



Universidad Politécnica  
de Madrid  
Escuela Técnica Superior de  
Ingenieros Informáticos  
Grado en Ingeniería Informática



## **Trabajo Fin de Grado**

**MÁS ALLÁ DE LOS MODELOS FINANCIEROS TRADICIONALES: MODELOS  
MULTIFRACTALES PARA PRECIOS INTRADÍA**

Autor: Daniel Hurtado Platero

Tutora: M. del Carmen Escribano Iglesias

Cotutor: Juan Pablo Jimeno

Shanghái, junio 2024

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Informática

*Título:* Más Allá de los Modelos Financieros Tradicionales: Modelos Multifractales para Precios Intradía

Junio 2024

Autor:

Daniel Hurtado Platero

Gmail:

[daniel.hurtado.platero@alumnos.upm.es](mailto:daniel.hurtado.platero@alumnos.upm.es)

[daniel12.hurtado12@gmail.com](mailto:daniel12.hurtado12@gmail.com)

Linkedin:

<https://www.linkedin.com/in/daniel-hurtado-4037221ba>

Tutor:

M. del Carmen Escribano Iglesias

Matemáticas Aplicadas

ETS Ingenieros Informáticos

Universidad Politécnica de Madrid

Co-tutor:

Juan Pablo Jimeno

Ingeniería de Administración y Organización de Empresas

ETS Ingenieros Industriales

Universidad Politécnica de Madrid

## Resumen

Este trabajo de fin de grado tiene como objetivo implementar y estudiar un nuevo modelo multifractal con el que se pueda representar de forma realista los precios de los activos financieros a escala intradía, modelando de forma precisa los movimientos tick a tick a lo largo de días completos. Este esfuerzo se basa en la necesidad de superar las limitaciones de los modelos financieros clásicos, que simplifican excesivamente la naturaleza compleja y caótica de los mercados financieros.

La motivación principal de este estudio radica en la observación de que los modelos tradicionales, como el Modelo de Black-Scholes, el Capital Asset Pricing Model (CAPM) y el Valor en Riesgo (VaR), no logran capturar adecuadamente las características estadísticas de los retornos financieros, especialmente a escalas pequeñas. Se han ido proponiendo mejoras que permitan a estos modelos ser más realistas, centrándose la mayoría de estas propuestas en añadir volatilidades estocásticas. Sin embargo, hay muy pocas propuestas sobre modelos que se enfoquen en escalas intradía o de ticks.

El trabajo comienza con un análisis detallado de las distribuciones de retornos del EURUSD a diferentes escalas, resaltando la importancia de la curtosis, valor que describe que tan pronunciadas son las colas de una distribución, y cómo esta aumenta cuanto menor es la escala de observación. A continuación, se estudia e implementa el MMAR (Multifractal Model for Asset Returns), modelo propuesto por Mandelbrot para estudiar modelos más realistas que mantengan la consistencia de escala y la memoria a largo plazo en la varianza de los retornos.

Desarrollamos un modelo basado en la idea del MMAR de separar el tiempo y el precio para modelar tick a tick los retornos de días enteros manteniendo la consistencia estadística a diferentes escalas, teniendo en cuenta la memoria larga y tendencia diaria de la volatilidad y desarrollando lo de tal forma para que se obtengan resultados difícilmente distinguibles de datos reales.

El trabajo concluye estudiando los resultados de dicho modelo y sugiriendo futuras mejoras. Además, estudiamos los posibles campos financieros en los que las cualidades de nuestro modelo podrían ser útiles en casos reales.

## **Abstract**

This thesis aims to implement and study a new multifractal model that can realistically represent the prices of financial assets on an intraday scale, precisely modeling tick-by-tick movements over entire days. This effort is based on the need to overcome the limitations of classical financial models, which overly simplify the complex and chaotic nature of financial markets.

The primary motivation for this study lies in the observation that traditional models, such as the Black-Scholes Model, the Capital Asset Pricing Model (CAPM), and Value at Risk (VaR), fail to adequately capture the statistical characteristics of financial returns, especially on small scales. Improvements have been proposed to make these models more realistic, with most of these proposals focusing on adding stochastic volatilities. However, there are very few proposals for models that focus on intraday or tick scales.

