los 4 siguientes polinomios

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y}) \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y}) \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y}) \end{aligned} \right\}$$

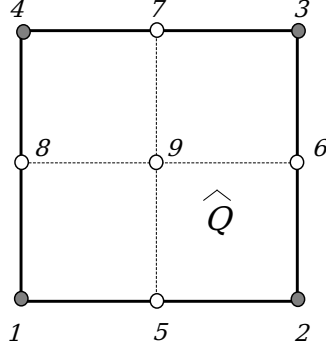
Observación: No todos los polinomios bicuadráticos se pueden escribir como producto de dos polinomios de grado 2 en x e y . De igual forma, no todos los polinomios bilineales se pueden escribir como producto de dos polinomios de grado 1 en x e y . Así, por ejemplo

$$p(x, y) = y + x^2y^2 \stackrel{?}{=} (b_0 + b_1x + b_2x^2)(c_0 + c_1y + c_2y^2)$$

no tiene solución, pues obtenemos un sistema incompatible:

$$\left. \begin{aligned} b_0c_0 &= b_1c_0 = b_1c_1 = b_2c_0 = 0 \\ b_0c_2 &= b_1c_2 = b_2c_1 = 0 \\ b_0c_1 &= b_2c_2 = 1 \end{aligned} \right\}$$

Ejercicio: Escribir las funciones base para polinomios bicuadráticos que verifican e $\hat{\phi}_i(\hat{x}_j, \hat{y}_j) = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq 9$. □



□

A partir de las funciones base en \hat{Q} bilineales $\{\hat{\phi}_i\}_{1 \leq i \leq 4}$, podemos escribir la expresión para $F_i : \hat{Q} \rightarrow Q_i$

$$F_i(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\sum_{j=1}^4 x_j^{(i)} \hat{\phi}_j(\hat{x}, \hat{y}), \sum_{j=1}^4 y_j^{(i)} \hat{\phi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \right)$$

De forma análoga al caso de triángulos

$$V_h = \left\{ v_h \in C(\bar{D}) : v_h|_{Q_i} = \hat{p} \circ F_i^{-1}, \hat{p} \in Q_m(\hat{Q}), 1 \leq i \leq N_e \right\}$$

donde $m = 1$ o $m = 2$ y $Q_m(\hat{Q})$ denota el conjunto de polinomios bilineales ($m = 1$) o bicuadráticos ($m = 2$). El resto de definiciones son análogas al caso de triángulos.

3.3 Estimación del error de interpolación

Teorema: Sea $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ una partición de \bar{D} , sea V_h el espacio de elementos finitos de grado m asociado a D_h . Entonces para cualquier función $f \in C^{m+1}(T_i)$ existe una constante $c > 0$ no dependiente de T_i tal que

- $\|f - f_h\|_{L^2(T_i)} \leq c \cdot h_i^{m+1} \left(\sum_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(T_i)}^2 \right)^{1/2}$
- $\|f - f_h\|_{L^\infty(T_i)} \leq c \cdot h_i^{m+1} \max_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(T_i)}$
- $\|\nabla f - \nabla f_h\|_{L^2(T_i)} \leq c \frac{h_i^{m+1}}{\rho_i} \left(\sum_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(T_i)}^2 \right)^{1/2}$

$$\bullet \|\nabla f - \nabla f_h\|_{L^\infty(T_i)} \leq c \frac{h_i^{m+1}}{\rho_i} \max_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(T_i)}$$

□

Observaciones: En las expresiones anteriores se ha utilizado la siguiente notación

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$$

$$\|f\|_{L^2(D)}^2 = \int_D |f|^2 = \int_D |f(x, y)|^2 dx dy$$

$$\|f\|_{L^\infty(D)} = \max_D |f|$$

$$\|\nabla f\|_{L^2(D)} = \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right\|_{L^2(D)} = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

□

Teorema: Sea $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ una partición de \bar{D} , sea V_h el espacio de elementos finitos de grado m asociado a D_h . Entonces para cualquier función $f \in C^{m+1}(\bar{D})$ existe una constante $c > 0$ tal que

$$\bullet \|f - f_h\|_{L^2(D)} \leq c \cdot h^{m+1} \left(\sum_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(D)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\bullet \|f - f_h\|_{L^\infty(D)} \leq c \cdot h^{m+1} \max_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(D)}$$

$$\bullet \|\nabla f - \nabla f_h\|_{L^2(D)} \leq c \cdot h^m \left(\sum_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(D)}^2 \right)^{1/2}$$

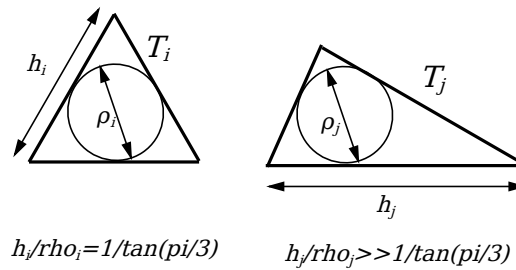
$$\bullet \|\nabla f - \nabla f_h\|_{L^\infty(D)} \leq c \cdot h^m \max_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(D)}$$

La última desigualdad se puede demostrar a partir de la expresión obtenida para el triángulo i :

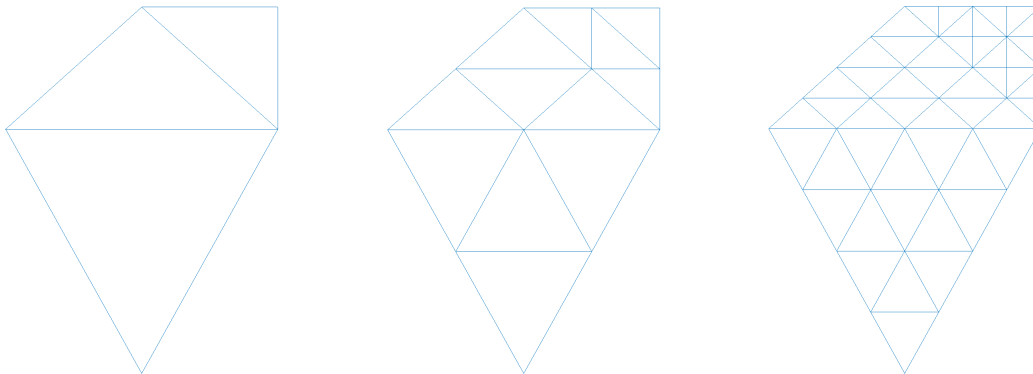
$$\|\nabla f - \nabla f_h\|_{L^\infty(D)} \leq \hat{c} \max_i \left(\frac{h_i^{m+1}}{\rho_i} \max_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(T_i)} \right) \leq \underbrace{\hat{c} \frac{h}{\rho}}_c h^m \max_{|\alpha|=m+1} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(D)}$$

□

Observación: Para controlar el error y que tienda a cero al refinar la malla, los triángulos deben ser lo más equiláteros posibles para que h_i/ρ_i sea lo menor menor posible. El valor óptimo ocurre en un triángulo equilátero donde $h/\rho = 1/\tan(\pi/3) \approx 1.73$. Al refinar las mallas, debemos tratar de cumplir que los cocientes h_i/ρ_i permanezcan constantes en cada triángulo.



Una forma sencilla de mantener esa condición es utilizar los puntos medios de los lados, según vemos en la siguiente figura.



□

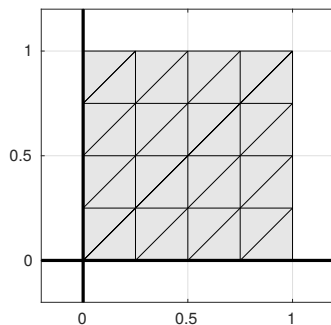
3.4 Ejercicios

1. Calcular las funciones base $\{\hat{\phi}_i\}_{1 \leq i \leq 9}$ en el elemento de referencia \hat{Q} para polinomios bicuadráticos.

2. Sea $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ un mallado formado por triángulos del conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ y $F_i : \hat{T} \rightarrow T_i$ aplicación afín y biyectiva. Demostrar que $|\det \mathbf{J}_{F_i}| = 2|T_i|$ ($|T_i|$ = área del triángulo T_i).
3. Sea $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ un mallado formado por triángulos del conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea V_h el espacio de elementos finitos generado con polinomios de grado 1 ó 2. Sea $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_h \in V_h$ tal que $f_h(x_i, y_i) = f(x_i, y_i)$ para todo nodo del mallado. Se pide:

- (a) Expresar el $\nabla \phi_j^{(i)}$ en función del gradiente de las funciones base $\{\hat{\phi}_i\}_{1 \leq i \leq M}$ definidas en \hat{T} .
- (b) Si $(x, y) \in D$, expresar $\nabla f_h(x, y)$ en función del gradiente de las funciones base $\{\hat{\phi}_i\}_{1 \leq i \leq M}$.

4. Repetir el ejercicio anterior cuando el mallado $D_h = \{Q_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ está formado por elementos de tipo cuadrilátero.
5. Sea $D = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ y se considera el mallado regular y uniforme de la siguiente figura:



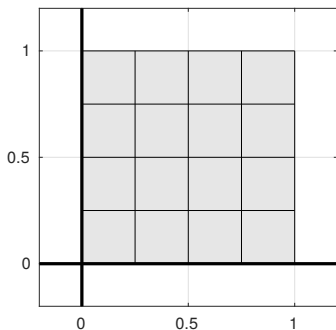
Si $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, se pide calcular $f_h(0.32, 0.74)$ en los siguientes casos:

- (a) El espacio V_h asociado a D_h se construye con polinomios lineales.
 - (b) El espacio V_h asociado a D_h se construye con polinomios cuadráticos.
6. Generar una rutina que pinte una malla de triángulos dadas sus tablas de nodos y conectividades.
 7. Generar una rutina que pinte una malla de triángulos dada una nube de puntos.
 8. Repetir el ejercicio 5 generando con MATLAB/OCTAVE un mallado para el conjunto

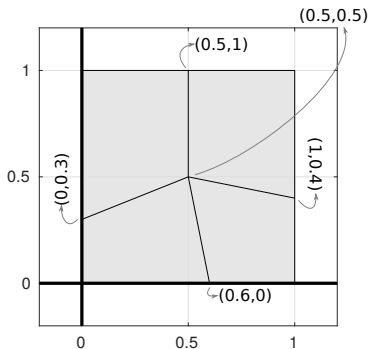
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 < 1\},$$

siendo en este caso la función $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{0.4^2}}$ y calcular $f_h(1.1, 0.1)$.
 Nota: Utilizar la función `tsearch` de MATLAB para encontrar el elemento que contiene al punto $(1.1, 0.1)$.

9. Pintar el error de interpolación lineal del ejercicio anterior. Para ello, generar dos mallas, una gruesa de 100 nodos, y otra fina de 900.
10. Repetir el ejercicio 5 utilizando el siguiente mallado regular y uniforme formado por cuadriláteros y construyendo V_h mediante polinomios bilineales.



11. Sea $D = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ y se considera el mallado de la siguiente figura:

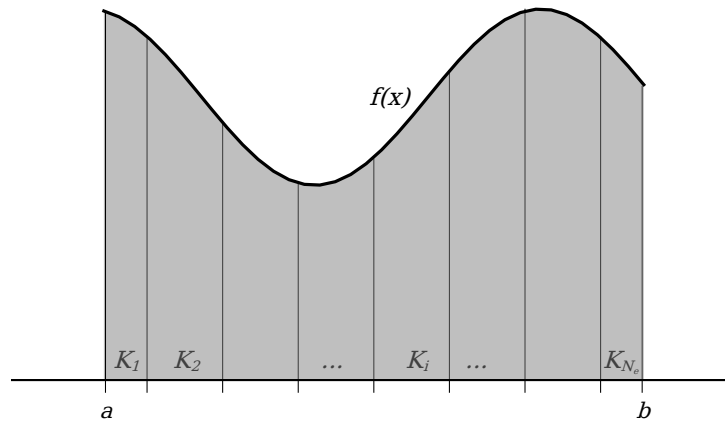


Sea $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, se pide:

- (a) calcular $(x^*, y^*) \in D$ tal que $F_1(0.8, 0.9) = (x^*, y^*)$, siendo $F_1 : \hat{Q} \rightarrow Q_1$ aplicación biyectiva y Q_1 el elemento del mallado tal que $(0, 0) \in Q_1$.
- (b) Calcular $f_h(x^*, y^*)$ si el espacio V_h asociado a D_h se construye con polinomios bilineales.

Capítulo 4

Integración numérica



Sea una función real de variable real $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. El objetivo de este capítulo es aproximar el valor de su integral en el intervalo de definición

$$\int_a^b f(x) dx$$

Gracias a las propiedades de la integral, podemos hacer el cálculo exacto dividiendo el intervalo original en N_e sub-intervalos:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{K_i} f(x) dx$$

En general, si $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ y llamando a $f(x_i) := f_i$, podemos aproximar el valor de la integral del siguiente modo

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^n \omega_i f_i.$$

Si definimos

$$Q[f] := \sum_{i=0}^n \omega_i f_i$$

entonces obtenemos finalmente

$$\int_a^b f(x) dx = Q[f] + E[f].$$

Observaciones:

1. A $Q[f]$ se le denomina *fórmula de integración numérica* o *de cuadratura*.
2. A $E[f]$ se le llama *error de truncamiento* de la fórmula de integración.
3. A $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ y $\{\omega_i\}_{0 \leq i \leq n}$ se les denomina *nodos de integración* y *pesos de la fórmula de integración* respectivamente.
4. Si $a = x_0$ y $b = x_n$ decimos que el método de integración es *cerrado*. Si $a \neq x_0$ o $b \neq x_n$ decimos que el método de integración es *abierto*.
5. Cuando usamos un único intervalo para obtener la fórmula de cuadratura Q , se dice que es una fórmula de cuadratura *simple*. En caso contrario se dice que es una fórmula de cuadratura *compuesta*.

□

Definición: Dada una fórmula de cuadratura Q , se dice que tiene *grado de precisión* o *exactitud* m si verifica:

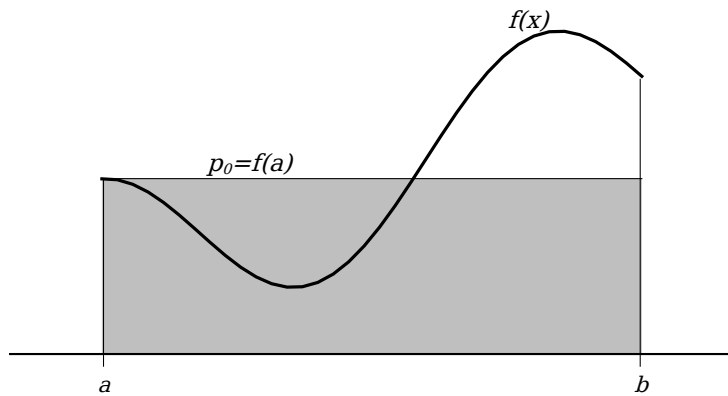
- La fórmula es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que m . Es decir, $\forall p_n$ polinomio de grado $n \leq m$ se cumple $E[p_n] = 0$.
- Existe un polinomio de grado $m+1$ para el cual la fórmula no es exacta. Es decir $E[p_{m+1}] \neq 0$.

□

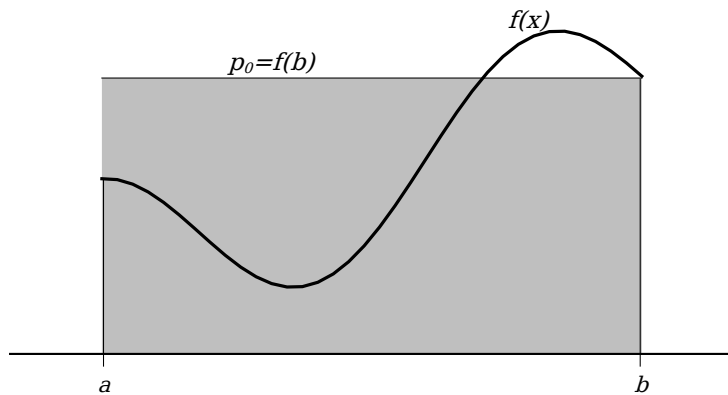
4.1 Fórmulas cerradas de cuadratura de Newton-Côtes

4.1.1 Regla del rectángulo

Definición: La *regla del rectángulo* puede ser de dos tipos, dependiendo si $x_0 = a$ o $x_n = b$.



$$Q_R[f] = \int_a^b p_0(x) dx = (b - a) f(a)$$



$$Q_R[f] = \int_a^b p_0(x) dx = (b - a) f(b)$$

□

Observación: La regla del rectángulo tiene grado de precisión 0 ya que para polinomios de grado 0 tenemos

$$\int_a^b 1 dx = b - a = Q_R[1]$$

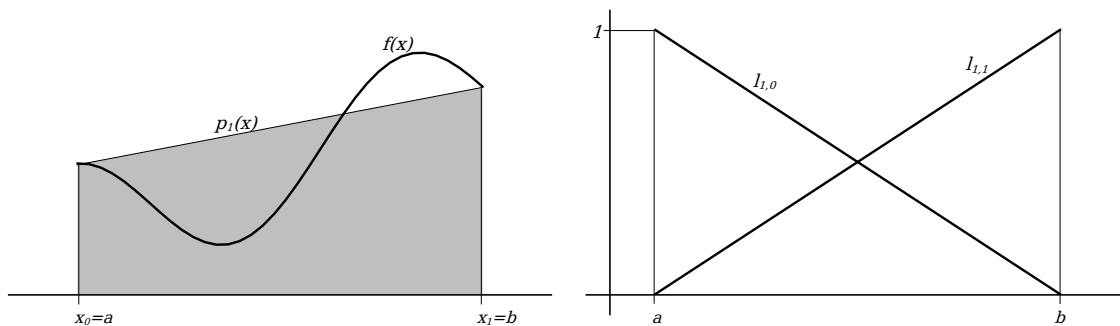
mientras que para polinomios de grado 1

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \neq Q_R[x] = (b - a) a$$

□

4.1.2 Regla del trapecio

Definición: La *regla del trapecio* utiliza un polinomio de grado 1 dado por $p_1(x) = f_0 l_{1,0}(x) + f_1 l_{1,1}(x)$.



La fórmula de integración será en este caso

$$Q_T[f] = \int_a^b p_1(x) dx = f_0 \int_a^b l_{1,0}(x) dx + f_1 \int_a^b l_{1,1}(x) dx \equiv \sum_{i=0}^1 \omega_i f_i$$

Haciendo uso de las expresiones explícitas de las funciones $l_{1,0}$ y $l_{1,1}$ se obtiene

$$\omega_0 = \int_a^b l_{1,0}(x) dx = \frac{b-a}{2}$$

$$\omega_1 = \int_a^b l_{1,1}(x) dx = \frac{b-a}{2}$$

Entonces finalmente obtenemos

$$Q_T[f] = \frac{b-a}{2} (f_0 + f_1)$$

□

Observación: La regla del trapecio tiene grado de precisión 1 ya que para polinomios de grado 0 tenemos

$$\int_a^b 1 dx = b-a = Q_T[1] = \frac{b-a}{2} (1+1)$$

Para polinomios de grado 1 también obtenemos la igualdad

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2} = Q_T[x] = \frac{b-a}{2} (a+b)$$

Mientras que para polinomios de grado 2

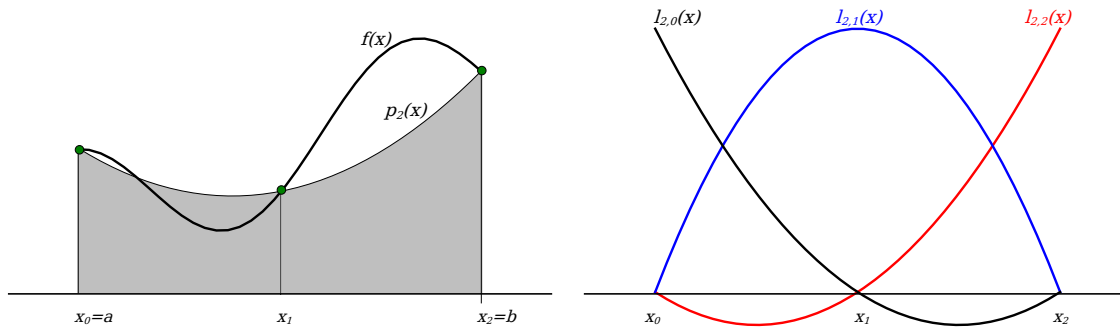
$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3} \neq Q_T[x^2] = \frac{b-a}{2} (a^2+b^2)$$

□

4.1.3 Regla de Simpson

Definición: La *regla de Simpson* hace uso de polinomios de segundo grado. Como ya se vio, el polinomio de segundo grado que aproxima la función $f(x)$ en los puntos x_0 , x_1 y x_2 se puede expresar del siguiente modo

$$p_2(x) = f_0 l_{2,0}(x) + f_1 l_{2,1}(x) + f_2 l_{2,2}(x)$$



La fórmula de integración será

$$Q_S[f] = \int_a^b p_2(x) dx = f_0 \int_a^b l_{2,0}(x) dx + f_1 \int_a^b l_{2,1}(x) dx + f_2 \int_a^b l_{2,2}(x) dx \equiv \sum_{i=0}^2 \omega_i f_i$$

A continuación calculamos los tres integrales suponiendo el caso particular en el que el punto x_1 está situado en el punto medio del segmento $[a, b]$, es decir, $x_1 = (a + b) / 2$:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \int_a^b l_{2,0}(x) dx = \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx = \\ &= \frac{2}{(b - a)^2} \int_a^b \left[x - \left(x_0 + \frac{b - a}{2} \right) \right] [x - (x_0 + b - a)] dx = \\ &= \frac{1}{(b - a)^2} \int_a^b [2x - 2x_0 - b + a] [x - x_0 - b + a] dx \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $x - x_0 = (b - a)t$, por lo que $dx = (b - a) dt$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{(b - a)^2} \int_0^1 [2(b - a)t - b + a] [(b - a)t - b + a] (b - a) dt = \\ &= (b - a) \int_0^1 (2t - 1)(t - 1) dt = (b - a) \int_0^1 (2t^2 - 3t + 1) dt = \end{aligned}$$

$$(b-a) \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + t \right]_0^1 = (b-a) \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{b-a}{6}$$

De forma similar calculamos ω_1 haciendo un cambio de variable idéntico:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \int_a^b l_{2,1}(x) dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx = \\ &= \frac{-4}{(b-a)^2} \int_a^b (x-x_0)[x-(x_0+b-a)] dx = \\ &= \frac{-4}{(b-a)^2} \int_0^1 (b-a)t[(b-a)t-b+a](b-a) dt = -4(b-a) \int_0^1 t(t-1) dt = \\ &= -4(b-a) \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = -4(b-a) = \frac{2}{3}(b-a) \end{aligned}$$

Se puede comprobar que $\omega_2 = \omega_0$. Por lo que finalmente obtenemos

$$Q_S[f] = \sum_{i=0}^2 \omega_i f_i = \frac{b-a}{6} (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

Observación: La regla del Simpson tiene grado de precisión 3 ya que para polinomios de grado 0 tenemos

$$\int_a^b 1 dx = b-a = Q_S[1] = \frac{b-a}{6} (1+4+1)$$

Para polinomios de grado 1 también obtenemos la igualdad

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2} = Q_S[x] = \frac{b-a}{6} \left(a + 4 \left(a + \frac{b-a}{2} \right) + b \right) = \frac{b^2-a^2}{6}$$

Para polinomios de grado 2 también obtenemos la igualdad

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3} = Q_S[x^2] = \frac{b-a}{6} \left(a^2 + 4 \left(a + \frac{b-a}{2} \right)^2 + b^2 \right)$$

Para polinomios de grado 3 también obtenemos la igualdad

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4-a^4}{4} = Q_S[x^3] = \frac{b-a}{6} \left(a^3 + 4 \left(\frac{b+a}{2} \right)^3 + b^3 \right)$$

Mientras que para polinomios de grado 4

$$\int_a^b x^4 dx = \frac{b^5 - a^5}{5} \neq Q_S[x^4] = \frac{b-a}{6} \left(a^4 + 4 \left(\frac{b+a}{2} \right)^4 + b^4 \right) = \frac{1}{24} (5b^4 - 5a^5 + a^4b - 2a^3b^2 + 2a^2b^3 - ab^4)$$

□

4.1.4 Estimación de errores de cuadratura

Recordemos la expresión (1.3): Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^{n+1} y sea $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n} \subset [a, b]$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $c_x \in [a, b]$ tal que

$$f(x) = p_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

Obsérvese que la constante c_x puede depender de x , por lo que podría representarse como $c(x)$. Llamando

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

e integrando obtenemos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_n(x) dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) f^{(n+1)}(c_x) dx := Q[f] + E[f]$$

Podemos de este modo estimar el error $E[f]$ de la cuadratura $Q[f]$:

$$|E[f]| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b |\omega(x)| dx \tag{4.1}$$

Recordemos que para nodos equiespaciados, según la expresión (1.7) podemos expresar la la función $\omega(x)$ como

$$\omega(x) = \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} g(t)$$

siendo

$$g(t) = \prod_{i=0}^n (t-i)$$

De esta forma, el error de cuadratura de la expresión (4.1) se reduce a

$$|E[f]| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+2} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_0^n |g(t)| dt \tag{4.2}$$

Teorema: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^2([a, b])$. Entonces la regla del trapecio verifica

$$|E_T[f]| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \quad (4.3)$$

□

Demostración: Calculamos la integral para $n = 1$

$$\int_0^1 |t(t-1)| dt = \int_0^1 |(t^2-t)| dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Utilizando la expresión (4.2)

$$|E_T[f]| \leq \frac{1}{2} (b-a)^3 \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{1}{6}$$

Por lo que queda demostrado. □

Observación: La expresión (4.2) no daría una cota óptima en el caso de la regla de Simpson, pues quedaría algo del tipo

$$E_S[f] \leq C (b-a)^4 \max_{x \in [a, b]} |f'''(x)|$$

y sin embargo sabemos que si f es un polinomio de grado 3 ($f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$), entonces $E_S[f] = 0$ mientras que $f'''(x) = 6a \neq 0$. Esto es debido a que la regla del Simpson tiene grado de precisión 3, en lugar de 2. □

Teorema: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^4([a, b])$. Entonces la regla de Simpson verifica

$$|E_S[f]| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| \quad (4.4)$$

□

Demostración: Tomamos el polinomio de interpolación de Hermite utilizando los nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$ con orden de contacto 1 en x_1 . Suponemos que $x_1 = (x_0 + x_2)/2$. Particularizando la expresión (1.14) para $n = 1$ obtenemos

$$f(x) = p_3(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}{4!} f^{(4)}(c_x)$$

con $c_x \in [a, b]$. Llamando $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$ e integrando ambos miembros

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_3(x) dx + \frac{1}{4!} \int_a^b \omega(x) f^{(4)}(c_x) dx$$

Como la regla de Simpson calcula de forma exacta cualquier polinomio de grado 3, entonces

$$\int_a^b p_3(x) dx = Q_S[p_3] = Q_S[f]$$

y por tanto

$$E_S[f] = \frac{1}{4!} \int_a^b \omega(x) f^{(4)}(c_x) dx$$

Procediendo como en otras ocasiones, buscamos una cota del error

$$|E_S[f]| \leq \frac{1}{4!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \int_a^b |\omega(x)| dx$$

Calculamos la integral $\int_a^b |\omega(x)| dx$ haciendo el cambio de variable $t = 2 \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = 2 \frac{x - a}{b - a}$.

$$\begin{aligned} |E_S[f]| &\leq \frac{1}{4!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \int_0^2 \left| \frac{(b-a)}{2} t - \frac{(b-a)^2}{4} (t-1)^2 \frac{(b-a)}{2} (t-2) \right| \frac{(b-a)}{2} dt = \\ &\frac{1}{4!} \frac{(b-a)^5}{2^5} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \int_0^2 |t(t-1)^2(t-2)| dt = \\ &\frac{1}{4!} \frac{(b-a)^5}{2^5} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \int_0^2 |t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t| dt = \\ &\frac{1}{4!} \frac{(b-a)^5}{2^5} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \left| \left[\frac{1}{5} t^5 - t^4 + \frac{5}{3} t^3 - t^2 \right]_0^2 \right| = \\ &\frac{1}{4!} \frac{(b-a)^5}{2^5} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \frac{4}{15} \end{aligned}$$

□

4.2 Fórmulas cerradas de cuadratura de Gauss-Legendre

En las fórmulas de cuadratura cerradas de Newton-Côtes obteníamos la fórmula integrando un polinomio de interpolación de Lagrange. Para ello fijábamos los nodos de integración $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. A partir de esos nodos construíamos el polinomio p_n y entonces

$$Q[f] = \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f_i$$

con $f_i = f(x_i) = p_n(x_i)$.

En cierto modo se puede pensar que hemos elegido los pesos $\{\omega_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de tal manera que $Q[f]$ tenga el grado de precisión más alto posible:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b 1 dx &= Q[1] \\ \int_a^b x dx &= Q[x] \\ \int_a^b x^2 dx &= Q[x^2] \\ &\dots \\ \int_a^b x^n dx &= Q[x^n] \end{aligned} \right\}$$

Entonces se tienen $n + 1$ condiciones para obtener $n + 1$ pesos. Obtendríamos de este modo grado de precisión al menos n .

Nos planteamos ahora una fórmula de cuadratura sin fijar los nodos $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ ni los pesos $\{\omega_i\}_{0 \leq i \leq n}$ buscando un grado de precisión máximo. Para simplificar la exposición utilizaremos el intervalo $[-1, 1]$. Sea por tanto $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $Q[f] = \sum_{i=0}^n \omega_i f_i$. Queremos conseguir

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 1 dx &= Q[1] \\ \int_{-1}^1 x dx &= Q[x] \\ \int_{-1}^1 x^2 dx &= Q[x^2] \\ &\dots \\ \int_{-1}^1 x^{2n+1} dx &= Q[x^{2n+1}] \end{aligned} \right\}$$

De modo que tenemos que encontrar $n + 1$ pesos, disponemos de $n + 1$ nodos, y por tanto tenemos $2n + 2$ condiciones. De esta forma podemos obtener un grado de precisión al menos de $2n + 1$.

Utilizaremos un polinomio sobre los nodos $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ que sea de grado $2n + 1$. Una posibilidad es utilizar el polinomio interpolador de Hermite para esos nodos, pues:

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	\dots	f_n
$f'(x)$	f'_0	f'_1	\dots	f'_n

Según vimos en la expresión (1.11), el polinomio puede expresarse como

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n f_i A_{n,i}(x) + \sum_{i=0}^n f'_i B_{n,i}(x)$$

Recordando la expresión (1.14)

$$f(x) = p_{2n+1}(x) + \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(c_x)$$

donde $c_x \in [-1, 1]$. Integrando esta ecuación obtenemos

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 p_{2n+1}(x) dx + \int_{-1}^1 \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \cdots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c_x) dx \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = Q[f] + E[f]$$

Por tanto la fórmula de integración será

$$Q[f] = \int_{-1}^1 p_{2n+1}(x) dx = \sum_{i=0}^n f_i \int_{-1}^1 A_{n,i}(x) dx + \sum_{i=0}^n f'_i \int_{-1}^1 B_{n,i}(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f_i + \sum_{i=0}^n \bar{\omega}_i f'_i \quad (4.5)$$

Nos preguntamos si es posible que $\bar{\omega}_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$. Es decir, si existe una distribución de nodos $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ tal que las integrales $\int_{-1}^1 B_{n,i}(x) dx$ sean cero. Usando la expresión (1.12) donde se definen las funciones $B_{n,i}$ obtenemos

$$\int_{-1}^1 B_{n,i}(x) dx = \int_{-1}^1 (x-x_i) l_{n,i}^2(x) dx = \int_{-1}^1 (x-x_i) \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x-x_j)^2}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i-x_j)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i-x_j)} \int_{-1}^1 l_{n,i}(x) \prod_{j=0}^n (x-x_j) dx$$

En la integral tenemos el producto de dos polinomios. $l_{n,i}$ es de grado n y $\prod_{j=0}^n (x-x_j)$ de grado $n+1$. Llamemos

$$P_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x-x_j).$$

Si P_{n+1} fuese ortogonal a todos los polinomios $l_{n,i}$ de grado $< n+1$ entonces $\bar{\omega}_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$. Para ello vamos a utilizar unos polinomios de Legendre $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ que verifiquen las siguientes condiciones:

- P_i es un polinomio de grado i mónico.

- $\int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx = 0$ si $i \neq j$.¹

Para construir P_{n+1} basta con conocer sus raíces.

Ejemplo: Es trivial encontrar $P_0(x)$, pues tiene que ser de grado cero y mónico. Por tanto $P_0(x) = 1$. □

Ejemplo: Calculamos $P_1(x)$. Para ello suponemos que es de la forma $P_1(x) = x + b$ e imponemos que sea ortogonal a $P_0(x) = 1$.

$$\langle P_1, P_0 \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (x + b) \cdot 1 \cdot dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + bx \right]_{-1}^1 = 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Por tanto $P_1(x) = x$. □

Ejemplo: Calculemos P_2 . Para ello suponemos que es de la forma $P_2(x) = x^2 + ax + b$ e imponemos que sea ortogonal a $P_0(x) = 1$.

$$\langle P_2, P_0 \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (x^2 + ax + b) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + bx \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b - \left(-\frac{1}{3} + \frac{a}{2} - b \right) = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$

Y ortogonal a $P_1(x) = x$.

$$\langle P_2, P_1 \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 (x^2 + ax + b) x dx = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \right) = 0 \Rightarrow a = 0$$

Luego $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Por tanto para $n = 2$ tenemos que $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

¹ P_i y P_j son ortogonales ($P_i \perp P_j$) para el producto escalar $\langle P_i, P_j \rangle = \int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx$

□

Puede probarse que

$$P_n(x) = \alpha \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (4.6)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ para que P_n sea mónico. Luego según la expresión (4.5) eligiendo los nodos $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ como las raíces de los polinomios definidos en (4.6), la fórmula de integración de Gauss-Legendre se reduce a

$$Q[f] = \sum_{i=0}^n \omega_i f_i$$

donde los pesos se calculan según vimos en (1.12)

$$\omega_i = \int_{-1}^1 (1 - 2(x - x_i) l'_{n,i}(x_i)) l_{n,i}^2(x) dx$$

La expresión anterior puede simplificarse. Para ello supongamos que $f = l_{n,j}$. Entonces

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 l_{n,j}(x) dx = Q[f] + E[f]$$

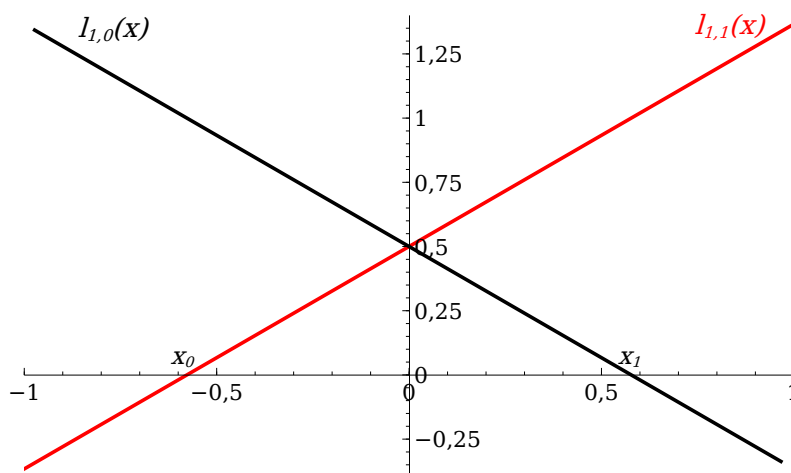
Como $l_{n,j}$ tiene grado n y la cuadratura tiene precisión al menos $2n + 1$, entonces $E[f] = 0$. Luego

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = Q[f] = \sum_{i=0}^n \omega_i l_{n,j} = \sum_{i=0}^n \omega_i \delta_{ij} = \omega_j$$

Por tanto obtenemos finalmente

$$\omega_i = \int_{-1}^1 l_{n,i}(x) dx$$

Ejemplo: Calculemos los pesos ω_0 y ω_1 para $n = 1$.



$$\omega_0 = \int_{-1}^1 l_{1,0}(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \frac{1}{x_0 - x_1} \left[\frac{x^2}{2} - x_1 x \right]_{-1}^1 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0} = \frac{2/\sqrt{3}}{3/\sqrt{3}} = 1$$

Se puede ver por simetría que $\omega_1 = 1$. A modo resumen, en la siguiente tabla tenemos los nodos y los pesos para el caso $n = 1$.

$i(n = 1)$	0	1
x_i	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
ω_i	1	1

□

Observación: En el caso de cuadratura de Gauss-Legendre podemos estimar el error de forma similar a la expresión (4.1) ya que si

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = Q[f] + E[f]$$

entonces

$$E[f] = \left| \int_{-1}^1 \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(c_x) dx \right| \Rightarrow$$

$$E[f] \leq \frac{1}{(2n + 2)!} \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(2n+2)}(x)| \int_{-1}^1 |P_n^2(x)| dx \tag{4.7}$$

donde

$$P_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

□

Observación: En el caso en el que la función está definida en un intervalo cualquiera distinto al $[-1, 1]$ ($f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$), es fácil generalizar las expresiones anteriores mediante un cambio de variable

$$t = 2 \frac{x - a}{b - a} - 1$$

o despejando x

$$x = a + \frac{b - a}{2} (t + 1).$$

De esta forma pasamos a trabajar con una nueva función $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(t) = f\left(a + \frac{b - a}{2} (t + 1)\right) \frac{b - a}{2} \tag{4.8}$$

Así, podemos expresar la cuadratura general

$$\int_a^b f(x) dx = Q[f] + E[f]$$

mediante las expresiones conocidas para la función g :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(a + \frac{b - a}{2} (t + 1)\right) \frac{b - a}{2} dt = \int_{-1}^1 g(t) dt = Q[g] + E[g]$$

La expresión (4.7) queda en un intervalo generalizado

$$E[f] \leq \frac{(b - a)^{2n+3}}{2^{2n+3} (2n + 2)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(2n+2)}(x)| \int_{-1}^1 |\hat{P}_n^2(t)| dt \tag{4.9}$$

donde

$$\hat{P}_n(t) = P_n\left(a + \frac{b - a}{2} (t + 1)\right)$$

□

A modo resumen, se da la siguiente tabla de nodos y pesos para la cuadratura de Gauss-Legendre en el intervalo $[-1, 1]$

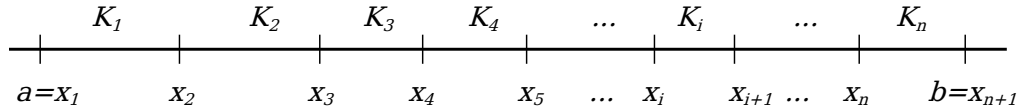
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + E_n[f]$$

Recordemos que n es el grado del polinomio empleado en la cuadratura, existiendo $n + 1$ pesos y $n + 1$ nodos. El grado de precisión será al menos de $2n + 1$. Los nodos de integración son las raíces del polinomio de Legendre ortogonal mónico P_{n+1} . El valor $c \in [-1, 1]$ depende en cada caso de f y de n . En la tabla m representa el grado de precisión de la cuadratura.

n	m	P_{n+1}	x_i	ω_i	$E_n[f]$
0	1	x	0	2	$\frac{1}{3}f''(c)$
1	3	$x^2 - \frac{1}{3}$	$\pm 1/\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{135}f^{(4)}(c)$
2	5	$x^3 - \frac{3}{5}x$	0 $\pm\sqrt{3/5}$	8/9 5/9	$\frac{1}{15750}f^{(6)}(c)$
3	7	$x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{7}\left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}$ $\pm\sqrt{\frac{1}{7}\left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}$	0.6521451548625461 0.3478548451374538	$\frac{1}{3472875}f^{(8)}(c)$
4	9	$x^5 + \dots$	0 ± 0.5384693101056831 ± 0.9061798459386640	0.568888888888889 0.4786286704993665 0.2369268850561891	$\frac{1}{1237732650}f^{(10)}(c)$
5	11	$x^6 + \dots$	± 0.9324695142031521 ± 0.6612093864662645 ± 0.2386191860831969	0.1713244923791704 0.3607615730481386 0.4679139345726910	$\frac{2^{13}(6!)^4}{(12!)^3 13!}f^{(12)}(c)$
6	13	$x^7 + \dots$	± 0.9491079123427585 ± 0.7415311855993945 ± 0.4058451513773972 0	0.1294849661688697 0.2797053914892766 0.3818300505051189 0.4179591836734694	$\frac{2^{15}(7!)^4}{(14!)^3 15!}f^{(14)}(c)$
7	15	$x^8 + \dots$	± 0.9602898564975363 ± 0.7966664774136267 ± 0.5255324099163290 ± 0.1834346424956498	0.1012285362903763 0.2223810344533745 0.3137066458778873 0.3626837833783620	$\frac{2^{17}(7!)^4}{(16!)^3 17!}f^{(16)}(c)$

En el caso de un intervalo generalizado donde $x \in [a, b]$, la última columna de la tabla hay que multiplicarla por el factor $\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+3}$ según muestra la expresión (4.9).