The work begins with a detailed analysis of the return distributions of EURUSD at different scales, highlighting the importance of kurtosis, a measure that describes how pronounced the tails of a distribution are, and how this increases as the observation scale decreases. Next, the MMAR (Multifractal Model for Asset Returns) is studied and implemented, a model proposed by Mandelbrot to develop more realistic models that maintain scale consistency and long-term memory in the variance of returns.

We develop a model based on the idea of the MMAR of separating time and price to model tick-by-tick returns over entire days while maintaining statistical consistency at different scales, taking into account long memory and daily trends in volatility, and developing it in such a way that results are obtained that are difficult to distinguish from real data.

The work concludes by studying the results of this model and suggesting future improvements. Additionally, we explore the potential financial fields where the qualities of our model could be useful in real-world applications.

# Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Objetivos</b> .....	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Estudio de la distribución de retornos financieros</b> .....	<b>4</b>
3.1	Selección y obtención de datos .....	4
3.2	Análisis de retornos.....	4
3.2.1	Análisis de retornos diarios.....	6
3.2.2	Análisis de retornos intradiarios .....	8
3.2.3	Análisis de ticks.....	10
3.3	Observaciones .....	12
<b>4</b>	<b>Modelos financieros tradicionales</b> .....	<b>13</b>
4.1	Modelo de Black Scholes Merton .....	13
4.2	Modelos VaR .....	16
4.3	Modelo CAPM.....	16
4.4	Observación .....	17
<b>5</b>	<b>Modelo clásico multifractal</b> .....	<b>20</b>
5.1	¿Qué es un multifractal?.....	20
5.2	Aplicación de modelos multifractales a finanzas .....	24
5.3	Introducción.....	24
5.3.1	Recopilación de datos y cálculo de los retornos de cada observación 25	
5.3.2	Cálculo de las funciones de partición con diferentes “q”.....	25
5.3.3	Estimación de la función de escalado .....	26
5.3.4	Estimación del exponente de Hurst.....	27
5.3.5	Obtención del espectro multifractal $f(\alpha)$ mediante la transformada de Lagrange .....	28
5.3.6	Estimación de la media y varianza para la distribución log-normal para la generación del tiempo .....	29
5.3.7	Simulación de tiempo .....	30
5.3.8	Simulación de movimiento browniano fraccional .....	32
5.3.9	Poniendo el tiempo y precio generados juntos .....	33
5.4	Conclusiones.....	34
<b>6</b>	<b>Modelo Multifractal Intra-diario</b> .....	<b>36</b>
6.1	Objetivo.....	36
6.2	Construcción e implementación .....	37
6.2.1	Obtención de datos.....	38
6.2.2	Obtención de la media de tiempos entre ticks de cada hora del día 38	
6.2.3	Obtención de GARCH.....	39
6.2.4	Simular tiempo .....	39

6.2.5	Obtencion de exponentes de Hurst .....	42
6.2.6	Generar FBM con distribuciones t_student.....	44
6.2.7	Juntar tiempo y precio.....	46
<b>7</b>	<b>Resultados y conclusiones .....</b>	<b>49</b>
7.1	Resultados .....	49
7.2	Conclusiones.....	50
7.3	Futuras Mejoras.....	51
<b>8</b>	<b>Aplicaciones .....</b>	<b>52</b>
8.1	Valoración de Derivados.....	52
8.2	Trading de Alta Frecuencia.....	52
8.3	Análisis de Riesgos y Simulaciones para Backtesting .....	52
8.4	Conclusión .....	53
<b>9</b>	<b>Análisis de Impacto .....</b>	<b>54</b>
9.1	Impacto Personal.....	54
9.2	Impacto Empresarial.....	54
9.3	Impacto Social.....	54
9.4	Impacto Medioambiental .....	55
9.5	Impacto Cultural.....	55
9.6	Impacto en los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS).....	55
<b>10</b>	<b>Bibliografía .....</b>	<b>56</b>

# 1 Introducción

La estabilidad global está íntimamente ligada a la salud de los mercados financieros. Los principales participantes, y por tanto influyentes, de estos mercados son los bancos y fondos de inversión. Únicamente en el mercado de divisas se mueven de media más de 6 billones de dólares diarios.

La crisis financiera de 2008 mostró al mundo cómo subestimaciones en el riesgo asumido por estas entidades puede llevar a una reacción en cadena con consecuencias devastadoras. La quiebra de Lehman Brothers y el colapso de los derivados hipotecarios llevaron a una crisis de confianza que paralizó el crédito global, resultando en quiebras empresariales, aumento del desempleo y rescates financieros masivos por parte de los gobiernos.

Los principales objetivos de los bancos y fondos de inversión en el sector financiero son el manejo eficaz del riesgo y la maximización de los beneficios financieros. Para lograr estos objetivos, los bancos necesitan herramientas cuantitativas sólidas que les permitan comprender y predecir el comportamiento de los mercados. Los modelos financieros son fundamentales para evaluar el riesgo de inversión, crear modelos para derivados financieros y para hacer pruebas de estrés de estrategias de trading.

Los modelos financieros tradicionales, como el Modelo de Black-Scholes [6] y el Valor en Riesgo (VaR), se basan en supuestos sobre cómo son las distribuciones de los retornos financieros. El Modelo de Black-Scholes, por ejemplo, asume que los rendimientos de los activos siguen una distribución lognormal, produciendo un movimiento geométrico browniano. Por otro lado, el VaR estima el riesgo al cuantificar la pérdida máxima esperada en un nivel de confianza dado, asumiendo también distribuciones normales de los rendimientos.

En "The Misbehaviour of Markets" (2003) [1], Mandelbrot critica los modelos financieros tradicionales, como el Modelo de Black-Scholes y el VaR, por su simplificación excesiva de la realidad de los mercados financieros. Argumenta que estos modelos asumen distribuciones de probabilidad que no reflejan la naturaleza caótica y no lineal de los datos financieros reales. Expone la subestimación de la frecuencia de eventos extremos, como los crashes financieros. Y, por último, se sostiene que los mercados exhiben patrones caóticos y fractales. Todo esto desafía las premisas de independencia y distribución normal en los modelos convencionales. ¿Estaban los bancos e instituciones financieras asumiendo riesgos mayores a los estimados?

El sistema multifractal de Mandelbrot [2] introduce la idea de la geometría fractal en la modelización financiera, lo que permite capturar la naturaleza intrínsecamente caótica y no lineal de los mercados. Al considerar la heterogeneidad y la dependencia a lo largo del tiempo de los rendimientos financieros, el modelo multifractal ofrece una representación más precisa de la complejidad de los mercados, lo cual puede facilitar a los bancos y fondos de inversión a mejorar la gestión del riesgo, optimizar las estrategias de inversión y tomar decisiones más informadas en un entorno financiero cada vez más volátil y complejo.

La evolución de los modelos multifractales ha sido notable en las últimas décadas. Inicialmente, se basaban en conceptos teóricos sobre la teoría del caos

y la geometría fractal, como los introducidos por Mandelbrot. Sin embargo, a medida que la investigación avanzaba con aportaciones como las de Edgar E. Peters en “Fractal Market análisis”[4], se desarrollaron métodos más sofisticados para estimar y aplicar estos modelos en entornos financieros reales.

Los avances en la tecnología computacional también han contribuido a la evolución de los modelos multifractales, permitiendo análisis más detallados de grandes conjuntos de datos y una mejor calibración de los modelos a la complejidad observada en los mercados financieros.

Hoy en día, los modelos multifractales se aplican en una variedad de áreas financieras como la predicción de precios, manejo de riesgo y el trading de alta frecuencia. A pesar de esto, todavía enfrentan desafíos en términos de interpretación, calibración y capacidades que los cuales estudiaremos a lo largo de este trabajo.

La gran mayoría de estos modelos multifractales se usan para modelar retornos diarios o unos pocos ticks (movimiento mínimo del mercado) pero no se usan para ambos a la vez. En este trabajo se desarrollará un modelo multifractal con el cual se pueda modelar tick a tick días enteros.

## 2 Objetivos

Los objetivos del estudio son:

1. Entender las distribuciones de los retornos a diferentes escalas, los modelos financieros clásicos y el modelo multifractal clásico (MMAR).
2. Diseñar un modelo multifractal con el que modelar tick a tick días enteros manteniendo las propiedades estadísticas de los retornos a diferentes escalas.
3. Estudiar el modelo diseñado, ver sus capacidades y encontrar aplicaciones prácticas del modelo en el mundo financiero.