4.3 Fórmulas cerradas de cuadratura compuesta



De la misma forma que vimos en la interpolación por elementos finitos lineales, definimos $n + 1$ nodos $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,n+1} \subset [a, b]$ tal que $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$. Definimos los intervalos o *elementos* $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ para $1 \leq i \leq n$. Usamos la partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq n}$ del intervalo $[a, b]$. Denotamos N_e al número de elementos, es decir, $N_e = n$. Obsérvese que el número de nodos x_i es $N_n := n + 1$. Representamos la longitud de cada elemento de la partición como $h_i = x_{i+1} - x_i$, siendo $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$. Si $h_i = h$ para todo $1 \leq i \leq N_e$ se dice que el mallado es uniforme.

Entonces dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ podemos expresar su integral en el intervalo $[a, b]$ del siguiente modo

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{K_i} f(x) dx = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_e} Q^{(i)} [f]}_{Q[f]} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_e} E^{(i)} [f]}_{E[f]}$$

siendo $Q^{(i)} [f]$ y $E^{(i)} [f]$ respectivamente la fórmula de cuadratura y el error de integración de f en el intervalo o elemento $K_i = [x_i, x_{i+1}]$.

Ejemplo: Usando la regla del trapecio, podemos obtener $Q[f]$ y una cota para el error de integración $E[f]$. Supongamos mallado uniforme $h_i = h$. Entonces

$$Q[f] = \sum_{i=1}^n Q^{(i)} [f] = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) = \frac{h}{2} (f_1 + f_2 + f_2 + f_3 + \dots + f_n + f_{n+1}) \Rightarrow$$

$$Q[f] = \frac{h}{2} \left(f_1 + 2 \sum_{i=2}^n f_i + f_{n+1} \right)$$

Usando la expresión (4.3)

$$|E[f]| \leq \sum_{i=1}^n |E^{(i)} [f]| \leq \sum_{i=1}^n \frac{h^3}{12} \max_{x \in K_i} |f''(x)| \leq \frac{h^3}{12} n \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \Rightarrow$$

$$|E[f]| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

□

Ejemplo: Usando la fórmula de Gauss-Legendre para $n = 0$ en el caso particular de la función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, debemos usar el polinomio $P_1(x) = x$, cuya única raíz es $x_0 = 0$. Entonces el peso será

$$\omega_0 = \int_{-1}^1 l_{0,0}(x) dx = 2$$

ya que $l_{0,0}$ es polinomio de grado 0 tal que $l_{0,0}(x_0) = 1$. Luego $l_{0,0}(x) = 1$. Entonces la cuadratura en el intervalo $[-1, 1]$ será

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^0 \omega_i f_i + E[f] = 2f(0) + E[f]$$

siendo una cota del error de integración según la expresión (4.7) particularizada para $n = 0$

$$|E[f]| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)| \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx = \frac{1}{3} \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)|.$$

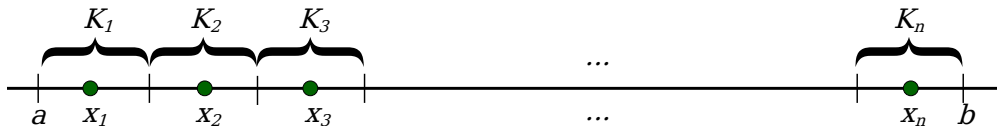
Si ahora la función está definida en un intervalo genérico $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, hacemos uso de una función auxiliar $g(t)$ mediante el cambio de variable visto en la expresión (4.8)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(t) dt = 2g(0) + E[g] = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + E[g]$$

siendo una cota del error

$$|E[g]| \leq \frac{1}{3} \max_{t \in [-1,1]} |g''(t)| = \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Y finalmente, si realizamos la integración de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dividiendo el intervalo en n subintervalos equiespaciados con $h_i = h$ para $1 \leq i \leq n$.



$$Q[f] = \sum_{i=1}^n Q^{(i)}[f] = h \sum_{i=1}^n f_i$$

$$|E[f]| \leq \sum_{i=1}^n |E^{(i)}[f]| \leq \sum_{i=1}^n \frac{h^3}{24} \max_{x \in K_i} |f''(x)| \leq \frac{nh^3}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \Rightarrow$$

$$|E[f]| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

□

En la siguiente tabla resumen se muestran los errores de las diferentes cuadraturas compuestas en el intervalo $[a, b]$ usando unos elementos equiespaciados de tamaño h .

Cuadratura	$E[f] \leq$
Trapezio	$\frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} f''(x) $
Simpson	$\frac{b-a}{2880} h^4 \max_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x) $
Gauss-Legendre $n = 0$	$\frac{b-a}{24} h^2 \max_{x \in [a,b]} f^{(2)}(x) $
Gauss-Legendre $n = 1$	$\frac{b-a}{2^5 135} h^4 \max_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x) $
Gauss-Legendre $n = 2$	$\frac{b-a}{2^7 15750} h^6 \max_{x \in [a,b]} f^{(6)}(x) $
Gauss-Legendre $n = 3$	$\frac{b-a}{2^9 3472875} h^8 \max_{x \in [a,b]} f^{(8)}(x) $
Gauss-Legendre $n = 4$	$\frac{b-a}{2^{11} 1237732650} h^{10} \max_{x \in [a,b]} f^{(10)}(x) $
Gauss-Legendre $n = 5$	$\frac{b-a}{2^{13}} \frac{2^{13} (6!)^4}{(12!)^3 13!} h^{12} \max_{x \in [a,b]} f^{(12)}(x) $

4.4 Integración numérica en 2D

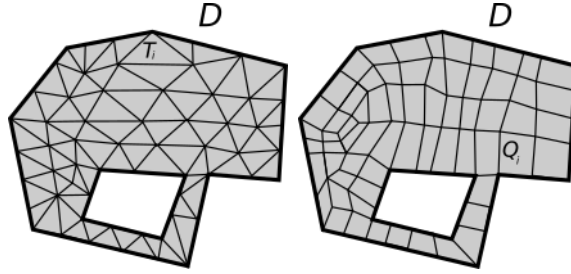
Sea $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con frontera ∂D poligonal. Buscamos calcular de forma numérica la integral

$$\int \int_D f(x, y) dx dy.$$

Para ello definimos una partición (o mallado) de \bar{D} como

$$D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$$

donde K_i son los elementos de la partición.



De esta forma, la integral original se puede calcular como

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{N_e} \int \int_{K_i} f(x, y) dx dy.$$

Además, si existe una aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} F_i : \hat{K} &\rightarrow K_i \\ F_i(\hat{x}, \hat{y}) &= (x, y) \end{aligned}$$

Podemos realizar el cálculo en el elemento unidad de referencia ya que

$$\int \int_{K_i} f(x, y) dx dy = \int \int_{F_i^{-1}(K_i)} f(F_i(\hat{x}, \hat{y})) |\mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y})| d\hat{x} d\hat{y} \quad (4.10)$$

donde $|\mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y})|$ es el determinante de la matriz jacobiana de la función F_i evaluada en el punto (\hat{x}, \hat{y}) . Entonces, usando la siguiente notación

$$f(F_i(\hat{x}, \hat{y})) |\mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y})| = \hat{f}^{(i)}(\hat{x}, \hat{y}) |\mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y})| := \hat{g}^{(i)}(\hat{x}, \hat{y})$$

obtenemos

$$\int \int_{K_i} f(x, y) dx dy = \int \int_{\hat{K}} \hat{g}^{(i)}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \quad (4.11)$$

Es decir, basta con calcular las reglas de cuadratura en los elementos de referencia \hat{T} o \hat{Q} .

4.4.1 Reglas de cuadratura en cuadriláteros

Regla del trapecio: Para simplificar la notación prescindiremos del super-índice (i) en la función de integración.

$$\int \int_{\hat{K}} \hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{2} (\hat{g}(\hat{x}, -1) + \hat{g}(\hat{x}, 1)) + E[\hat{g}_{\hat{x}}] \right) d\hat{x} =$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \hat{g}(\hat{x}, -1) d\hat{x} + \int_{-1}^1 \hat{g}(\hat{x}, 1) d\hat{x} + \int_{-1}^1 E[\hat{g}_{\hat{x}}] d\hat{x} = \\
 & \frac{2}{2} (\hat{g}(-1, -1) + \hat{g}(1, -1)) + E[\hat{g}_{-1}] + \frac{2}{2} (\hat{g}(-1, 1) + \hat{g}(1, 1)) + E[\hat{g}_1] + \int_{-1}^1 E[\hat{g}_{\hat{x}}] d\hat{x} = \\
 & \hat{Q}_T[\hat{g}] + \hat{E}_T[\hat{g}]
 \end{aligned}$$

donde la regla de cuadratura y el error de integración hemos visto que se obtienen del siguiente modo:

$$\hat{Q}_T[\hat{g}] = \hat{g}(-1, -1) + \hat{g}(1, -1) + \hat{g}(-1, 1) + \hat{g}(1, 1) \quad (4.12)$$

$$\hat{E}_T[\hat{g}] = E[\hat{g}_{-1}] + E[\hat{g}_1] + \int_{-1}^1 E[\hat{g}_{\hat{x}}] d\hat{x}$$

□

Regla de Simpson:

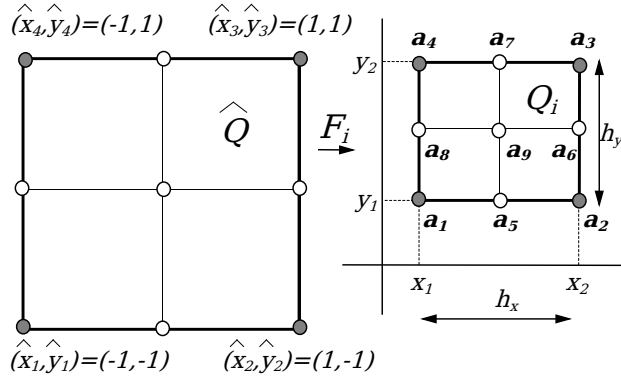
$$\begin{aligned}
 \int \int_{\hat{K}} \hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x}d\hat{y} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x}d\hat{y} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} (\hat{g}(\hat{x}, -1) + 4\hat{g}(\hat{x}, 0) + \hat{g}(\hat{x}, 1)) + E[\hat{g}_{\hat{x}}] \right) d\hat{x} = \\
 & \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \hat{g}(\hat{x}, -1) d\hat{x} + \frac{4}{3} \int_{-1}^1 \hat{g}(\hat{x}, 0) d\hat{x} + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \hat{g}(\hat{x}, 1) d\hat{x} + \int_{-1}^1 E[\hat{g}_{\hat{x}}] d\hat{x} = \\
 & \frac{1}{9} (\hat{g}(-1, -1) + 4\hat{g}(0, -1) + \hat{g}(1, -1)) + \frac{1}{3} E[\hat{g}_{-1}] + \\
 & \frac{4}{9} (\hat{g}(-1, 0) + 4\hat{g}(0, 0) + \hat{g}(1, 0)) + \frac{4}{3} E[\hat{g}_0] + \\
 & \frac{1}{9} (\hat{g}(-1, 1) + 4\hat{g}(0, 1) + \hat{g}(1, 1)) + \frac{1}{3} E[\hat{g}_1] + \int_{-1}^1 E[\hat{g}_{\hat{x}}] d\hat{x} = \hat{Q}_S[\hat{g}] + \hat{E}_S[\hat{g}]
 \end{aligned}$$

donde la regla de cuadratura y el error de integración son:

$$\begin{aligned}
 9\hat{Q}_S[\hat{g}] &= \hat{g}(-1, -1) + 4\hat{g}(0, -1) + \hat{g}(1, -1) + 4\hat{g}(-1, 0) + \\
 & + 16\hat{g}(0, 0) + 4\hat{g}(1, 0) + \hat{g}(-1, 1) + 4\hat{g}(0, 1) + \hat{g}(1, 1) \\
 \hat{E}_S[\hat{g}] &= \frac{1}{3} E[\hat{g}_{-1}] + \frac{4}{3} E[\hat{g}_0] + \frac{1}{3} E[\hat{g}_1] + \int_{-1}^1 E[\hat{g}_{\hat{x}}] d\hat{x}
 \end{aligned}$$

□

Observación: En el caso particular en que F_i esté definida según se muestra



$$\begin{aligned}
 F_i(\hat{x}, \hat{y}) &= \left(\sum_{j=1}^4 x_j^{(i)} \hat{\phi}_j(\hat{x}, \hat{y}), \sum_{j=1}^4 y_j^{(i)} \hat{\phi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \right) = \\
 &x_1 \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) + x_2 \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) + x_2 \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) + x_1 \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) + \\
 &y_1 \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) + y_1 \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) + y_2 \hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) + y_1 \hat{\phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) = \\
 &\frac{1}{2} (x_1 (1 - \hat{x}) + x_2 (1 + \hat{x}), y_1 (1 - \hat{y}) + y_2 (1 + \hat{y})) = \\
 &\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Es directo calcular el jacobiano, que es constante

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & y_2 - y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 |\mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y})| &= \frac{1}{4} (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) = \frac{|Q_i|}{4},
 \end{aligned}$$

donde $|Q_i|$ representa el área del elemento Q_i . Por tanto, sustituyendo en la expresión (4.12) obtenemos

$$Q_T[f] = \hat{Q}_T[\hat{g}] = \frac{|Q_i|}{4} \left(\hat{f}(-1, -1) + \hat{f}(-1, 1) + \hat{f}(1, -1) + \hat{f}(1, 1) \right) \Rightarrow$$

$$Q_T[f] = \frac{|Q_i|}{4} (f(\mathbf{a}_1) + f(\mathbf{a}_2) + f(\mathbf{a}_3) + f(\mathbf{a}_4))$$

Análogamente, usando la regla de Simpson

$$Q_S[f] = \hat{Q}_S[\hat{g}] = \frac{|Q_i|}{36} (f(\mathbf{a}_1) + f(\mathbf{a}_2) + f(\mathbf{a}_3) + f(\mathbf{a}_4) + 4f(\mathbf{a}_5) + 4f(\mathbf{a}_6) + 4f(\mathbf{a}_7) + 4f(\mathbf{a}_8) + 16f(\mathbf{a}_9))$$

Además, si f es una función bilineal, $E_T[f] = 0$; y si f es bicúbica, $E_S[f] = 0$. Se deduce de cómo se ha obtenido la cuadratura, pues en cada paso intermedio, el término de error es nulo.

□

Observación: Este procedimiento se puede aplicar para calcular también reglas de cuadratura basadas en las de Gauss-Legendre. En este caso podríamos integrar funciones de la forma

$$f(x, y) = p(x) q(x)$$

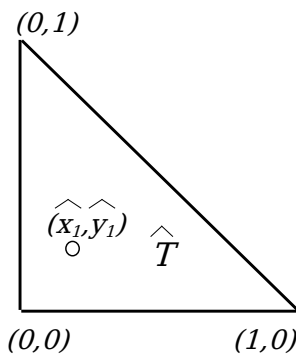
con p y q polinomios de grado m . Entonces las cuadraturas serían exactas si utilizamos n puntos en cada variable tal que $m = 2n - 1$.

□

4.4.2 Reglas de cuadratura en triángulos

Vamos a construir reglas de cuadratura que tengan el mayor grado de precisión posible.

Observación: Consideremos la cuadratura compuesta por un único nodo.



Nos planteamos el valor de \hat{x}_1 , \hat{y}_1 y ω_1 para que la cuadratura $Q[\hat{g}] = \omega_1 \hat{g}(\hat{x}_1, \hat{y}_1)$ tenga el mayor grado de precisión posible.

$$\frac{1}{2} = |\hat{T}| = \int \int_{\hat{T}} 1 d\hat{x} d\hat{y} \stackrel{?}{=} Q[1] = \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} = \int_0^1 \hat{x} (1 - \hat{x}) d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}} \hat{x} d\hat{x} d\hat{y} = \int_{\hat{T}} \hat{x} d\hat{x} d\hat{y} \stackrel{?}{=} Q[\hat{x}] = \omega_1 \hat{x}_1 \Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6} = \int_0^1 \hat{y} (1 - \hat{y}) d\hat{y} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{y}} \hat{y} d\hat{x} d\hat{y} = \int_{\hat{T}} \hat{y} d\hat{x} d\hat{y} \stackrel{?}{=} Q[\hat{y}] = \omega_1 \hat{y}_1 \Rightarrow \hat{y}_1 = \frac{1}{3}$$

El grado de precisión es 1, ya que para polinomios de grado 2 la cuadratura deja de ser exacta. Comprobamos esta última afirmación. Por un lado

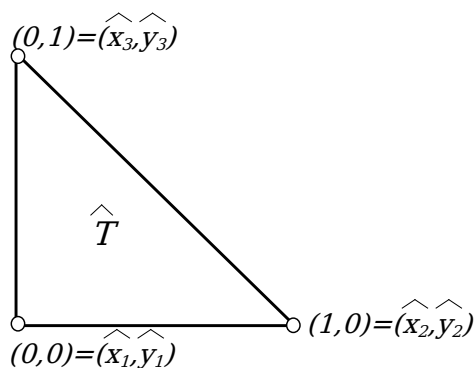
$$Q[\hat{x}^2] = \omega_1 \hat{x}_1^2 = \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Sin embargo, la integral tiene otro valor:

$$\int_{\hat{T}} \hat{x}^2 d\hat{x} d\hat{y} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}} \hat{x}^2 d\hat{x} d\hat{y} = \int_0^1 \hat{x}^2 (1 - \hat{x}) d\hat{x} = \left[\frac{\hat{x}^3}{3} - \frac{\hat{x}^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

□

Observación: Consideremos los tres vértices del triángulo.



Nos planteamos el valor de ω_1 , ω_2 y ω_3 para que la cuadratura $Q[\hat{g}] = \sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{g}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ tenga el mayor grado de precisión posible.

$$\frac{1}{2} = |\hat{T}| = \int_{\hat{T}} 1 d\hat{x} d\hat{y} \stackrel{?}{=} Q[1] = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

$$\frac{1}{6} = \int_{\hat{T}} \hat{x} d\hat{x} d\hat{y} \stackrel{?}{=} Q[\hat{x}] = \omega_1 \cdot 0 + \omega_2 \cdot 1 + \omega_3 \cdot 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \int \int_{\hat{T}} \hat{y} d\hat{x} d\hat{y} \stackrel{?}{=} Q[\hat{y}] = \omega_1 \cdot 0 + \omega_2 \cdot 0 + \omega_3 \cdot 1 \Rightarrow \omega_3 = \frac{1}{6}$$

Luego los tres coeficientes son iguales a 1/6. El grado de precisión es 1, ya que para polinomios de grado 2 la cuadratura deja de ser exacta. Comprobamos esta última afirmación. Por un lado

$$Q[\hat{x}^2] = \frac{1}{6} (0^2 + 1^2 + 0^2) = \frac{1}{6}$$

Sin embargo, como ya vimos en la observación anterior, la integral tiene un valor de 1/12.

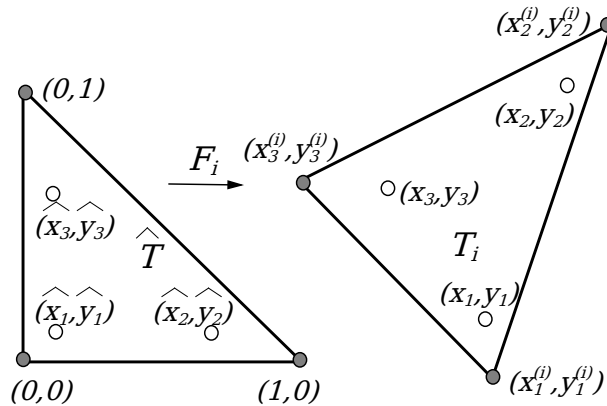
□

Observación: Puede probarse que la cuadratura $Q[\hat{g}] = \sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{g}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ tiene un grado de precisión 2 para los siguientes nodos y pesos.

$$\begin{aligned} (\hat{x}_1, \hat{y}_1) &= (1/2, 0) & \omega_1 &= 1/6 \\ (\hat{x}_2, \hat{y}_2) &= (1/2, 1/2) & \omega_2 &= 1/6 \\ (\hat{x}_3, \hat{y}_3) &= (0, 1/2) & \omega_3 &= 1/6 \end{aligned}$$

□

Observación: En el caso general de n nodos y conociendo la transformación afín F_i , podemos realizar la integración en el triángulo original.



Se puede comprobar que

$$|\mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y})| = 2 |T_i|$$

y por tanto

$$Q^{(i)}[f] = \hat{Q}[\hat{g}^{(i)}] = \sum_{i=1}^n \omega_i \hat{g}^{(i)}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^n \omega_i \hat{f}^{(i)}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) |\mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y})| = 2 |T_i| \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i, y_i)$$

□

Observación: Según hemos visto, es necesario calcular el área de un triángulo $|T_i|$ dadas las coordenadas de sus tres vértices. Para ello puede emplearse la fórmula de Herón. Siendo a , b y c las longitudes de sus tres lados, el área se puede demostrar que se obtiene con la siguiente expresión:

$$|T_i| = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (4.13)$$

donde s es el semiperímetro del triángulo

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

La fórmula de Herón (4.13) es numéricamente inestable para triángulos de ángulos muy pequeños. Una alternativa numéricamente más estable implica reordenar las longitudes de los lados de modo que $a \geq b \geq c$, y luego realizar el cálculo de acuerdo con la siguiente expresión:

$$|T_i| = \frac{1}{4} \sqrt{(a+(b+c))(c-(a-b))(c+(a-b))(a+(b-c))}$$

Dados las coordenadas de los nodos del triángulo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es fácil calcular los lados mediante la distancia entre dos puntos. Así, por ejemplo, si el lado mayor es el que une los nodos 1 y 2 obtendríamos

$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Nótese que la anterior expresión puede calcularse de forma más compacta usando la función *hypot* de MATLAB/OCTAVE: `a = hypot(x1-x2, y1-y2);`

□

4.5 Ejercicios

1. Deducir la regla de Simpson compuesta suponiendo un mallado D_h del intervalo $[a, b]$ equiespaciado. Deducir también la cota de error asociada a esta cuadratura.
2. Calcular los nodos de integración y los pesos de la cuadratura de Gauss-Legendre en el intervalo $[-1, 1]$ utilizando $n = 3$ nodos.
3. Deducir una cota de error de la fórmula de cuadratura (simple y compuesta) de Gauss-Legendre para $n = 2$ nodos.
4. Calcular $\int_0^1 \frac{2}{x^2 + 4} dx$ utilizando:

(a) La regla del trapecio y de Simpson simples.

(b) La regla compuesta del trapecio con $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ y $\frac{1}{64}$.

(c) La regla compuesta de Simpson con $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ y $\frac{1}{64}$.

5. Aproxime $\int_0^1 x^3 dx$ usando la regla compuesta del trapecio eligiendo el valor de h adecuado para que el error sea menor que $\delta = 10^{-6}$. ¿Qué se obtendría mediante la regla de Simpson?

6. Razonar si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: *La fórmula de cuadratura obtenida al aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ por la integral $\int_a^b p_n(x)dx$, siendo $p_n(x)$ el polinomio interpolador de Lagrange de grado n de f con nodos equiespaciados en $[a, b]$, tiene grado de precisión al menos n .*

7. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, se considera la fórmula de cuadratura

$$Q[f] = af(1/4) + bf(1/2) + cf(3/4)$$

para aproximar $\int_0^1 f(x) dx$, se pide:

(a) Determinar los valores de las constantes a, b y c de modo que la fórmula de cuadratura $Q[f]$ tenga grado de precisión (grado de exactitud) máximo.

(b) Aplicar la fórmula obtenida para aproximar

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 12}} dx.$$

8. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, se considera la fórmula de cuadratura

$$Q[f] = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

para aproximar $\int_0^1 f(x) dx$, se pide:

(a) Encontrar el valor de las constantes c_0, c_1 y x_1 de modo que la fórmula de cuadratura $Q[f]$ tenga el grado de precisión más alto posible.

(b) Utilizar la fórmula anterior para aproximar

$$\int_0^1 \frac{\text{sen}(x^2 + 1)}{\sqrt{x^3 + 3}} dx.$$

9. Estima el número de subintervalos necesarios para que el error cometido al aproximar la integral

$$\int_1^2 \frac{1}{1 + \log x} dx$$

mediante la regla del trapecio compuesta sea menor o igual que $\delta = 10^{-6}$. Calcula dicha aproximación.

10. La masa que entra o sale de un reactor durante un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ viene dado por

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Q(t) c(t) dt$$

donde $c(t)$ es la concentración del producto químico y $Q(t)$ es el flujo. En un reactor el flujo es constante $Q = 4 \text{ m}^3/\text{min}$ y de la concentración se han tomado las medidas reflejadas en la siguiente tabla

$t[\text{min}]$	0	2	4	6	8
$c[\text{mg}/\text{m}^3]$	12	22	32	45	58

Aproximar la masa del producto químico que sale del reactor en los 8 minutos:

$$M = \int_0^8 4c(t) dt$$

- (a) Utilizando la regla de los trapecios compuesta.
 - (b) Utilizando la regla de Simpson compuesta.
11. De una fuerza $F(x)$ que depende de la posición, x , contamos con las siguientes mediciones discretas a intervalos de 5 m.

$x[m]$	0	5	10	15	20
$F[N]$	0	1.53	9.51	8.70	2.81

- (a) Estimar el valor de F para un valor de $x = 6 \text{ m}$ utilizando un polinomio interpolador cuadrático.
- (b) Aproximar el trabajo realizado por la fuerza:

$$W = \int_0^{20} F(x) dx$$

- i. Utilizando la regla de los trapecios compuesta.
- ii. Utilizando la regla de Simpson compuesta.

12. Use la regla de Gauss-Legendre con dos nodos para aproximar:

$$(a) \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (b) \int_2^5 \frac{\text{sen}^2 t}{t} dt$$

13. Repetir el ejercicio anterior utilizando la cuadratura compuesta de Gauss-Legendre con dos nodos generando en cada caso un mallado de elementos finitos equiespaciado D_h con $N_e = 10$.

14. La fuerza total ejercida por el mástil de un velero se puede expresar como

$$F = \int_0^{30} \frac{250z}{6+z} e^{-z/10} dz$$

siendo z la distancia vertical a la cubierta.

- (a) Aproximar el valor de la integral mediante la fórmula de Gauss-Legendre con 2 y 3 nodos.
- (b) Construir una partición D_h con 10 elementos equiespaciados y aproximar el valor de la integral aplicando la fórmula de Gauss-Legendre con 2 y 3 nodos en cada elemento.

15. La longitud de una curva $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$ es

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Aproxime la longitud de la curva $y = e^{-x}$, $0 \leq x \leq 1$, usando:

- (a) La regla compuesta del trapecio con $h = 0.1$ y $h = 0.01$.
- (b) La regla compuesta de Simpson con $h = 0.1$ y $h = 0.01$.

16. Se considera la siguiente integral

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

y se pide calcular el número de elementos N_e necesarios para obtener una aproximación de dicha integral con un error por debajo de la tolerancia $\delta = 10^{-10}$ generando un mallado equiespaciado D_h del intervalo $[0, 2]$ y utilizando cada una de las siguientes cuadraturas:

- (a) La regla de los trapecios compuesta.
- (b) La regla de Simpson compuesta.
- (c) La cuadratura compuesta de Gauss-Legendre con $n = 2$ nodos.

17. Se considera la siguiente integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

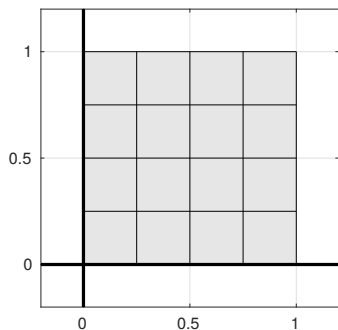
Sea D_h una partición equiespaciada del intervalo $[1, 2]$. Se pide calcular el valor aproximado de la integral mediante las siguientes cuadraturas:

- (a) Q_T : regla de los trapecios compuesta.
- (b) Q_S : regla de Simpson compuesta.
- (c) Q_{G2} : cuadratura compuesta de Gauss-Legendre con $n = 2$ nodos.
- (d) Q_{G3} : cuadratura compuesta de Gauss-Legendre con $n = 3$ nodos.
- (e) Q_{G4} : cuadratura compuesta de Gauss-Legendre con $n = 4$ nodos.

Completar la siguiente tabla para los distintos valores de h (calcular el error a partir del valor exacto de la integral):

h	E_T	E_S	E_{G2}	E_{G3}	E_{G4}
1					
0.5					
0.25					
0.125					
0.0625					

- 18. Deducir la fórmula de cuadratura que se obtiene en el elemento de referencia \hat{Q} si las integrales sobre el intervalo $[-1, 1]$ se aproximan mediante la cuadratura de Gauss-Legendre utilizando 1 nodo de integración. ¿Cómo queda la cuadratura para el rectángulo $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset \mathbb{R}^2$?
- 19. Deducir la fórmula de cuadratura que se obtiene en el elemento de referencia \hat{Q} si las integrales sobre el intervalo $[-1, 1]$ se aproximan mediante la cuadratura de Gauss-Legendre utilizando 2 nodos de integración. ¿Cómo queda la cuadratura para el rectángulo $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset \mathbb{R}^2$?
- 20. Sea $D = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ y se considera el mallado $D_h = \{Q_i\}_{1 \leq i \leq 16}$ regular y uniforme de la siguiente figura:

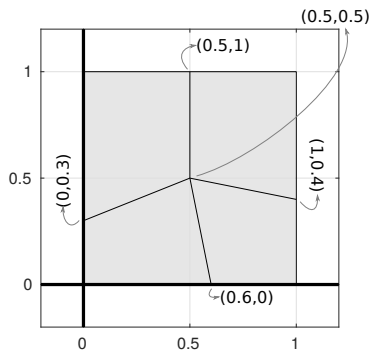


Si $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, se pide aproximar

$$\int_D f(x, y) dx dy$$

en los siguientes casos:

- (a) Utilizando la regla de los trapecios en cada elemento del mallado $Q_i \in D_h$.
 - (b) Utilizando Gauss-Legendre con $n = 1$ nodo de integración para aproximar las integrales en cada elemento del mallado $Q_i \in D_h$.
 - (c) Utilizando Gauss-Legendre con $n = 2$ nodos de integración para aproximar las integrales en cada elemento del mallado $Q_i \in D_h$.
21. Repetir el ejercicio 20 refinando el mallado una vez (dividiendo cada cuadrilátero en 4 de forma regular). Refinar una vez más el mallado obtenido y repetir nuevamente el ejercicio 20. Construir una tabla en la que se especifique el método utilizado y los errores obtenidos en cada método utilizando cada uno de los tres mallados construidos.
22. Repetir el ejercicio 20 utilizando la regla de Simpson en cada elemento del mallado $Q_i \in D_h$, donde en este caso el mallado $D_h = \{Q_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ es el siguiente:



23. Se considera el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ dado por

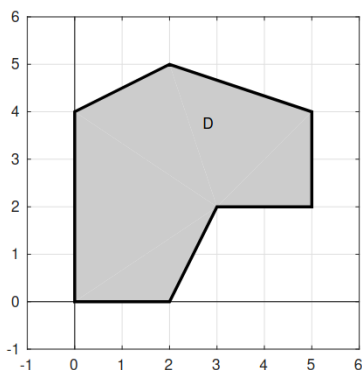
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 < 1\}$$

y la función $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, y) = e^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{0.4^2}}$. Se pide aproximar

$$\int_D f(x, y) \, dx dy$$

construyendo con Matlab un mallado $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de \bar{D} formado por triángulos y aproximando la integral sobre cada elementos T_i mediante la cuadratura numérica que utiliza los vértices de cada triángulo.

24. Se considera el siguiente conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, de tal manera que \bar{D} representa una placa:



La función $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ define la temperatura en cada punto de la placa mediante la expresión $f(x, y) = e^{\frac{y^2}{9}} + 20\sqrt{x+1}$. Se quiere calcular la temperatura media de la placa, para ello:

- (a) Construir con Matlab un mallado $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ del conjunto \bar{D} formado por triángulos.
- (b) Se recuerda que la temperatura media sobre la placa se puede calcular mediante

$$\frac{1}{|D|} \int_D f(x, y) \, dx dy,$$

siendo $|D| = \text{area}(D)$, donde además

$$|D| = \int_D dx dy.$$

Aproximar estas integrales utilizando en cada elemento $T_i \in D_h$ la regla de cuadratura con orden de precisión uno que utiliza un único punto de integración numérica.

Capítulo 5

Ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden: Marco funcional

5.1 Introducción

Una *ecuación en derivadas parciales* (EDPs) *lineal* es aquella que se pueden expresar del modo

$$Lu = 0 \tag{5.1}$$

donde u es la función incógnita a resolver y L es un operador diferencial lineal. Es decir, intervienen derivadas parciales de la función u en forma lineal. La linealidad del operador L hace para cualesquiera funciones u_1 y u_2 se cumple

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Para que una ecuación diferencial esté bien planteada (que exista solución y ésta sea única) necesita además unas condiciones de contorno y/o condiciones iniciales.

5.1.1 EDPs lineales de segundo orden en 2D

Las EDPs *lineales de segundo orden* se clasifican en tres tipos. Estudiemos por simplicidad primero el caso de bidimensional donde el dominio de definición es un plano de coordenadas x_1 y x_2 . Llamando $u \equiv u(x_1, x_2)$ a la función incógnita, cualquier ecuación lineal de segundo orden puede expresarse de la siguiente forma

$$au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} + du_{x_1} + eu_{x_2} + f + g \cdot u = 0 \tag{5.2}$$

donde al término f se le denomina término *fuerza*. En la clasificación de esta ecuación diferencial sólo intervienen los coeficientes de las derivadas de segundo orden a , b y c . Dependiendo del signo del discriminante $b^2 - 2ac$, la ecuación será:

- *Elíptica*: $b^2 - 2ac < 0$. Las soluciones son suaves. Por ejemplo, la solución de la ecuación de Laplace.
- *Parabólica*: $b^2 - 2ac = 0$. Un ejemplo es la ecuación del calor. La solución se va suavizando a medida que el tiempo crece.
- *Hiperbólica*: $b^2 - 2ac > 0$. Se retiene en la solución cualquier discontinuidad de las condiciones iniciales o de sus derivadas. Un ejemplo es la ecuación de ondas.

Para que la ecuación sea lineal, todos los coeficientes no deben depender de la solución u , o dicho de otra forma:

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial u} = \frac{\partial c}{\partial u} = \frac{\partial d}{\partial u} = \frac{\partial e}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

No obstante, dichos coeficientes no tienen por qué ser constantes, pueden depender de las coordenadas x_1 y x_2 . En ese caso puede ocurrir que la ecuación (5.2) cambie su discriminante según la región del plano.

5.1.2 EDPs lineales de segundo orden en n dimensiones

Para el caso general de $n > 2$ variables independientes x_1, x_2, \dots, x_n , las ecuaciones lineales de segundo orden pueden expresarse de la forma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + f + g \cdot u = 0 \tag{5.3}$$

donde como en el caso bidimensional, los coeficientes a_{ij} , b_k , g y el término fuente f pueden depender de las coordenadas, pero no de la propia función u . En este caso general, la ecuación será dependiendo del signo de los valores propios λ_k de la matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$:

- *Elíptica*: Si los autovalores son todos positivos o todos negativos.
- *Parabólica*: Si los autovalores son todos positivos o todos negativos, excepto un autovalor que es cero.
- *Hiperbólica*: Sólo hay un autovalor negativo y el resto positivos, o sólo hay un autovalor positivo y el resto son todos negativos.
- *Ultra-hiperbólica*: Existe más de un autovalor positivo, y más de un autovalor negativo, y ninguno cero.

Nótese que debido a la igualdad de las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

la matriz \mathbf{A} será *simétrica*, y por tanto todos sus autovalores serán reales. Así, una definición equivalente para los problemas elípticos es que su matriz de coeficientes \mathbf{A} sea *definida* (positiva o negativa). Por tanto, otra definición equivalente es que existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} r_i r_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad \forall (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$$

en caso de ser definida positiva, o bien

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} r_i r_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad \forall (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$$

en caso de ser \mathbf{A} definida negativa. Posteriormente veremos qué condiciones deben cumplir las funciones a_{ij} , b_k , f y g para que el problema esté bien planteado y tenga solución.

Comparando las expresiones (5.2) y (5.3) podemos comprobar que el criterio de clasificación coincide. Así, la matriz \mathbf{A} en un problema bidimensional adopta la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

y sus autovalores serán las raíces del polinomio característico

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b/2 \\ -b/2 & \lambda - c \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4}.$$

Dichas raíces son

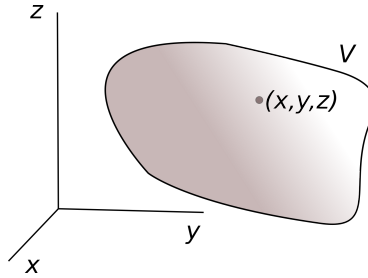
$$\lambda = \frac{a + c \pm \sqrt{a^2 + c^2 + b^2 - 2ac}}{2}.$$

Por tanto, para que no haya cambio de signo entre ambos valores propios el discriminante $b^2 - 2ac$ debe ser negativo.

5.2 Algunos ejemplos de EDPs lineales de segundo orden

5.2.1 Ecuación del calor

Queremos estudiar cómo evoluciona la temperatura en cada punto de un volumen V dado (un sólido o un fluido).



Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ abierto tal que $\bar{D} = V$. Empezamos definiendo algunas funciones sobre D , junto con sus unidades físicas:

- Temperatura $[K]$ en el punto (x, y, z) para el instante de tiempo t . $\begin{cases} u : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \\ u(x, y, z, t) \end{cases}$
- Densidad de energía térmica $[J/m^3]$ por unidad de volumen. $\begin{cases} e : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \\ e(x, y, z, t) \end{cases}$
- Densidad de masa $[kg/m^3]$ por unidad de volumen. $\begin{cases} \rho : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \\ \rho(x, y, z, t) \end{cases}$
- Calor específico $[J/(Kg \cdot K)]$ (energía térmica que se suministra a la unidad de masa de una sustancia para subir su temperatura una unidad). $\begin{cases} c : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \\ c(x, y, z, t) \end{cases}$
- Energía térmica $[J/(m^3s)]$ (por unidad de volumen y por unidad de tiempo). Se refiere a posibles fuentes internas de energía térmica. $\begin{cases} Q : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \\ Q(x, y, z, t) \end{cases}$
- Flujo de calor o de energía térmica (por unidad de tiempo y por unidad de superficie) $[J/(m^2s)]$. $\begin{cases} \mathbf{q} : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{q}(x, y, z, t) = (q_1(x, y, z, t), q_2(x, y, z, t), q_3(x, y, z, t)) \end{cases}$
- Conductividad térmica $[J/(m \cdot s \cdot K)]$. $\begin{cases} K : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \\ K(x, y, z, t) \end{cases}$
- Campo de velocidades $[m/s]$. $\begin{cases} \mathbf{v} : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_1(x, y, z, t), v_2(x, y, z, t), v_3(x, y, z, t)) \end{cases}$

Dado un conjunto $W \subset D$, la energía térmica $[J]$ que hay en W en cada instante de tiempo t viene dado por

$$E(W, t) = \int_W e(x, y, z, t) dx \cdot dy \cdot dz = \int_W e$$

Aplicando la conservación de la energía térmica en W tenemos

tasa de cambio de la energía térmica en W por unidad de tiempo = energía térmica a través de la frontera de W por unidad de tiempo + energía térmica generada en W por unidad de tiempo

$$\frac{d}{dt}E(W, t) = - \int_{\partial W} \mathbf{q}\mathbf{n} + \int_W Q \tag{5.4}$$

Como $e(x, y, z, t) = c(x, y, z, t) \rho(x, y, z, t) u(x, y, z, t)$ podemos expresar la derivada temporal como

$$\frac{d}{dt}E(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W e = \frac{d}{dt} \int_W c\rho u = \int_W \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u).$$

Por otro lado, utilizando el teorema de la divergencia suponiendo que \mathbf{q} es suficientemente regular

$$\int_{\partial W} \mathbf{q}\mathbf{n} = \int_W \text{div}\mathbf{q}.$$

Por tanto la expresión (5.4) queda para cualquier conjunto W

$$\int_W \left(\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) + \text{div}\mathbf{q} - Q \right) = 0$$

y por tanto para todo $(x, y, z, t) \in D \times [0, T]$

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) + \text{div}\mathbf{q} - Q = 0$$

Utilizando la denominada ley de *Fourier*

$$\mathbf{q} = -K\nabla u + \mathbf{v}c\rho u$$

obtenemos finalmente la *ecuación del calor* para todo $(x, y, z, t) \in D \times [0, T]$

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - \text{div}(K\nabla u) + \text{div}(\mathbf{v}c\rho u) = Q. \tag{5.5}$$

En muchos casos ocurre que los campos c , ρ y K son constantes en el espacio y en el tiempo (material o medio *homogéneo*). Entonces la ecuación del calor adopta la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \cdot \text{div}(\nabla u) + \text{div}(\mathbf{v}u) = f \tag{5.6}$$

donde $k = K/(c\rho)$ es el denominado *coeficiente de difusividad* térmica (unidades de aceleración [m^2/s]) y $f = Q/(c\rho)$.