# 3 Estudio de la distribución de retornos financieros

## 3.1 Selección y obtención de datos

El mercado financiero más grande del mundo es el Forex, y dentro de este, el activo con mayor volumen de transacciones es el EURUSD. El EURUSD es un par de divisas que representa la relación entre el euro (EUR) y el dólar estadounidense (USD). Por ejemplo, si el tipo de cambio es 1.20, significa que 1 euro equivale a 1.20 dólares estadounidenses. Los traders pueden comprar o vender este par, especulando sobre si el euro se fortalecerá o debilitará frente al dólar estadounidense o para cubrir riesgos en transacciones internacionales.

En este trabajo usaremos y estudiaremos únicamente los datos del EURUSD. No obstante, los resultados y modelos se podrán usar para cualquier otro mercado.

Los datos se obtendrán de un Bróker de CFD (contrato por diferencias), en donde se pueden obtener datos precisos del EURUSD de varias temporalidades.

## 3.2 Análisis de retornos

Siendo  $X(t)$  la serie temporal del precio de un activo en el momento  $t$ , definimos un retorno de periodo  $\Delta t$  como:

$$R = X(t + \Delta t) - X(t)$$

El objetivo de este apartado es entender la forma de las distribuciones de los retornos del EURUSD a diferentes escalas. Hay varios estudios que demuestran que estos retornos siguen distribuciones “estables” [3]. Es por esto que vamos a asumir que los retornos siguen una distribución “estable”.

En teoría de la probabilidad, una distribución o variable aleatoria se denomina estable si es una combinación lineal de dos o más copias independientes de una muestra aleatoria que tiene la misma distribución de probabilidad. La familia de distribuciones estables en ocasiones también se la denomina como distribución  $\alpha$ -estable de Lévy.

Los momentos estadísticos son medidas que se utilizan para caracterizar estas distribuciones denominadas estables. Hay varios tipos de momentos, pero los más comunes son los momentos centrados alrededor de la media de una distribución. El primer momento estadístico es la media, que representa el centro de la distribución. El segundo momento es la varianza, que indica la dispersión de los datos alrededor de la media. El tercer momento es la asimetría, que mide la simetría o falta de simetría de la distribución alrededor de la media. El cuarto momento es la curtosis, que describe la forma de la distribución en

relación con una distribución normal estándar, indicando qué tan pronunciados son los picos de la distribución.

Por tanto, estas distribuciones se pueden clasificar por medio de 4 parámetros: el índice de estabilidad  $\alpha$ , el parámetro de sesgo  $\beta$ , el parámetro de escala  $\sigma$ , y el parámetro de ubicación o media  $\mu$ .

En el caso de finanzas, hay que tener en cuenta varias cosas:

1. La media de los retornos en las divisas grandes de Forex está muy cercana a 0, por lo tanto, en este estudio se asumirá  $\mu = 0$ .
2. En el caso de una distribución normal, la escala equivale a la varianza. Sin embargo, en la mayoría de las distribuciones estables, la escala no se puede cuantificar de forma exacta, se estima.
3. Las distribuciones de las principales divisas de Forex son simétricas, debido a esto, el parámetro de sesgo es muy cercano a 0.

Esto significa que el parámetro de sesgo  $\beta$ , el parámetro de escala  $\sigma$ , y el parámetro de ubicación o media  $\mu$  no son grandes problemas a la hora de estudiar las cualidades estadísticas de los retornos. Sin embargo, el índice de estabilidad  $\alpha$  es el parámetro clave aquí.

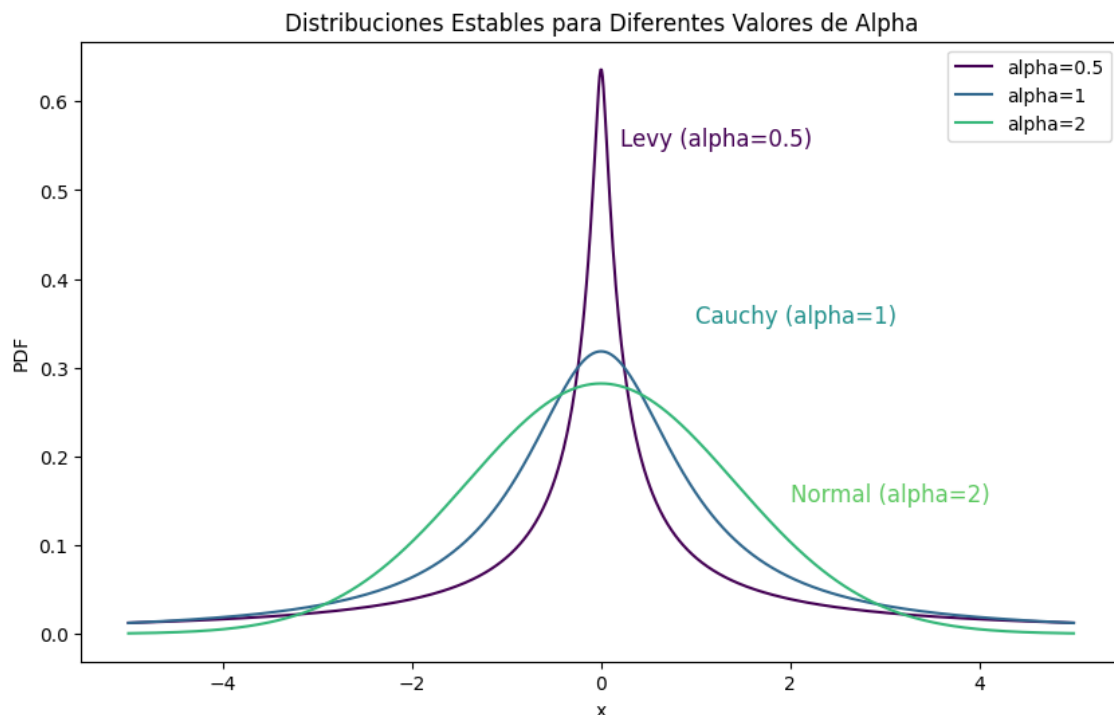


Imagen 1: comparación de las tres principales distribuciones estables: Levy, Cauchy y Normal.

Excepto por unos pocos casos, estas distribuciones no tienen soluciones exactas, tan solo se pueden estimar. Hay dos que destacan, la normal ( $\alpha = 2$ ) y

la cauchy ( $\alpha = 1$ ), ambas con soluciones exactas. En la obra de Mandelbrot "The Missbehaviour of markets" [1] en el capítulo 2 explica que ni la distribución Normal ni la Cauchy representan bien la distribución de los retornos diarios de los mercados financieros. Se necesita encontrar algo entre medias de estas dos distribuciones, es decir,  $1 < \alpha < 2$ .

Teniendo en cuante lo anterior, vamos a coger los datos de los retornos a diferentes escalas del par EURUSD, aproximarlos mediante distribuciones Normal y Cauchy, y estudiar su curtosis.

La curtosis es una medida estadística que describe la forma de la distribución de datos en relación con la distribución normal estándar. Indica la "peakedness" o apuntamiento de la distribución, es decir, qué tan pronunciados son los picos en comparación con la distribución normal. Una curtosis alta indica una distribución con picos más pronunciados (leptocúrtica), mientras que una curtosis baja indica una distribución más aplanada (platicúrtica) en comparación con la distribución normal estándar, que tiene una curtosis de cero.

### **3.2.1 Análisis de retornos diarios**

Para realizar el estudio, hemos obtenido datos de retornos diarios desde 2003 hasta 2023 (un total de 5454 días).