En este curso nos centraremos en medios o materiales homogéneos sin velocidad ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$). Por otro lado

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} := \Delta u$$

donde hemos usado el operador *Laplaciano* Δ . Por tanto, la ecuación del calor en medios o materiales homogéneos sin velocidad se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \cdot \Delta u = f. \quad (5.7)$$

5.2.1.1 Condiciones de contorno

En general dividiremos la frontera en tres regiones, algunas de las cuales puede ser el conjunto vacío \emptyset ,

$$\partial D = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R}$$

e imponemos un tipo de condición de contorno diferente:

- En Γ_D se especifica el valor de la temperatura. Es una condición de tipo *Dirichlet*.

$$u|_{\Gamma_D} = u_D \quad u_D : \Gamma_D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

- En Γ_N se especifica el flujo de calor que entra por la frontera. Es una condición de tipo *Neumann*.

$$\mathbf{qn}|_{\Gamma_N} = q_N \quad q_N : \Gamma_N \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

En el caso sin velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = -K\nabla u$ por lo que se obtiene

$$K\nabla u|_{\Gamma_N} = -q_N \iff K \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_N} = -q_N$$

El criterio de signos elegido es que si $q_N > 0$ la energía térmica sale del dominio y el vector normal a la pared \mathbf{n} apunta al exterior del dominio V .

- En Γ_R existe transmisión de calor por *convección* (por ejemplo cuando la frontera está bañada por un fluido). En este caso la ley de *Newton* nos da el flujo de calor en función de un coeficiente, $\alpha > 0$ llamado coeficiente de transferencia de calor¹, y la diferencia entre la temperatura de pared u y la temperatura del fluido u_{ext} . Es una condición de tipo *Robin*, o mixta.

$$\mathbf{qn}|_{\Gamma_R} = \alpha(u - u_{ext}) \quad u_{ext}, \alpha : \Gamma_R \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

Si no hay velocidades en Γ_R , esta condición de contorno se reduce a

$$K \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_R} = \alpha(u_{ext} - u).$$

¹En inglés *heat transfer coefficient*, por lo que se le conoce también por sus siglas *htc*. Tiene unidades de $W/(m^2K)$.

5.2.1.2 Condiciones iniciales

Para que el problema esté bien planteado es necesario también conocer la temperatura inicial u_0 que tiene el conjunto V :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= u_0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in D \\ u_0 &: D \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

5.2.1.3 Problema completo

Recogiendo todo lo visto hasta ahora sobre el problema de transmisión de calor en un medio homogéneo sin campo de velocidades tenemos (problema completo)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - k \cdot \Delta u = f \text{ en } D \times (0, T) \\ u|_{\Gamma_D} = g_D \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = g_N \\ (au + k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}})|_{\Gamma_R} = g_R \\ u(0) = u_0 \text{ en } D \end{array} \right.$$

donde

$$\begin{aligned} k &= K / (c\rho) & g_D &= u_D \\ f &= Q / (c\rho) & g_N &= -q_N / (c\rho) \\ a &= \alpha / (c\rho) & g_R &= \alpha u_{ext} / (c\rho) \end{aligned}$$

Este problema es de tipo *parabólico* ya que la matriz de coeficientes de las derivadas segundas según las variables independientes x, y, z y t es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde vemos claramente que tiene 3 valores propios repetidos positivos iguales a k y un cuarto valor propio nulo.

En algunas ocasiones es importante estudiar qué temperatura o distribución de temperaturas alcanzará nuestro volumen V para tiempos suficientemente grandes. Matemáticamente supone estudiar el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, y, z, t)$$

y corresponde con suponer $\partial u / \partial t = 0$ en las ecuaciones del problema completo. Si las funciones

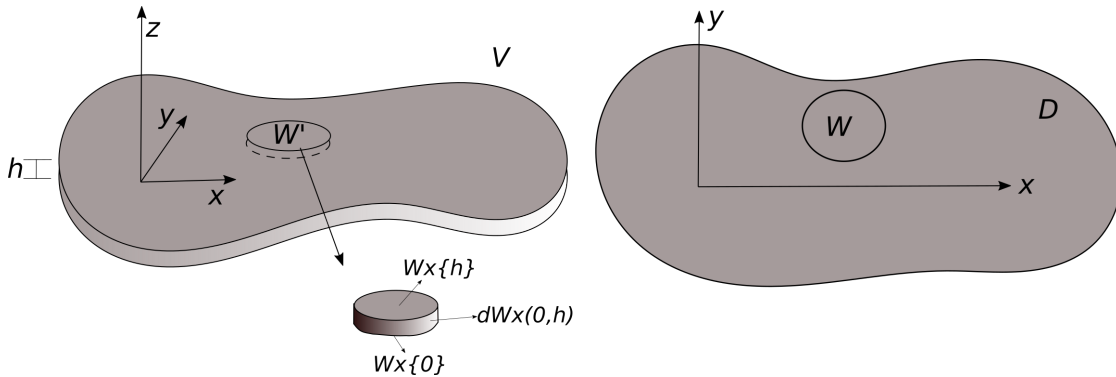
f , g_D , g_N y g_R no dependen del tiempo tenemos el siguiente problema completo:

$$\begin{cases} -k \cdot \Delta u = f \text{ en } D \\ u|_{\Gamma_D} = g_D \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = g_N \\ (au + k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}})|_{\Gamma_R} = g_R \end{cases}$$

En este caso tenemos un problema *elíptico*, ya que la matriz de coeficientes se reduce a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

5.2.1.4 Caso bidimensional



Sea ahora $D \subset \mathbb{R}^2$ y el volumen de espesor constante h definido por $V = \overline{D \times (0, h)}$ del siguiente modo:

$$D \times (0, h) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 < z < h\}$$

Repetimos el análisis hecho para la ecuación del calor en 3D exactamente igual, pero suponemos que todas las funciones son constantes en z , es decir,

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, t) \quad \forall (x, y, t) \in D \times (0, T), 0 < z < h$$

y de igual modo para el resto de funciones e , ρ , c , K , etc. Dado entonces un conjunto $W' \subset V$ tal que $W' = W \times (0, h)$ estando el conjunto W contenido en D . Así tenemos

$$E(W', t) = \int_{W'} e(x, y, z, t) dx dy dz = \int_0^h \int_W e(x, y, t) dx dy dz = h \int_W e(x, y, t) dx dy = h \int_W e.$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}E(W', t) = - \int_{\partial W'} \mathbf{qn} + \int_{W'} Q$$

Podemos comprobar que $\frac{d}{dt}E(W', t) = h \int_W \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u)$ y $\int_{W'} Q = h \int_W Q$. Además podemos descomponer la frontera del volumen W' del siguiente modo

$$\partial W' = \partial W \times (0, h) \cup W \times \{0\} \cup W \times \{h\}$$

Entonces

$$\int_{\partial W'} \mathbf{qn} = \int_{\partial W \times (0, h)} \mathbf{qn} + \int_{W \times \{0\}} \mathbf{qn} + \int_{W \times \{h\}} \mathbf{qn}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{\partial W \times (0, h)} \mathbf{qn} &= h \int_{\partial W} \mathbf{qn} = h \int_W \operatorname{div} \mathbf{q} \\ \int_{W \times \{0\}} \mathbf{qn} &= \begin{cases} \int_W \mathbf{q}(z=0) \cdot \mathbf{n} = - \int_W q_N(z=0) \\ \text{ó} \\ \int_W \alpha(u(z=0) - u_{ext}(z=0)) \end{cases} \\ \int_{W \times \{h\}} \mathbf{qn} &= \begin{cases} \int_W \mathbf{q}(z=h) \cdot \mathbf{n} = - \int_W q_N(z=h) \\ \text{ó} \\ \int_W \alpha(u(z=h) - u_{ext}(z=h)) \end{cases} \end{aligned}$$

Así, si por ejemplo suponemos condición de contorno Neumann en $z = h$ y Robin en $z = 0$:

$$\int_W \left(h \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) + h \cdot \operatorname{div} \mathbf{q} + q_N + \alpha(u - u_{ext}) - hQ \right) = 0$$

para cualquier $W \subset D$, y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) + \operatorname{div} \mathbf{q} = Q - \frac{q_N}{h} - \frac{\alpha}{h}(u - u_{ext})$$

Si nuevamente aplicamos la ley de Fourier, imponemos las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, y además suponemos un medio homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - k \cdot \Delta u + au = f \text{ en } D \times (0, T) \\ u|_{\Gamma_D} = g_D \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = g_N \\ (a'u + k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}})|_{\Gamma_R} = g_R \\ u(0) = u_0 \text{ en } D \end{array} \right.$$

donde

$$f = \frac{Q}{\rho c} - \frac{q_N}{h\rho c} + \frac{\alpha u_{ext}}{h\rho c}$$

$$a = \frac{\alpha}{h\rho c}$$

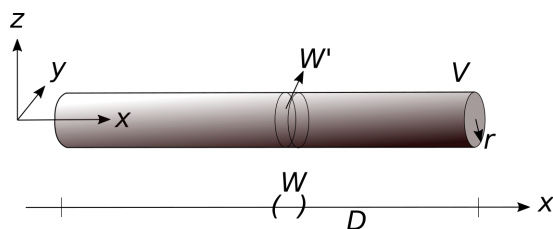
$$a' = \frac{\alpha}{\rho c}$$

Este problema es de tipo *parabólico* ya que la matriz de coeficientes de las derivadas segundas según las variables independientes x, y y t es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde vemos claramente que tiene 2 valores propios repetidos positivos y un tercero nulo.

Ejercicio: Caso unidimensional estacionario ($\partial u / \partial t = 0$). En este caso el volumen V se puede expresar como $V = \overline{D} \times \overline{B}$ donde



$$D \times B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in D, (y, z) \in B\}$$

$$B = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < r^2\}$$

El problema completo queda

$$\left\{ \begin{array}{l} -k \cdot \Delta u + au = f \text{ en } D \\ u|_{\Gamma_D} = g_D \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = g_N \\ (a'u + k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}})|_{\Gamma_R} = g_R \end{array} \right.$$

donde

$$f = \frac{Q}{\rho c} - \frac{q_N}{\rho c \pi r^2} + \frac{\alpha u_{ext}}{\rho c \pi r^2}$$

$$a = \frac{\alpha}{\rho c \pi r^2}$$

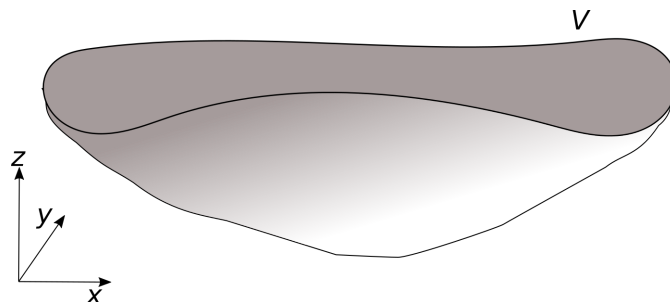
$$a' = \frac{\alpha}{\rho c}$$

Es un problema elíptico.

□

5.2.2 Ley de balance de solutos en un medio

Haciendo el mismo análisis que nos ha llevado a la ecuación del calor en un volumen V , podemos obtener otra ecuación que nos describa la evolución de la concentración de un soluto (sustancia material disuelta en un fluido, por ejemplo un contaminante químico en un lago, la sal en el mar, un cierto tipo de bacteria en un río, etc) contenido en un cierto volumen V .



Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un abierto tal que $V = \overline{D}$. Definimos la función incógnita u que representa la concentración o densidad del soluto (kg/m^3 o mol/m^3) en el punto (x, y, z) para el instante de tiempo t .

$$u : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x, y, z, t)$$

Dado un conjunto $W \subset D$, la masa que hay en W en cada instante de tiempo t viene dado por

$$m(W, t) = \int_W u(x, y, z, t) dx \cdot dy \cdot dz = \int_W u$$

Aplicando la *ley de balance* en W tenemos

tasa de variación de la masa de W	=	masa que entra o sale a través de ∂W	+	creación o destrucción de masa en W
---	---	--	---	---

$$\frac{d}{dt}m(W, t) = - \int_{\partial W} \mathbf{q}\mathbf{n} + \int_W Q$$

En este caso, el flujo viene dado por la *ley de Fick*:

$$\mathbf{q} = -K\nabla u + \mathbf{v}u$$

donde K es la difusividad del soluto y \mathbf{v} la velocidad del fluido. Repitiendo el mismo análisis que con la ecuación del calor se llega al problema completo de tipo *parabólico* siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\mathbf{v}) - \operatorname{div}(K \cdot \nabla u) = Q \text{ en } D \times (0, T) \\ u|_{\Gamma_D} = u_D \\ K \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = -q_N \\ K \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_R} = \alpha(u_{ext} - u) \\ u(0) = u_0 \text{ en } D \end{array} \right.$$

La reducción al caso 2D y 1D es análoga al estudio de la ecuación del calor.

5.3 Introducción a los espacios funcionales L^2 y H^1

Definimos algunos espacios funcionales que nos serán útiles más adelante. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto. Definimos los espacios L^2 , H^1 y H_0^1 del siguiente modo:

$$L^2(D) = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R} : \int_D |f|^2 < \infty \right\}$$

$$H^1(D) = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \in L^2(D) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(D), 1 \leq i \leq d \right\}$$

$$H_0^1(D) = \{ f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \in H^1(D) \quad y \quad f|_{\partial D} = 0 \}$$

Ejemplo: $D = (-1, 1)$ y sea $f(x) = |x|$. Su derivada no está definida en el origen

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Es claro que $f \in C(D)$, pero $f' \notin C(D)$. Sin embargo

$$\int_D |f|^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} < \infty \Rightarrow f \in L^2(D)$$

$$\int_D |f'|^2 = \int_{-1}^1 1 dx = 2 < \infty \Rightarrow f' \in L^2(D)$$

Luego $f \in H^1(D)$.

□

Los espacios $L^2(D)$ y $H^1(D)$ y $H_0^1(D)$ son espacios vectoriales y verifican que

$$H^1(D) \subset L^2(D)$$

$$H_0^1(D) \subset H^1(D)$$

Además podemos definir un producto escalar en $L^2(D)$ y $H^1(D)$:

$$\forall f, g \in L^2(D) : \quad \langle f, g \rangle_{L^2(D)} = \int_D fg$$

$$\forall f, g \in H^1(D) : \quad \langle f, g \rangle_{H^1(D)} = \int_D fg + \sum_{i=1}^d \int_D \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \langle f, g \rangle_{L^2(D)} + \langle \nabla f, \nabla g \rangle_{L^2(D)}$$

Una vez definidos los productos escalares, podemos definir las normas asociadas:

$$\forall f \in L^2(D) : \quad \|f\|_{L^2(D)} = \left(\int_D |f|^2 \right)^{1/2}$$

$$\forall f \in H^1(D) : \quad \|f\|_{H^1(D)} = \left(\int_D |f|^2 + \int_D |\nabla f|^2 \right)^{1/2} = \left(\|f\|_{L^2(D)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(D)}^2 \right)^{1/2}$$

En general, en el espacio $H_0^1(D)$ se utiliza el producto escalar y la norma de $H^1(D)$.

Observación: Si $f, g \in L^2(D)$, por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* podemos afirmar

$$\int_D fg = \langle f, g \rangle_{L^2(D)} \leq \|f\|_{L^2(D)} \|g\|_{L^2(D)}$$

□

Desigualdad de Poincaré: Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y acotado. Entonces \exists una constante $C_p > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^2(D)} \leq C_p \|\nabla f\|_{L^2(D)} \quad \forall f \in H_0^1(D)$$

□

Observación: La desigualdad de Poincaré también es cierta para funciones que se anulan en sólo una parte de ∂D , es decir, si $\Gamma \subset \partial D$, con $|\Gamma| > 0$ si $d > 1$ o $\Gamma \neq \emptyset$ si $d = 1$ y $W = \{f \in H^1(D) : f|_\Gamma = 0\}$, entonces $\exists C_p > 0$ tal que

$$\|f\|_{L^2(D)} \leq C_p \|\nabla f\|_{L^2(D)} \quad \forall f \in W$$

□

5.4 Problema elíptico lineal de segundo grado

5.4.1 Problema con condición de contorno $u|_{\partial D} = 0$

Analizamos con más detalle el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} au - k\Delta u = f & \text{en } D \subset \mathbb{R}^d \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

donde $k > 0$, $a \geq 0$ constantes y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Buscamos una función $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique (5.8). Recordemos que se dice que una EDP es elíptica si se puede escribir como

$$au + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{en } D \subset \mathbb{R}^d \quad (5.9)$$

y además la matriz $\mathbf{K} = (k_{ij})$ es *definida positiva* y $a, b_i, k_{ij}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ son en general funciones con $1 \leq i, j \leq d$. Cuando a una EDP elíptica se le añade unas condiciones de contorno sobre ∂D (*Dirichlet, Neumann o Robin*), hablamos de un *problema elíptico*.

Observación 1: La ecuación (5.9) se puede escribir como

$$au + \mathbf{b} \cdot \nabla u - \operatorname{div}(\mathbf{K}\nabla u) = f$$

con $\mathbf{K} = (k_{ij})$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_d)$. La condición definida positiva para la matriz \mathbf{K} también se puede expresar como

$$\exists \alpha > 0 \quad \mathbf{r}\mathbf{K}\mathbf{r}^t \geq \alpha \|\mathbf{r}\|^2 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$$

□

Observación 2: La EDP (5.8) es un caso particular de (5.9) donde

$$a = cte \geq 0$$

$$b_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq d \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K} = k\mathbf{I}$$

□

Observación 3: Tanto la ecuación del calor como la ley de balance de solutos, si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, queda de la forma

$$a'u + \operatorname{div}(u\mathbf{v}) - k\Delta u = f$$

que también es un caso particular de una EDP elíptica pues $\operatorname{div}(u\mathbf{v}) = u \cdot \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla u$. La ecuación queda

$$(a' + \operatorname{div}\mathbf{v})u + \mathbf{v} \cdot \nabla u - k\Delta u = f$$

y por tanto $a = a' + \operatorname{div} \mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$.

□

Observación 4: Con frecuencia la EDP (5.9) se suele escribir como

$$Lu = f$$

definiendo el operador diferencial

$$L = a + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = a + \mathbf{b} \cdot \nabla - \operatorname{div}(\mathbf{K}\nabla)$$

que claramente vemos que es lineal.

□

Observación 5: Si $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ es solución de un problema elíptico definido por (5.9), se dice que u es *solución clásica*.

Para ello es necesario que los coeficientes de (5.9) verifiquen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} a &\in C(\bar{D}), \quad a \geq 0 \\ b_i &\in C^1(\bar{D}), \quad 1 \leq i \leq d \\ k_{ij} &\in C^1(\bar{D}), \quad 1 \leq i, j \leq d \\ \exists k_0, M > 0, \quad k_0 \leq k_{ij} \leq M \quad 1 \leq i, j \leq d \end{aligned}$$

□

Empezamos a analizar el problema (5.8) y lo primero que nos planteamos es si tiene solución. En caso afirmativo, ¿cuántas tiene? Dicho problema, donde buscamos una solución clásica, es lo que se conoce como *problema fuerte*.

En general el problema (5.8) no tiene soluciones clásicas salvo para casos muy particulares, por lo que nos planteamos distintas formas de abordarlo. De momento supongamos que (5.8) tiene por solución la función u y que ésta es clásica, es decir, $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$. Sea entonces $\varphi \in C^\infty(\bar{D})$, entonces

$$\begin{aligned} \int_D (au\varphi - k\Delta u\varphi) &= \int_D f\varphi \Rightarrow \\ a \int_D u\varphi - k \int_D \Delta u\varphi &= \int_D f\varphi \end{aligned} \tag{5.10}$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int_D \operatorname{div}(\varphi \nabla u) = \int_{\partial D} \varphi \cdot \nabla u \mathbf{n} = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \varphi$$

$$\operatorname{div}(\varphi \nabla u) = \varphi \cdot \operatorname{div}(\nabla u) + \nabla \varphi \nabla u = \varphi \Delta u + \nabla \varphi \nabla u$$

Por tanto,

$$\int_D \varphi \Delta u = - \int_D \nabla \varphi \nabla u + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \varphi$$

Sustituyendo la expresión anterior en (5.10)

$$a \int_D u \varphi + k \int_D \nabla \varphi \nabla u = \int_D f \varphi + k \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(D)$$

Si analizamos esta última expresión, observamos que lo mínimo que podemos exigir a todas las funciones involucradas es:

$$\begin{aligned} u, \varphi &\in L^2(D) \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &\in L^2(D), \quad 1 \leq i \leq d \\ f, \varphi &\in L^2(D) \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \varphi &\in L^2(\partial D) \end{aligned}$$

Por ello basta que pidamos

$$\begin{aligned} f &\in L^2(D) \\ u, \varphi &\in H^1(D) \end{aligned}$$

Como $u|_{\partial D} = 0$, realmente $u \in H_0^1(D)$.

Por todo lo anterior, podemos plantearnos el siguiente problema: encontrar $u \in H_0^1(D)$ tal que

$$a \int_D uv + k \int_D \nabla u \nabla v = \int_D fv + k \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \quad \forall v \in H^1(D)$$

Ahora veremos que en esta formulación nos interesa que el espacio donde está la solución u sea el mismo que el espacio donde se encuentran las funciones v . Puesto que $H_0^1(D) \subset H^1(D)$, nos planteamos el siguiente problema: encontrar $u \in H_0^1(D)$ tal que

$$a \int_D uv + k \int_D \nabla u \nabla v = \int_D fv \quad \forall v \in H_0^1(D) \quad (5.11)$$

Al problema planteado en (5.11) es lo que se conoce como *problema débil*, o *formulación débil* o *formulación variacional*. A las funciones v se les denomina *funciones test*. Y a la posible solución u de este problema se le llama *solución débil*.

En este punto cabe plantearse las siguientes cuestiones:

- ¿La solución fuerte es la misma que la solución débil?

- ¿Ambos problemas son equivalentes?
- ¿Existe solución? ¿Cuántas?

Parte de estas cuestiones las resuelve el siguiente teorema.

Teorema de Lax-Milgram: Sea V un espacio de *Hilbert* (espacio vectorial dotado de producto escalar y completo²). Sea $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- A es *bilineal*: $\forall u, v, w \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha u + \beta v, w) = \alpha A(u, w) + \beta A(v, w)$$

$$A(u, \alpha v + \beta w) = \alpha A(u, v) + \beta A(u, w)$$

- A es *continua*: $\exists M > 0$ tal que

$$|A(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

- A es *coercitiva*: $\exists \alpha > 0$ tal que

$$A(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$$

y sea $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- L es *lineal*
- L es *continua*: $\exists M' > 0$ tal que

$$|L(u)| \leq M' \|u\|_V \quad \forall u \in V$$

Entonces existe un único $u \in V$ tal que

$$A(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

□

Comprobemos que podemos aplicar el teorema de Lax-Milgram al problema débil que hemos planteado en (5.11). Para ello, siendo $V = H_0^1(D)$ definimos los operadores A

$$\begin{aligned} A : H_0^1(D) \times H_0^1(D) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A(u, v) &= a \int_D uv + k \int_D \nabla u \nabla v \end{aligned} \tag{5.12}$$

²Un espacio *completo* es aquel en el que las sucesiones de *Cauchy* convergen dentro del espacio. Una sucesión de *Cauchy* es una sucesión tal que para cualquier distancia dada, por muy pequeña que sea, siempre se puede encontrar un término de la sucesión tal que la distancia entre dos términos cualesquiera posteriores es menor que la dada.

y L

$$\begin{aligned} L &: H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R} \\ L(v) &= \int_D f v \end{aligned}$$

Con estas definiciones, podemos comprobar que A es bilineal (por las propiedades de integración y operador gradiente ∇). Comprobemos que A es continua:

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &\leq a \left| \int_D uv \right| + k \left| \int_D \nabla u \nabla v \right| \leq a \int_D |u| |v| + k \sum_{i=1}^d \int_D \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \leq \\ &\leq a \|u\|_{L^2(D)} \|v\|_{L^2(D)} + k \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(D)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(D)} \leq \\ &\leq a \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} + k \sum_{i=1}^d \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} = (a + dk) \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} = \\ &\stackrel{M=a+dk}{=} M \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} \quad \forall u, v \in H_0^1(D) \end{aligned}$$

Ahora comprobemos que A es coercitiva:

$$A(u, u) = a \int_D |u|^2 + k \int_D |\nabla u|^2$$

Si $a > 0$ tomando $\alpha = \min(a, k)$

$$A(u, u) \geq \alpha \left(\|u\|_{L^2(D)}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(D)}^2 \right) = \alpha \|u\|_{H^1(D)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(D).$$

Si $a = 0$ usamos la desigualdad de Poincaré $\|u\|_{L^2(D)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(D)}$ y hacemos $\alpha = \min\left(\frac{k}{2C_P^2}, \frac{k}{2}\right)$

$$\begin{aligned} A(u, u) &= k \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 = \frac{k}{2} \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 + \frac{k}{2} \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 \geq \\ &\geq \frac{k}{2C_P^2} \|u\|_{L^2(D)}^2 + \frac{k}{2} \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 \geq \alpha \left(\|u\|_{L^2(D)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 \right) = \alpha \|u\|_{H^1(D)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(D). \end{aligned}$$

Ya vimos que el operador L es lineal. Comprobemos ahora que es continuo:

$$|L(v)| = \left| \int_D f v \right| \leq \int_D |f| |v| \leq \|f\|_{L^2(D)} \|v\|_{L^2(D)} \leq \|f\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} = M' \|v\|_{H^1(D)} \quad \forall v \in H_0^1(D).$$

Por tanto, vemos que todas las condiciones del teorema de Lax-Milgram se cumplen. Así, podemos asegurar que existe un único $u \in H_0^1(D)$ tal que

$$A(u, v) = L(u) \quad \forall v \in H_0^1(D),$$

es decir:

El problema débil tiene una única solución $u \in H_0^1$.

Observación 6: Si u es una solución clásica de (5.8), entonces u es la única solución del problema débil. Esto implica que (5.8) sólo puede tener una solución. □

Observación 7: Si u es la solución del problema débil y $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, tomando $v = \varphi \in C^\infty(\bar{D})$ con $\varphi|_{\partial D} = 0$ y teniendo en cuenta que $\int_D \nabla u \nabla \varphi = - \int_D \Delta u \varphi$ □

$$a \int_D u \varphi + k \int_D \nabla u \nabla \varphi = \int_D f \varphi \Rightarrow$$

$$\int_D (au - k\Delta u - f) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{D}), \text{ con } \varphi|_{\partial D} = 0$$

Esto implica que

$$au - k\Delta u - f = 0$$

y como además $u|_{\partial D} = 0$ ($u \in H_0^1(D)$ por ser solución del problema débil), entonces u es solución clásica. □

Observación 8: No es cierto que (5.8) siempre admita solución clásica. □

5.4.2 Problema con condición de contorno $u|_{\partial D} = u_D$

Estudiamos ahora el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} au - k\Delta u = f & \text{en } D \subset \mathbb{R}^d \\ u|_{\partial D} = u_D \end{cases} \quad (5.13)$$

donde $k > 0$, $a \geq 0$ constantes, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $u_D : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in H^1(D)$ tal que $g|_{\partial D} = u_D$ y sea $w = u - g$. Nótese que $w \in H_0^1(D)$. Repitiendo el argumento visto en las observaciones previas, $\forall v \in H_0^1(D)$, u verifica

$$a \int_D uv + k \int_D \nabla u \nabla v = \int_D fv + k \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 a \int_D (w+g)v + k \int_D \nabla(w+g) \nabla v &= \int_D fv + k \int_{\partial D} \frac{\partial(w+g)}{\partial \mathbf{n}} v \Rightarrow \\
 a \int_D wv + k \int_D \nabla w \nabla v &= \int_D fv - \left(a \int_D gv + k \int_D \nabla g \nabla v \right) + k \int_{\partial D} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} v + k \int_{\partial D} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} v \Rightarrow \\
 a \int_D wv + k \int_D \nabla w \nabla v &= \int_D fv - \left(a \int_D gv + k \int_D \nabla g \nabla v \right) \quad \forall v \in H_0^1(D),
 \end{aligned}$$

es decir, nuestro problema ahora es encontrar $w \in H_0^1(D)$ tal que

$$A(w, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

donde ahora

$$\begin{aligned}
 A(w, v) &= a \int_D wv + k \int_D \nabla w \nabla v \\
 L(v) &= \int_D fv - \left(a \int_D gv + k \int_D \nabla g \nabla v \right) = \int_D fv - A(g, v)
 \end{aligned}$$

La forma bilineal $A : H_0^1(D) \times H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ es la misma, por lo que ya sabemos que es bilineal, continua y coercitiva. Además $L : H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal. Comprobamos que también es continua:

$$\begin{aligned}
 |L(v)| &\leq \left| \int_D fv \right| + |A(g, v)| \leq \|f\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} + M \|g\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} = \\
 &= \left(\|f\|_{H^1(D)} + M \|g\|_{H^1(D)} \right) \|v\|_{H^1(D)} = M' \|v\|_{H^1(D)}.
 \end{aligned}$$

Luego aplicando el Teorema de Lax-Milgram, nuestro problema tiene una única solución $w \in H_0^1(D)$ y por tanto (5.13) tiene una única solución: $u = w + g \in H^1(D)$.

5.4.3 Problema 1D con condición de contorno $u(0) = u_0$ y $u'(1) = u_1$

Estudiemos ahora el siguiente problema elíptico 1D con una condición de contorno tipo Dirichlet, y otra Neumann:

$$\begin{cases} au - ku'' = f & \text{en } (0, 1) = D \\ u(0) = u_0, u'(1) = u_1 \end{cases} \quad (5.14)$$

donde $k > 0$, $a \geq 0$ constantes, $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2(D)$ y $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$. Repitiendo el mismo análisis que antes

$$a \int_0^1 uv + k \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv + k \underbrace{\int_D \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v}_{u'(1)v(1) - u'(0)v(0)} = \int_0^1 fv + k(u_1v(1) - u'(0)v(0)) \quad \forall v \in H^1(D)$$

Necesitamos una función $g \in H^1(D)$ tal que $g(0) = u_0$, por ejemplo la función constante $g(x) = u_0$ para todo $x \in [0, 1]$. Sea $w = u - g \in H^1(D)$. Podemos comprobar fácilmente que $w(0) = 0$ y $w'(1) = u_1$. Entonces

$$a \int_0^1 wv + k \int_0^1 w'v' = \int_0^1 fv - \left(a \int_0^1 gv + k \underbrace{\int_0^1 g'v'}_0 \right) + k(u_1v(1) - u'(0)v(0)) \quad \forall v \in H^1(D).$$

Definimos

$$V = \{v \in H^1(D) : v(0) = 0\} \subset H^1(D)$$

y por tanto $w \in V$. Entonces definiendo $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ y $L : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$A(w, v) = a \int_0^1 wv + k \int_0^1 w'v'$$

$$L(v) = \int_0^1 fv - a \int_D gv + ku_1v(1) = \int_0^1 (f - ag)v + ku_1v(1).$$

El problema se reduce a encontrar $w \in V$ tal que

$$A(w, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Igual que en los casos anteriores se demuestra que A es una forma bilineal, continua y coercitiva en V . Además L es lineal y continua:

$$|L(v)| \leq \left| \int_0^1 (f - ag)v \right| + |ku_1v(1)| \leq \|f - ag\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} + k|u_1| |v_1|$$

Para demostrar que L es continua, necesitamos utilizar el siguiente teorema.

Teorema: Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ abierto. Entonces $\exists C_D > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^2(\partial D)} \leq C_D \|v\|_{H^1(D)}.$$

□

En nuestro caso, aplicando el teorema con $d = 1$

$$\|v\|_{L^2(\partial D)}^2 = \int_{\partial D} v^2 = v^2(1) + v^2(0) = v^2(1) \quad \forall v \in V.$$

Luego

$$|v(1)| = \|v\|_{L^2(\partial D)} \leq C_D \|v\|_{H^1(D)} \quad \forall v \in V$$

Entonces

$$|L(v)| \leq \left(\|f - ag\|_{H^1(D)} + C_D k |u_1| \right) \|v\|_{H^1(D)} \quad \forall v \in V$$

y por tanto L es continua.

De esta manera, podemos aplicar Lax-Milgram, lo que nos dice que $\exists! w \in V$ tal que

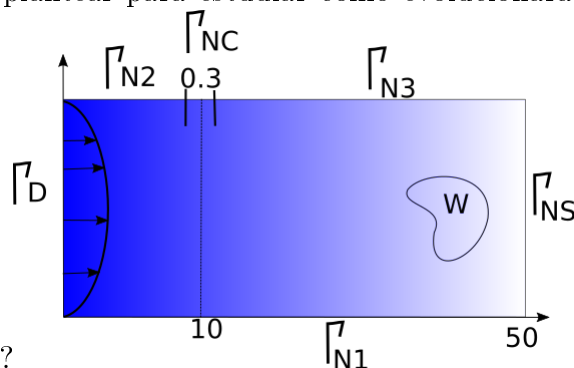
$$A(w, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

y por tanto, la única solución de (5.14) es $u = w + g$.

5.5 Ejercicios

1. Deducir la EDP que verifica la función temperatura u para un cilindro que represente una varilla de longitud l y radio r en la hipótesis de que la distribución de temperatura es homogénea en la dirección perpendicular al eje del cilindro. Suponer también que el resto de variables siguen esta misma hipótesis. Además imponer la condición de que la temperatura en una de las tapas del cilindro está dada por el valor u_{D_0} , en la otra tapa por el valor u_{D_l} y que el flujo de energía térmica \mathbf{q} a través de las paredes del cilindro verifica que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ (condición de contorno adiabática).
2. Repetir el ejercicio 1 imponiendo la condición de contorno adiabática en las tapas del cilindro y transmisión de calor por convección en las paredes del cilindro, es decir, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \alpha(u - u_{ext})$.
3. Se quiere estudiar cómo evoluciona la temperatura de la base de una olla de diámetro 32 cm y espesor 0.5 cm al calentarse en una cocina de gas. Escribir el problema de contorno y valor inicial que modela matemáticamente el problema.

4. En un canal se está realizando un vertido controlado de cierto contaminante a través de una tubería situada en un lateral del canal. Se quiere estudiar cuales son las consecuencias del vertido, esto es, se quiere saber como y con qué concentración se distribuirá el vertido a lo largo del canal. En concreto el estudio se quiere centrar en los 10 m aguas arriba y los 40 m aguas abajo de la localización de la tubería. El canal en ese tramo es recto y con un ancho de 5 m. Se sabe además que el contaminante se concentra de forma homogénea en los primeros 5 cm desde la superficie del agua. El diámetro de la tubería es de 30 cm y se conoce el flujo de contaminante que se vierte al canal. El agua del canal por su parte tiene una velocidad con perfil parabólico a lo largo del mismo con velocidad máxima de $V \text{ m s}^{-1}$. Si no existía nada de contaminante en el canal inicialmente, ¿qué problema de contorno y valor inicial se necesita plantear para estudiar como evolucionará la concentración del contaminante en



dicho canal?

5. En noviembre del año 2002 el buque petrolero Prestige se hundió frente a las costas de Galicia generando un derrame de petróleo sin precedentes en nuestro país. Sabiendo que el petróleo se queda en la superficie del océano con un espesor de unos pocos centímetros y que la concentración del mismo puede suponerse homogénea en la vertical, escribir un problema de contorno y valor inicial que sirva para estudiar la evolución del derrame de petróleo.
6. Sea $D = (0, 2) \subset \mathbb{R}$. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} u - u'' = f, & \text{en } D, \\ u'(0) = 0 = u'(2), \end{cases}$$

donde $f \in L^2(D)$.

7. Sea $D = (-1, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_D = \{(x, y) \in \partial D : x + 2y > 1\}$ y $\Gamma_N = \partial D - \Gamma_D$. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} u - k\Delta u = f, & \text{en } D, \\ u|_{\Gamma_D} = g; k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = 0, \end{cases}$$

donde $k > 0$, k constante, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, y) = 1 - x^2$, y $g : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) = 4x + 4$.

8. Sea $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1 \right\} - [-1, 1] \times [0, 1]$, $\Gamma_D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \right\}$ y $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = 2, & \text{en } D, \\ u|_{\Gamma_D} = 0; \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = 0. \end{cases}$$

9. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0, x^2 + y^2 < 9\}$. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} -k\Delta u = f, & \text{en } D, \\ u(x, 0) = 12x, & x \in (0, 3), \\ u(0, y) = 0, & y \in (-3, 0), \\ u(x, y) = 4x^2, & (x, y) \in \partial D, x^2 + y^2 = 9, \end{cases}$$

donde $k > 0$ es una constante y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, y) = e^{-10(x^2+y^2)}$.

10. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto con frontera suficientemente regular. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} au - k\Delta u = f, & \text{en } D, \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial D} = g, \end{cases}$$

donde $a, k > 0$, con a y k constantes, $f \in L^2(D)$ y $g \in L^2(\partial D)$.

11. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto con frontera suficientemente regular. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial D} = g, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(D)$ y $g \in L^2(\partial D)$.

12. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto con frontera suficientemente regular. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} au - k\Delta u = f, & \text{en } D, \\ \left(cu + k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) |_{\partial D} = g, \end{cases}$$

donde $a, c, k > 0$, con a, c y k constantes, $f \in L^2(D)$ y $g \in L^2(\partial D)$.

13. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto con frontera suficientemente regular. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} u - \operatorname{div}(k\nabla u) = f, & \text{en } D, \\ u|_{\partial D} = 0, \end{cases}$$

donde $k : D \rightarrow \mathbb{R}$, verificando que $0 < k_0 \leq k(x, y) \leq k_1$ para todo $(x, y) \in D$, siendo k_0 y k_1 constantes, y $f \in L^2(D)$.

14. Sea $D = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \partial D : x + y < \frac{1}{2}\}$ y $\Gamma_2 = \partial\Omega - \Gamma_1$. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} \mathbf{b} \cdot \nabla u - k\Delta u = 0, & \text{en } D, \\ u|_{\Gamma_1} = 1, u|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases}$$

donde $k > 0$ es una constante y $\mathbf{b} = (2, 1)$.

15. Sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto con frontera suficientemente regular. Estudiar la existencia y unicidad de solución del siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} au + \mathbf{b} \cdot \nabla u - k\Delta u = f, & \text{en } D, \\ u|_{\partial D} = 0, \end{cases}$$

donde $a, k > 0$, con a y k constantes, donde $f \in L^2(D)$ y $\mathbf{b} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Capítulo 6

Resolución de problemas elípticos mediante el método de elementos finitos

6.1 Planteamiento del problema

En este tema vamos a estudiar cómo aproximar la solución de un problema elíptico mediante el método de elementos finitos. Veamos el caso general unidimensional con condiciones de contorno *Dirichlet* homogéneas

$$\left. \begin{aligned} a(x)u(x) + b(x)\frac{du}{dx} - \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) &= f(x) \text{ en } D = (c, d) \subset \mathbb{R} \\ u(c) = u(d) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Pasamos a la formulación variacional. Para ello buscamos la solución del problema en un espacio funcional $V \in H_0^1(D)$ cuyos elementos son funciones $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ que se anulan en $x = c$ y $x = d$. Multiplicamos por una función $v(x) \in V$ e integramos

$$\int_c^d auv \cdot dx + \int_c^d b\frac{du}{dx}v \cdot dx - \int_c^d \frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right)v \cdot dx = \int_c^d fv \cdot dx$$

Integrando por partes el tercer sumando del primer término vemos que

$$\int_c^d \frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right)v \cdot dx = k\frac{du}{dx}v \Big|_c^d - \int_c^d k\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \cdot dx \quad (6.2)$$

por lo que obtenemos la nueva ecuación:

$$\int_c^d auv \cdot dx + \int_c^d b\frac{du}{dx}v \cdot dx + \int_c^d k\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \cdot dx = \int_c^d fv \cdot dx + k(d)u'(d)v(d) - k(c)u'(c)v(c), \quad (6.3)$$

y finalmente llegamos al planteamiento de la solución débil consistente en encontrar una función $u \in V$ tal que para toda función $v \in V$ se cumpla

$$\int_c^d auv \cdot dx + \int_c^d b \frac{du}{dx} v \cdot dx + \int_c^d k \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \cdot dx = \int_c^d fv \cdot dx + k(d) u'(d) v(d) - k(c) u'(c) v(c) \quad (6.4)$$

o equivalentemente encontrar $u \in V$ tal que

$$A(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

con $V = H_0^1(D)$ y

$$\begin{aligned} A : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}, & A(u, v) &= \int_c^d auv \cdot dx + \int_c^d b \frac{du}{dx} v \cdot dx + \int_c^d k \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \cdot dx \\ L : V &\rightarrow \mathbb{R}, & L(v) &= \int_c^d fv \cdot dx + \left[k \frac{du}{dx} v \right]_c^d \end{aligned}$$

La idea del método de elementos finitos consiste en construir un subespacio vectorial de dimensión finita en V y aproximar la solución $u \in V$ por una función que pertenezca a ese subespacio. En nuestro caso sea $V_h \subset H^1(D)$ con $\dim V_h < \infty$. Sea

$$V_{h0} = \{v_h \in V_h : v_h(c) = v_h(d) = 0\} = V_h \cap H_0^1(D) \subset H^1(D)$$

La solución de elementos finitos será encontrar $u_h \in V_{h0}$ tal que

$$A(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0} \quad (6.5)$$

Observación: Podemos aplicar el teorema de Lax-Milgram a (6.5) puesto que tanto A como L son iguales que en (6.4) y lo único que cambia es el espacio de Hilbert, que en este caso es V_{h0} . Al ser $v \in V_{h0}$, el operador L se simplifica a $L(v) = \int_c^d fv \cdot dx$.

Por tanto (6.5) tiene una única solución $u_h \in V_{h0}$ que es una aproximación de la solución $u \in V = H_0^1(D)$.

□

Sea $N = \dim V_h$ y $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N} \subset V_h$ una base de V_h . Veremos que N depende del tipo de elementos finitos elegidos (lineales, cuadráticos, hermite, etc). Si bien podríamos trabajar directamente en el espacio V_{h0} , trabajaremos en V_h para facilitar la exposición de otras condiciones de contorno que veremos más adelante. Entoces

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x) \\ v_h(x) &= \sum_{j=1}^N v_j \phi_j(x) \end{aligned}$$

El problema (6.5) es equivalente a encontrar $u_h \in V_{h0}$ tal que

$$A(u_h, \phi_i) = L(\phi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

pues la implicación \Rightarrow es trivial ($\phi_i \in V_{h0}$). Veamos la implicación \Leftarrow :

$$A(u_h, v_h) = A\left(u_h, \sum_{j=1}^N v_j \phi_j\right) = \sum_{j=1}^N v_j A(u_h, \phi_j) = \sum_{j=1}^N v_j L(\phi_j) = L\left(\sum_{j=1}^N v_j \phi_j\right) = L(v_h)$$

Por tanto el problema (6.5) lo podemos expresar como encontrar $u_h \in V_{h0}$ tal que se cumplan las siguientes N ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} A(u_h, \phi_1) &= L(\phi_1) \\ A(u_h, \phi_2) &= L(\phi_2) \\ &\dots \\ A(u_h, \phi_N) &= L(\phi_N) \end{aligned} \right\}$$

Además

$$A(u_h, \phi_i) = A\left(\sum_{j=1}^N u_j \phi_j, \phi_i\right) = \sum_{j=1}^N u_j A(\phi_j, \phi_i) = \sum_{j=1}^N u_j a_{ij}$$

$$L(\phi_i) = d_i$$

Por tanto (6.5) lo podemos plantear como encontrar $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\left. \begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1N}u_N &= d_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2N}u_N &= d_2 \\ &\dots \\ a_{N1}u_1 + a_{N2}u_2 + \dots + a_{NN}u_N &= d_N \end{aligned} \right\}$$

o bien

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{d} \tag{6.6}$$

Dado que la ecuación diferencial se cumple en D , pero no en su frontera, el sistema lineal (6.6) hay que modificarlo para tener en cuenta las condiciones de contorno. En este caso $u_1 = u_N = 0$. De esta forma reducimos el número de incógnitas de N a $N - 2$, con lo que podemos prescindir de 2 ecuaciones, típicamente la primera y la última. Así, el problema lineal (6.6) se transforma en

$$\left. \begin{aligned} a_{22}u_2 + \dots + a_{2,N-1}u_{N-1} &= d_2 \\ &\dots \\ a_{N-1,2}u_2 + \dots + a_{N-1,N-1}u_{N-1} &= d_{N-1} \end{aligned} \right\} \tag{6.7}$$

o bien $\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{d}_0$ cuya solución es $\mathbf{u}_0 = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{d}_0$. Una vez calculado el vector \mathbf{u}_0 , la solución será

$$u_h(x) = \sum_{j=2}^{N-1} u_j \phi_j(x)$$

Nótese que se obtiene la solución para todo x del intervalo $[c, d]$ gracias a las funciones base ϕ_i . Sin embargo, suele utilizarse únicamente los valores en los nodos del mallado x_i . En ese caso,

$$u_h(x_i) = u_j \quad \forall 2 \leq j \leq N-1$$

y $u_1 = u_N = 0$.

Observación: Es muy sencillo en MATLAB/OCTAVE obtener el sistema lineal modificado (6.7) a partir del original (6.6). Así, una vez calculada matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{d} , la solución del sistema lineal modificado será: $\mathbf{u}_h = \mathbf{A}(2:\text{end}-1, 2:\text{end}-1) \backslash \mathbf{d}(2:\text{end}-1)$

Nótese que se utiliza el operador \backslash para evitar invertir la matriz del sistema lineal y hacer el cálculo computacionalmente más eficiente.

□

6.2 Sistema lineal: Matrices de masas, rigidez y convección

De forma más detallada, podemos obtener los elementos de la matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{d} sustituyendo en (6.4) u por $\sum_{j=1}^N u_j \phi_j$ y v por $\phi_i \quad \forall i = 1, \dots, N$ (para facilitar la notación prescindimos de dx y expresamos las derivadas mediante el símbolo $'$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N u_j \int_c^d a \phi_j \phi_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_c^d b \phi_j' \phi_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_c^d k \phi_j' \phi_i' &= \int_c^d f \phi_i + \left[k \frac{du}{dx} v \right]_c^d \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^N \left(\underbrace{\int_c^d a \phi_j \phi_i}_{\bar{m}_{ij}} + \underbrace{\int_c^d b \phi_j' \phi_i}_{\bar{c}_{ij}} + \underbrace{\int_c^d k \phi_j' \phi_i'}_{\bar{r}_{ij}} \right) u_j &= \int_c^d f \phi_i + \underbrace{\left[k \frac{du}{dx} v \right]_c^d}_{\varphi_i} \Rightarrow \\ \sum_{j=1}^N (\bar{m}_{ij} + \bar{c}_{ij} + \bar{r}_{ij}) u_j &= d_i + \varphi_i \end{aligned}$$

A la matriz $\bar{\mathbf{M}} = (\bar{m}_{ij})$ se le denomina *matriz de masas* en el caso de que $a(x) = 1$. Podemos comprobar que es simétrica. A la matriz $\bar{\mathbf{C}} = (c_{ij})$ se le denomina *matriz de convección*, y en

general no es simétrica. Por último, a la matriz $\bar{\mathbf{R}} = (r_{ij})$ se le denomina *matriz de rigidez*, y también es siempre simétrica. El vector de términos independientes consta de dos sumandos. Veremos más adelante que φ_i es cero en todos los nodos interiores cuando veamos cómo tratar las condiciones de contorno. En el caso particular de que las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $k(x)$ sean constantes, podemos sacarlos fuera de las integrales y obtenemos

$$\mathbf{A} = a\mathbf{M} + b\mathbf{C} + k\mathbf{R}$$

donde los elementos de las matrices son

$$\left. \begin{aligned} m_{ij} &= \int_c^d \phi_i \phi_j \\ c_{ij} &= \int_c^d \phi_j' \phi_i \\ r_{ij} &= \int_c^d \phi_i' \phi_j' \end{aligned} \right\}$$

y el término independiente

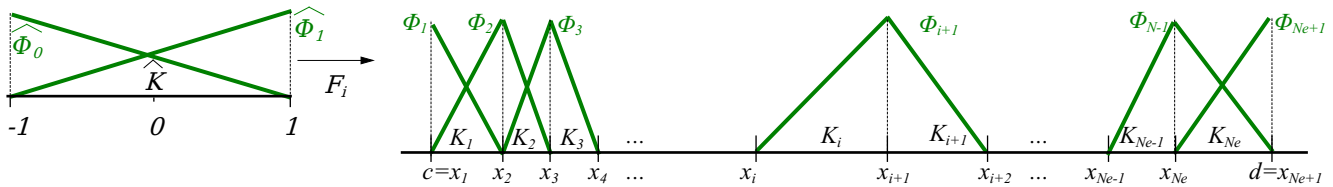
$$d_i = \int_c^d f \phi_i$$

Veamos ahora cómo calcular las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{R} y el vector \mathbf{d} para diferentes elementos finitos.

6.2.1 Elementos finitos lineales

Veamos cómo calcular estas matrices en el caso de polinomios de grado $m = 1$. Recordamos que en este caso la dimensión de V_h es $N = N_e + 1$. Creamos una partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de D y definimos

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{D}) : v_h|_{K_i} \in P_1(K_i), 1 \leq i \leq N_e\}$$



Podemos comprobar fácilmente que las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{R} son tridiagonales, es decir

$$m_{ij} = c_{ij} = r_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i - j| > 1$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Calculemos primero el elemento $m_{i,i-1}$:

$$m_{i,i-1} = \int_c^d \phi_i(x) \phi_{i-1}(x) dx = \int_{K_{i-1}} \phi_i(x) \phi_{i-1}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x) \phi_{i-1}(x) dx$$

Pasamos al elemento de referencia sabiendo

$$F_{i-1}(\hat{x}) = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}(\hat{x} + 1) = x \Leftrightarrow \hat{x} = 2 \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - 1$$

$$dx = F'_{i-1}(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{h_i}{2} d\hat{x}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} m_{i,i-1} &= \int_{-1}^1 \phi_i(F_{i-1}(\hat{x})) \phi_{i-1}(F_{i-1}(\hat{x})) F'_{i-1}(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{h_i}{2} \int_{-1}^1 \phi_1^{(i)}(F_{i-1}(\hat{x})) \phi_0^{(i)}(F_{i-1}(\hat{x})) d\hat{x} = \\ &= \frac{h_i}{2} \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1(\hat{x}) \hat{\phi}_0(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{h_i}{2} \hat{m}_{01}. \end{aligned}$$

Calculamos ahora m_{ii} :

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \int_c^d \phi_i(x) \phi_i(x) dx = \int_{K_{i-1}} \phi_i^2(x) dx + \int_{K_i} \phi_i^2(x) dx = \\ &= \frac{h_{i-1}}{2} \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1^2(\hat{x}) d\hat{x} + \frac{h_i}{2} \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0^2(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{h_{i-1}}{2} \hat{m}_{11} + \frac{h_i}{2} \hat{m}_{00} \end{aligned}$$

Y por último, $m_{i,i+1}$:

$$m_{i,i+1} = \int_c^d \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx = \int_{K_i} \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) dx = \frac{h_i}{2} \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1(\hat{x}) \hat{\phi}_0(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{h_i}{2} \hat{m}_{01}$$

Para el primer y último elemento de la diagonal principal, sólo hay un sumando:

$$m_{11} = \int_c^d \phi_1^2(x) dx = \int_{K_1} \phi_1^2(x) dx = \frac{h_1}{2} \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0^2(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{h_1}{2} \hat{m}_{00}$$

$$m_{NN} = \int_c^d \phi_{N_e+1}^2(x) dx = \int_{K_{N_e}} \phi_{N_e+1}^2(x) dx = \frac{h_{N_e}}{2} \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1^2(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{h_{N_e}}{2} \hat{m}_{11}$$

Si definimos la siguiente matriz

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{00} & \hat{m}_{01} \\ \hat{m}_{01} & \hat{m}_{11} \end{pmatrix},$$

podemos calcular la matriz de masas según indica la figura 6.1. Obsérvese en dicha figura que los elementos de la diagonal principal de la matriz $\hat{\mathbf{M}}$ se van solapando para conformar la matriz \mathbf{M} .

Calculamos del mismo modo la matriz \mathbf{C} . Como ya dijimos, ésta matriz no es simétrica, pero sí tridiagonal.

$$c_{ii} = \int_c^d \phi_i' \phi_i = \int_{K_{i-1}} \phi_i' \phi_i + \int_{K_i} \phi_i' \phi_i =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{h_{i-1}}{2} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_1' \frac{2}{h_{i-1}} + \int_{-1}^1 \frac{h_i}{2} \hat{\phi}_0 \hat{\phi}_0' \frac{2}{h_i} = \hat{c}_{11} + \hat{c}_{00}$$

Como en la matriz \mathbf{M} , el primer y último elemento de la diagonal principal se calculan del siguiente modo:

$$c_{11} = \int_c^d \phi_1 \phi_1' = \int_{K_1} \phi_1 \phi_1' = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0 \hat{\phi}_0' = \hat{c}_{00}$$

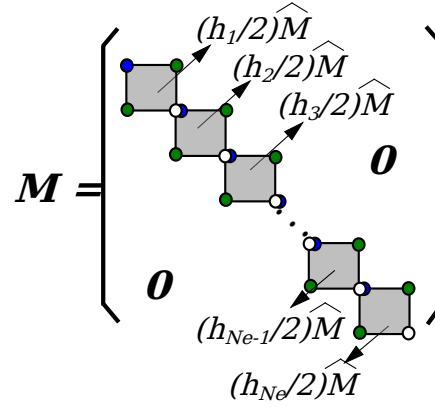


Figura 6.1: Matriz \mathbf{M} expresada en función de las matrices elementales $\hat{\mathbf{M}}$ para el caso de elementos finitos lineales.

$$c_{NN} = \int_c^d \phi_{N_e+1} \phi_{N_e+1} = \int_{K_{N_e}} \phi_{N_e+1} \phi'_{N_e+1} = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1 \hat{\phi}'_1 = \hat{c}_{11}$$

Y los de la diagonal secundaria:

$$c_{i,i+1} = \int_c^d \phi_i \phi'_{i+1} = \int_{K_i} \phi_i \phi'_{i+1} = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0 \hat{\phi}'_1 = \hat{c}_{01}$$

$$c_{i+1,i} = \int_c^d \phi_{i+1} \phi'_i = \int_{K_i} \phi_{i+1} \phi'_i = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1 \hat{\phi}'_0 = \hat{c}_{10}$$

Para la matriz de rigidez los cálculos son análogos.

$$r_{i,i+1} = \int_c^d \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx = \int_{K_i} \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx = \int_{-1}^1 \phi'_i(F_i(\hat{x})) \phi'_{i+1}(F_i(\hat{x})) F'_i(\hat{x}) d\hat{x}$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_0(\hat{x}) &= \phi_{i+1}(F_i(\hat{x})) \Rightarrow \hat{\phi}'_0(\hat{x}) = F'_i(\hat{x}) \phi'_{i+1}(F_i(\hat{x})) \\ \hat{\phi}_1(\hat{x}) &= \phi_i(F_i(\hat{x})) \Rightarrow \hat{\phi}'_1(\hat{x}) = F'_i(\hat{x}) \phi'_i(F_i(\hat{x}))\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}r_{i,i+1} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{F'_i(\hat{x})} \hat{\phi}'_0(\hat{x}) \frac{1}{F'_i(\hat{x})} \hat{\phi}'_1(\hat{x}) F'_i(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{2}{h_i} \int_{-1}^1 \hat{\phi}'_0(\hat{x}) \hat{\phi}'_1(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{2}{h_i} \hat{r}_{01} \\ r_{ii} &= \int_c^d \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \int_{K_{i-1}} (\phi'_i(x))^2 dx + \int_{K_i} (\phi'_i(x))^2 dx = \\ &= \frac{2}{h_{i-1}} \int_{-1}^1 (\hat{\phi}'_1)^2(\hat{x}) + \frac{2}{h_i} \int_{-1}^1 (\hat{\phi}'_0)^2(\hat{x}) = \frac{2}{h_{i-1}} \hat{r}_{11} + \frac{2}{h_i} \hat{r}_{00}\end{aligned}$$

Si definimos las siguiente matrices

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{00} & \hat{c}_{01} \\ \hat{c}_{10} & \hat{c}_{11} \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{00} & \hat{r}_{01} \\ \hat{r}_{01} & \hat{r}_{11} \end{pmatrix}$$

podemos calcular las matrices \mathbf{C} y \mathbf{R} de forma similar a como muestra la figura 6.1 para la matriz de masas. Las diferencias radican en que para la matriz \mathbf{C} no es necesario multiplicar las matrices elementales, mientras que para la matriz de rigidez se multiplican por los factores $2/h_i$ según muestra la figura 6.2.

Observación: Las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{R} tienen tamaño tamaño $(N_e + 1) \times (N_e + 1)$, es decir, tienen en cuenta todos los nodos del mallado. □

Observación: Siempre se recomienda utilizar reglas de cuadratura de Gauss-Legendre para el cálculo de los coeficientes de las matrices elementales bajo los siguientes criterios: (1) si los integrandos son polinomios de grado, digamos m , utilizar una regla que al menos sea exacta para polinomios de grado m ; (2) si los integrandos no son funciones polinómicas, pero se pueden expresar como el producto $f(r) p_m(r)$, donde p_m es un polinomio de grado m y $f(r)$ es una función continua, emplear una regla que sea al menos exacta de grado $m + 1$. □

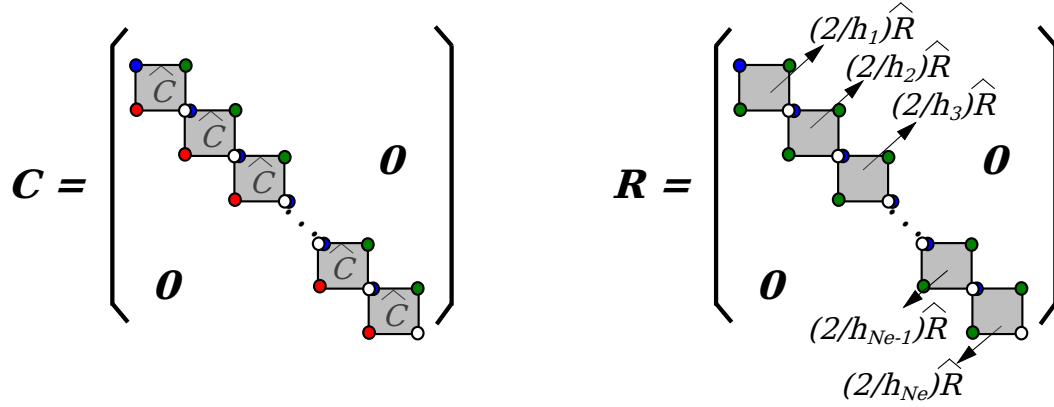


Figura 6.2: Matrices \mathbf{C} y \mathbf{R} expresadas en función de las matrices elementales $\hat{\mathbf{C}}$ y $\hat{\mathbf{R}}$ para el caso de elementos finitos lineales.

Observación: Dado que las integrales que aparecen en el cálculo de las matrices $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ y $\hat{\mathbf{R}}$ son muy sencillas, pueden calcularse de forma exacta. Así, es fácil comprobar que:

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

En cuanto al vector \mathbf{d} , dado que las funciones ϕ_i se anulan en todo los elementos salvo en dos

$$d_i = \int_c^d f \phi_i = \int_{K_{i-1}} f(x) \phi_i(x) dx + \int_{K_i} f(x) \phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx$$

Pasamos al elemento de referencia sabiendo

$$F_i(\hat{x}) = x_i + \frac{h_i}{2}(\hat{x} + 1) = x \Leftrightarrow \hat{x} = 2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - 1$$

$$dx = F_i'(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{h_i}{2} d\hat{x}.$$

Entonces, usando el cambio de variable (4.8) que vimos en el tema de integración

$$d_i = \int_{-1}^1 f \left(x_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{2}(\hat{x} + 1) \right) \frac{h_{i-1}}{2} \hat{\phi}_1(\hat{x}) d\hat{x} + \int_{-1}^1 f \left(x_i + \frac{h_i}{2}(\hat{x} + 1) \right) \frac{h_i}{2} \hat{\phi}_0(\hat{x}) d\hat{x}$$

El primer y último elemento del vector serán:

$$d_1 = \int_{-1}^1 f \left(x_1 + \frac{h_1}{2} (\hat{x} + 1) \right) \frac{h_1}{2} \hat{\phi}_0 (\hat{x}) d\hat{x}$$

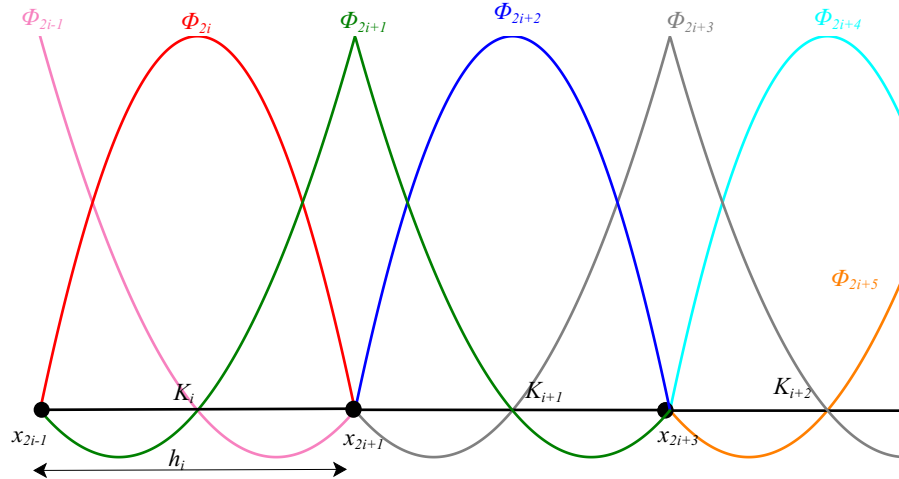
$$d_{N_e+1} = \int_{-1}^1 f \left(x_{N_e} + \frac{h_{N_e}}{2} (\hat{x} + 1) \right) \frac{h_{N_e}}{2} \hat{\phi}_1 (\hat{x}) d\hat{x}$$

Las funciones φ_i sólo dependen de las derivadas primeras de la función incógnita y serán cero en todos los nodos salvo en el primero y en el último debido al soporte de las funciones base:

$$\varphi_i = \begin{cases} -k(c) \frac{du(c)}{dx} & i = 1 \\ 0 & 2 \leq i \leq N_e \\ k(d) \frac{du(d)}{dx} & i = N_e + 1 \end{cases} \quad (6.8)$$

6.2.2 Elementos finitos cuadráticos

Veamos cómo calcular las matrices de masas, convección y rigidez en el caso de de polinomios de grado $m = 2$. Recordamos que en este caso la dimensión de V_h es $N = 2N_e + 1$.



Como siempre habrá un nodo intermedio en el interior de cada elemento finito, existirán un total de $2N_e + 1$ nodos. Recordemos que las funciones base en el elemento de referencia viene dadas por la expresión (2.9), en los elementos finitos por (2.10) y las funciones base globales adoptan la forma según la expresión (2.11). Entonces, calculando los elementos de la matriz de masas

podemos comprobar que se cumple lo siguiente:

$$\begin{cases} m_{2i+1,j} = 0 & \text{si } |2i+1-j| > 2 \\ m_{2i,j} = 0 & \text{si } |2i-j| > 1 \end{cases}$$

Como ya vimos en el caso de polinomios de primer grado, la matriz \mathbf{M} se puede calcular una forma similar a la figura 6.1, aunque ahora la matriz elemental $\hat{\mathbf{M}}$ es de tamaño 3×3 . Así, algunos elementos de la matriz se calculan a continuación:

$$m_{2i+1,2i} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \phi_{2i+1} \phi_{2i} dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 \frac{h_i}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{12} \frac{h_i}{2}$$

$$m_{2i+1,2i-1} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+2}} \phi_{2i+1} \phi_{2i-1} dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_0 \frac{h_i}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{02} \frac{h_i}{2}$$

$$m_{2i-1,2i} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \phi_{2i-1} \phi_{2i} dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0 \hat{\phi}_1 \frac{h_i}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{01} \frac{h_i}{2}$$

$$m_{2i+1,2i+1} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \phi_{2i+1}^2 dx + \int_{x_{2i+1}}^{x_{2i+3}} \phi_{2i+1}^2 dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2^2 \frac{h_i}{2} d\hat{x} + \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0^2 \frac{h_{i+1}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{22} \frac{h_i}{2} + \hat{m}_{00} \frac{h_{i+1}}{2}$$

$$m_{2i,2i} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \phi_{2i} \phi_{2i} dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1^2 \frac{h_i}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{11} \frac{h_i}{2}$$

Calculando los 6 elementos (la matriz es simétrica), podemos definir la matriz

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{00} & \hat{m}_{10} & \hat{m}_{20} \\ \hat{m}_{10} & \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} \\ \hat{m}_{20} & \hat{m}_{12} & \hat{m}_{22} \end{pmatrix}$$

Al ser las integrales muy sencillas, puede calcularse la matriz de forma exacta. Así por ejemplo

$$\hat{m}_{00} = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0^2 d\hat{x} = \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x(1-x) \right)^2 dx = \frac{4}{15}$$

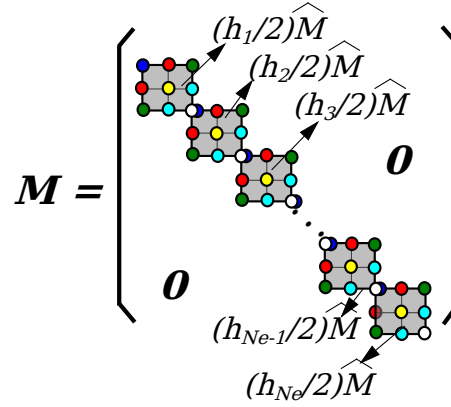


Figura 6.3: Matriz \mathbf{M} expresada en función de las matrices elementales $\hat{\mathbf{M}}$ para el caso de elementos finitos cuadráticos.

Repitiendo los cálculos para toda la matriz, obtenemos finalmente

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La figura 6.3 muestra cómo se construye la matriz \mathbf{M} a partir de la matriz elemental $\hat{\mathbf{M}}$ de forma muy similar al caso lineal.

De igual forma se puede obtener la matriz de rigidez. Para ello integramos las derivadas de las funciones base:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}'_0(\hat{x}) &= -\frac{1}{2} + \hat{x} \\ \hat{\phi}'_1(\hat{x}) &= -2\hat{x} \\ \hat{\phi}'_2(\hat{x}) &= \frac{1}{2} + \hat{x} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Así, por ejemplo los elementos de la diagonal serán

$$r_{2i+1,2i+1} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} (\phi'_{2i+1})^2 dx + \int_{x_{2i+1}}^{x_{2i+3}} (\phi'_{2i+1})^2 dx = \int_{-1}^1 (\hat{\phi}'_2)^2 \frac{2}{h_i} d\hat{x} + \int_{-1}^1 (\hat{\phi}'_0)^2 \frac{2}{h_{i+1}} d\hat{x} \equiv \hat{r}_{22} \frac{2}{h_i} + \hat{r}_{00} \frac{2}{h_{i+1}}$$

$$r_{2i,2i} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} (\phi'_{2i})^2 dx = \int_{-1}^1 (\hat{\phi}'_1)^2 \frac{2}{h_i} d\hat{x} \equiv \hat{r}_{11} \frac{2}{h_i}$$

Calculando todos los elementos de la matriz obtenemos que

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{00} & \hat{r}_{10} & \hat{r}_{20} \\ \hat{r}_{10} & \hat{r}_{11} & \hat{r}_{12} \\ \hat{r}_{20} & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{22} \end{pmatrix}$$

Es fácil calcular de forma exacta dicha matriz obteniendo

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Procediendo de la misma forma que en el caso lineal, obtenemos los términos del vector \mathbf{d} para funciones base de segundo grado:

$$d_{2i+1} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x) \phi_{2i+1}(x) dx + \int_{x_{2i+1}}^{x_{2i+3}} f(x) \phi_{2i+1}(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2(\hat{x}) g(\hat{x}) d\hat{x} + \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0(\hat{x}) g(\hat{x}) d\hat{x}$$

$$d_{2i} = \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} f(x) \phi_{2i}(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1(\hat{x}) g(\hat{x}) d\hat{x}$$

donde las funciones g son la función f convenientemente expresada en el elemento de referencia según se vio en la expresión (4.8). Los términos φ_i se calculan de la misma forma que en el caso lineal, ecuación (6.8). Es decir, son cero para todos los índices, excepto el primero $i = 1$ y el último $i = 2N_e + 1$.

Ejercicio: Se deja como ejercicio calcular la matriz elemental de convección $\hat{\mathbf{C}}$.

□

6.2.3 Elementos finitos con polinomios de Hermite

Veamos cómo calcular las matrices de masas, convección y rigidez en el caso de polinomios de Hermite utilizando dos nodos en cada elemento. Recordamos que en este caso la dimensión de V_h es $N = 2N_e + 2$. El número de nodos es igual al del caso lineal, es decir, $N_e + 1$. Recordemos que las funciones base en el elemento de referencia vienen dadas por la expresión (2.12), y las funciones base globales adoptan la forma según la expresión (2.13).

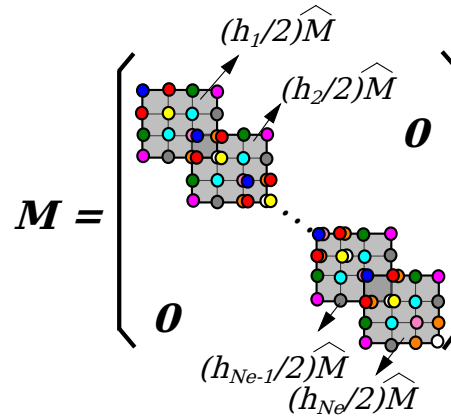
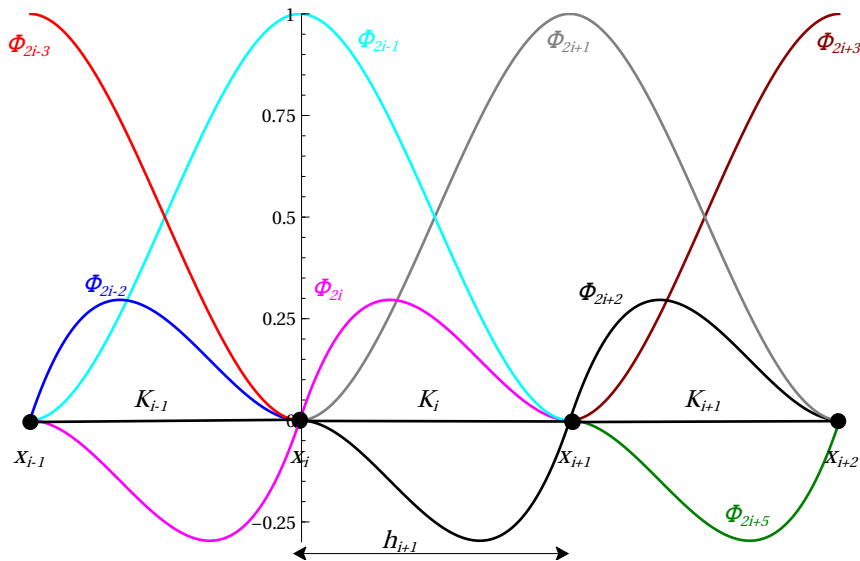


Figura 6.4: Matriz \mathbf{M} expresada en función de las matrices elementales $\hat{\mathbf{M}}$ para el caso de elementos finitos con polinomios de Hermite.



Procediendo de forma similar al caso lineal y cuadrático, podemos expresar las matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{R} en función de las matrices elementales $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ y $\hat{\mathbf{R}}$. En este caso dichas matrices son de tamaño

4×4 y se solapan en cajas de 2×2 según muestra la figura 6.4. Para comprobarlo, podemos calcular los elementos de la matriz de masas. De esta forma, definimos la matriz $\hat{\mathbf{M}}$ del siguiente modo (obsérvese que es simétrica):

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{00} & \hat{m}_{01} & \hat{m}_{02} & \hat{m}_{03} \\ \hat{m}_{10} & \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} & \hat{m}_{13} \\ \hat{m}_{20} & \hat{m}_{21} & \hat{m}_{22} & \hat{m}_{23} \\ \hat{m}_{30} & \hat{m}_{31} & \hat{m}_{32} & \hat{m}_{33} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz \mathbf{M} se calculan del siguiente modo:

$$m_{2i-1,2i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{2i-1}^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{2i-1}^2 dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2^2 \frac{h_i}{2} d\hat{x} + \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0^2 \frac{h_{i+1}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{22} \frac{h_i}{2} + \hat{m}_{00} \frac{h_{i+1}}{2}$$

$$m_{2i,2i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{2i}^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{2i}^2 dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_3^2 \frac{h_i}{2} d\hat{x} + \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1^2 \frac{h_{i+1}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{33} \frac{h_i}{2} + \hat{m}_{11} \frac{h_{i+1}}{2}$$

$$m_{2i-1,2i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{2i-1} \phi_{2i} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{2i-1} \phi_{2i} dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \frac{h_i}{2} d\hat{x} + \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0 \hat{\phi}_1 \frac{h_{i+1}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{23} \frac{h_i}{2} + \hat{m}_{01} \frac{h_{i+1}}{2}$$

$$m_{2i-1,2i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{2i-1} \phi_{2i+1} dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0 \hat{\phi}_2 \frac{h_{i+1}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{02} \frac{h_{i+1}}{2}$$

$$m_{2i-1,2i+2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{2i-1} \phi_{2i+2} dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0 \hat{\phi}_3 \frac{h_{i+1}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{03} \frac{h_{i+1}}{2}$$

Teniendo en cuenta el soporte de las funciones base, comprobamos que la mayoría de elementos son nulos. Así $m_{2i-1,2i+3} = m_{2i-1,2i+4} = \dots = 0$. Como ocurría en los casos lineales y cuadráticos, la integrales en el primer y último elemento cambian ligeramente.

$$m_{1,1} = \int_{x_1}^{x_2} \phi_1^2 dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0^2 \frac{h_1}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{00} \frac{h_1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 m_{2,2} &= \int_{x_1}^{x_2} \phi_2^2 dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1^2 \frac{h_1}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{11} \frac{h_1}{2} \\
 m_{1,2} &= \int_{x_1}^{x_2} \phi_1 \phi_2 dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0 \hat{\phi}_1 \frac{h_1}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{01} \frac{h_1}{2} \\
 m_{2N_e+1, 2N_e+1} &= \int_{x_{N_e}}^{x_{N_e+1}} \phi_{2i-1}^2 dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2^2 \frac{h_{N_e}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{22} \frac{h_{N_e}}{2} \\
 m_{2N_e+2, 2N_e+2} &= \int_{x_{N_e}}^{x_{N_e+1}} \phi_{2N_e+2}^2 dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_3^2 \frac{h_{N_e}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{33} \frac{h_{N_e}}{2} \\
 m_{2N_e+1, 2N_e+2} &= \int_{x_{N_e}}^{x_{N_e+1}} \phi_{2N_e+1} \phi_{2N_e+2} dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \frac{h_{N_e}}{2} d\hat{x} \equiv \hat{m}_{23} \frac{h_{N_e}}{2}
 \end{aligned}$$

Ejercicio: Demuestre que la matriz $\hat{\mathbf{M}}$ es

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{105} \begin{pmatrix} 78 & 22 & 27 & -13 \\ 22 & 8 & 13 & -6 \\ 27 & 13 & 78 & -22 \\ -13 & -6 & -22 & 8 \end{pmatrix}$$

□

De forma similar calculamos las matrices \mathbf{C} y \mathbf{R} a partir de las matrices $\hat{\mathbf{C}}$ y $\hat{\mathbf{R}}$. Para ello es necesario calcular las derivadas primeras de las funciones base en el elemento de referencia:

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\phi}'_0(\hat{x}) &= A'_{1,0}(\hat{x}) = \frac{1}{4}(1-\hat{x})^2 - \frac{1}{2}(\hat{x}+2)(1-\hat{x}) \\
 \hat{\phi}'_1(\hat{x}) &= B'_{1,0}(\hat{x}) = \frac{1}{4}(1-\hat{x})^2 - \frac{1}{2}(1-\hat{x}^2) \\
 \hat{\phi}'_2(\hat{x}) &= A'_{1,1}(\hat{x}) = -\frac{1}{4}(1+\hat{x})^2 + \frac{1}{2}(2-\hat{x})(1+\hat{x}) \\
 \hat{\phi}'_3(\hat{x}) &= B'_{1,1}(\hat{x}) = \frac{1}{4}(1+\hat{x})^2 + \frac{1}{2}(\hat{x}^2-1)
 \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Así por ejemplo, la matriz elemental de rigidez será

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{00} & \hat{r}_{01} & \hat{r}_{02} & \hat{r}_{03} \\ \hat{r}_{10} & \hat{r}_{11} & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13} \\ \hat{r}_{20} & \hat{r}_{21} & \hat{r}_{22} & \hat{r}_{23} \\ \hat{r}_{30} & \hat{r}_{31} & \hat{r}_{32} & \hat{r}_{33} \end{pmatrix}$$

donde

$$\hat{r}_{ij} = \int_{-1}^1 \hat{\phi}'_i \hat{\phi}'_j \quad 0 \leq i, j \leq 3$$

Se puede comprobar que esta matriz es

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 18 & 3 & -18 & 3 \\ 3 & 8 & -3 & -2 \\ -18 & -3 & 18 & -3 \\ 3 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Se deja como ejercicio calcular la matriz elemental de convección $\hat{\mathbf{C}}$.

□

Las componentes del vector \mathbf{d} se calculan de forma análoga a los casos lineal y cuadrático.

$$d_{2i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_{2i-1}(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \phi_{2i-1}(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2(\hat{x}) \underbrace{g(\hat{x})}_{K_{i-1}} d\hat{x} + \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0(\hat{x}) \underbrace{g(\hat{x})}_{K_i} d\hat{x}$$

$$d_{2i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_{2i}(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \phi_{2i}(x) dx = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_3(\hat{x}) \underbrace{g(\hat{x})}_{K_{i-1}} d\hat{x} + \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1(\hat{x}) \underbrace{g(\hat{x})}_{K_i} d\hat{x}$$

Los dos primeros y los dos últimos elementos requieren una modificación a las expresiones anteriores:

$$d_1 = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_0(\hat{x}) \underbrace{g(\hat{x})}_{K_1} d\hat{x} \quad b_2 = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_1(\hat{x}) \underbrace{g(\hat{x})}_{K_1} d\hat{x}$$

$$d_{2N_e+1} = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_2(\hat{x}) \underbrace{g(\hat{x})}_{K_{N_e}} d\hat{x} \quad b_{2N_e+2} = \int_{-1}^1 \hat{\phi}_3(\hat{x}) \underbrace{g(\hat{x})}_{K_{N_e}} d\hat{x}$$

A la hora de construir el sistema lineal a partir de las matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{d} , ecuación (6.6), en el caso de polinomios de Hermite es diferente a lo mostrado en la expresión (6.7). Dado que las condiciones de contorno nos dicen en este caso que el valor de $u_h(x)$ es cero en $x = c$ y $x = d$, sabemos que $u_1 = u_{2N_e+1} = 0$, es decir, la matriz \mathbf{A}_0 se construye eliminando la primera y penúltima fila y columna. De forma análoga, el vector \mathbf{d}_0 se construye a partir del vector \mathbf{d}

eliminando el primer y penúltimo elemento. Del mismo modo, los términos φ_i sólo serán distintos de cero para todos los índices excepto el primero y el penúltimo.

$$\varphi_i = \begin{cases} -k(c) \frac{du(c)}{dx} & i = 1 \\ 0 & 2 \leq i \leq 2N_e \\ k(d) \frac{du(d)}{dx} & i = 2N_e + 1 \\ 0 & i = 2N_e + 2 \end{cases}$$

Observación: Es muy sencillo en MATLAB/OCTAVE obtener el sistema lineal modificado a partir del original (6.6). Así, una vez calculada matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{d} , la solución del sistema lineal modificado será:

```
uh = A([2:end-2 end],[2:end-2 end])\d([2:end-2 end]);
```

□

Observación: Una vez resuelto el sistema lineal, si sólo queremos obtener el valor de la función solución $u(x)$ en los nodos de la partición, basta con desechar los coeficientes u_i que multiplican a las funciones base pares ϕ_{2i} , ya que son sus derivadas primeras. Es decir, el siguiente código en MATLAB/OCTAVE obtiene el vector solución en el nuevo vector \mathbf{uhh} :

```
uhh = zeros(1,Ne+1);
for i=2:Ne
    uhh(i) = uh(2*(i-1));
end
```

□

6.3 Condiciones de contorno

La implementación del método de elementos finitos al problema elíptico 1D visto en la sección anterior suponía una condición de contorno particular, de tipo *Dirichlet* en ambos extremos, e igual a cero. Veamos ahora cómo se modifica el sistema lineal (6.6) para otras condiciones de contorno. Supondremos en esta exposición que se elementos lineales, cuadráticos, cúbicos, etc, pero no polinomios de Hermite. Suponemos que la dimensión del espacio V_h es N .