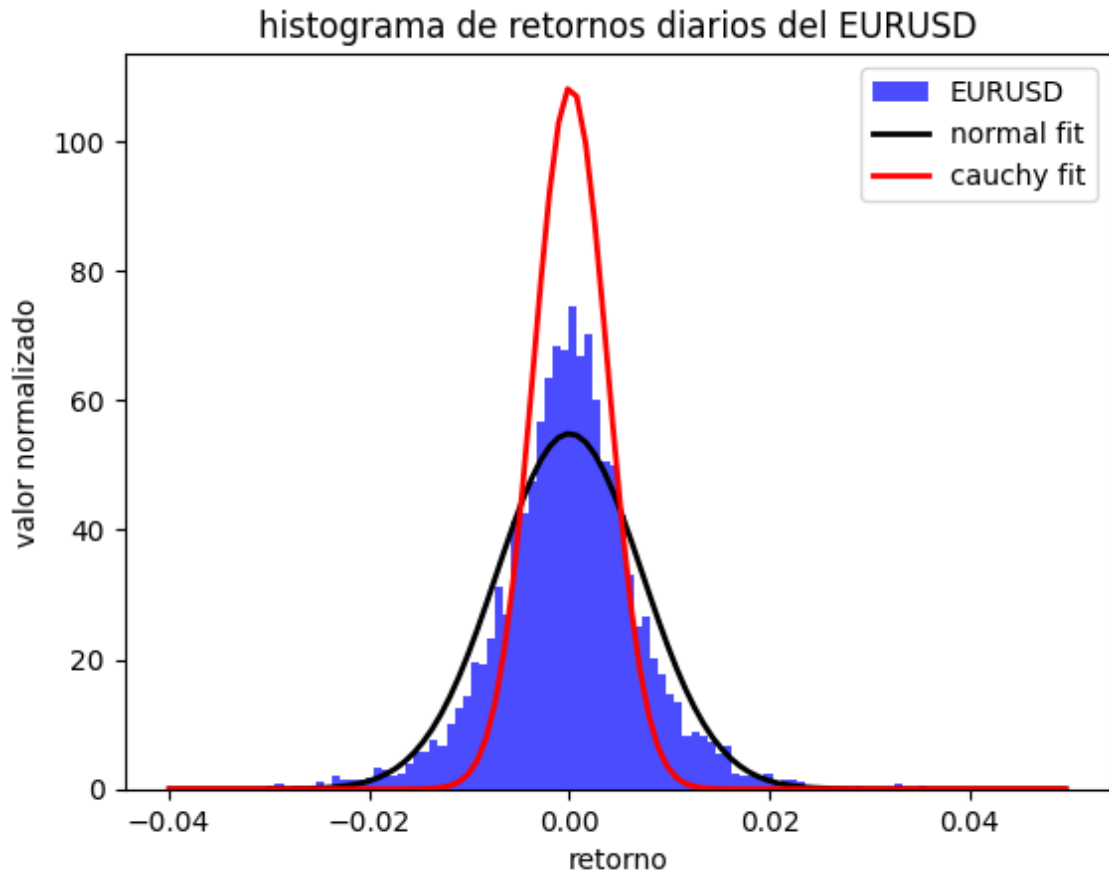


Imagen 2: ajuste de una distribución Normal(negro) y Cauchy(rojo) a datos reales de retornos del EURUSD (azul).

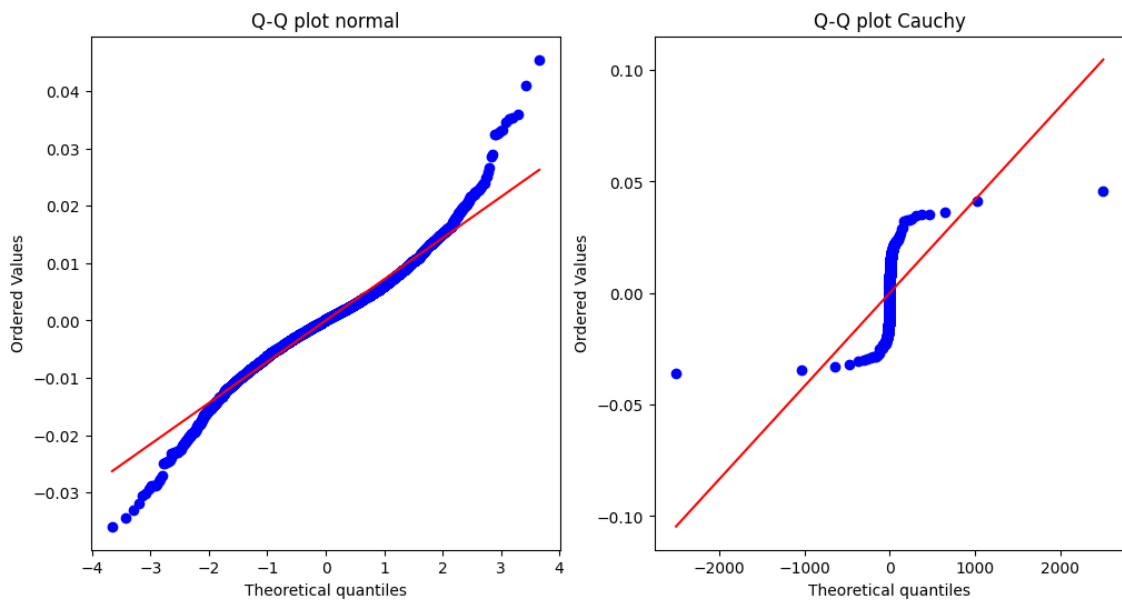


Imagen 3: gráfica de cuantiles de una Normal y de Cauchy. Los puntos azules (de datos reales) deberían de seguir una línea recta (la roja) si siguieran alguna de las dos distribuciones.