6.3.1 Condición tipo *Dirichlet* en ambos extremos

Supongamos que las condiciones de contorno son

$$u(c) = g_1 \quad u(d) = g_2$$

y partimos de la ecuación genérica dada por la expresión (6.3). Podemos plantear el problema original mediante un cambio de la función incógnita de tal forma que el nuevo problema sea

equivalente al ya visto con condiciones *Dirichlet* homogéneas. Para ello definimos una nueva función incógnita $w(x) \in H_0^1$ tal que

$$u(x) = w(x) + g(x)$$

donde $g(x)$ puede ser la función lineal¹

$$g(x) = \frac{g_2 - g_1}{d - c}x + \frac{g_1d - g_2c}{d - c}.$$

Sustituyendo en la expresión (6.3) obtenemos el nuevo problema donde la incógnita es la función $w(x)$:

$$\int_c^d awv + \int_c^d bw'v + \int_c^d kw'v' = \int_c^d (f - ag - bg')v - \int_c^d kg'v' \quad (6.11)$$

donde se restringe el problema débil a todas las funciones $v \in V_{h0}$. Así, el problema se reduce a resolver el sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{d}}$$

donde la matriz \mathbf{A} es la misma del problema con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, \mathbf{w} es el vector incógnita con los términos w_i tal que $w_h(x) = \sum_{j=1}^N w_j \phi_j(x)$ y el vector $\tilde{\mathbf{d}}$ tiene por elementos

$$\tilde{d}_i = \int_c^d (f - ag - bg') \phi_i - \int_c^d kg' \phi_i' = d_i - \int_c^d (ag + bg') \phi_i - \int_c^d kg' \phi_i'$$

Al tener condiciones Dirichlet homogéneas, el problema lineal se reduce a

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{w}_0 = \tilde{\mathbf{d}}_0$$

donde se elimina la primera y última ecuación sabiendo que $w_1 = w_N = 0$. Una vez obtenido el vector \mathbf{w} , la solución del problema original será

$$u_i = w_i + \frac{g_2 - g_1}{d - c}x_i + \frac{g_1d - g_2c}{d - c} \quad 1 \leq i \leq N$$

También puede plantearse el problema con el vector incógnita original ya que la expresión (6.11) puede re-escribirse sabiendo que $u_i = w_i + g_i$

$$\int_c^d awv + \int_c^d bu'v + \int_c^d ku'v' = \int_c^d f$$

¹Por conveniencia, a veces se elige una función $g_h(x) = g_1\phi_1 + g_2\phi_N$.

que equivale exactamente al mismo sistema lineal (6.6). Sin embargo, usando las condiciones de contorno, llegamos a un sistema distinto al (6.7)

$$\left. \begin{aligned} a_{22}u_2 + \cdots + a_{2,N-1}u_{N-1} &= d_2 - a_{21}g_1 - a_{2,N}g_2 \\ &\vdots \\ a_{N-1,2}u_2 + \cdots + a_{N-1,N-1}u_{N-1} &= d_{N-1} - a_{N-1,1}g_1 - a_{N-1,N}g_2 \end{aligned} \right\}$$

Es decir, la matriz \mathbf{A}_0 es idéntica al problema homogéneo, y el vector de términos independientes se modifica del siguiente modo:

$$\hat{d}_i = d_i - a_{i1}g_1 - a_{iN}g_2$$

Observese que al haber eliminado la primera y última ecuación, los términos φ_i utilizados son todos nulos, según vimos en la expresión (6.8).

6.3.2 Condición tipo *Neumann* en ambos extremos

Supongamos que las condiciones de contorno son

$$u'(c) = g_1 \quad u'(d) = g_2.$$

En este caso no hay que eliminar la primera y última ecuación, pues u_1 y u_N no son conocidas. Teniendo en cuenta la definición de los términos φ_i vistos en la expresión (6.8), llegamos finalmente al siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1N}u_N &= d_1 - k(c)g_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2N}u_N &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{N-1,1}u_1 + a_{N-1,2}u_2 + \cdots + a_{N-1,N}u_N &= d_{N-1} \\ a_{N1}u_1 + a_{N2}u_2 + \cdots + a_{NN}u_N &= d_N + k(d)g_2 \end{aligned} \right\}$$

Obtenemos por tanto un sistema de N ecuaciones y N incógnitas.

6.3.3 Condición tipo *Robin* en ambos extremos

Supongamos condiciones de contorno tipo *Robin* en ambos extremos:

$$\alpha_1 u(c) + \beta_1 u'(c) = g_1 \quad \alpha_2 u(d) + \beta_2 u'(d) = g_2.$$

Entonces la expresión (6.1) queda

$$\int_c^d auv + \int_c^d bu'v + \int_c^d ku'v' = \int_c^d fv + k(d) \frac{g_2 - \alpha_2 u(d)}{\beta_2} v(d) - k(c) \frac{g_1 - \alpha_1 u(c)}{\beta_1} v(c)$$

Como en las condiciones anteriores, sustituimos v por ϕ_i para $1 \leq i \leq N$. Nótese que $\phi_i(c) = \phi_i(d) = 0$ para $2 \leq i \leq N-1$ y

$$\phi_1(c) = \phi_N(d) = 1.$$

También sabemos que $u(c) = u_1$ y $u(d) = u_N$. Entonces se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1N}u_N &= d_1 - k(c) \frac{g_1 - \alpha_1 u_1}{\beta_1} \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2N}u_N &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{N-1,1}u_1 + a_{N-1,2}u_2 + \cdots + a_{N-1,N}u_N &= d_{N-1} \\ a_{N1}u_1 + a_{N2}u_2 + \cdots + a_{NN}u_N &= d_N + k(d) \frac{g_2 - \alpha_2 u_N}{\beta_2} \end{aligned} \right\}$$

y reordenado

$$\left. \begin{aligned} \left(a_{11} - k(c) \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1N}u_N &= d_1 - k(c) \frac{g_1}{\beta_1} \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2N}u_N &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{N-1,1}u_1 + a_{N-1,2}u_2 + \cdots + a_{N-1,N}u_N &= d_{N-1} \\ a_{N1}u_1 + a_{N2}u_2 + \cdots + \left(a_{NN} + k(d) \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) u_N &= d_N + k(d) \frac{g_2}{\beta_2} \end{aligned} \right\}$$

Por tanto llegamos también a un sistema de N ecuaciones y N incógnitas donde se ha modificado dos elementos de la matriz \mathbf{A} y la primera y última componente del vector \mathbf{d} .

6.3.4 Condiciones mixtas

Las condiciones de contorno vistas anteriormente pueden combinarse. Así, por ejemplo podemos tener condición de tipo *Dirichlet* en un extremo, y *Neumann* en otro extremo:

$$u(c) = g_1 \quad u'(d) = g_2$$

Llegaríamos al siguiente sistema

$$\left. \begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1N}u_N &= d_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2N}u_N &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{N-1,1}u_1 + a_{N-1,2}u_2 + \cdots + a_{N-1,N}u_N &= d_{N-1} \\ a_{N1}u_1 + a_{N2}u_2 + \cdots + a_{NN}u_N &= d_N + k(d) g_2 \end{aligned} \right\}$$

Dado que u_1 es conocido, reordenamos y eliminamos la primera ecuación, por lo que llegamos al siguiente sistema de $N - 1$ ecuaciones y $N - 1$ incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} a_{22}u_2 + \cdots + a_{2N}u_N &= d_2 - a_{21}g_1 \\ &\vdots \\ a_{N-1,2}u_2 + \cdots + a_{N-1,N}u_N &= d_{N-1} - a_{N-1,1}g_1 \\ a_{N2}u_2 + \cdots + a_{NN}u_N &= d_N - a_{N1}g_1 + k(d)g_2 \end{aligned} \right\}$$

Existen multitud de combinaciones posibles: *Dirichlet* y *Robin*, *Neumann* y *Robin*, ...

6.4 Problema bidimensional

Conceptualmente todo lo visto en el problema unidimensional puede aplicarse al problema bidimensional. Para ello usaremos los conceptos vistos en el tema 3. Estudiemos el siguiente problema bidimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} au + \mathbf{b}^t \cdot \nabla u - \operatorname{div}(\mathbf{K}\nabla u) = f, \quad \text{en } D, \\ u|_{\partial D} = 0 \end{array} \right.$$

donde $D \subset \mathbb{R}^2$ y las funciones escalares a y f , y las vectoriales $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dependen de las variables (x, y) . Por simplicidad, supondremos como vemos, condiciones de contorno tipo *Dirichlet homogéneas* en la frontera ∂D . Ya vimos que para abordar el problema pasamos a *formulación variacional*, donde nuestro objetivo es encontrar la función solución $u \in H_0^1(D)$ tal que

$$\int_D (au + \mathbf{b}^t \cdot \nabla u - \operatorname{div}(\mathbf{K}\nabla u)) v = \int_D f v \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

Aplicando las propiedades de derivación y el teorema de la divergencia, podemos desarrollar el tercer sumando del primer miembro

$$\int_D \operatorname{div}(\mathbf{K}\nabla u) v = \int_D (\operatorname{div}(v\mathbf{K}\nabla u) - (\mathbf{K}\nabla u)^t \nabla v) = \int_{\partial D} v (\mathbf{K}\nabla u)^t \mathbf{n} - \int_D (\mathbf{K}\nabla u)^t \nabla v,$$

por lo que la ecuación en la formulación débil queda

$$\int_D auv + \int_D \mathbf{b}^t \cdot \nabla u \cdot v + \int_D (\mathbf{K}\nabla u)^t \nabla v = \int_D f v + \int_{\partial D} v (\mathbf{K}\nabla u)^t \mathbf{n} \quad \forall v \in H_0^1(D) \quad (6.12)$$

Al ser $v \in H_0^1(D)$, el último sumando del segundo miembro se anula. Procedemos ahora del mismo modo que en el caso unidimensional. Es decir, restringimos las posibles soluciones al espacio

funcional V_h de dimensión finita, por ejemplo usando una mallado de triángulos y polinomios de grado uno, expresión (3.6). Así, la solución buscada u_h se puede expresar como una combinación lineal de las N funciones base ϕ_j : $u_h = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j$. Sustituyendo en (6.12) y haciendo $v = \phi_i$ llegamos a un sistema lineal cuyas incógnitas son u_j :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_D a \phi_i \phi_j + \sum_{j=1}^N u_j \int_D \mathbf{b}^t \cdot \phi_i \nabla \phi_j + \sum_{j=1}^N u_j \int_D (\mathbf{K} \nabla \phi_i)^t \nabla \phi_j = \int_D f \phi_i \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

O de forma más compacta

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_h = \mathbf{d} \quad (6.13)$$

donde el vector de incógnitas es $\mathbf{u}_h = (u_1, \dots, u_N)$ y la matriz de coeficientes \mathbf{A} y el término independiente son

$$a_{ij} = \int_D a \phi_i \phi_j + \int_D \mathbf{b}^t \phi_i \nabla \phi_j + \int_D (\mathbf{K} \nabla \phi_i)^t \nabla \phi_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq N$$

$$d_i = \int_D f \phi_i \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

Como en el caso unidimensional, el sistema lineal a resolver debe adaptarse según las condiciones de contorno. En este caso (*Dirichlet homogéneas* en toda la frontera ∂D), deben eliminarse las filas y columnas correspondientes a los nodos de la frontera.

6.4.1 Matrices de masa, convección y rigidez para elementos lineales en triángulos

Al igual que en el caso unidimensional, la matriz de coeficientes del sistema lineal puede expresarse como suma de otras tres matrices llamadas matriz de masas \mathbf{M} , matriz de convección \mathbf{C} y matriz de rigidez \mathbf{R} dependiendo de si intervienen en la integración las funciones base ϕ_i o sus gradientes $\nabla \phi_i$. Si bien el soporte de las funciones base se limita a pocos elementos K_i , dichas matrices ya no serán en general tridiagonales en el caso de funciones base lineales. Su configuración dependerá de la ordenación del vector de nodos.

Si bien no es computacionalmente eficiente, para facilitar la exposición podemos precalcular un conjunto de índices

$$\Gamma_i = \{\mu_1^i, \mu_2^i, \dots, \mu_{M_i}^i\}$$

para cada nodo de la malla $1 \leq i \leq N$. El conjunto Γ_i nos da los índices de los elementos $T_{\mu_j^i}$ a los que el nodo $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ pertenece. El número máximo de elementos a los que puede pertenecer un nodo depende de la calidad de la malla utilizada. Para mallas estándar bidimensionales, este

número no debería de sobrepasar 6: $\max_{1 \leq M_i \leq N} = 6$. Para nodos sobre el contorno ∂D , M_i puede disminuir a 2 ó 3.

Para facilitar la notación, consideremos la tabla de conexiones del siguiente modo

$$\left(\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(j)} \right) \quad 1 \leq j \leq N_e, \quad (6.14)$$

es decir, para cada triángulo j nos da los índice de los nodos que lo conforman. Dicho de otro modo, el triángulo T_j está formado por los nodos $\mathbf{x}_{\lambda_1^{(j)}}$, $\mathbf{x}_{\lambda_2^{(j)}}$ y $\mathbf{x}_{\lambda_3^{(j)}}$.

Suponiendo constante el coeficiente a en la ecuación (6.12), calculamos los elementos de la matriz de masas del siguiente modo:

$$m_{ij} = \int_D \phi_i \phi_j = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{T_k} \phi_i \phi_j = \sum_{k=1}^{M_i} \int_{T_{\mu_k^i}} \phi_i \phi_j$$

Recordando las expresiones (4.10) y (4.11), podemos realizar las integraciones en el triángulo de referencia \hat{T} :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \sum_{k=1}^{M_i} \int_{F_{\mu_k^i}^{-1}(T_{\mu_k^i})} \phi_i \left(F_{\mu_k^i}(\hat{x}, \hat{y}) \right) \phi_j \left(F_{\mu_k^i}(\hat{x}, \hat{y}) \right) \left| \mathbf{J}_{F_{\mu_k^i}}(\hat{x}, \hat{y}) \right| d\hat{x} d\hat{y} \Rightarrow \\ &= 2 \sum_{k=1}^{M_i} \left| T_{\mu_k^i} \right| \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_i^{(\mu_k^i)} \hat{\phi}_j^{(\mu_k^i)} d\hat{x} d\hat{y} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Recordemos que $\left| \mathbf{J}_{F_{\mu_k^i}} \right| = 2 \left| T_{\mu_k^i} \right|$, es decir, es igual a dos veces el área del triángulo μ_k^i . Las funciones base globales ϕ_i son iguales a una de las funciones base $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ o $\hat{\phi}_3$ en los elementos de referencia, según vimos en las expresión (3.5). Para determinar esta correspondencia, usamos la tabla de conexiones (6.14). Así, en la expresión (6.15) las funciones $\hat{\phi}_i^{(j)}$ se relacionan con $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ o $\hat{\phi}_3$ del siguiente modo:

$$\hat{\phi}_i^{(j)} = \begin{cases} \hat{\phi}_1 & si j = \lambda_1^{(j)} \\ \hat{\phi}_2 & si j = \lambda_2^{(j)} \\ \hat{\phi}_3 & si j = \lambda_3^{(j)} \end{cases} \quad (6.16)$$

Finalmente, las integrales que aparecen en la expresión (6.15) se pueden calcular de forma exacta, o aplicando una de las cuadraturas que vimos en los temas anteriores. En este caso, al integrar el producto de dos polinomios de grado uno, necesitamos una cuadratura de grado de

precisión de al menos 2 para que la integración sea exacta. Según vimos, esta cuadratura se consigue utilizando unos pesos $\omega_i = 1/6$ y los nodos en la mitad de las aristas:

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_i^{(k)} \hat{\phi}_j^{(k)} d\hat{x}d\hat{y} = \\ & = \frac{1}{6} \left(\hat{\phi}_i^{(k)} \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \hat{\phi}_j^{(k)} \left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \hat{\phi}_i^{(k)} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \hat{\phi}_j^{(k)} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \hat{\phi}_i^{(k)} \left(0, \frac{1}{2} \right) \hat{\phi}_j^{(k)} \left(0, \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Suponiendo la matriz \mathbf{K} constante e igual a $k\mathbf{I}$, la matriz de rigidez \mathbf{R} se define como

$$r_{ij} = \int_D (\nabla \phi_i)^t \nabla \phi_j$$

y podemos calcular los elementos mediante las derivadas parciales de las funciones base en el triángulo de referencia

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{M_i} \int_{T_{\mu_k^i}} (\nabla \phi_i)^t \nabla \phi_j = 2 \sum_{k=1}^{M_i} |T_{\mu_k^i}| \int_{\hat{T}} \left(\nabla \hat{\phi}_i^{(\mu_k^i)} \right)^t \mathbf{J}_{F_{\mu_k^i}^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_{\mu_k^i}^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_j^{(\mu_k^i)} \quad (6.17)$$

donde los gradientes se calculan como

$$\nabla \hat{\phi}_i^{(\mu_k^i)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\phi}_i^{(\mu_k^i)} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\phi}_i^{(\mu_k^i)} \end{pmatrix}$$

Usando la misma expresión vista para la matriz de masas (6.16) llegamos finalmente a las derivadas parciales de las funciones base $\hat{\phi}_1$, $\hat{\phi}_2$ y $\hat{\phi}_3$. A partir de sus definiciones, expresión (3.5), obtenemos las relaciones necesarias:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\phi}_1 = -1 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\phi}_2 = 1 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\phi}_3 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\phi}_1 = -1 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\phi}_2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\phi}_3 = 1 \end{array} \right\}$$

Suponiendo un vector $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ constante en la ecuación (6.12), podemos calcular fácilmente los elementos de la matriz de convección.

$$c_{ij} = \int_D \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^t \phi_i \nabla \phi_j = \int_D \phi_i \left(b_1 \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) = b_1 \int_D \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + b_2 \int_D \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y}$$

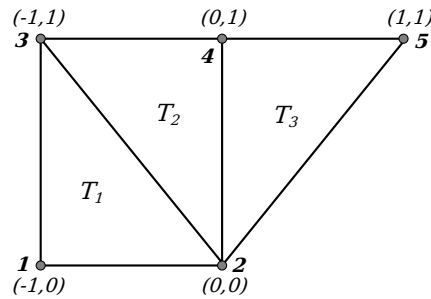


Figura 6.5: Malla de ejemplo para el cálculo de las matrices \mathbf{M} , \mathbf{R} y \mathbf{C} .

Como en las matrices de masas y de rigidez, podemos hacer el cálculo en el triángulo de referencia:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{M_i} \int_{T_{\mu_k^i}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^t \phi_i \nabla \phi_j = 2 \sum_{k=1}^{M_i} |T_{\mu_k^i}| \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^t \hat{\phi}_i^{(\mu_k^i)} \left(\mathbf{J}_{F_{\mu_k^i}^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_j^{(\mu_k^i)}$$

Ejemplo: Para fijar ideas, vamos a calcular algunos elementos de las matrices \mathbf{M} , \mathbf{R} y \mathbf{C} en una malla muy sencilla compuesta sólo por tres triángulos, mostrada en la figura 6.5. Como hemos comentado, el cálculo no será computacionalmente eficiente pues lo haremos usando un bucle por nodos en lugar de por elementos. Más adelante comentaremos cómo implementar el cálculo de forma eficiente.

La tabla de conexiones sería la siguiente (se muestra en dos formatos):

j	$\lambda_1^{(j)}$	$\lambda_2^{(j)}$	$\lambda_3^{(j)}$				
1	1	2	3	T_1	\mathbf{x}_1	\mathbf{x}_2	\mathbf{x}_3
2	2	4	3	T_2	\mathbf{x}_2	\mathbf{x}_4	\mathbf{x}_3
3	2	5	4	T_3	\mathbf{x}_2	\mathbf{x}_5	\mathbf{x}_4

A partir de esta información, construimos los conjuntos de índices $\Gamma_i = \{\mu_1^i, \mu_2^i, \dots, \mu_{M_i}^i\}$, que recordemos nos da para cada nodo el conjunto de triángulos a los que pertenece. Como esta malla es tan sencilla, el número máximo de pertenencia es menor que 6. Corresponde al nodo 2, y es igual a 3. Para facilitar la comprensión, se muestra la tabla de índices, y su significado según nodos y triángulos:

i	μ_1^i	μ_2^i	μ_3^i				
1	1			\mathbf{x}_1	T_1		
2	1	2	3	\mathbf{x}_2	T_1	T_2	T_3
3	1	2		\mathbf{x}_3	T_1	T_2	
4	2	3		\mathbf{x}_4	T_2	T_3	
5	3			\mathbf{x}_5	T_3		

Las matrices \mathbf{M} y \mathbf{R} son siempre simétricas, no así la matriz \mathbf{C} . En este caso todas ellas tienen un tamaño de 5×5 . En primer lugar, teniendo en cuenta el soporte de las funciones base, es fácil saber qué elementos son nulos. Así, el elemento m_{ij} será nulo si el nodo j no pertenece a ningún triángulo del conjunto T_i . Mostramos a continuación la forma de la matriz de masas. Las matrices de rigidez y convección son análogas.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & 0 \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & m_{52} & 0 & m_{54} & m_{55} \end{pmatrix}$$

Calculemos el elemento m_{33} por ejemplo:

$$m_{33} = \sum_{k=1}^{M_3} \int_{T_{\mu_k^3}} \phi_3 \phi_3 = \int_{T_1} \phi_3 \phi_3 + \int_{T_2} \phi_3 \phi_3$$

Observando que el area de los triángulos es siempre la misma e igual a $1/2$. Podemos hacer las integrales en el triángulo de referencia. La matriz del jacobiano es constante y puede salir de las integrales:

$$|\mathbf{J}_{F_i}(\hat{x}, \hat{y})| = 2 |T_i| = 1$$

Luego

$$\begin{aligned} m_{33} &= \int_{\hat{T}} \left(\hat{\phi}_3^{(1)} \hat{\phi}_3^{(1)} + \hat{\phi}_3^{(2)} \hat{\phi}_3^{(2)} \right) = \int_{\hat{T}} \left(\hat{\phi}_3 \hat{\phi}_3 + \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_3 \right) = \\ &= 2 \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_3 = 2 \int_{\hat{T}} \hat{y}^2 = \\ &= \frac{1}{3} \left(\hat{y}^2 \Big|_{(\frac{1}{2}, 0)} + \hat{y}^2 \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} + \hat{y}^2 \Big|_{(0, \frac{1}{2})} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

donde recordemos que $\hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y}$, $\hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}$ y $\hat{\phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}$. De igual forma podemos calcular el resto de elementos. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
 m_{24} &= \sum_{k=1}^{M_2} \int_{T_{\mu_k^2}} \phi_2 \phi_4 = \\
 &= \int_{T_{\mu_1^2}} \phi_2 \phi_4 + \int_{T_{\mu_2^2}} \phi_2 \phi_4 + \int_{T_{\mu_3^2}} \phi_2 \phi_4 = \int_{T_1} \phi_2 \phi_4 + \int_{T_2} \phi_2 \phi_4 + \int_{T_3} \phi_2 \phi_4 = \\
 &= \int_{\hat{T}} \left(\hat{\phi}_2^{(1)} \hat{\phi}_4^{(1)} + \hat{\phi}_2^{(2)} \hat{\phi}_4^{(2)} + \hat{\phi}_2^{(3)} \hat{\phi}_4^{(3)} \right) = \\
 &= \int_{\hat{T}} \left(\hat{\phi}_2 \cdot 0 + \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_3 \right) = \\
 &= \int_{\hat{T}} \hat{\phi}_1 \left(\hat{\phi}_2 + \hat{\phi}_3 \right) = \int_{\hat{T}} (1 - \hat{x} - \hat{y}) (\hat{x} + \hat{y}) = \\
 &= \frac{1}{6} \left((1 - \hat{x} - \hat{y}) (\hat{x} + \hat{y}) \Big|_{(\frac{1}{2}, 0)} + (1 - \hat{x} - \hat{y}) (\hat{x} + \hat{y}) \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} + (1 - \hat{x} - \hat{y}) (\hat{x} + \hat{y}) \Big|_{(0, \frac{1}{2})} \right) = \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

Calculemos ahora los mismos elementos, pero de la matriz de rigidez.

$$\begin{aligned}
 r_{33} &= \sum_{k=1}^{M_3} \int_{T_{\mu_k^3}} (\nabla \phi_3)^t \nabla \phi_3 = \int_{T_1} (\nabla \phi_3)^t \nabla \phi_3 + \int_{T_2} (\nabla \phi_3)^t \nabla \phi_3 = \\
 &= \int_{\hat{T}} \left(\nabla \hat{\phi}_3^{(1)} \right)^t \mathbf{J}_{F_1^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_1^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_3^{(1)} + \int_{\hat{T}} \left(\nabla \hat{\phi}_3^{(2)} \right)^t \mathbf{J}_{F_2^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_2^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_3^{(2)}
 \end{aligned}$$

Las matrices jacobinas se calculan según las expresión (3.4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{F_1^{-1}} &= \begin{pmatrix} x_2^{(1)} - x_1^{(1)} & x_3^{(1)} - x_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} - y_1^{(1)} & y_3^{(1)} - y_1^{(1)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{I} \\
 \mathbf{J}_{F_2^{-1}} &= \begin{pmatrix} x_2^{(2)} - x_1^{(2)} & x_3^{(2)} - x_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} - y_1^{(2)} & y_3^{(2)} - y_1^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_{F_3^{-1}} = \begin{pmatrix} x_2^{(3)} - x_1^{(3)} & x_3^{(3)} - x_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} - y_1^{(3)} & y_3^{(3)} - y_1^{(3)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Según vemos en la expresión (6.17) necesitamos el producto de las matrices por sus traspuestas:

$$\mathbf{J}_{F_1^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_1^{-1}} \right)^t = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{J}_{F_2^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_2^{-1}} \right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{F_3^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_3^{-1}} \right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} r_{33} &= \int_{\hat{T}} (\nabla \hat{\phi}_3)^t \nabla \hat{\phi}_3 + \int_{\hat{T}} (\nabla \hat{\phi}_3)^t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \nabla \hat{\phi}_3 = \\ &= \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_{\hat{T}} 1 + \int_{\hat{T}} 1 = 1 \end{aligned}$$

Calculamos ahora el elemento r_{24} :

$$\begin{aligned} r_{24} &= \sum_{k=1}^{M_2} \int_{T_k^2} (\nabla \phi_2)^t \nabla \phi_4 = \int_{T_1} (\nabla \phi_2)^t \nabla \phi_4 + \int_{T_2} (\nabla \phi_2)^t \nabla \phi_4 + \int_{T_3} (\nabla \phi_2)^t \nabla \phi_4 = \\ &= \int_{\hat{T}} (\nabla \hat{\phi}_2^{(1)})^t \mathbf{J}_{F_1^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_1^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_4^{(1)} + \int_{\hat{T}} (\nabla \hat{\phi}_2^{(2)})^t \mathbf{J}_{F_2^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_2^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_4^{(2)} + \\ &\quad + \int_{\hat{T}} (\nabla \hat{\phi}_2^{(3)})^t \mathbf{J}_{F_3^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_3^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_4^{(3)} = \int_{\hat{T}} (\nabla \hat{\phi}_2)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \int_{\hat{T}} (\nabla \hat{\phi}_1)^t \mathbf{J}_{F_2^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_2^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_2 + \int_{\hat{T}} (\nabla \hat{\phi}_1)^t \mathbf{J}_{F_3^{-1}} \left(\mathbf{J}_{F_3^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_3 = \\ &= \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &\quad = - \int_{\hat{T}} 1 - \int_{\hat{T}} 1 = -1 \end{aligned}$$

Por último, calculamos un elemento de la matriz de convección. Supongamos que $b_1 = b_2 = b$.

$$\begin{aligned}
 c_{31} &= b \sum_{k=1}^{M_1} \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t \hat{\phi}_3^{(\mu_k^3)} \left(\mathbf{J}_{F_3^{-1}}^{\mu_k^3} \right)^t \nabla \hat{\phi}_1^{(\mu_k^3)} = \\
 &= b \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t \hat{\phi}_3^{(1)} \left(\mathbf{J}_{F_1^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_1^{(1)} + b \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t \hat{\phi}_3^{(2)} \left(\mathbf{J}_{F_2^{-1}} \right)^t \nabla \hat{\phi}_1^{(2)} = \\
 &= b \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t \hat{\phi}_3 \nabla \hat{\phi}_1 + b \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t \hat{\phi}_3 \left(\mathbf{J}_{F_2^{-1}} \right)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= b \int_{\hat{T}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t \hat{y} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2b \int_{\hat{T}} \hat{y} = \\
 &= -\frac{b}{3} \left(\hat{y}|_{(\frac{1}{2}, 0)} + \hat{y}|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} + \hat{y}|_{(0, \frac{1}{2})} \right) = -\frac{b}{3} \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{b}{3}
 \end{aligned}$$

□

6.4.2 Función fem_mrc

En el apéndice al final de esto apuntes se suministra el código de la función denominada `fem_mrc`. Esta función calcula las matrices de masas \mathbf{M} , rigidez \mathbf{R} y convección \mathbf{C} , así como el término independiente \mathbf{d} usando funciones base lineales. Para ello hay que suministrar a la rutina una malla 2D de triángulos mediante los vectores de coordenadas \mathbf{x} y \mathbf{y} , así como la conectividad en la matriz TRI. También es necesario dar el valor del término fuente en cada nodo de la malla mediante el vector \mathbf{F} . Para optimizar tiempos en problemas parabólicos donde tras el instante inicial sólo es necesario recalcular el término independiente \mathbf{d} , la rutina cuenta con un parámetro para desactivar el cálculo de las matrices \mathbf{M} , \mathbf{R} y \mathbf{C} . En ese caso hay que tener cuidado en grabar la matrices \mathbf{M} , \mathbf{R} y \mathbf{C} en la primera llamada, pues al calcular sólo el vector \mathbf{d} , la rutina `fem_mrc` inicializa a cero dichas matrices.

Se ha simplificado la ecuación original (6.12) suponiendo constante el factor a , el vector \mathbf{b} y la matriz \mathbf{K} . Estos últimos se suponen de la forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} &= b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{K} &= k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Con estas simplificaciones, podemos calcular la matriz del sistema lineal del siguiente modo:

$$\mathbf{A} = a\mathbf{M} + \mathbf{C} + k\mathbf{R}$$

La rutina también permite calcular la matriz de convección con un vector constante de dos componentes

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

e incluso con funciones del tipo

$$\mathbf{b}(x, y) = \begin{pmatrix} b_1(x, y) \\ b_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Todas las siguientes llamadas a la función son correctas:

```
[M R C D] = fem_mrc(x, y, tri, F, 0, false);
```

```
[M R C D] = fem_mrc(x, y, tri, F, [1;2], false);
```

```
bf = @(x,y) [-y; x];
```

```
[M R C D] = fem_mrc(x, y, tri, F, bf, false);
```

□

Por eficiencia de cálculo, en lugar de hacer un *bucle por nodos* según se vio en el ejemplo de la malla de la figura 6.5, se hace un *bucle por elementos*. De esta forma se calculan los componentes de las matrices en el triángulo de referencia, para luego ensamblarlos en la matriz global del sistema. Así por ejemplo, si en la variable `Mg` hemos calculado la matrix 3×3 de masas en el triángulo de referencia,

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_1^2 & \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 & \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_3 \\ \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 & \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_2^2 & \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_3 \\ \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_1 & \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_3 \hat{\phi}_2 & \iint_{\hat{T}} \hat{\phi}_3^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

siendo `i` el índice que recorre todos los elementos, vamos construyendo la matriz de masas `M` del siguiente modo:

```
M(TRI(i,:), TRI(i,:)) += Mg*2*T;
```

donde `T` es el área del triángulo `i`.

De forma parecida procedemos con las matrices de rigidez y convección. Para ver los detalles, se puede consultar el código de la rutina `fem_mrc` en el apéndice.

6.4.3 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno son algo más difíciles de imponer que en el caso unidimensional. Veamos en primer lugar las condicioens de tipo *Dirichlet*. Tras identificar los nodos de la frontera donde se imponen las condiciones de contorno hay que modificar el sistema lineal original completo (6.13). Por ejemplo, supongamos que el nodo `k` de la frontera tiene una condición tipo *Dirichlet*

$u_k = \bar{u}_k$. En primer lugar hay que modificar todos los términos independientes pasando el valor conocido a la derecha de la igualdad. Entonces los nuevos términos independientes d'_i se calculan del siguiente modo

$$d'_i = d_i - a_{ik}\bar{u}_k \quad 1 \leq i \leq N, i \neq k$$

Además, la matriz del sistema original \mathbf{A} hay que modificarla para no tener en cuenta las condiciones de contorno conocidas. En lugar de reducir el tamaño, por facilidad de implementación, y para tener la solución en el vector \mathbf{u}_h resultado del sistema lineal, modificamos la matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{d} del siguiente modo:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq k \quad y \quad j \neq k \\ 0 & i = k \quad o \quad j = k \quad y \quad i \neq j \\ 1 & i = j = k \end{cases}$$

y

$$d'_k = \bar{u}_k$$

Estas modificaciones se superponen tantas veces como nodos tengan una condición tipo *Dirichlet*.

Ejemplo: El siguiente código modifica la matriz \mathbf{A} y término independiente \mathbf{d} en aquellos nodos con coordenada x igual a -1 ó 1, y coordenada y igual a 0 ó 1. El valor de la condición de contorno viene dado por la función $g(x, y)$.

```
%Condicion de contorno Dirichlet
front_D = find(x==-1 | x==1 | y== 0 | y==1 );
for i=1:N
    for k=1:length(front_D)
        j = front_D(k);
        d(i) -= g(x(j), y(j))*A(i,j);
    endfor
endfor

A0 = A;
A0(front_D,:) = 0;
A0(:,front_D) = 0;
d(front_D) = g(x(front_D),y(front_D));

for j=1:length(front_D)
    i = front_D(j);
    A0(i,i) = 1;
endfor

% Resolver sistema lineal
uh = A0\d;
```

□

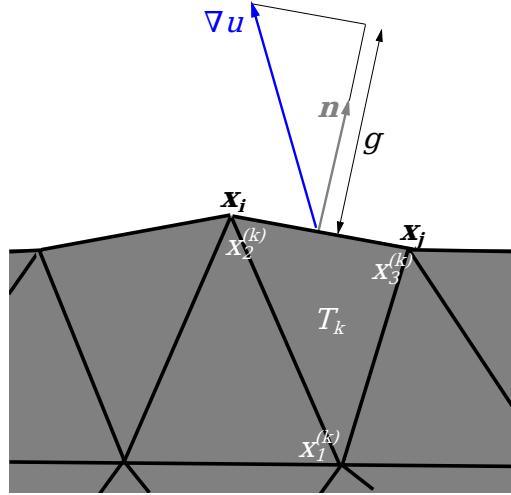


Figura 6.6: Ejemplo de una condición de contorno tipo *Neumann* en una malla bidimensional aplicada en la arista del triángulo de índice k que une los nodos \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j , correspondientes con los nodos en la numeración local del elemento $\mathbf{x}_2^{(k)}$ y $\mathbf{x}_3^{(k)}$.

Las condiciones de contorno de tipo *Neumann* son más fáciles de imponer, pues sólo hay que modificar algunos elementos del vector \mathbf{d} . Así, supongamos como indica la figura 6.6 que imponemos una condición tipo *Neumann* en la arista de un triángulo de índice k perteneciente a la frontera del dominio. Los nodos en numeración global de esa arista son \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j y se corresponden con los nodos $\mathbf{x}_2^{(k)}$ y $\mathbf{x}_3^{(k)}$ en numeración local de dicho triángulo. La condición consiste en especificar la proyección del gradiente del campo solución u sobre el vector normal \mathbf{n} a la arista, es decir,

$$(\nabla u)^t \cdot \mathbf{n} = g(x, y)$$

Representando por L a la arista que une los nodos \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j , esta condición de contorno modificará a los elementos i y j del vector \mathbf{d} del siguiente modo

$$\left. \begin{aligned} d'_i &= d_i + \int_L \phi_2^{(k)} g \\ d'_j &= d_j + \int_L \phi_3^{(k)} g \end{aligned} \right\}$$

Debemos pues realizar dos integrales sobre la arista. Las funciones base o de forma recordemos que son lineales y valen 1 en uno de los nodos del triángulo, y 0 en los otros dos. Calculemos la primera integral a modo de ejemplo. Para ello suponemos que la función $g(x, y)$ también es lineal en los triángulos. Llamamos g_i y g_j a su valor en los nodos i y j . Llamando ds al elemento

infinitesimal de longitud y s_{ij} a la longitud de la arista obtenemos

$$\int_L \phi_2^{(k)} g = \int_L \phi_2^{(k)} (g_i \phi_2^{(k)} + g_j \phi_3^{(k)}) = \int_L \frac{s}{s_{ij}} \left[g_i \frac{s}{s_{ij}} + g_j \left(1 - \frac{s}{s_{ij}} \right) \right] ds$$

y haciendo el cambio de variable $s = \varphi s_{ij}$

$$\int_L \phi_2^{(k)} g = s_{ij} \int_0^1 \varphi [g_i \varphi + g_j (1 - \varphi)] d\varphi = s_{ij} \left(\frac{1}{3} g_i + \frac{1}{6} g_j \right)$$

Procediendo de igual forma para el índice j , finalmente obtenemos cómo modificar los elementos del vector \mathbf{d} :

$$\left. \begin{aligned} d'_i &= d_i + s_{ij} \left(\frac{1}{3} g_i + \frac{1}{6} g_j \right) \\ d'_j &= d_j + s_{ij} \left(\frac{1}{3} g_j + \frac{1}{6} g_i \right) \end{aligned} \right\}$$

Nótese que en el caso de que el gradiente de la función solución u sea normal a la frontera, el vector \mathbf{d} permanece inalterado, ya que $g = 0$.

Por último supongamos que en los nodos pertenecientes a la frontera $\Gamma \subset \partial D$ tenemos una condición de contorno de tipo *Robin*:

$$\alpha(x, y) u(x, y) + (\mathbf{K} \nabla u)^t \cdot \mathbf{n} = g(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma$$

donde las funciones α y g son conocidas, no así el valor de u . El vector \mathbf{n} es un vector unitario normal al contorno ∂D . En problemas de transferencia de calor con convección es más habitual ver esta condición como

$$(\mathbf{K} \nabla u)^t \cdot \mathbf{n} = htc (u_{fluido} - u),$$

es decir, es una condición de convección donde el flujo de calor depende del producto de un coeficiente de transferencia de calor (htc) por la diferencia entre la temperatura del fluido menos la temperatura de pared. En ese caso podemos relacionar ambas formulaciones de la condición de contorno del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \alpha &= htc \\ g &= htc \cdot u_{fluido} \end{aligned}$$

De la condición de contorno podemos despejar la proyección del gradiente sobre el vector normal:

$$(\mathbf{K} \nabla u)^t \cdot \mathbf{n} = g - \alpha u$$

Supongamos el mismo caso visto en la figura 6.6, pero esta vez imponemos una condición *Robin* en los nodos i y j . En el caso de que el campo α sea nulo, recuperamos la condición de *Neumann*. De no ser así, veamos cómo modificar el sistema lineal original

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{d}$$

para imponer dicha condición. Nos situamos en el triángulo T_k y en su vértice $\mathbf{x}_2^{(k)}$ igual al nodo \mathbf{x}_i . Entonces el elemento i del vector \mathbf{d} hay que modificarlo del siguiente modo:

$$d_i'' = d_i + \int_L \phi_i (\mathbf{K} \nabla u)^t \mathbf{n} = d_i + \int_L \phi_i (g - \alpha u) = d_i + \int_L \phi_i g - \int_L \phi_i \alpha u$$

Como en la condición de *Neumann*, modificamos el elemento i del vector \mathbf{d} del siguiente modo:

$$d_i' = d_i + \int_L \phi_i g = d_i + s_{ij} \left(\frac{1}{3} g_i + \frac{1}{6} g_j \right)$$

El último sumando $\int_L \phi_i \alpha u$ modificará elementos de la matriz \mathbf{A} . Calculando la integral obtenemos

$$\int_L \phi_i \alpha u = \int_L \phi_i (\alpha_i \phi_i + \alpha_j \phi_j) (u_i \phi_i + u_j \phi_j)$$

Luego la matriz \mathbf{A} se debe modificar así

$$\left. \begin{aligned} a'_{ii} &= a_{ii} + \int_L (\alpha_i \phi_i^3 + \alpha_j \phi_i^2 \phi_j) \\ a'_{ij} &= a_{ij} + \int_L (\alpha_i \phi_i^2 \phi_j + \alpha_j \phi_i \phi_j^2) \end{aligned} \right\}$$

Calculamos las integrales como antes, utilizando el cambio de variable $s = \varphi s_{ij}$. Así, la primera integral queda

$$\begin{aligned} \int_L (\alpha_i \phi_i^3 + \alpha_j \phi_i^2 \phi_j) &= \int_L \left[\alpha_i \left(1 - \frac{s}{s_{ij}} \right)^3 + \alpha_j \left(1 - \frac{s}{s_{ij}} \right)^2 \left(\frac{s}{s_{ij}} \right) \right] ds = \\ &= s_{ij} \alpha_i \int_0^1 (1 - \varphi)^3 d\varphi + s_{ij} \alpha_j \int_0^1 (1 - \varphi)^2 \varphi d\varphi = s_{ij} \left(\frac{1}{4} \alpha_i + \frac{1}{12} \alpha_j \right) \end{aligned}$$

Y la otra integral

$$\begin{aligned} \int_L (\alpha_i \phi_i^2 \phi_j + \alpha_j \phi_i \phi_j^2) &= \int_L \left[\alpha_i \left(1 - \frac{s}{s_{ij}} \right)^2 \frac{s}{s_{ij}} + \alpha_j \left(1 - \frac{s}{s_{ij}} \right) \left(\frac{s}{s_{ij}} \right)^2 \right] ds = \\ &= s_{ij} \alpha_i \int_0^1 (1 - \varphi)^2 \varphi d\varphi + s_{ij} \alpha_j \int_0^1 (1 - \varphi) \varphi^2 d\varphi = s_{ij} \left(\frac{1}{12} \alpha_i + \frac{1}{12} \alpha_j \right) \end{aligned}$$

Luego los elementos de la matriz \mathbf{A} quedan del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} a'_{ii} &= a_{ii} + \frac{1}{12}s_{ij}(3\alpha_i + \alpha_j) \\ a'_{ij} &= a_{ij} + \frac{1}{12}s_{ij}(\alpha_i + \alpha_j) \end{aligned} \right\}$$

Procediendo de forma idéntica en el nodo j , se lista a continuación las modificaciones del vector \mathbf{d} y de la matriz \mathbf{A} debidas a la condición de contorno aplicada en la arista s_{ij} :

$$\left. \begin{aligned} d'_i &= d_i + s_{ij} \left(\frac{1}{3}g_i + \frac{1}{6}g_j \right) \\ d'_j &= d_j + s_{ij} \left(\frac{1}{3}g_j + \frac{1}{6}g_i \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{ii} &= a_{ii} + \frac{1}{12}s_{ij}(3\alpha_i + \alpha_j) \\ a'_{ij} &= a_{ij} + \frac{1}{12}s_{ij}(\alpha_i + \alpha_j) \\ a'_{ji} &= a_{ji} + \frac{1}{12}s_{ij}(\alpha_i + \alpha_j) \\ a'_{jj} &= a_{jj} + \frac{1}{12}s_{ij}(\alpha_i + 3\alpha_j) \end{aligned} \right\}$$

6.4.4 Función fem_robin

En el apéndice se da el código de la función denominada `fem_robin`, con la que podemos imponer de una forma muy cómoda condiciones de tipo *Robin* o *Neumann*. Para ello debemos suministrar los datos del mallado con los vectores \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{TRI} , así como las funciones α y g . Para dichas funciones se dan los valores en todos los nodos de la malla en los vectores \mathbf{G} y \mathbf{ALPHA} . Sus componentes serán cero para todos los nodos interiores, y distinto de cero en aquellos nodos de la frontera donde queremos imponer la condición de contorno. Recordemos que en el caso de que \mathbf{ALPHA} sea cero, estaremos imponiendo una condición de tipo *Neumann*. La rutina devuelve la matriz \mathbf{AR} y el vector \mathbf{DR} , que debemos sumar a la matriz \mathbf{A} y al vector \mathbf{d} respectivamente.

6.4.5 Cálculo del gradiente de un campo

En ocasiones necesitamos calcular el vector gradiente de un campo dado, por ejemplo la solución u_h de un problema elíptico.

$$\nabla u_h = \frac{\partial u_h}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u_h}{\partial y} \mathbf{j}$$

Como las funciones base ϕ_i sólo son derivables en el interior de los triángulos, pero no en los nodos del mallado, debemos entonces calcular la proyección del campo de gradientes en los nodos. Llamemos $w = \partial u_h / \partial x$. Al proyectar esta función encontraremos $w_h \in V_h$. Procedemos de forma parecida a la formulación débil de la ecuación diferencial. Es decir, buscamos la función w_h tal que para toda función $v_h \in V_h$ cumpla

$$(w_h, v_h)_{L^2} = (w, v_h)_{L^2}$$

Luego

$$\int_D w_h v_h = \int_D \frac{\partial u_h}{\partial x} v_h \quad \forall v_h \in V_h \quad (6.18)$$

Podemos expresar las u_h , su derivada parcial y la función incógnita w_h como combinaciones lineales de las funciones base ϕ_j :

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j \Rightarrow \frac{\partial u_h}{\partial x} = \sum_{i=j}^N u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x}$$

$$w_h = \sum_{j=1}^N w_j \phi_j$$

Entonces, sustituyendo en (6.18)

$$\sum_{j=1}^N w_j \int_D \phi_j \phi_i = \sum_{j=1}^N u_j \int_D \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i$$

Obtenemos por tanto un sistema lineal

$$\mathbf{M}\mathbf{w} = \mathbf{C}_x \mathbf{u}$$

donde el vector de incógnitas \mathbf{w} viene multiplicado por la matriz de masas \mathbf{M} , y el término independiente a su vez es el producto de una nueva matriz \mathbf{C}_x por el vector del campo sobre el que queremos calcular el gradiente. Los elementos de dicha matriz se calculan como

$$(\mathbf{C}_x)_{ij} = \int_D \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x}$$

Del mismo modo, para obtener la derivada parcial según la dirección y resolvemos el sistema lineal

$$\mathbf{M}\mathbf{w} = \mathbf{C}_y \mathbf{u}$$

donde la matriz que multiplica al campo \mathbf{u} es ahora

$$(\mathbf{C}_y)_{ij} = \int_D \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y}$$

Para realizar estos cálculos de forma sencilla, en el apéndice se da el código de la rutina `fem_gradient`. Esta rutina devuelve en los vectores \mathbf{U}_x y \mathbf{U}_y los valores proyectados en los nodos de las derivadas parciales del campo \mathbf{U} . Como parámetros de entrada hay que dar las coordenadas de la malla en los vectores \mathbf{X} e \mathbf{Y} , así como la conectividad en el vector `TRI` y el campo \mathbf{U} .

6.5 Acotación de errores

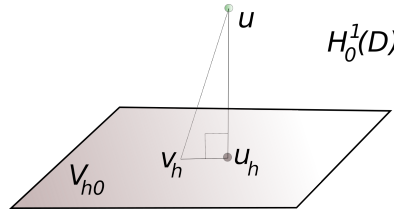
Observación: Ya hemos visto que el operador $A : H_0^1(D) \times H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ definido en (5.12) es *bilineal, continuo y coercitivo*. Además, en el contexto de elementos finitos que hemos visto en este capítulo, también es *simétrico*. Entonces A define un *producto escalar* en $H_0^1(D)$ y por tanto también en $V_{h0} \subset H_0^1(D)$. Además, este producto escalar define una *norma* en estos espacios vectoriales:

$$\|f\|_A = \sqrt{A(f, f)}, \quad f \in H_0^1(D)$$

□

Proposición: En estas hipótesis $u - u_h$ es ortogonal al subespacio V_{h0} , es decir

$$A(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_{h0}$$



□

Demostración: Sea $v_h \in V_{h0} \subset H_0^1(D)$. Entonces

$$\left. \begin{aligned} A(u, v_h) &= L(v_h) \\ A(u_h, v_h) &= L(v_h) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A(u - u_h, v_h) = 0$$

□

Proposición: En estas hipótesis

$$\|u - u_h\|_A = \min_{v_h \in V_{h0}} \|u - v_h\|_A$$

□

Demostración: Sea $v_h \in V_{h0}$,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_A^2 &= A(u - u_h, u - u_h) = A(u - u_h + u_h - u_h, u - u_h + u_h - u_h) = \\ &= A(u - u_h, u - u_h) + \underbrace{2A(u - u_h, u_h - v_h)}_0 + A(u_h - v_h, u_h - v_h) = \\ &\|u - u_h\|_A^2 + \|u_h - v_h\|_A^2 \geq \|u - u_h\|_A^2 \end{aligned}$$

□

Teorema: En estas hipótesis y suponiendo $h \leq 1$, entonces siendo m el grado de los polinomios del espacio V_h , $\exists K > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_{L^2(D)} \leq K \cdot h^{m+1} \|u^{(m+1)}\|_{L^2(D)}$$

$$\|u' - u'_h\|_{L^2(D)} \leq K \cdot h^m \|u^{(m+1)}\|_{L^2(D)}$$

□

Observación: El análisis de error que hemos hecho para este problema concreto puede hacerse exactamente igual (siempre que A verifique las hipótesis) para cualquier problema elíptico en cualquier dimensión. La cota de error que se obtiene es la misma.

□

Observación: Consideremos los dos problemas elípticos siguientes

$$\begin{cases} au - ku'' = f & \text{en } D = (c, d) \\ u(c) = u(d) = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

$$\begin{cases} au - ku'' = f_h & \text{en } D = (c, d) \\ u(c) = u(d) = 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

donde $a \geq 0$ y $k > 0$ son constantes, $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2(D)$ y $f_h \in V_h \subset H^1(D)$ tal que $f_h(x_i) = f(x_i)$ para todo nodo x_i del mallado D_h . Sean $u_1 \in H_0^1(D)$ y $u_2 \in H_0^1(D)$ las soluciones respectivas de los problemas variacionales (6.19) y (6.20). Sea $u_{h2} \in V_{h0}$ la solución por elementos finitos de (6.20). Entonces existen unas constantes positivas K y K' tales que

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1(D)} \leq K \|f^{(m+1)}\|_{L^2(D)} h^{m+1}$$

$$\|u_1 - u_{h2}\|_{H^1(D)} \leq \left(K \|f^{(m+1)}\|_{L^2(D)} + K' \|u^{(m+1)}\|_{L^2(D)} \right) h^{m+1} = K'' h^{m+1}$$

□

Demostración: Si escribimos la formulación variacional de ambos problemas, tenemos que si $u_1 \in H_0^1(D)$ es solución de (6.19) y $u_2 \in H_0^1(D)$ es solución de (6.20), verifican

$$A(u_1, v) = L_1(v) \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

$$A(u_2, v) = L_2(v) \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

donde

$$\begin{aligned} A &: H_0^1(D) \times H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R} \\ A(u, v) &= a \int_c^d uv + k \int_c^d u'v' \\ L_1 &: H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R} & L_2 &: H_0^1(D) \rightarrow \mathbb{R} \\ L_1(v) &= \int_c^d fv & L_2(v) &= \int_c^d f_h v \end{aligned}$$

Por tanto, si $v \in H_0^1(D)$,

$$A(u_1 - u_2, v) = L_1(v) - L_2(v) = \int_c^d (f - f_h) v$$

y tomando $v = u_1 - u_2$,

$$\begin{aligned} \alpha \|u_1 - u_2\|_{H^1(D)}^2 &\leq A(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \int_c^d (f - f_h)(u_1 - u_2) \leq \\ &\leq \|f - f_h\|_{L^2(D)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(D)} \leq \|f - f_h\|_{L^2(D)} \|u_1 - u_2\|_{H^1(D)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_{H^1(D)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f - f_h\|_{L^2(D)} \leq \frac{C}{\alpha} h^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^2(D)} \end{aligned}$$

Por otro lado, sean $u_{h1}, u_{h2} \in V_{h0}$ las soluciones por elementos finitos de (6.19) y (6.20) respectivamente, es decir,

$$A(u_{h1}, v_h) = L_1(v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0}$$

$$A(u_{h2}, v_h) = L_2(v_h) \quad \forall v_h \in V_{h0}$$

Al igual que antes,

$$\|u_{h1} - u_{h2}\|_{H^1(D)} \leq \frac{C}{\alpha} h^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^2(D)}$$

La ventaja de plantear el problema en (6.20) es que

$$L_2(\phi_j) = \int_c^d f_h \phi_j = \int_c^d \sum_{i=0}^{N+1} f_i \phi_i \phi_j = \sum_{i=0}^{N+1} f_i \int_c^d \phi_i \phi_j = \sum_{i=0}^{N+1} f_i m_{ji} = \left(\mathbf{M} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N+1} \end{pmatrix} \right)_j$$

Y además

$$\begin{aligned} \|u_j - u_{hj}\|_{L^2(D)} &\leq Kh^{m+1} \|u^{(m+1)}\|_{L^2(D)} \quad j = 1, 2 \\ \|u_1 - u_{h2}\|_{L^2(D)} &\leq \|u_1 - u_2\|_{L^2(D)} + \|u_2 - u_{h2}\|_{L^2(D)} \leq \\ &\leq \|u_1 - u_2\|_{H^1(D)} + \|u_2 - u_{h2}\|_{L^2(D)} \leq \\ &\leq \frac{C}{\alpha} h^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{L^2(D)} + Kh^{m+1} \|u^{(m+1)}\|_{L^2(D)} \end{aligned}$$

□

6.6 Ejercicios

1. Sea $D = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Calcular la solución analítica del problema

$$\begin{cases} u - u'' = f, & \text{en } D, \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases}$$

donde $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = \sin(\pi x)$. Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución utilizando un mallado $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ con elementos de tamaño h utilizando $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ y $\frac{1}{80}$ y construyendo V_h con polinomios de grado 1. Calcular el error en cada caso y dibujar una gráfica de error (h frente al error).

2. Repetir el ejercicio 1 construyendo el espacio V_h con polinomios de grado 2.
3. Repetir el ejercicio 1 construyendo el espacio V_h con polinomios de Hermite utilizando dos nodos en cada elemento K_i , $1 \leq i \leq N_e$
4. Sea $D = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Calcular la solución analítica del problema

$$\begin{cases} u - ku'' = f, & \text{en } D, \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases}$$

donde $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 1$ para todo $x \in (0, 1)$. Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución utilizando un mallado $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ con elementos de tamaño h y construyendo V_h con polinomios de grado 1 y 2. Elegir el valor de h adecuado para $k = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$.

5. Repetir el ejercicio 4 construyendo para cada valor de k un mallado D_h no equiespaciado.
6. Sea $D = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Calcular la solución analítica del problema

$$\begin{cases} u - ku'' = f, & \text{en } D, \\ u(0) = 0; u'(1) = 1, \end{cases}$$

donde $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 1$ para todo $x \in (0, 1)$. Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución construyendo adecuadamente un mallado $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ y el espacio V_h con polinomios de grado 1 y 2, para $k = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$.

7. Se considera el siguiente problema elíptico en $D = (0, 2) \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u - u'' = f, & \text{en } D, \\ u'(0) = 0 = u'(2), \end{cases}$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución construyendo adecuadamente un mallado $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ y el espacio V_h con polinomios de grado 1 y 2.

8. Sea $D = (-1, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_D = \{(x, y) \in \partial D : x + 2y > 1\}$ y $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$. Se considera el siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} u - k\Delta u = f, & \text{en } D, \\ u|_{\Gamma_D} = g; k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = 0, \end{cases}$$

donde $k = 10^{-2}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, y) = 1 - x^2$, y $g : \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) = 4x + 4$. Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución construyendo adecuadamente un mallado $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ y el espacio V_h de elementos finitos lineales.

9. Sea $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1 \right\} - [-1, 1] \times [0, 1]$, $\Gamma_D = \left\{ (x, y) \in \partial D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \right\}$ y $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$. Se considera el siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = 2, & \text{en } D, \\ u|_{\Gamma_D} = 0; \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N} = 0. \end{cases}$$

Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución construyendo adecuadamente un mallado $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ y el espacio V_h de elementos finitos lineales.

10. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < 0, x^2 + y^2 < 9\}$. Se considera el siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } D, \\ u(x, 0) = 12x, & x \in (0, 3), \\ u(0, y) = 0, & y \in (-3, 0), \\ u(x, y) = 4x^2, & (x, y) \in \partial D, x^2 + y^2 = 9, \end{cases}$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, y) = 4000e^{-10((x-1)^2 + (y+1)^2)}$. Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución construyendo adecuadamente un mallado $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ y el espacio V_h de elementos finitos lineales.

11. Sea $D = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \partial D : x + y < \frac{1}{2}\}$ y $\Gamma_2 = \partial\Omega - \Gamma_1$. Se considera el siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} \mathbf{b} \cdot \nabla u - k\Delta u = 0, & \text{en } D, \\ u|_{\Gamma_1} = 1, u|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases}$$

donde $k > 0$ es una constante y $\mathbf{b} = (2, 1)$. Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución construyendo adecuadamente un mallado $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ y el espacio V_h de elementos finitos lineales. Resolver para $k = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ y 10^{-3} .

12. Se considera el siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} bu' - ku'' = 0, & \text{en } D = (0, 1), \\ u(0) = 0; u(1) = 1, \end{cases}$$

con $b, k > 0$ constantes. Sea $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ una partición de D formada por elementos de tamaño h y sea V_h el espacio de elementos finitos lineales asociado a D_h . Se pide:

(a) Escribir la formulación de elementos finitos del problema y detallar la matriz A tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = 0,$$

siendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$.

(b) Escribir el sistema de ecuaciones lineales resultante en la forma

$$a_1(p) u_{i+1} + a_2(p) u_i + a_3(p) u_{i-1} = 0, \quad 1 \leq i \leq N,$$

siendo $p = \frac{bh}{2k}$.

(c) Ensayando soluciones de la forma $u_i = r^i$, demostrar que la solución general del sistema se puede expresar mediante

$$u_i = c_1 r_1^i + c_2 r_2^i.$$

(d) Calcular los valores de c_1 y c_2 para que la solución verifique las condiciones de contorno.

(e) Razonar cómo se comporta la solución dependiendo de si $p < 1$ ó $p > 1$. Comparar con la solución analítica del problema.

(f) Resolver utilizando el método de elementos finitos construyendo adecuadamente una partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de elementos no equiespaciados y el espacio de elementos finitos lineales V_h . Para construir D_h se sugiere utilizar el resultado del apartado (e).

13. Se considera el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} u - ku'' = 0, & \text{en } D = (0, 1), \\ u(0) = 0; u(1) = 1, \end{cases}$$

con $k > 0$ constante. Sea $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ una partición de D formada por elementos de tamaño h y sea V_h el espacio de elementos finitos lineales asociado a D_h . Se pide:

- (a) Escribir la formulación de elementos finitos del problema y detallar la matriz A tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

siendo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$.

- (b) Escribir el sistema de ecuaciones lineales resultante en la forma

$$u_{i+1} + a(p)u_i + u_{i-1} = 0, \quad 1 \leq i \leq N,$$

siendo $p = \frac{h^2}{k}$.

- (c) Ensayando soluciones de la forma $u_i = r^i$, demostrar que la solución general del sistema se puede expresar mediante

$$u_i = c_1 r_1^i + c_2 r_2^i.$$

- (d) Calcular los valores de c_1 y c_2 para que la solución verifique las condiciones de contorno.
 (e) Razonar como se comporta la solución dependiendo de si $p < 6$ ó $p > 6$. Comparar con la solución analítica del problema.
 (f) Resolver utilizando el método de elementos finitos construyendo adecuadamente una partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de elementos no equiespaciados y el espacio de elementos finitos lineales V_h . Para construir D_h se sugiere utilizar el resultado del apartado (e).

14. Se considera el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} u + \sqrt{k}u' - ku'' = f(x), & \text{en } D = (0, 2) \\ u(0) + \sqrt{k}u'(0) = g_0; u(2) = g_1 \end{cases}$$

con $k > 0$ constante, $f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) + \cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$, $g_0 = 1$ y $g_1 = \sin\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right)$. Se pide:

- (a) Comprobar que la solución del problema es $u(x) = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)$.
 (b) Resolver utilizando el método de elementos finitos construyendo adecuadamente una partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de elementos equiespaciados y el espacio de elementos finitos lineales V_h .
 (c) Resolver utilizando el método de elementos finitos construyendo adecuadamente una partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de elementos equiespaciados y el espacio de elementos finitos cuadráticos V_h .

15. Se considera el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} u - ku'' = f(x), & \text{en } D = (0, 1) \\ u(0) + u'(0) = g_0; u(1) = 0 \end{cases}$$

con $k = \frac{2}{9\pi^2}$, $f(x) = \sin(3\pi x)$, $g_0 = \pi$. Se pide:

- (a) Comprobar que la solución del problema es $u(x) = \frac{1}{1+9\pi^2k} \sin(3\pi x)$.
 - (b) Resolver utilizando el método de elementos finitos construyendo adecuadamente una partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de elementos equiespaciados y el espacio de elementos finitos lineales V_h .
16. Resolver el mismo problema anterior cambiando las condiciones de contorno: $u(0) + u'(0) = g_0; u'(1) = g_1 = -\pi$.

17. Se considera el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} u' - ku'' = 1, & \text{en } D = (0, 1) \\ u(0) = 0; u'(1) = 1 \end{cases}$$

Se pide:

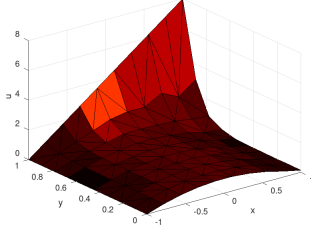
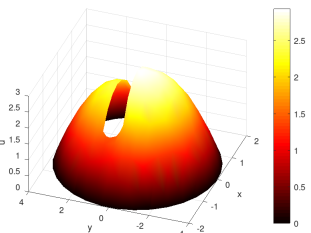
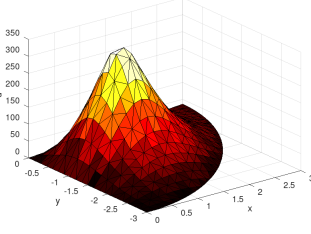
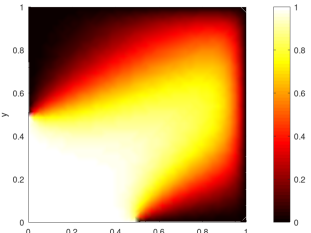
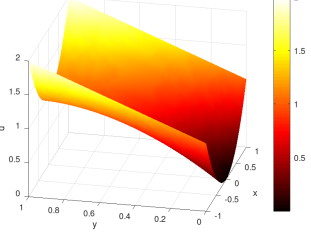
- (a) Comprobar que la solución del problema es $u(x) = x$.
 - (b) Resolver utilizando el método de elementos finitos construyendo adecuadamente una partición $D_h = \{K_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ de elementos equiespaciados y el espacio de elementos finitos lineales V_h .
18. Sea $D = (-1, 1) \times (0, 1)$. Se considera el siguiente problema elíptico:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } D, \\ u|_{\partial} = g \end{cases}$$

donde $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x, y) = x^2 + y$. Escribir la formulación de elementos finitos del problema y calcular su solución construyendo adecuadamente un mallado $D_h = \{T_i\}_{1 \leq i \leq N_e}$ y el espacio V_h de elementos finitos lineales.

19. Repetir el ejercicio anterior imponiendo condición tipo *Dirichlet* $u = 0$ en el lado $y = 0$, condiciones *Neumann* en el resto de lados, con $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 1$ en el lado $y = 1$, y $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$ en los dos lados restantes.
20. Sea el mismo dominio del ejercicio 18 en unidades de metros. Resolver la misma ecuación diferencial imponiendo $u = 200 K$ en $y = 0$, condiciones adiabáticas en los lados verticales, y una condición de convección en el lado de $y = 1$ siendo el coeficiente de transferencia de calor $htc = 1000 W/(m^2K)$, $u_{fluido} = 500 K$ y una conductividad térmica de $k = 300 W/(m \cdot K)$. ¿Es posible resolver el problema de forma analítica?

6.7 Soluciones problemas 2D

Número	Ecuación y C.C.	Comentario	Solución
6.8	$\begin{cases} u - k\Delta u = f & \text{en } D \\ u _{\Gamma_D} = g; k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} _{\Gamma_N} = 0 \end{cases}$	$D = (-1, 1) \times (0, 1), k = 10^{-2}$ $\Gamma_D = \{(x, y) \in \partial D : x + 2y > 1\}$ $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$ $f(x, y) = 1 - x^2$ $g(x, y) = 4x + 4$	
6.9	$\begin{cases} -\Delta u = 2, & \text{en } D \\ u _{\Gamma_D} = 0; \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} _{\Gamma_N} = 0 \end{cases}$	$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1 \right\} - [-1, 1] \times [0, 1]$ $\Gamma_D = \left\{ (x, y) \in \partial D : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \right\}$ $\Gamma_N = \partial\Omega - \Gamma_D$	
6.10	$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } D \\ u(x, 0) = 12x, & x \in (0, 3) \\ u(0, y) = 0, & y \in (-3, 0) \\ u(x, y) = 4x^2, & \Gamma \end{cases}$	$D = \{x > 0, y < 0, x^2 + y^2 < 9\}$ $\Gamma = \{(x, y) \in \partial D, x^2 + y^2 = 9\}$ $f(x, y) = \alpha e^{-10((x-1)^2 + (y+1)^2)}$ $\alpha = 4000$	
6.11	$\begin{cases} \mathbf{b} \cdot \nabla u - k\Delta u = 0, & \text{en } D \\ u _{\Gamma_1} = 1, u _{\Gamma_2} = 0, \end{cases}$	$D = (0, 1) \times (0, 1)$ $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \partial D : x + y < \frac{1}{2}\}$ $\Gamma_2 = \partial\Omega - \Gamma_1$ $\mathbf{b} = (2, 1), k = 10^{-1}$	
6.18	$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } D \\ u _{\partial} = g \end{cases}$	$D = (-1, 1) \times (0, 1)$ $g(x, y) = x^2 + y$	

<p>6.19</p>	$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{en } D \\ u _{\Gamma_1} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} _{\Gamma_2} &= 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} _{\partial D - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} D &= (-1, 1) \times (0, 1) \\ \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \partial D : y = 0\} \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) \in \partial D : y = 1\} \end{aligned}$	
<p>6.20</p>	$\begin{aligned} k\Delta u &= 0, \quad \text{en } D \\ u _{\Gamma_1} &= 200 \text{ K} \\ k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} _{\Gamma_2} &= htc(u_{fluido} - u) \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} _{\partial D - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} D &= (-1, 1) \times (0, 1) \\ \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \partial D : y = 0\} \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) \in \partial D : y = 1\} \\ htc &= 1000 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}) \\ u_{fluido} &= 500 \text{ K} \\ k &= 300 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \end{aligned}$	

Solución analítica 6.20: No hay gradiente en dirección x . En la dirección y la derivada segunda es 0, por tanto

$$u(x, y) = 200 + \alpha y$$

siendo α una constante. La condición de contorno $k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_2} = htc(u_{fluido} - u)$ queda

$$k\alpha = htc(u_{fluido} - 200 - \alpha)$$

Despejando α obtenemos la temperatura en todo el dominio de forma analítica:‘

$$u(x, y) = 200 + htc \frac{u_{fluido} - 200}{k + htc} y.$$

Así, la temperatura en la frontera $y = 1$ será

$$u(x, 1) = 200 + 1000 \frac{500 - 200}{300 + 1000} 1 = 430.77$$

Capítulo 7

Resolución de problemas parabólicos mediante el método de elementos finitos

7.1 Introducción

Estudiaremos en este tema cómo aproximar mediante el método de elementos finitos el siguiente problema parabólico

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + au + b\frac{\partial u}{\partial x} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t) \text{ en } D \times (0, T) \\ u(c, t) = u(d, t) &= 0 \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad x \in D \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

donde $D = (c, d)$, a y k son constantes con $a \geq 0$, $k > 0$ y $f : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, t) \in L^2(D)$ para todo $x \in D$ y $t \in (0, T)$, y $u_0(c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ con $u_0 \in L^2(D)$. Buscamos una solución $u : D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.

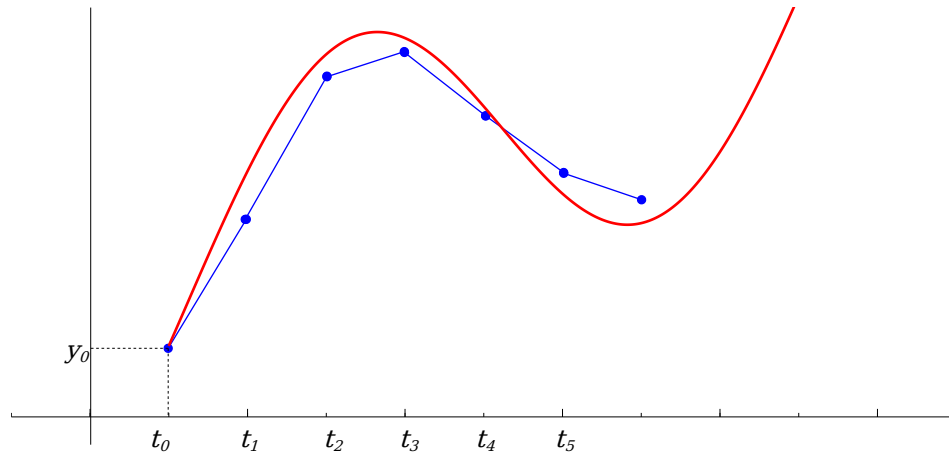
7.2 Problema de valor inicial

7.2.1 Definición y ejemplos

Un *problema de valor inicial* es una ecuación diferencial ordinaria junto con un valor especificado, llamado la *condición inicial*, de la función desconocida en un punto dado del dominio de la solución. Consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad t \in [t_0, t_f] \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

y supongamos que discretizamos la variable tiempo t en instantes $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_f$ con $t_{n+1} - t_n = \Delta t$, con $0 \leq n \leq N_T = (t_f - t_0) / \Delta t$.

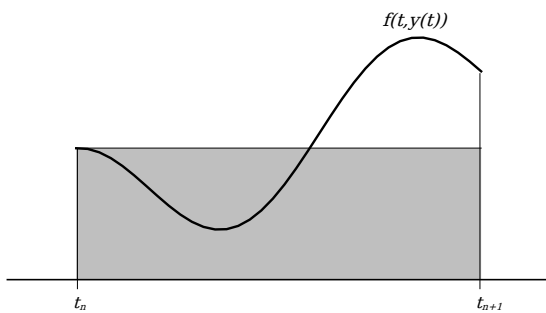


Podemos avanzar en el tiempo resolviendo la integral de la función f :

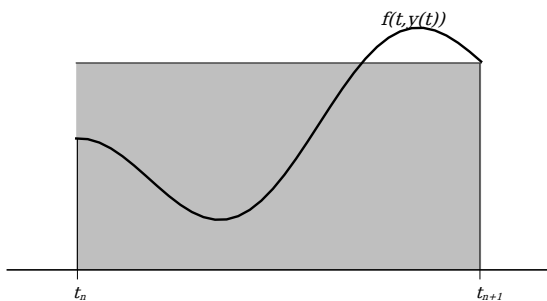
$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

Llamamos $y^n = y(t_n)$ y vemos la función f como una aplicación de dos variables $f(t, y)$. Entonces, dependiendo de cómo resolvamos las sucesivas integrales, obtenemos diferentes esquemas de integración temporal:

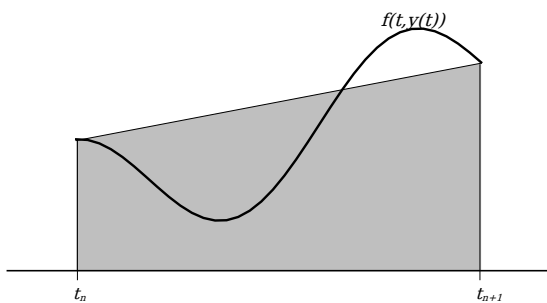
- Esquema *Euler Explícito*: $y^{n+1} \simeq y^n + \Delta t \cdot f(t_n, y^n)$



- Esquema *Euler Implícito*: $y^{n+1} \simeq y^n + \Delta t \cdot f(t_{n+1}, y^{n+1})$



- Esquema de los *Trapecios*: $y^{n+1} \simeq y^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot (f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, y^{n+1}))$



- Esquema de *Heun*: $y^{n+1} \simeq y^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot (f(t_n, y^n) + f(t_{n+1}, \bar{y}^{n+1}))$ con $\bar{y}^{n+1} = y^n + \Delta t \cdot f(t_n, y^n)$. También puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y^n) \\ k_2 = f(t_{n+1}, y^n + \Delta t \cdot k_1) \\ y^{n+1} \simeq y^n + \frac{\Delta t}{2} (k_1 + k_2) \end{cases}$$

Ejemplo 7.1: Sea el problema de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &= y(t) \cos(t) & t \in [0, 50] \\ y(t_0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

La solución exacta es $y(t) = \exp(\sin(t))$ y la función que da la derivada $f(t, y) = y \cos t$. Los diferentes esquemas serían:

- Euler explícito: $y^{n+1} = y^n + \Delta t \cdot y^n \cos t_n = (1 + \Delta t \cdot \cos t_n) y^n$
- Euler implícito: $y^{n+1} = y^n + \Delta t \cdot y^{n+1} \cos t_{n+1}$, por lo que despejando y^{n+1}

$$y^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta t \cdot \cos t_{n+1}} y^n$$

- Trapecios: $y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2} \cdot (y^n \cos t_n + y^{n+1} \cos t_{n+1})$, por lo que despejando y^{n+1}

$$y^{n+1} = \frac{2 + \Delta t \cdot \cos t_n}{2 - \Delta t \cdot \cos t_{n+1}} y^n$$

- Heun: $y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2} (y^n \cos t_n + (y^n + \Delta t y^n \cos t_n) \cos t_{n+1})$, y despejando

$$y^{n+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \cos t_n + \frac{\Delta t}{2} \cos t_{n+1} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cos t_n \cos t_{n+1} \right) y^n$$

Las siguientes tablas muestran algunos resultados para diferentes pasos temporales Δt y los esquemas *Euler explícito* y *Trapecios*: Número de instantes temporales (N_T), error en el último paso y error máximo.

Δt	N_T	Esquema	$ y^{N_T} - y(50) $	$\max y^i - y(t^i) $
1	50	E. exp.	$7.69e - 1$	2.7180
0.5	100	E. exp.	$7.68e - 1$	2.7083
0.1	500	E. exp.	$5.48e - 1$	1.8079
0.01	5000	E. exp.	$8.98e - 2$	$2.80e - 1$
0.001	50000	E. exp.	$9.4e - 3$	$2.94e - 2$
Δt	N_T	Esquema	$ y^{N_T} - y(50) $	$\max y^i - y(t^i) $
1	50	Trap.	$4.87e - 3$	$4.12e - 1$
0.5	100	Trap.	$1.53e - 3$	$1.10e - 1$
0.1	500	Trap.	$6.23e - 5$	$4.15e - 3$
0.01	5000	Trap.	$6.23e - 7$	$4.15e - 5$
0.001	50000	Trap.	$6.23e - 9$	$4.15e - 7$

□

Ejemplo 7.2: Sea el problema de valor inicial

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &= \cos t \cdot \cos^2(y(t)) \quad t \in [0, 50] \\ y(t_0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Comprobamos que la solución exacta es $y(t) = \arctan(\sin t + k)$ con k una constante:

$$\tan y = \sin t + k \Rightarrow \frac{y'}{\cos^2 y} = \cos t$$

Y para cumplir la condición inicial

$$1 = \arctan(k)$$

luego $k = \tan 1$. Es fácil observar que en la mayoría de las ocasiones los esquemas *Euler implícito* y *Trapezios* no son fáciles de aplicar porque requieren resolver una ecuación trascendente en cada instante de tiempo. Así, en el esquema *Euler implícito* no podemos despejar y^{n+1} en función de y^n :

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \cos^2(y^{n+1}) \cos t_{n+1}$$

Los esquemas *Heun* y *Euler explícito* siempre se pueden aplicar directamente independientemente de la función $f(t, y)$.

□

7.2.2 Estimación de errores

Para estudiar el error para cada uno de estos métodos, nos apoyamos en el error de las cuadraturas numéricas. Así, si $g(t) = f(t, y(t))$, para el esquema *Euler explícito* tenemos

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t) dt = (t_{n+1} - t_n) g(t_n) + E_E^n$$

Donde E_E^n es el error cometido al usar la cuadratura dada por el esquema *Euler explícito* en la iteración n . Recordando la expresión (4.1) y particularizando para polinomios de grado 1, obtenemos una cota para este error:

$$|E_E^n| \leq \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2} \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |g'(t)| \leq \frac{\Delta t^2}{2} \max_{t \in [t_0, t_f]} |g'(t)| \quad (7.2)$$

De forma análoga, usando la expresión (4.3) podemos obtener una cota de error para el esquema de los *Trapezios*:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t) dt = \frac{t_{n+1} - t_n}{2} (g(t_{n+1}) + g(t_n)) + E_T^n$$

$$|E_T^n| \leq \frac{(t_{n+1} - t_n)^3}{12} \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |g''(t)| \leq \frac{\Delta t^3}{12} \max_{t \in [t_0, t_f]} |g''(t)|$$

Observamos que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)),$$

es decir, las derivadas de g se pueden poner en función de las derivadas de f . Definamos el error en el instante t_{n+1} como $E^{n+1} = |y(t_{n+1}) - y^{n+1}|$. Supongamos que y^{n+1} está calculado con un esquema *Euler explícito*. Entonces la solución exacta $y(t_{n+1})$ y la calculada y^{n+1} podemos expresarlas del siguiente modo:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = y(t_n) + \Delta t \cdot f(t_n, y(t_n)) + E_E^n$$

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \cdot f(t_n, y^n)$$

La diferencia entre ambos valores es

$$y(t_{n+1}) - y^{n+1} = y(t_n) - y^n + \Delta t (f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y^n)) + E_E^n \quad (7.3)$$

Desarrollando la diferencia entre las funciones f de la expresión anterior (7.3) y llamando $f_n(y) \equiv f(t_n, y)$

$$f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y^n) = f_n(y(t_n)) - f_n(y^n) \stackrel{T.V.M.}{=} f'_n(c) (y(t_n) - y^n)$$

donde se ha hecho uso del *teorema del valor medio*¹, siendo la constante $c \in (y^n, y(t_n))$ ó $c \in (y(t_n), y^n)$. De esta forma, llamando $L = |\max_c f'_n(c)| = \left| \max_c \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, c) \right| = \left| \max_y \frac{\partial f}{\partial y}(y) \right|$ y llamando $M = \max_{t \in [t_0, t_f]} |g'(t)|$ en la ecuación (7.2), podemos acotar la expresión (7.3):

$$\begin{aligned} E^{n+1} = |y(t_{n+1}) - y^{n+1}| &\leq |E^n| + \Delta t L |E^n| + |E_E^n| \leq (1 + \Delta t L) |E^n| + \frac{M}{2} \Delta t^2 \leq \\ &\leq (1 + \Delta t L) \left((1 + \Delta t L) |E^{n-1}| + \frac{M}{2} \Delta t^2 \right) + \frac{M}{2} \Delta t^2 \leq \\ &\leq (1 + \Delta t L)^2 |E^{n-1}| + (1 + (1 + \Delta t L)) \frac{M}{2} \Delta t^2 \leq \\ &\leq (1 + \Delta t L)^3 |E^{n-2}| + (1 + (1 + \Delta t L) + (1 + \Delta t L)^2) \frac{M}{2} \Delta t^2 \leq \dots \leq \\ &\leq (1 + \Delta t L)^{n+1} \underbrace{|E^0|}_{=0} + \frac{M}{2} \Delta t^2 \sum_{j=0}^{N_T} (1 + \Delta t L)^j \Rightarrow \\ E^{n+1} &\leq \frac{M}{2} \Delta t^2 \sum_{j=0}^n (1 + \Delta t L)^j \end{aligned} \quad (7.4)$$

¹Si f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.

Calculamos el sumatorio

$$\sum_{j=0}^{N_T} (1 + \Delta t L)^j = \frac{(1 + \Delta t L)^{N_T+1} - 1}{(1 + \Delta t L) - 1} = \frac{(1 + \Delta t L)^{N_T+1} - 1}{\Delta t L}$$

donde

$$(1 + \Delta t L)^{N_T+1} = (1 + \Delta t L) \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\Delta t L}} \right)^{\frac{1}{\Delta t L}} \right)^{L(t_f - t_0)}$$

por lo que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} (1 + \Delta t L)^{N_T+1} = e^{L(t_f - t_0)}$. Además se puede probar que $(1 + \Delta t L)^{N_T+1} < e^{L(t_f - t_0)}$. Sustituyendo en (7.4)

$$E^{n+1} < \frac{M}{2} \Delta t^2 \frac{e^{L(t_f - t_0)} - 1}{\Delta t L}$$

Entonces llamando $C = \frac{M}{2} \frac{e^{L(t_f - t_0)} - 1}{L}$, independiente de n y de Δt , obtenemos finalmente una cota para el error del esquema *Euler explícito*:

$$E^{n+1} < C \Delta t$$

De forma análoga podemos estimar una cota para los otros esquemas vistos anteriormente. La siguiente tabla recoge los resultados:

<i>Euler Explícito</i>	$ y(t_{n+1}) - y^{n+1} \leq C \Delta t$
<i>Euler Implícito</i>	$ y(t_{n+1}) - y^{n+1} \leq C \Delta t$
<i>Trapeacios</i>	$ y(t_{n+1}) - y^{n+1} \leq C \Delta t^2$
<i>Heun</i>	$ y(t_{n+1}) - y^{n+1} \leq C \Delta t^2$

7.3 Resolución numérica de problemas parabólicos

La idea es «mezclar» la resolución numérica del problema de valor inicial como discretización temporal, y el método de elementos finitos como discretización espacial. Partimos del problema original antes de discretizar el tiempo dado por (7.1).

7.3.1 Esquema Euler Explícito

Por facilidad de la exposición, vamos a describir el problema unidimensional. Llamando $u^{n+1}(x) \equiv u(x, t_{n+1})$ siendo la función $u^{n+1} \in H_0^1(D)$ y utilizando el esquema *Euler explícito* obtendríamos el siguiente problema

$$\left. \begin{aligned} u^{n+1} &= u^n - a \Delta t \cdot u^n - b \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} + k \Delta t \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \Delta t \cdot f^n \text{ en } D = (c, d) \\ u^{n+1}(c) &= u^{n+1}(d) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Pasando a la formulación variacional, buscamos una función $u^{n+1} \in H_0^1(D)$ tal que

$$\int_c^d u^{n+1} v = \int_c^d u^n v - a \Delta t \int_c^d u^n v - b \Delta t \int_c^d \frac{\partial u^n}{\partial x} v - k \Delta t \int_c^d \frac{\partial u^n}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta t \int_c^d f^n v + \Delta t \left[k \frac{\partial u^n}{\partial x} v \right]_c^d \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

y pasando a un espacio funcional de dimensión finita igual a N , buscamos un $u_h^{n+1} = \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \phi_j \in V_{h0}(D)$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \int_c^d \phi_j \phi_i = \sum_{j=1}^N u_j^n \left(\int_c^d \phi_j \phi_i - a \Delta t \int_c^d \phi_j \phi_i - b \Delta t \int_c^d \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i - k \Delta t \int_c^d \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) + \\ + \Delta t \int_c^d f^n \phi_i + \Delta t \varphi_i^n \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

donde el último término tiene en cuenta la derivada de la función u en los extremos, y es cero en todos los nodos interiores:

$$\varphi_i^n = \begin{cases} -k(c) \frac{\partial u^n(c)}{\partial x} & i = 1 \\ 0 & 2 \leq i \leq N-1 \\ k(d) \frac{\partial u^n(d)}{\partial x} & i = N \end{cases}$$

Utilizamos la misma notación vista en el tema anterior sobre las matrices de masas \mathbf{M} , convección \mathbf{C} y rigidez \mathbf{R} y término independiente \mathbf{d}^n . En general, las matrices son invariables en el tiempo, no así el vector de términos independientes y por ello se indica con el superíndice n . De esta forma, el sistema lineal anterior lo podemos escribir de forma más compacta llamando al vector incógnita $\mathbf{u}^{n+1} = (u_1^{n+1}, \dots, u_N^{n+1})$

$$\mathbf{M} \mathbf{u}^{n+1} = ((1 - a \Delta t) \mathbf{M} - b \Delta t \mathbf{C} - k \Delta t \mathbf{R}) \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{d}^n \quad (7.5)$$

7.3.2 Esquema Euler Implícito

En este caso, la discretización temporal se hace del siguiente modo

$$\left. \begin{aligned} u^{n+1} = u^n - a \Delta t \cdot u^{n+1} - b \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + k \Delta t \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \Delta t \cdot f^{n+1} \text{ en } D = (c, d) \\ u^{n+1}(c) = u^{n+1}(d) = 0 \end{aligned} \right\}$$

o reordenando términos

$$\left. \begin{aligned} (1 + a \Delta t) u^{n+1} + b \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} - k \Delta t \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} = u^n + \Delta t \cdot f^{n+1} \text{ en } D = (c, d) \\ u^{n+1}(c) = u^{n+1}(d) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Pasando a la formulación variacional, buscamos una función $u^{n+1} \in H_0^1(D)$ tal que

$$\begin{aligned} (1 + a\Delta t) \int_c^d u^{n+1} v + b\Delta t \int_c^d \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} v + k\Delta t \int_c^d \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = \\ = \int_c^d u^n v + \Delta t \int_c^d f^{n+1} v + \Delta t \left[k \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} v \right]_c^d \quad \forall v \in H_0^1(D) \end{aligned}$$

y pasando a un espacio funcional de dimensión finita de la misma forma que en el caso Euler explícito

$$\begin{aligned} (1 + a\Delta t) \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \int_c^d \phi_j \phi_i + b\Delta t \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \int_c^d \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i + k\Delta t \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \int_c^d \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \\ = \sum_{j=1}^N u_j^n \int_c^d \phi_j \phi_i + \Delta t \int_c^d f^{n+1} \phi_i + \Delta t \varphi_i^{n+1} \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

o de forma matricial

$$((1 + a\Delta t) \mathbf{M} + b\Delta t \mathbf{C} + k\Delta t \mathbf{R}) \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{d}^{n+1} \quad (7.6)$$

Llamando $\hat{\mathbf{A}}$ a la matriz del primer miembro

$$(1 + a\Delta t) \mathbf{M} + b\Delta t \mathbf{C} + k\Delta t \mathbf{R} \equiv \hat{\mathbf{A}}$$

llegamos finalmente al siguiente sistema lineal:

$$\hat{\mathbf{A}} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{d}^{n+1}$$

7.3.3 Esquema Crank-Nicolson

Utilizando el esquema temporal de los trapecios, tenemos

$$\left. \begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \frac{1}{2} \left(-a\Delta t \cdot u^n - b\Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} + k\Delta t \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \Delta t \cdot f^n \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-a\Delta t \cdot u^{n+1} - b\Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + k\Delta t \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \Delta t \cdot f^{n+1} \right) \text{ en } D = (c, d) \\ u^{n+1}(c) &= u^{n+1}(d) = 0 \end{aligned} \right\}$$

y repitiendo el mismo análisis visto en los esquemas anteriores llegamos a

$$\begin{aligned} & \left(\left(1 + \frac{a\Delta t}{2}\right) \mathbf{M} + \frac{b\Delta t}{2} \mathbf{C} + \frac{k\Delta t}{2} \mathbf{R} \right) \mathbf{u}^{n+1} = \\ & = \left(\left(1 - \frac{a\Delta t}{2}\right) \mathbf{M} - \frac{b\Delta t}{2} \mathbf{C} - \frac{k\Delta t}{2} \mathbf{R} \right) \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{d}^{n+1} + \mathbf{d}^n) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Llamando a la matrices

$$\left(1 + \frac{a\Delta t}{2}\right) \mathbf{M} + \frac{b\Delta t}{2} \mathbf{C} + \frac{k\Delta t}{2} \mathbf{R} \equiv \mathbf{A} \quad (7.8)$$

$$\left(1 - \frac{a\Delta t}{2}\right) \mathbf{M} - \frac{b\Delta t}{2} \mathbf{C} - \frac{k\Delta t}{2} \mathbf{R} \equiv \mathbf{B} \quad (7.9)$$

llegamos finalmente al siguiente sistema lineal:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{d}^{n+1} + \mathbf{d}^n)$$

Como indica el título de esta sección, a este esquema que utiliza una discretización temporal dada por la regla de los trapecios, y una discretización espacial dada por el método de los elementos finitos, se le denomina esquema o método *Crank-Nicolson*.

7.3.4 Condiciones de contorno 1D

De la misma forma que en el caso estacionario, el sistema lineal hay que adaptarlo para tener en cuenta las condiciones de contorno espaciales. El caso más sencillo es el de *Dirichlet homogéneas*, por lo que eliminamos la primera y última ecuación. Representamos a las nuevas matrices \mathbf{M}_0 , \mathbf{C}_0 y \mathbf{R}_0 . Del mismo modo prescindimos del primer y último elemento en los vectores \mathbf{u}^n , \mathbf{u}^{n+1} y \mathbf{d}^n , por lo que el sistema lineal queda finalmente para el esquema *Euler explícito*:

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{u}_0^{n+1} = ((1 - a\Delta t) \mathbf{M}_0 - b\Delta t \mathbf{C}_0 - k\Delta t \mathbf{R}_0) \mathbf{u}_0^n + \Delta t \mathbf{d}_0^n \quad (7.10)$$

Para los esquemas *Euler implícito* y *Crank-Nicolson* procedemos de igual modo:

$$\hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{u}_0^{n+1} = \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_0^n + \Delta t \mathbf{d}_0^{n+1} \quad (7.11)$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0^{n+1} = \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_0^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{d}_0^{n+1} + \mathbf{d}_0^n)$$

Veamos el caso de condiciones *Dirichlet* no homogéneas:

$$\left. \begin{aligned} u(c, t) &= g_1(t) \\ u(d, t) &= g_2(t) \end{aligned} \right\}$$

Los tres esquemas temporales se tratan del mismo modo. Con las ecuaciones (7.5), (7.6) o (7.7) llegamos a un sistema lineal cuyas incógnitas son las componentes del vector \mathbf{u}^{n+1} :

$$\bar{\mathbf{A}} \mathbf{u}^{n+1} = \bar{\mathbf{d}}$$

Como $u_1^{n+1} = g_1(t_{n+1}) \equiv g_1^{n+1}$ y $u_N^{n+1} = g_2(t_{n+1}) \equiv g_2^{n+1}$ modificamos el término independiente $\bar{\mathbf{d}}$ de un modo análogo a como hicimos en el problema elíptico:

$$\bar{d}_i = \bar{d}_i - \bar{a}_{i1}g_1^{n+1} - \bar{a}_{iN}g_2^{n+1}$$

para $2 \leq i \leq N-1$, es decir, eliminamos la primera y última fila y columna de la matriz $\bar{\mathbf{A}}$.

Por último veamos en detalle el caso más complejo, condiciones *Robin* dependientes del tiempo en ambos extremos. Recordemos que las condiciones *Neumann* son un caso particular de las *Robin*. Supongamos las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(t) u(c, t) + \beta_1(t) \frac{\partial u(c, t)}{\partial x} &= g_1(t) \\ \alpha_2(t) u(d, t) + \beta_2(t) \frac{\partial u(d, t)}{\partial x} &= g_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Consideremos el esquema *Crank-Nicolson* (para los otros esquemas el proceso es muy similar):

$$\left. \begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \frac{1}{2} \left(-a\Delta t \cdot u^n - b\Delta t \frac{\partial u^n}{\partial x} + k\Delta t \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \Delta t \cdot f^n \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-a\Delta t \cdot u^{n+1} - b\Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + k\Delta t \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \Delta t \cdot f^{n+1} \right) \end{aligned} \right\} \text{ en } D = (c, d)$$

Pasando a la formulación variacional, busquemos una función $u^{n+1} \in H_0^1(D)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_c^d u^{n+1} v &= \int_c^d u^n v + \frac{\Delta t}{2} \left(-a \int_c^d u^n v - b \int_c^d \frac{\partial u^n}{\partial x} v - k \int_c^d \frac{\partial u^n}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \int_c^d f^n v + \left[k \frac{\partial u^n}{\partial x} v \right]_c^d \right) + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \left(-a \int_c^d u^{n+1} v - b \int_c^d \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} v - k \int_c^d \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \int_c^d f^{n+1} v + \left[k \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} v \right]_c^d \right) \quad \forall v \in H_0^1(D) \end{aligned}$$

y pasando a un espacio funcional de dimensión finita igual a N , busquemos un $u_h^{n+1} = \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \phi_j \in V_h(D)$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \int_c^d \phi_j \phi_i &= \sum_{j=1}^N u_j^n \int_c^d \phi_j \phi_i + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^N u_j^n \left(-a \int_c^d \phi_j \phi_i - b \int_c^d \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i - k \int_c^d \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \left(-a \int_c^d \phi_j \phi_i - b \int_c^d \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \phi_i - k \int_c^d \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) + \end{aligned}$$

$$+\frac{\Delta t}{2} \left(\int_c^d f^n \phi_i + \int_c^d f^{n+1} \phi_i \right) + \frac{\Delta t}{2} (\varphi_i^n + \varphi_i^{n+1}) \quad 1 \leq i \leq N$$

donde el último término tiene en cuenta la derivada de la función u en los extremos, y es cero en todos los nodos interiores:

$$\varphi_i^n = \begin{cases} -k(c) \frac{\partial u^n(c)}{\partial x} & i = 1 \\ 0 & 2 \leq i \leq N-1 \\ k(d) \frac{\partial u^n(d)}{\partial x} & i = N \end{cases}$$

Nótese que la expresión anterior también hay que evaluarla en el instante $n+1$. Usando las condiciones de contorno (7.12), estas expresiones se transforman en

$$\varphi_i^n = \begin{cases} -k(c) \frac{g_1^n - \alpha_1^n u_1^n}{\beta_1^n} & i = 1 \\ 0 & 2 \leq i \leq N-1 \\ k(d) \frac{g_2^n - \alpha_2^n u_2^n}{\beta_2^n} & i = N \end{cases}$$

Entonces, usando la definición de las matrices de masas, rigidez y convención llegamos al siguiente sistema lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{d}^{n+1} + \mathbf{d}^n) + \frac{\Delta t}{2} (\varphi^{n+1} + \varphi^n)$$

siendo las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} las mismas de las expresiones (7.8) y (7.9). Una forma práctica de implementar los cambios producidos por las condiciones de contorno es resolver el sistema lineal

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2} (\hat{\mathbf{d}}^{n+1} + \hat{\mathbf{d}}^n)$$

donde las nuevas matrices $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ y los vectores $\hat{\mathbf{d}}^{n+1}$ y $\hat{\mathbf{d}}^n$ son idénticos a las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} y los vectores \mathbf{d}^{n+1} y \mathbf{d}^n salvo en 2 componentes:

$$\left. \begin{aligned} \left(\hat{\mathbf{A}} \right)_{11} &= \left(\mathbf{A} \right)_{11} - \frac{\Delta t}{2} \frac{k(c)\alpha_1^{n+1}}{\beta_1^{n+1}} \\ \left(\hat{\mathbf{A}} \right)_{NN} &= \left(\mathbf{A} \right)_{NN} + \frac{\Delta t}{2} \frac{k(d)\alpha_2^{n+1}}{\beta_2^{n+1}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\hat{\mathbf{B}} \right)_{11} &= \left(\mathbf{B} \right)_{11} + \frac{\Delta t}{2} \frac{k(c)\alpha_1^n}{\beta_1^n} \\ \left(\hat{\mathbf{B}} \right)_{NN} &= \left(\mathbf{B} \right)_{NN} - \frac{\Delta t}{2} \frac{k(d)\alpha_2^n}{\beta_2^n} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\hat{\mathbf{d}}^n \right)_1 &= \left(\mathbf{d}^n \right)_1 - \frac{k(c)g_1^n}{\beta_1^n} \\ \left(\hat{\mathbf{d}}^n \right)_N &= \left(\mathbf{d}^n \right)_N + \frac{k(d)g_2^n}{\beta_2^n} \end{aligned} \right\}$$

7.3.5 Condiciones de contorno 2D

Para imponer las condiciones de contorno en problemas parabólicos con dos coordenadas espaciales se procede de la misma forma que en el caso unidimensional. La única diferencia es que en lugar de trabajar con el primer y último índice i , hay que hacerlo con el conjunto de índices que representan la frontera del dominio D de resolución, según se explicó en la sección 6.4.3. De forma similar, teniendo en cuenta lo explicado en la sección anterior para el caso 1D, se procede de igual modo para las condiciones de contorno tipo *Robin*. En caso de usar la rutina `fem_robin`, obsérvese que dado que las expresiones anteriores se han obtenido con un coeficiente de la derivada temporal igual a 1, en caso de tener que dividir la ecuación del calor por $c_p\rho$, también habrá que dividir los parámetros `G` y `ALPHA` por $c_p\rho$.

Para fijar ideas, a continuación se expone un ejemplo que recoge todas las situaciones que pueden plantearse en un problema real:

1. Problema dimensional. Coeficiente de la derivada temporal diferente de 1, ($c\rho$).
2. Condiciones de *Dirichlet* y *Robin*: no homogéneas y dependientes del tiempo.
3. Término fuente dependiente del tiempo.

Ejemplo 7.1: Resolver en OCTAVE el siguiente problema parabólico

$$\left. \begin{aligned} c_p\rho\frac{\partial u}{\partial t} &= k\Delta u + f(x, y, t), \quad \text{en } D \times [0, T] \\ u|_{\Gamma_1} &= u_0 + 5t/T \\ k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_2} &= h(x, y, t)(u_{fluido}(t) - u) \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial D - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} &= 0 \\ u(x, y, 0) &= u_0 \end{aligned} \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} D &= (-1, 1) \times (0, 1) \\ T &= 100 \text{ s} \\ \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \partial D : y = 0\} \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) \in \partial D : y = 1\} \\ h(x, y, t) &= 5000(2 - x^2) \text{ W}/(m^2K) \\ u_0 &= 200 \text{ K} \\ u_{fluido}(t) &= u_0 - 10t/T \text{ K} \\ k &= 300 \text{ W}/(m \cdot K) \\ c_p &= 450 \text{ J}/(kg \cdot K) \\ \rho &= 7800 \text{ kg}/m^3 \end{aligned}$$

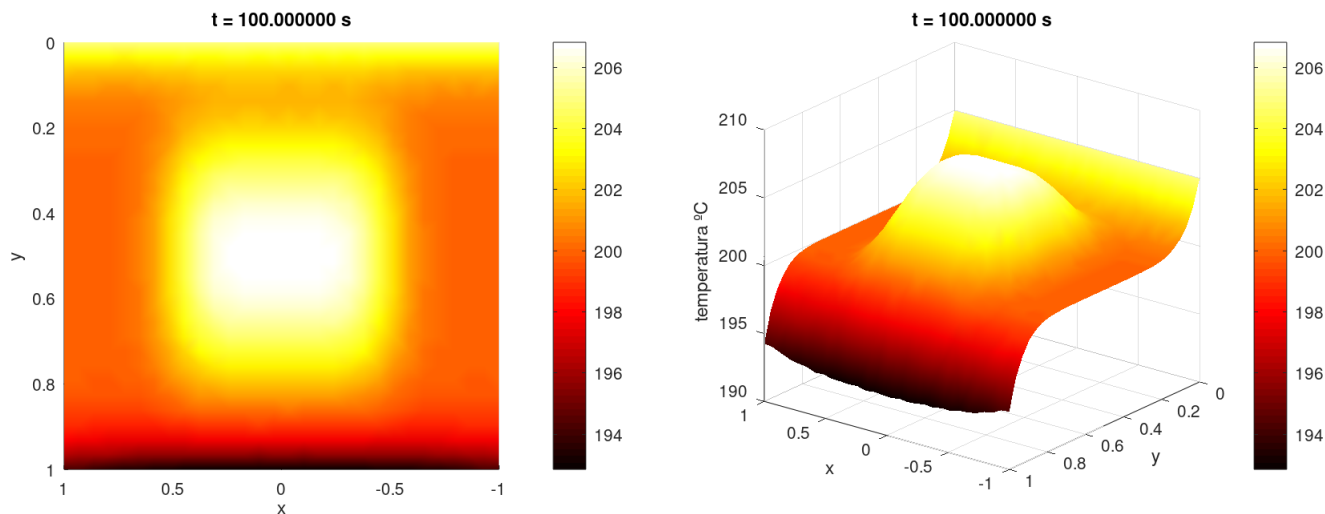


Figura 7.1: Solución en el instante $t = 100$ segundos del ejemplo 7.1.

y la fuente calorífica (W/m^3)

$$f(x, y, t) = \begin{cases} 10^6 \cdot (T - 2t) / T & \text{si } |x| \leq 0.5 \wedge y \in [0.25, 0.75] \wedge t < T/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La figura 7.1 presenta la solución obtenida para el instante $t = 100$ segundos. En la sección de apéndices se muestra un posible código OCTAVE para resolver este ejemplo.

□

7.4 Algunas propiedades de los problemas parabólicos

Vamos a estudiar algunas propiedades de los problemas parabólicos. Para ello, sin pérdida de generalidad, supongamos el siguiente problema

$$\left. \begin{aligned} u_t - k\Delta u &= f && \text{en } D \times (0, T) \\ u|_{\partial D} &= 0 && t \in (0, T) \\ u(t=0) &= u_0 && \text{en } D \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

con $k > 0$ y $f \in L^2((0, T), L^2(D))$. Pasando a la formulación variacional trabajando en el espacio $H_0^1(D)$

$$\int_D u_t(t) v + k \int_D \nabla u(t) \nabla v = \int_D f(t) v \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

Haciendo $v = u(t) \in H_0^1(D)$ y sabiendo que $\int_D u_t(t) u(t) = \int_D \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D |u(t)|^2$ obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D |u(t)|^2 + k \int_D |\nabla u(t)|^2 = \int_D f(t) u(t) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + k \|\nabla u(t)\|_{L^2(D)}^2 \leq \|f(t)\|_{L^2(D)} \|u(t)\|_{L^2(D)} \quad (7.14)$$

Por otro lado, si definimos el operador $A(u, v) = k \int_D \nabla u \nabla v$, sabemos que A es coercitiva en $H_0^1(D)$, por tanto $\exists \alpha > 0$ tal que

$$A(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(D)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(D)$$

Luego

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + \alpha \|u\|_{H_0^1(D)}^2 \leq \|f(t)\|_{L^2(D)} \|u(t)\|_{L^2(D)} \quad (7.15)$$

También sabemos que para cualquier x, y y $\epsilon \neq 0$ reales

$$(\epsilon x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{\epsilon}{2} x^2 + \frac{1}{2\epsilon} y^2$$

Sustituyendo la última expresión en (7.15)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + \alpha \|u\|_{H_0^1(D)}^2 \leq \frac{\alpha}{2} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|f(t)\|_{L^2(D)}^2 \quad (7.16)$$

Y operando

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + \alpha \|u\|_{H_0^1(D)}^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|f(t)\|_{L^2(D)}^2$$

Integrando en el tiempo, obtenemos finalmente la primera propiedad que cumple la solución u de nuestro problema (7.13).

Propiedad 1: Sea u solución débil del problema (7.13). Entonces se cumple siendo $0 \leq t \leq T$

$$\|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + \alpha \int_0^t \|u(\tau)\|_{H_0^1(D)}^2 d\tau \leq \|u_0\|_{L^2(D)}^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(D)}^2 d\tau \|u(t)\|_{L^2(D)}^2$$

□

Según la desigualdad de Poincaré

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(D)} \geq \frac{1}{C_p} \|u(t)\|_{L^2(D)}$$

por lo que sustituyendo en (7.15) y (7.16)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + \frac{k}{C_p^2} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f(t)\|_{L^2(D)}^2$$

Si $\varepsilon = k/C_p^2$

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 + \frac{k}{C_p^2} \|u(t)\|_{L^2(D)}^2 \leq \frac{C_p^2}{k} \|f(t)\|_{L^2(D)}^2$$

Sea $\varphi(t) = \|u(t)\|_{L^2(D)}^2$, entonces la expresión anterior es

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) + \frac{k}{C_p^2} \varphi(t) \leq \frac{C_p^2}{k} \|f(t)\|_{L^2(D)}^2$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \left(e^{kt/C_p^2} \varphi(t) \right) = \frac{k}{C_p^2} e^{kt/C_p^2} \varphi(t) + e^{kt/C_p^2} \varphi'(t) = e^{kt/C_p^2} \left(\varphi'(t) + \frac{k}{C_p^2} \varphi(t) \right) \leq \frac{C_p^2}{k} \|f(t)\|_{L^2(D)}^2$$

Entonces integrando en el tiempo

$$e^{kt/C_p^2} \varphi(t) - \varphi(0) \leq \frac{C_p^2}{k} \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(D)}^2 e^{k\tau/C_p^2} d\tau$$

y reordenando llegamos a la siguiente propiedad.

Propiedad 2: Sea u solución débil del problema (7.13). Entonces

$$\|u(t)\|_{L^2(D)}^2 \leq e^{-kt/C_p^2} \|u_0\|_{L^2(D)}^2 + \frac{C_p^2}{k} \int_0^t e^{-k(t-\tau)/C_p^2} \|f(\tau)\|_{L^2(D)}^2 d\tau$$

□

7.5 Error de truncación

Estudiemos ahora para el problema (7.13) el error de truncación. Usemos un esquema Euler explícito, entonces

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t (k \Delta u^{n+1} + f^{n+1}) \\ u(t_{n+1}) &= u(t_n) + \Delta t (k \Delta u(t_{n+1}) + f(t_{n+1})) + E^{n+1} \end{aligned}$$

Si partimos sin error en el instante t_n , es decir, $u^n = u(t_n)$, definimos el *error de truncación temporal* en el siguiente instante de la discretización como $E_l^{n+1} = u^{n+1} - u(t_{n+1})$. Ya vimos al principio del capítulo que

$$|E_l^{n+1}| < C \Delta t^2$$

Entonces $\|u^{n+1} - u(t_{n+1})\|_{L^2(D)} = \left(\int_D |E_l^{n+1}|^2\right)^{1/2} \leq (C^2 \Delta t^4)^{1/2} = C \Delta t^2$. Por otro lado ya vimos que los errores espaciales dependen del orden m de los polinomios de la base funcional utilizada:

$$\|u_h^{n+1} - u^{n+1}\|_{L^2(D)} \leq C' h^{m+1}$$

De esta forma, podemos acotar el error espacial y temporal, denominado error de *truncación local*:

$$\|u(t_{n+1}) - u_h^{n+1}\|_{L^2(D)} \leq \|u(t_{n+1}) - u^{n+1}\|_{L^2(D)} + \|u^{n+1} - u_h^{n+1}\|_{L^2(D)} \leq C \Delta t^2 + C' h^{m+1}$$

Se puede demostrar que el error de *truncación global* está acotado de la siguiente forma

$$\|u(t_{n+1}) - u_h^{n+1}\|_{L^2(D)} \leq C (\Delta t + h^{m+1})$$

7.6 Ejercicios

- Resolver los siguientes problemas de valor inicial utilizando los métodos de Euler explícito, Euler implícito, trapecios y Heun, tomando en cada caso $\Delta t = 0.1$ y $\Delta t = 0.01$:

(a)

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \tan t + \sec t, & t \in \left[0, 0.99 \frac{\pi}{2}\right] \\ u(0) = -1. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} xy' + 3y = \frac{x}{\sin x}, & x \in [1, 2] \\ y(0) = 8. \end{cases}$$

- El modelo matemático de Von Bertalanffy del crecimiento en peso de un pez es

$$\begin{cases} u'(t) = au(t)^{2/3} - bu(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

donde $u(t)$ representa el peso del pez en el instante de tiempo t , u_0 es el peso en el instante de tiempo inicial y a y b son constantes positivas. El término $au(t)^{2/3}$ representa el aporte debido a los nutrientes, en la hipótesis de que este aporte es proporcional a la superficie del pez y $bu(t)$ representa la disminución debida a la respiración, en la hipótesis de suponerla proporcional al peso del pez.

Se pide:

- (a) Tomando $a = 0.1$, $b = 0.05$ y $u_0 = 0.05$, aproximar la solución del problema de valor inicial mediante el método de Euler explícito y el método de Heun tomando $\Delta t = 0.5$.
- (b) A partir de la solución numérica obtenida y sabiendo que la variable t está dada en días y el peso en kilogramos, ¿cuál será el peso del pez al cabo de 30 días? ¿y al cabo de 60?
- (c) ¿Cuánto tardará el pez en alcanzar los 5 kg? ¿Y 7 kg?
- (d) Según la solución numérica obtenida, ¿podrá alcanzar los 9 kg?
3. Un estanque se drena a través de un tubo situado en el fondo. Tras ciertas hipótesis, se obtiene la siguiente ecuación diferencial que describe como varía la profundidad del estanque con el tiempo:

$$h'(t) = -\frac{\pi d^2}{4A(h(t))} \sqrt{2g(h(t) + e)},$$

donde $h(t)$ es la profundidad del estanque (m) en el instante de tiempo t (s), $A(h)$ el área de la superficie del estanque (m^2) a una altura h del fondo, g la constante gravitacional ($g = 9.81 m/s^2$), d el diámetro del tubo (m) y e la profundidad de la salida del tubo por debajo del fondo del estanque (m). Sabiendo que el estanque inicialmente tiene 6 m de profundidad, que $d = 0.25 m$, $e = 1 m$ y que se ha estimado que el área de la superficie del estanque a distintas profundidades viene dada por la función $A(h) = 100(h^3 - 6h^2 + 25h)$, se pide:

- (a) Escribir el problema de valor inicial que describe la evolución de la profundidad del estanque.
- (b) Utilizar un esquema numérico de segundo orden para aproximar la solución del problema de valor inicial con $\Delta t = 2 s$ y dibujar la solución obtenida en las primeras 17 horas.
- (c) A partir de la solución numérica obtenida, calcular la profundidad del estanque tras 10 y 15 horas desde que el estanque tenía una profundidad de 6 m .
- (d) Estimar el tiempo que tiene que transcurrir para que el estanque se vacíe.
4. Se considera el intervalo $D = (0, 1)$ y el siguiente problema parabólico definido en D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & \text{en } (x, t) \in D \times (0, 10), \\ u(0, t) = 0 = u(1, t), & \text{para } t \in (0, 10), \\ u(x, 0) = (\sin(\pi x))^{100}, & \text{para } x \in D. \end{cases}$$

Aproximar la solución utilizando el método de Euler explícito y el método de elementos finitos construyendo un mallado D_h de elementos equiespaciados de longitud $h > 0$ y para los valores de $k = 10^{-1}, 10^{-2}$ y 10^{-3} . Probar los valores $h \in \{0.1, 0.01\}$ y $\Delta t \in \{0.1, 0.01\}$.

5. Repetir el ejercicio 4 utilizando el esquema de Euler implícito.
6. Repetir el ejercicio 4 utilizando el esquema de Crank-Nicolson.
7. Se considera el intervalo $D = (-1, 4)$ y el siguiente problema parabólico definido en D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x), & \text{en } (x, t) \in D \times (0, 100), \\ u(-1, t) = 5; u(4, t) = 30, & \text{para } t \in (0, 100), \\ u(x, 0) = 20, & \text{para } x \in D, \end{cases}$$

donde $f(x) = 50e^{-\frac{x^2}{0.01}}$, $k = 10^{-2}$. Aproximar la solución utilizando el método de Crank-Nicolson y el método de elementos finitos construyendo un mallado D_h de elementos equiespaciados de longitud $h > 0$.

8. Se considera el intervalo $D = (-1, 4)$ y el siguiente problema parabólico definido en D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), & \text{en } (x, t) \in D \times (0, 100), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t) = -6; u(4, t) = 30, & \text{para } t \in (0, 100), \\ u(x, 0) = 20, & \text{para } x \in D, \end{cases}$$

donde $f(x, t) = 50e^{-\frac{x^2}{0.01} - (t-20)^2}$, $k = 10^{-2}$. Aproximar la solución utilizando el método de Crank-Nicolson y el método de elementos finitos construyendo un mallado D_h de elementos equiespaciados de longitud $h > 0$.

9. Se considera conjunto abierto $D = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \partial D : y = 1\}$, $\Gamma_2 = \partial D - \Gamma_1$ y el siguiente problema parabólico definido en D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0, & \text{en } D \times (0, 100), \\ u|_{\Gamma_1} = 50, & \text{para } t \in (0, 100), \\ u|_{\Gamma_2} = 0, & \text{para } t \in (0, 100), \\ u(x, y, 0) = 30, & \text{para } (x, y) \in D, \end{cases}$$

$k = 10^{-2}$. Aproximar la solución utilizando el método de Crank-Nicolson y el método de elementos finitos construyendo un mallado D_h de elementos de tipo triángulo.

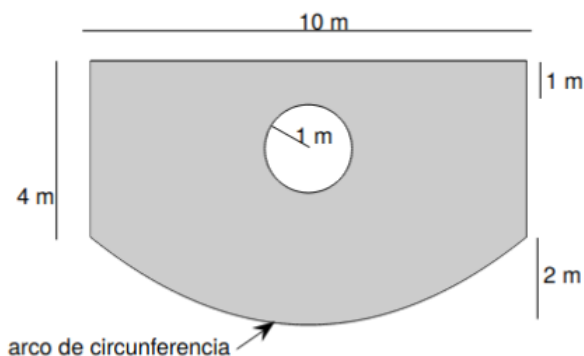
10. Se considera conjunto abierto $D = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \partial D : y = 1\}$, $\Gamma_2 = \partial D - \Gamma_1$

y el siguiente problema parabólico definido en D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0, & \text{en } D \times (0, 100), \\ u|_{\Gamma_1} = 50, & \text{para } t \in (0, 100), \\ u|_{\Gamma_2} = 0, & \text{para } t \in (0, 10), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_2} = 0, & \text{para } t \in [10, 100), \\ u(x, y, 0) = 30, & \text{para } (x, y) \in D, \end{cases}$$

$k = 10^{-3}$. Aproximar la solución utilizando el método de Crank-Nicolson y el método de elementos finitos construyendo un mallado D_h de elementos de tipo triángulo.

11. Se considera una placa formada por un círculo de radio 5 al que se le ha quitado un círculo de radio 1 centrado en el centro del primer círculo. El disco está inicialmente a una temperatura constante de 25°C y se calienta hasta una temperatura de 100°C el borde interior de la placa mientras que en el borde exterior no hay transferencia de calor (condiciones adiabáticas). Estudiar la distribución de temperatura de la placa pasado un minuto suponiendo que no existe ninguna otra fuente de calor, sabiendo que $k = 10^{-1} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Utilizar una discretización en tiempo de orden dos.
12. Resolver numéricamente la ecuación del calor sobre placa descrita en el dibujo con $k = 10^{-1} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $u_0 \equiv 15^\circ\text{C}$, con $u \equiv 80^\circ\text{C}$ en la frontera descrita por la circunferencia interior, $u \equiv 40^\circ\text{C}$ en la frontera situada en lateral izquierdo y suponiendo condiciones adiabáticas en el resto de la frontera. Utilizar un esquema de orden 2 en tiempo.



13. Se considera conjunto abierto $D = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \partial D : x + y < \frac{1}{2}\}$, $\Gamma_2 =$

$\partial\Omega - \Gamma_1$ y el siguiente problema parabólico definido en D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \nabla u - k\Delta u = 0, & \text{en } D \times (0, 10), \\ u|_{\Gamma_1} = 1, & \text{para } t \in (0, 10), \\ u|_{\Gamma_2} = 0, & \text{para } t \in (0, 10), \\ u(x, y, 0) = 0, & \text{para } (x, y) \in D, \end{cases}$$

donde $\mathbf{b}(x, y) = (2, 1)$. Aproximar la solución utilizando el método de Euler implícito y el método de Crank-Nicolson construyendo un mallado D_h de elementos de tipo triángulo para los valores de $k = 10^{-1}, 10^{-2}$ y 10^{-3} .

14. Se considera conjunto abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y el siguiente problema parabólico definido en D :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b} \cdot \nabla u - k\Delta u = 0, & \text{en } D \times (0, 2\pi), \\ u|_{\partial D} = 0, & \text{para } t \in (0, 2\pi), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & \text{para } (x, y) \in D, \end{cases}$$

donde $u_0(x, y) = e^{-\frac{(x-0.5)^2 + y^2}{0.01}}$, $\mathbf{b}(x, y) = (-y, x)$ y $k = 6.2070 \times 10^{-4}$. Aproximar la solución utilizando el método de Euler implícito y el método de Crank-Nicolson y el método de elementos finitos construyendo un mallado D_h de elementos de tipo triángulo.

Capítulo 8

Apéndice: Generación de mallas

Existen múltiples software de generación de mallas 2D y 3D. En esta sección se describirán unas simples rutinas desarrolladas para ayudar a la generación de mallas 2D de triángulos. Todas ellas se basan en la rutina `delaunay`, la cual genera una conectividad dada una nube de puntos en el plano. La malla construida cumple la condición de *Delaunay*: la circunferencia circunscrita de cada triángulo no debe contener ningún otro vértice de la triangulación en su interior.

Las triangulación de *Delaunay* de un conjunto de puntos cumple las siguientes propiedades:

- La frontera externa de triangulación forma la envolvente convexa del conjunto de puntos.
- El ángulo mínimo dentro de todos los triángulos está maximizado, es decir, se evita obtener resultados con ángulos demasiado agudos.
- Como consecuencia de lo anterior, los triángulos generados en una triangulación de *Delaunay* tienden a ser lo más equiláteros posible.

La primera rutina desarrollada es la llamada `mesh_block`. Dados cuatro puntos de esquina, se malla el cuadrilátero correspondiente, pudiendo especificar el número de nodos de cada lado. Para aumentar la calidad de la malla haciéndola más homogénea, la triangularización de *Delaunay* se realiza con unos nodos ficticios mediante una transformación afín de los nodos reales disponiéndolos en un rectángulo perfecto. La figura 8.1 muestra un ejemplo de la malla obtenida resaltando los nodos del contorno. El código utilizado para generar dicha figura es:

```
[x y tri F] = mesh_block([0; 3; 8; 10], [0; 5; 8; -1], 10, 15);  
triplot(tri, x, y); hold; plot(x(F),y(F), 'o');
```

Otra rutina parecida es `mesh_block_hermite`, que permite definir las derivadas de las curvas que conforman dos de los lados del trapecio. La figura 8.1 (centro) muestra otro ejemplo donde vemos que gracias a la triangularización en el campo de parámetros, se obtiene una superficie no convexa. El código utilizado es:

```
[x y tri F] = mesh_block_hermite([0; 3; 8; 10], [0; 5; 8; -1], [1; 1; 2; -1], 10, 15);
```

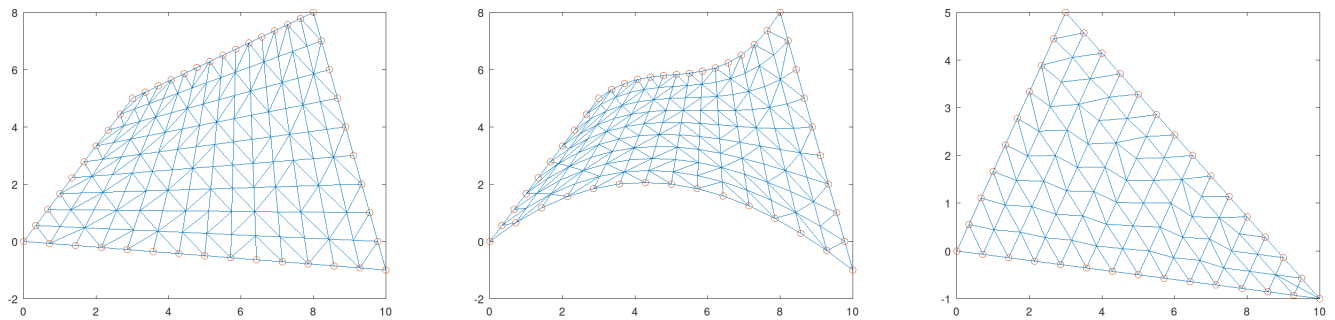


Figura 8.1: Ejemplos rutina `mesh_block` (izquierda), `mesh_block_hermite` (centro) y `mesh_triangle` (derecha).

```
triplot(tri, x, y); hold; plot(x(F),y(F), 'o');
```

La última rutina suministrada para construir mallas es la `mesh_triangle`. Un ejemplo de llamada podría ser

```
[x y tri F] = mesh_triangle([0;3;10], [0;5;-1], 10, 15);
```

obteniendo la figura 8.1 (derecha).

Con estas piezas básicas y las rutinas `mesh_meld` y `mesh_remove`, es sencillo construir mallas complejas. Con la primera rutina se sueldan dos mallas por los nodos coincidentes. La segunda rutina permite suprimir aquellos triángulos de una malla dada que contienen al menos uno de los puntos suministrados a la rutina. Para obtener buenos resultados hay que dar la nube de puntos muy densa. Esta nube de puntos puede generarse de una forma cómoda mediante las 3 rutinas vistas: `mesh_block`, `mesh_block_hermite` o `mesh_triangle`.

En la figura 8.2 se muestra un ejemplo donde se contruye un perfil de ala de avión mediante el siguiente código:

```
% Bloque principal
Ny = 10; Nx = 20;
xc = [0; 0; 1; 1];
yc = [0; 0.25; 0.5; 0];
dy = [0; 1; -0.1; 0];
[x y tri F] = mesh_block_hermite(xc, yc, dy, Ny, Nx);

% Bloque secundario
xc = [1; 1; 2; 2];
yc = [0; 0.5; 0.25; 0];
dy = [0; -0.1; -0.25; 0];
[x1 y1 tri1 F1] = mesh_block_hermite(xc, yc, dy, Ny, Nx);
[x y tri F] = mesh_meld(x, y, tri, F, x1, y1, tri1, F1, true);

% Borde de salida
xc = [2; 2; 3];
yc = [0; 0.25; 0];
[x1 y1 tri1 F1] = mesh_triangle(xc, yc, Ny, Nx);
```

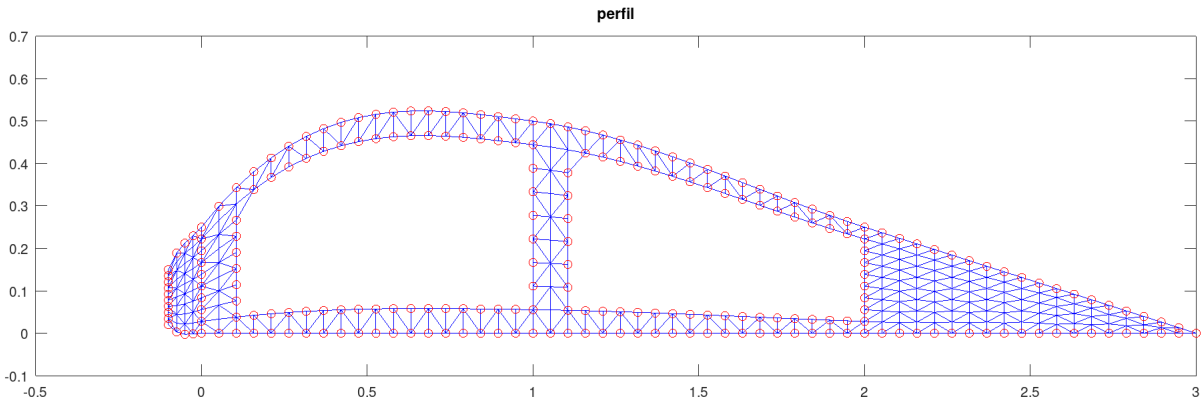


Figura 8.2: Ejemplo de construcción de un mallado complejo.

```
[x y tri F] = mesh_meld(x, y, tri, F, x1, y1, tri1, F1, true);

% Borde de ataque
xc = [-0.1; -0.1; 0; 0];
yc = [0.02; 0.15; 0.25; 0];
dy = [-1; 2; 1; 0];
[x1 y1 tri1 F1] = mesh_block_hermite(xc, yc, dy, Ny, max(Nx/4,2));
[x y tri F] = mesh_meld(x, y, tri, F, x1, y1, tri1, F1, true);

% Agujero 1
xc = [0.15; 0.15; 1; 1];
yc = [0.05; 0.31; 0.43; 0.07];
dy = [0.1; 0.7; -0.05; 0];
[x2 y2 tri2 F2] = mesh_block_hermite(xc, yc, dy, Ny*10, Ny*10);
[x y tri F] = mesh_remove(x, y, tri, F, x2, y2);

% Agujero 2
xc = [1.15; 1.15; 2; 2];
yc = [0.08; 0.4; 0.21; 0.046];
dy = [0; -0.1; -0.25; 0];
[x1 y1 tri1 F1] = mesh_block_hermite(xc, yc, dy, Ny*10, Ny*10);
[x y tri F] = mesh_remove(x, y, tri, F, x1, y1);

% Pintar
figure(1);
triplot(tri, x, y, "color", 'b'); hold on;
%triplot(tri1, x1, y1, "color", 'g');
plot(x(F),y(F), 'or'); hold off;
title("perfil");
```

Capítulo 9

Apéndice: Rutinas *Octave*

9.1 Rutina fem_mrc

```
% [M R C d] = fem_mrc(X, Y, TRI, F, b, bOnly_d)
% X e Y vectores columna. TRI conectividad de la malla de triangulos.
% F Termino fuente en los nodos. En la ecuacion diferencial, b es el
% el coeficiente del gradiente de la funcion icognita. Puede ser un escalar
% o un vector de dos elementos. Si b==0, no se calcula la matriz de
% conveccion. Se calcula la matriz de masas (M), de rigidez (R) y de
% conveccion (C). Tambien el vector de terminos independientes (d).
% Para optimizar tiempos en problemas parabolicos es posible solo
% calcular el vector d. Para ello, el ultimo parametro debe ser true.
% Cuidado que en ese caso las matrices M, R y C se inicializan a la matriz
% nula. Las funciones base son lineales.
% La solucion del problema eliptico sera
%      u = (a*M + C + k*R)\d
%
%      Jose M. Chaquet 3/02/2023

function [M R C d] = fem_mrc(X, Y, TRI, F, b, bOnly_d)
    t0 = clock();
    N = length(X); % Numero de nodos
    [Ne aux] = size(TRI); % Ne numero de triangulos
    %if !bOnly_d
        M = sparse(N, N); % Matriz de masas
        R = sparse(N, N); % Matriz de rigidez
        C = sparse(N, N); % Matriz de conveccion
    %endif
    d = sparse(N,1); % Vector de terminos independientes

    bIsFunction = false;
```

```

if !isfloat(b)
    B = @b;
    bIsFunction = true;
elseif 1<length(b)
    B = [b(1);b(2)];
else
    B = [b;b];
endif

% Informacion del mallado.
printf("Malla de %i nodos y %i triangulos.\n", N, Ne);

% Area de un triangulo. Formula de Heron, numericamente estable
function ret = Area(x1,y1,x2,y2,x3,y3)
    at = hypot(x1-x2,y1-y2);
    bt = hypot(x2-x3,y2-y3);
    ct = hypot(x3-x1,y3-y1);
    [aux aux2] = sort([at bt ct]);
    at = aux(3);
    bt = aux(2);
    ct = aux(1);
    ret = 0.25*sqrt( (at+(bt+ct))*(ct-(at-bt))*(ct+(at-bt))*(at+(bt-ct)) );
endfunction

% Funciones base y sus gradientes en el elemento de referencia
phi1 = @(x,y) 1-x-y;
phi2 = @(x,y) x;
phi3 = @(x,y) y;

grad1g = [-1; -1];
grad2g = [1; 0];
grad3g = [0; 1];

% Pre-calculo la matriz de masas elemental
Mg = zeros(3,3);
Mg(1,1) = (phi1(1/2,0)^2 + phi1(1/2,1/2)^2 + phi1(0,1/2)^2)/6;
Mg(2,2) = (phi2(1/2,0)^2 + phi2(1/2,1/2)^2 + phi2(0,1/2)^2)/6;
Mg(3,3) = (phi3(1/2,0)^2 + phi3(1/2,1/2)^2 + phi3(0,1/2)^2)/6;
Mg(1,2) = (phi1(1/2,0)*phi2(1/2,0) + phi1(1/2,1/2)*phi2(1/2,1/2) +
    phi1(0,1/2)*phi2(0,1/2))/6;
Mg(1,3) = (phi1(1/2,0)*phi3(1/2,0) + phi1(1/2,1/2)*phi3(1/2,1/2) +
    phi1(0,1/2)*phi3(0,1/2))/6;
Mg(2,1) = Mg(1,2);
Mg(3,1) = Mg(1,3);
Mg(2,3) = (phi2(1/2,0)*phi3(1/2,0) + phi2(1/2,1/2)*phi3(1/2,1/2) +
    phi2(0,1/2)*phi3(0,1/2))/6;
Mg(3,2) = Mg(2,3);

```

```

% No puedo precalcular las otras dos matrices y el vector F
Rg = zeros(3,3);
Cg = zeros(3,3);
Fg = zeros(3,1);

% Bucle principal. Calculo de las matrices.
printf("Ensamblando matrices:");
for i=1:Ne

    if(floor(100*i/Ne) != floor(100*(i-1)/Ne))
        printf(" %i",floor(100*i/Ne));
    endif

    i1 = TRI(i,1);
    i2 = TRI(i,2);
    i3 = TRI(i,3);
    T = Area(X(i1),Y(i1),X(i2),Y(i2),X(i3),Y(i3)); % Area triangulo
    J = zeros(2,2); % Matriz Jacobiana transformacion
    J(1,1) = X(i2) - X(i1);
    J(1,2) = X(i3) - X(i1);
    J(2,1) = Y(i2) - Y(i1);
    J(2,2) = Y(i3) - Y(i1);
    Jinv = inv(J);

    % Vector d
    f12 = (F(i1) + F(i2))/2;
    f13 = (F(i1) + F(i3))/2;
    f23 = (F(i2) + F(i3))/2;
    Fg(1) = (phi1(1/2,0)*f12 + phi1(1/2,1/2)*f23 + phi1(0,1/2)*f13)/6;
    Fg(2) = (phi2(1/2,0)*f12 + phi2(1/2,1/2)*f23 + phi2(0,1/2)*f13)/6;
    Fg(3) = (phi3(1/2,0)*f12 + phi3(1/2,1/2)*f23 + phi3(0,1/2)*f13)/6;

    d(TRI(i,:)) += Fg*2*T;

    if bOnly_d
        continue;
    endif

    % Ensamblado de la matriz de masas
    M(TRI(i,:),TRI(i,:)) += Mg*2*T;

    % Ensamblado de la matriz de rigidez
    grad1 = Jinv'*grad1g;
    grad2 = Jinv'*grad2g;
    grad3 = Jinv'*grad3g;
    Rg(1,1) = grad1'*grad1;

```

```

Rg(1,2) = grad1'*grad2;
Rg(1,3) = grad1'*grad3;
Rg(2,1) = grad2'*grad1;
Rg(2,2) = grad2'*grad2;
Rg(2,3) = grad2'*grad3;
Rg(3,1) = grad3'*grad1;
Rg(3,2) = grad3'*grad2;
Rg(3,3) = grad3'*grad3;
R(TRI(i,:),TRI(i,:)) += Rg*T;

% Ensamblado de la matriz de conveccion
if bIsFunction
    xph = @(x,y) [X(i1); Y(i1)] + J*[x;y];
    Bhat = @(x,y) b(xph(x,y)(1), xph(x,y)(2));
elseif B(1) !=0 && B(2) != 0
    Bhat = @(x,y) [B(1); B(2)];
endif

if bIsFunction || (B(1) !=0 && B(2) != 0)
    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi1(x,y)*grad1;
    Cg(1,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi1(x,y)*grad2;
    Cg(1,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi1(x,y)*grad3;
    Cg(1,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi2(x,y)*grad1;
    Cg(2,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi2(x,y)*grad2;
    Cg(2,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi2(x,y)*grad3;
    Cg(2,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi3(x,y)*grad1;
    Cg(3,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi3(x,y)*grad2;
    Cg(3,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
    f = @(x,y) Bhat(x,y)'*phi3(x,y)*grad3;
    Cg(3,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

    C(TRI(i,:),TRI(i,:)) += Cg*T*2;
endif
endfor

elapsed_time = etime(clock(), t0);
printf("\nTiempo empleado: %f segundos\n", elapsed_time);
endfunction % fem_mrc

```

9.2 Rutina *fem_robin*

```

% [AR DR] = fem_robin(X, Y, TRI, G, ALPHA)
% X e Y vectores columna. TRI conectividad de triangulos. Siendo u la funcion
% solucion, G es la proyeccion del gradiente de u sobre el vector normal n al
% contorno. ALPHA es el coeficiente que multiplica a u. Es decir:
%
%           ALPHA*u + K*grad(u).n = G
% K es el coeficiente del gradiente de u en la ecuacion diferencial.
% El tamano de G y ALPHA es el numero de nodos. Se devuelve el vector DR que
% hay que sumar al termino independiente para imponer la condicion de Robin.
% AR es la matriz que hay que sumar a la matriz original del problema. Es decir
% si el problema en formulacion debil viene dado por el sistema lineal
%
%           A*u = D
% entonces la condicion de contorno se impone modificando A y D de este modo:
%
%           A += AR
%           D += DR
% Si ALPHA es el vector nulo, equivale a imponer una condicion tipo Neumann.
% Nota: La condicion de contorno de conveccion de un fluido sobre un solido
%
%           K*grad(u).n = htc*(u_fluid - u)
% es equivalente siendo ALPHA = htc y G = htc*u_fluido.
% Notese que en la ultima expresion K es el coeficiente del laplaciano en
% la ecuacion diferencial. Si dicha ecuacion se divide por c*rho para que
% la derivada temporal tenga coeficiente 1 en problemas parabolicos, tambien
% hay que dividir por c*rho los inputs G y ALPHA.
%
%
%                               Jose M. Chaquet 7/2/2023
function [AR DR] = fem_robin(X, Y, TRI, G, ALPHA)
    N = length(X); % Numero de nodos
    [Ne aux] = size(TRI); % Ne numero de triangulos
    DR = sparse(N, 1);
    AR = sparse(N, N);
    for i=1:Ne
        i1 = TRI(i,1);
        i2 = TRI(i,2);
        i3 = TRI(i,3);

        if G(i1) ~= 0 && G(i2) ~= 0
            s = hypot(X(i1)-X(i2), Y(i1)-Y(i2));
            DR(i1) += s*((G(i1)/3) + (G(i2)/6));
            DR(i2) += s*((G(i2)/3) + (G(i1)/6));
            aux = s*(ALPHA(i1) + ALPHA(i2))/12;
            AR(i1,i2) += aux;
            AR(i2,i1) += aux;
            AR(i1,i1) += s*(3*ALPHA(i1) + ALPHA(i2))/12;
            AR(i2,i2) += s*(3*ALPHA(i2) + ALPHA(i1))/12;
        endif
    endfor

```

```

if G(i2) ~= 0 && G(i3) ~= 0
    s = hypot(X(i2)-X(i3), Y(i2)-Y(i3));
    DR(i2) += s*((G(i2)/3) + (G(i3)/6));
    DR(i3) += s*((G(i3)/3) + (G(i2)/6));
    aux = s*(ALPHA(i2) + ALPHA(i3))/12;
    AR(i2,i3) += aux;
    AR(i3,i2) += aux;
    AR(i2,i2) += s*(3*ALPHA(i2) + ALPHA(i3))/12;
    AR(i3,i3) += s*(3*ALPHA(i3) + ALPHA(i2))/12;
endif

if G(i1) ~= 0 && G(i3) ~= 0
    s = hypot(X(i1)-X(i3), Y(i1)-Y(i3));
    DR(i1) += s*((G(i1)/3) + (G(i3)/6));
    DR(i3) += s*((G(i3)/3) + (G(i1)/6));
    aux = s*(ALPHA(i1) + ALPHA(i3))/12;
    AR(i1,i3) += aux;
    AR(i3,i1) += aux;
    AR(i1,i1) += s*(3*ALPHA(i1) + ALPHA(i3))/12;
    AR(i3,i3) += s*(3*ALPHA(i3) + ALPHA(i1))/12;
endif

endfor
endfunction % fem_robin

```

9.3 Rutina fem_gradient

```

% [Ux Uy] = fem_gradient(X, Y, TRI, U)
% X e Y vectores columna. TRI conectividad de la malla de triangulos.
% U Campo en los nodos. Calculamos el gradiente del campo U proyectandolo
% sobre el espacio de elementos finitos lineales.
%
%      Jose M. Chaquet 3/04/2023

function [Ux Uy] = fem_gradient(X, Y, TRI, U)
    t0 = clock();
    N = length(X); % Numero de nodos
    [Ne aux] = size(TRI); % Ne numero de triangulos
    Ux = sparse(N,1); % Componente x del gradiente
    Uy = sparse(N,1); % Componente y del gradiente
    M = sparse(N, N); % Matriz de masas
    Cx = sparse(N, N); % Matriz de conveccion x
    Cy = sparse(N, N); % Matriz de conveccion y

```

```

% Informacion del mallado.
printf("Malla de %i nodos y %i triangulos.\n", N, Ne);

% Area de un triangulo. Formula de Heron, numericamente estable
function ret = Area(x1,y1,x2,y2,x3,y3)
    at = hypot(x1-x2,y1-y2);
    bt = hypot(x2-x3,y2-y3);
    ct = hypot(x3-x1,y3-y1);
    [aux aux2] = sort([at bt ct]);
    at = aux(3);
    bt = aux(2);
    ct = aux(1);
    ret = 0.25*sqrt( (at+(bt+ct))*(ct-(at-bt))*(ct+(at-bt))*(at+(bt-ct)) );
endfunction

% Funciones base y sus gradientes en el elemento de referencia
phi1 = @(x,y) 1-x-y;
phi2 = @(x,y) x;
phi3 = @(x,y) y;

grad1g = [-1; -1];
grad2g = [1; 0];
grad3g = [0; 1];

% Pre-calculo la matriz de masas elemental
Mg = zeros(3,3);
Mg(1,1) = (phi1(1/2,0)^2 + phi1(1/2,1/2)^2 + phi1(0,1/2)^2)/6;
Mg(2,2) = (phi2(1/2,0)^2 + phi2(1/2,1/2)^2 + phi2(0,1/2)^2)/6;
Mg(3,3) = (phi3(1/2,0)^2 + phi3(1/2,1/2)^2 + phi3(0,1/2)^2)/6;
Mg(1,2) = (phi1(1/2,0)*phi2(1/2,0) + phi1(1/2,1/2)*phi2(1/2,1/2) +
    phi1(0,1/2)*phi2(0,1/2))/6;
Mg(1,3) = (phi1(1/2,0)*phi3(1/2,0) + phi1(1/2,1/2)*phi3(1/2,1/2) +
    phi1(0,1/2)*phi3(0,1/2))/6;
Mg(2,1) = Mg(1,2);
Mg(3,1) = Mg(1,3);
Mg(2,3) = (phi2(1/2,0)*phi3(1/2,0) + phi2(1/2,1/2)*phi3(1/2,1/2) +
    phi2(0,1/2)*phi3(0,1/2))/6;
Mg(3,2) = Mg(2,3);

% Bucle principal. Calculo de las matrices.
printf("Ensamblando matrices:");
for i=1:Ne

    if(floor(100*i/Ne) != floor(100*(i-1)/Ne))
        printf(" %i",floor(100*i/Ne));
    endif
endfor

```

```

i1 = TRI(i,1);
i2 = TRI(i,2);
i3 = TRI(i,3);
T = Area(X(i1),Y(i1),X(i2),Y(i2),X(i3),Y(i3)); % Area triangulo
J = zeros(2,2); % Matriz Jacobiana transformacion
J(1,1) = X(i2) - X(i1);
J(1,2) = X(i3) - X(i1);
J(2,1) = Y(i2) - Y(i1);
J(2,2) = Y(i3) - Y(i1);
Jinv = inv(J);

% Ensamblado de la matriz de masas
M(TRI(i,:),TRI(i,:)) += Mg*2*T;

% Matriz Cx
grad1 = Jinv'*grad1g;
grad2 = Jinv'*grad2g;
grad3 = Jinv'*grad3g;

f = @(x,y) [1;0]'*phi1(x,y)*grad1;
Cg(1,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [1;0]'*phi1(x,y)*grad2;
Cg(1,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [1;0]'*phi1(x,y)*grad3;
Cg(1,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

f = @(x,y) [1;0]'*phi2(x,y)*grad1;
Cg(2,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [1;0]'*phi2(x,y)*grad2;
Cg(2,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [1;0]'*phi2(x,y)*grad3;
Cg(2,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

f = @(x,y) [1;0]'*phi3(x,y)*grad1;
Cg(3,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [1;0]'*phi3(x,y)*grad2;
Cg(3,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [1;0]'*phi3(x,y)*grad3;
Cg(3,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

Cx(TRI(i,:),TRI(i,:)) += Cg*T*2;

% Matriz Cy
f = @(x,y) [0;1]'*phi1(x,y)*grad1;
Cg(1,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [0;1]'*phi1(x,y)*grad2;

```

```

Cg(1,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [0;1]'*phi1(x,y)*grad3;
Cg(1,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

f = @(x,y) [0;1]'*phi2(x,y)*grad1;
Cg(2,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [0;1]'*phi2(x,y)*grad2;
Cg(2,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [0;1]'*phi2(x,y)*grad3;
Cg(2,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

f = @(x,y) [0;1]'*phi3(x,y)*grad1;
Cg(3,1) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [0;1]'*phi3(x,y)*grad2;
Cg(3,2) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;
f = @(x,y) [0;1]'*phi3(x,y)*grad3;
Cg(3,3) = (f(1/2,0)+f(1/2,1/2)+f(0,1/2))/6;

Cy(TRI(i,:),TRI(i,:)) += Cg*T*2;
endfor

Ux = M\(Cx*U);
Uy = M\Cy*U);

elapsed_time = etime(clock(), t0);
printf("\nTiempo empleado: %f segundos\n", elapsed_time);
endfunction % fem_gradient

```

9.4 Rutina `mesh_block`

```

% [X Y TRI F] = mesh_block(Xc, Yc, n1, n2)
% Genera un mallado de triangulos dados 4 corner points. Se dan ordenados
% segun se indica:
%
%           n2 puntos > 2
%   Xc(2),Yc(2)-----Xc(3),Yc(3)
%   |                               |
%   |                               | n1 puntos
%   |                               |
%   Xc(1),Yc(1)-----Xc(4),Yc(4)
%
% En F tenemos los indices de los nodos del contorno.
%
%                               Jose M. Chaquet 9/2/2023
function [X Y TRI F] = mesh_block(Xc, Yc, n1, n2)

```

```

function [Xe Ye] = mesh_edge(X_, Y_, n)
    Xe = Ye = zeros(n,1);
    for i=1:n
        Xe(i) = X_(1)+(i-1)*(X_(2)-X_(1))/(n-1);
        Ye(i) = Y_(1)+(i-1)*(Y_(2)-Y_(1))/(n-1);
    endfor
endfunction % mesh_edge

X = XInt = zeros(0,1);
Y = YInt = zeros(0,1);

Xbottom = Ybottom = XbotInt = YbotInt = zeros(n2,1);
[Xbottom Ybottom] = mesh_edge([Xc(1); Xc(4)], [Yc(1); Yc(4)], n2);
[XbotInt YbotInt] = mesh_edge([1; n2], [1; 1], n2);

Xtop = Ytop = zeros(n2,1);
XtopInt = YtopInt = zeros(n2,1);
[Xtop Ytop] = mesh_edge([Xc(2); Xc(3)], [Yc(2); Yc(3)], n2);
[XtopInt YtopInt] = mesh_edge([1; n2], [n1; n1], n2);

X_ = Y_ = zeros(2,1);

% Genera malla en nodos fisicos
for i=1:n2
    X_(1) = Xbottom(i);
    X_(2) = Xtop(i);
    Y_(1) = Ybottom(i);
    Y_(2) = Ytop(i);
    [Xe Ye] = mesh_edge(X_, Y_, n1);
    if i==1
        X = Xe;
        Y = Ye;
    else
        X = [X; Xe];
        Y = [Y; Ye];
    endif
endfor

% Genera malla en espacio transformado para delaunay
for i=1:n2
    X_(1) = XbotInt(i);
    X_(2) = XtopInt(i);
    Y_(1) = YbotInt(i);
    Y_(2) = YtopInt(i);
    [Xe Ye] = mesh_edge(X_, Y_, n1);
    if i==1
        XInt = Xe;

```

```

        YInt = Ye;
    else
        XInt = [XInt; Xe];
        YInt = [YInt; Ye];
    endif
endfor

F = [1:n1]';
for i=1:n2-2
    F = [F; i*n1+1; i*n1+n1];
endfor
F = [F; [n1*(n2-1)+1:n1*n2]'];

    TRI = delaunay(XInt, YInt);
endfunction % mesh_block

```

9.5 Rutina mesh_block_hermite

```

% [X Y TRI F] = mesh_block_hermite(Xc, Yc, DYc, n1, n2)
% Genera un mallado de triangulos dados 4 corner points y 4 derivadas
% Las derivadas corresponde a los valores extremos de las curvas que unen
% el nodo 1 con el 4 y el 2 con el 3. La ordenacion de los vectores
% de coordenadas y de derivadas es la que se indica:
%
%
%           n2 puntos > 2
%   Xc(2),Yc(2)-----Xc(3),Yc(3)
%   |                   |
%   |                   | n1 puntos
%   |                   |
%   Xc(1),Yc(1)-----Xc(4),Yc(4)
%
% En F tenemos los indices de los nodos del contorno. Se utiliza
% interpolacion cubica.
%
%                               Jose M. Chaquet 14/3/2023
function [X Y TRI F] = mesh_block_hermite(Xc, Yc, DYc, n1, n2)

function [Xe Ye] = mesh_edge(X_, Y_, n)
    Xe = Ye = zeros(n,1);
    for i=1:n
        Xe(i) = X_(1)+(i-1)*(X_(2)-X_(1))/(n-1);
        Ye(i) = Y_(1)+(i-1)*(Y_(2)-Y_(1))/(n-1);
    endfor
endfunction % mesh_edge

```

```

function [a] = mesh_hermit(X_, Y_, DY_)
  A = [1 X_(1) X_(1)^2 X_(1)^3; ...
        0 1      2*X_(1) 3*X_(1)^2;...
        1 X_(2) X_(2)^2 X_(2)^3; ...
        0 1      2*X_(2) 3*X_(2)^2];
  d = [Y_(1); DY_(1); Y_(2); DY_(2)];
  a = A\d;
endfunction

X = XInt = zeros(0,1);
Y = YInt = zeros(0,1);

Xbottom = Ybottom = XbotInt = YbotInt = zeros(n2,1);

[XbotInt YbotInt] = mesh_edge([1; n2], [1; 1], n2);
[Xbottom Ybottom] = mesh_edge([Xc(1); Xc(4)], [Yc(1); Yc(4)], n2);
a = mesh_hermit([Xc(1);Xc(4)], [Yc(1);Yc(4)], [DYc(1);DYc(4)]);
fbot = @(x) a(1) + a(2)*x + a(3)*x.^2 + a(4)*x.^3;
Ybottom = fbot(Xbottom);

Xtop = Ytop = XtopInt = YtopInt = zeros(n2,1);
[Xtop Ytop] = mesh_edge([Xc(2); Xc(3)], [Yc(2); Yc(3)], n2);
[XtopInt YtopInt] = mesh_edge([1; n2], [n1; n1], n2);
a = mesh_hermit([Xc(2);Xc(3)], [Yc(2);Yc(3)], [DYc(2);DYc(3)]);
ftop = @(x) a(1) + a(2)*x + a(3)*x.^2 + a(4)*x.^3;
Ytop = ftop(Xtop);

X_ = Y_ = zeros(2,1);

% Genera malla en nodos fisicos
for i=1:n2
  X_(1) = Xbottom(i);
  X_(2) = Xtop(i);
  Y_(1) = Ybottom(i);
  Y_(2) = Ytop(i);
  [Xe Ye] = mesh_edge(X_, Y_, n1);
  if i==1
    X = Xe;
    Y = Ye;
  else
    X = [X; Xe];
    Y = [Y; Ye];
  endif
endfor

% Genera malla en espacio transformado para delaunay
for i=1:n2

```

```

X_(1) = XbotInt(i);
X_(2) = XtopInt(i);
Y_(1) = YbotInt(i);
Y_(2) = YtopInt(i);
[Xe Ye] = mesh_edge(X_, Y_, n1);
if i==1
    XInt = Xe;
    YInt = Ye;
else
    XInt = [XInt; Xe];
    YInt = [YInt; Ye];
endif
endfor

F = [1:n1]';
for i=1:n2-2
    F = [F; i*n1+1; i*n1+n1];
endfor
F = [F; [n1*(n2-1)+1:n1*n2]'];

TRI = delaunay(XInt, YInt);
endfunction % mesh_block

```

9.6 Rutina `mesh_triangle`

```

% [X Y TRI F] = mesh_triangle(Xc, Yc, n1, n2)
% Genera un mallado de triangulos dados 3 corner points. Se dan ordenados
% segun se indica:
%
%      Xc(2),Yc(2)
%      |           \
%      | n1 puntos  \
%      |           \
%      Xc(1),Yc(1)-----Xc(3),Yc(3)
%                      n2 puntos > 2
% En F tenemos los indices de los nodos del contorno.
%
%                                     Jose M. Chaquet 12/2/2023
function [X Y TRI F] = mesh_triangle(Xc, Yc, n1, n2)

function [Xe Ye] = mesh_edge(X_, Y_, n)
    Xe = Ye = zeros(n,1);
    for i=1:n
        Xe(i) = X_(1)+(i-1)*(X_(2)-X_(1))/(n-1);
        Ye(i) = Y_(1)+(i-1)*(Y_(2)-Y_(1))/(n-1);
    endfor
endfunction

```

```

    endfor
endfunction % mesh_edge

X = zeros(0,1);
Y = zeros(0,1);

Xbottom = Ybottom = zeros(n2,1);
[Xbottom Ybottom] = mesh_edge([Xc(1); Xc(3)], [Yc(1); Yc(3)], n2);

Xtop = Ytop = zeros(n2,1);
[Xtop Ytop] = mesh_edge([Xc(2); Xc(3)], [Yc(2); Yc(3)], n2);

X_ = Y_ = zeros(2,1);
F = zeros(0,1);

% Genera malla en nodos fisicos
count = 0;
for j=1:n2-1
    X_(1) = Xbottom(j);
    X_(2) = Xtop(j);
    Y_(1) = Ybottom(j);
    Y_(2) = Ytop(j);
    n = ceil((n1-1)*(1-(j-1)/n2)) + 1;
    [Xe Ye] = mesh_edge(X_, Y_, n);

    if j==1
        X = Xe;
        Y = Ye;
        F = [1:n]';
        count = n;
    else
        X = [X; Xe];
        Y = [Y; Ye];
        F = [F; count+1; count+n];
        count = count + n;
    endif
endfor
X = [X; Xc(3)];
Y = [Y; Yc(3)];
F = [F; count+1];

TRI = delaunay(X, Y);
endfunction % mesh_block

```

9.7 Rutina `mesh_meld`

```

% [X Y TRI F] = mesh_meld(X1, Y1, TRI1, F1, X2, Y2, TRI2, F2)
% Une dos mallas de triangulos por los nodos coincidentes de la frontera.
% Devuelve la nueva frontera en el vector F, incluyendo el contacto
% entre las nuevas mallas si el flag bKeepF es true.
%
%                               Jose M. Chaquet 9/2/2023
function [X Y TRI F] = mesh_meld(X1, Y1, TRI1, F1, X2, Y2, TRI2, F2, bKeepF)
    TOL = 1e-5;
    N1 = length(X1); % Numero de nodos
    [Ne1 aux] = size(TRI1); % Ne1 numero de triangulos
    N2 = length(X2); % Numero de nodos
    [Ne2 aux] = size(TRI2); % Ne1 numero de triangulos

    % Busca los nodos iguales
    SAME = zeros(0,2); %nodo en malla 1 y en malla 2
    Norder = zeros(N2,1); % Nueva numeracion de la malla2

    for i1=1:length(F1)
        for i2=1:length(F2)
            %if [X1(F1(i1)) Y1(F1(i1))] == [X2(F2(i2)) Y2(F2(i2))]
            if abs(X1(F1(i1))-X2(F2(i2)))<TOL && abs(Y1(F1(i1))-Y2(F2(i2)))<TOL
                SAME = [SAME; F1(i1) F2(i2)];
                Norder(F2(i2)) = F1(i1);
                break;
            endif
        endfor
    endfor
    [Nsame aux] = size(SAME);

    count = N1;
    for i=1:N2
        if Norder(i) == 0
            count++;
            Norder(i) = count;
        endif
    endfor

    X2(SAME(:,2))=[];
    Y2(SAME(:,2))=[];
    X = [X1; X2];
    Y = [Y1; Y2];
    TRI = [TRI1; TRI2];
    for i=Ne1+1:Ne1+Ne2
        TRI(i,1) = Norder(TRI(i,1));
        TRI(i,2) = Norder(TRI(i,2));
    endfor

```

```

    TRI(i,3) = Norder(TRI(i,3));
endfor

F = [F1; F2];
for i=length(F1)+1:length(F1)+length(F2)
    F(i) = Norder(F(i));
endfor

F = unique(F);

if ~bKeepF
    removeF = zeros(0,1);
    %k = 0;
    for i=1:length(F)
        for j=1:Nsame
            if F(i) == SAME(j,1);
                %k++;
                removeF = [removeF; i];
                break;
            endif
        endfor
    endfor
    %F
    %removeF
    F(removeF)=[]; % Se pierde dos nodos
endif

endfunction % mesh_meld

```

9.8 Rutina `mesh_remove`

```

% [X Y TRI F] = mesh_remove(X1, Y1, TRI1, F1, X2, Y2)
% Quita de una malla previa los triangulos que continen a unos puntos dados.
% Devuelve la nueva frontera en el vector F. Para que funcione bien, los punots
% X2 y Y2 deben ser mas densos que los X1 e Y1.
%
%
%                               Jose M. Chaquet 10/2/2023
function [X Y TRI F] = mesh_remove(X1, Y1, TRI1, F1, X2, Y2)
    N1 = length(X1); % Numero de nodos
    [Ne1 aux] = size(TRI1); % Ne1 numero de triangulos
    N2 = length(X2); % Numero de nodos

    % Busca los triangulos
    triremove = zeros(N2,1);
    for i=1:N2

```

```
    triremove(i) = tsearch(X1, Y1, TRI1, X2(i), Y2(i));
endfor
triremove = triremove(~isnan(triremove));
triremove = unique(triremove);

F = F1;
for i=1:length(triremove)
    F = [F; TRI1(triremove,1); TRI1(triremove,2); TRI1(triremove,3)];
endfor
TRI = TRI1;
TRI(triremove,:) = [];
[Ne aux] = size(TRI);

% remove not used nodes
used = zeros(N1,1);
for i=1:Ne
    used(TRI(i,1)) = used(TRI(i,1))+1;
    used(TRI(i,2)) = used(TRI(i,2))+1;
    used(TRI(i,3)) = used(TRI(i,3))+1;
endfor
neworder = zeros(N1,1);
k = 0;
for i=1:N1
    if used(i)~=0
        k = k+1;
        neworder(i) = k;
    endif
endfor

X = X1;
Y = Y1;

X(neworder==0)=[];
Y(neworder==0)=[];

for i=1:Ne
    TRI(i,1) = neworder( TRI(i,1));
    TRI(i,2) = neworder( TRI(i,2));
    TRI(i,3) = neworder( TRI(i,3));
endfor

for i=1:length(F)
    F(i) = neworder(F(i));
endfor

F(F==0) = [];
F = unique(F);
```

```
endfunction % mesh_block
```

9.9 Ejemplo 7.1

```
%Ejemplo 7.1
clear;

% mallado
[x y tri f] = mesh_block([-1;-1;1;1], [0;1;1;0], 15, 15);
Ts = 100; % Tiempo de simulacion en segundos
dt = 1; % Delta de tiempo
T = 0:dt:Ts;
N = length(x); %Numero de nodos
Nt = length(T); % Numero de instantes temporales
front1 = find(y==0); % Frontera con condicion Dirichlet
front2 = find(y==1); % Frontera con condicion Robin

figure (1); %Pintar mallado...
triplot(tri, x, y); hold on;
plot(x(front1), y(front1), 'o');
plot(x(front2), y(front2), '*'); hold off;

% Parametros y condiciones de contorno
K = 300; % Conductividad metal [W/m.K]
a = 0; % Coeficiente u
b = 0; % Coeficiente grad
cp = 450; % Calor especifico hierro [J/Kg.K]
rho = 7800; % Densidad hierro [kg/m3]
u0 = 200; %Solucion inicial
g = @(x,y,t) u0+5*t/Ts; % [K] Condicion Dirichlet
HTC = @(x,y,t) 5000*(2-x*x); % HTC [W/m.K]
Tfluid = @(x,y,t) u0-10*t/Ts; % [K] Temperatura del fluido

% Termino fuente
function q = fuente(x,y,t,Ts)
    if t>Ts/2
        q = 0;
    else
        if -0.5<x && x<0.5 && 0.25<y && y<0.75
            q = 1e6*(Ts-2*t)/Ts; %W/m3
        else
            q = 0;
        end
    end
end
```

```

end

function F = fuenteVector(x,y,t,Ts,cprho)
    F = zeros(length(x),1);
    for i=1:length(x)
        F(i) = fuente(x(i),y(i),t,Ts)/cprho;
    end
end

F = fuenteVector(x,y,T(1),Ts,cp*rho); %Evaluacion de la fuente en t+1

% Vector solucion
uht = zeros(N,Nt); % Filas -> nodos; Columnas -> tiempos
uht(:,1) = u0; % Solucion inicial
for i=1:length(front1)
    j = front1(i);
    uht(j,1) = g(x(j), y(j), T(1)); %Condicion Dirichlet
end

% Obtencion de las matrices
k = K/(cp*rho); b_ = b/(cp*rho); a_ = a/(cp*rho);
[M R C D] = fem_mrc(x, y, tri, F, b_, false);
A = (1 + a_*dt/2)*M + (dt/2)*(C+k*R);
B = (1 - a_*dt/2)*M - (dt/2)*(C+k*R);

% Condicion Robin
G = ALPHA = sparse(N, 1);
for i=1:length(front2)
    j=front2(i);
    ALPHA(j) = HTC(x(j),y(j),T(1))./(cp*rho);
    G(j) = ALPHA(j)*Tfluid(x(j),y(j),T(1));
end
[AR DR] = fem_robin(x, y, tri, G, ALPHA);

% Resolver
for t=2:Nt
    printf("Resolviendo instante t=%f s\n", T(t));

    %Condicion Dirichlet (matriz)
    AO = A;
    AO(front1,:) = 0;
    AO(:,front1) = 0;
    for j=1:length(front1)
        AO(front1(j),front1(j)) = 1;
    endfor

    % Fuente

```

```

D_ = D;
F = fuenteVector(x,y,T(t),Ts,cp*rho);
[M_ R_ C_ D] = fem_mrc(x, y, tri, F, b_, true);

%Condicion Robin
AR_ = AR;
DR_ = DR;
BO = B;
for i=1:length(front2)
    j=front2(i);
    ALPHA(j) = HTC(x(j),y(j),T(t))./(cp*rho);
    G(j) = ALPHA(j)*Tfluid(x(j),y(j),T(t));
end
[AR DR] = fem_robin(x, y, tri, G, ALPHA);

AO += dt*AR/2;
BO -= dt*AR_/2;

% Termino independiente
Bu = BO*uht(:,t-1) + dt*0.5*(D_+D+DR+DR_);

%Condicion Dirichlet (solucion)
for i=1:length(front1)
    j=front1(i);
    uht(j,t) = g(x(j), y(j), T(t));
end

%Condicion Dirichlet (termino independiente)
for i=1:N
    for j=1:length(front1)
        n = front1(j);
        if i==n
            Bu(i) = g(x(i), y(i), T(t));
        else
            Bu(i) -= A(i,n)*g(x(n), y(n), T(t));
        end
    end
end
end

uht(:,t) = AO\Bu;
endfor

% Pintar solucion
figure (2)
colormap("hot");

for t=1:Nt

```

```
    trisurf(tri,x,y,uht(:,t));
    title (sprintf("t = %f s", T(t)));
    xlabel ("x");
    ylabel ("y");
    zlabel ("temperatura grados C");
    shading("interp");
    colorbar();
    %waitforbuttonpress();
    pause(0.1);
endfor
```