### Resultados estadísticos:

Curtosis de los retornos diarios del EURUSD: 2.46 (la curtosis de una normal es 0)

### Tests estadísticos:

Shapiro-Wilk Test: 0.9745

p-value:  $3.9e-30$

$p = 3.9^{-30}$  es extremadamente pequeño. Un p-valor menor que 0.05 indica que podemos rechazar la hipótesis nula de normalidad con un alto nivel de confianza y, por tanto, rechazar que los retornos siguen una distribución normal.

### 3.2.2 Análisis de retornos intradiarios

Para este apartado, hemos conseguido datos de retornos de 1 minuto del 2022 y 2023. Tenemos un total de 748.797 retornos. Usaremos esto para conseguir los retornos de temporalidades de 1, 5, 15 y 60 minutos.

Distribución de los Retornos para Diferentes Marcos de Tiempo del EURUSD

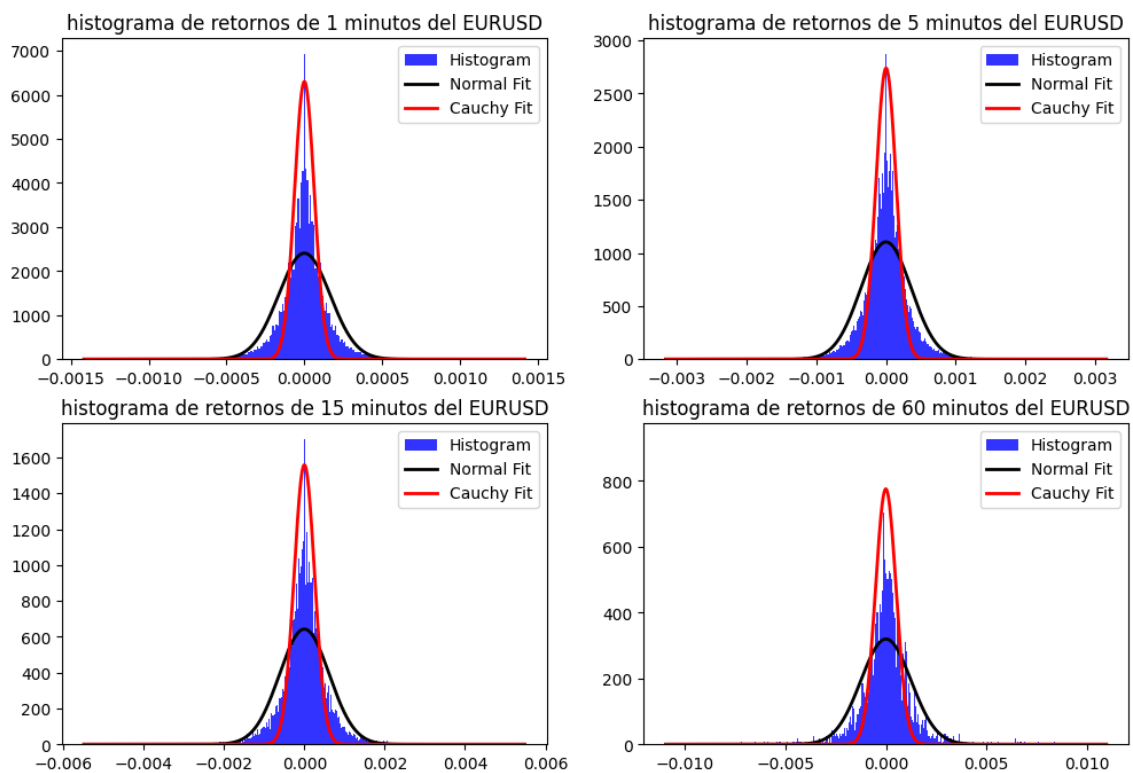


Imagen 4: gráficas de las distribuciones de periodos de 1, 5, 15 y 60 minutos.

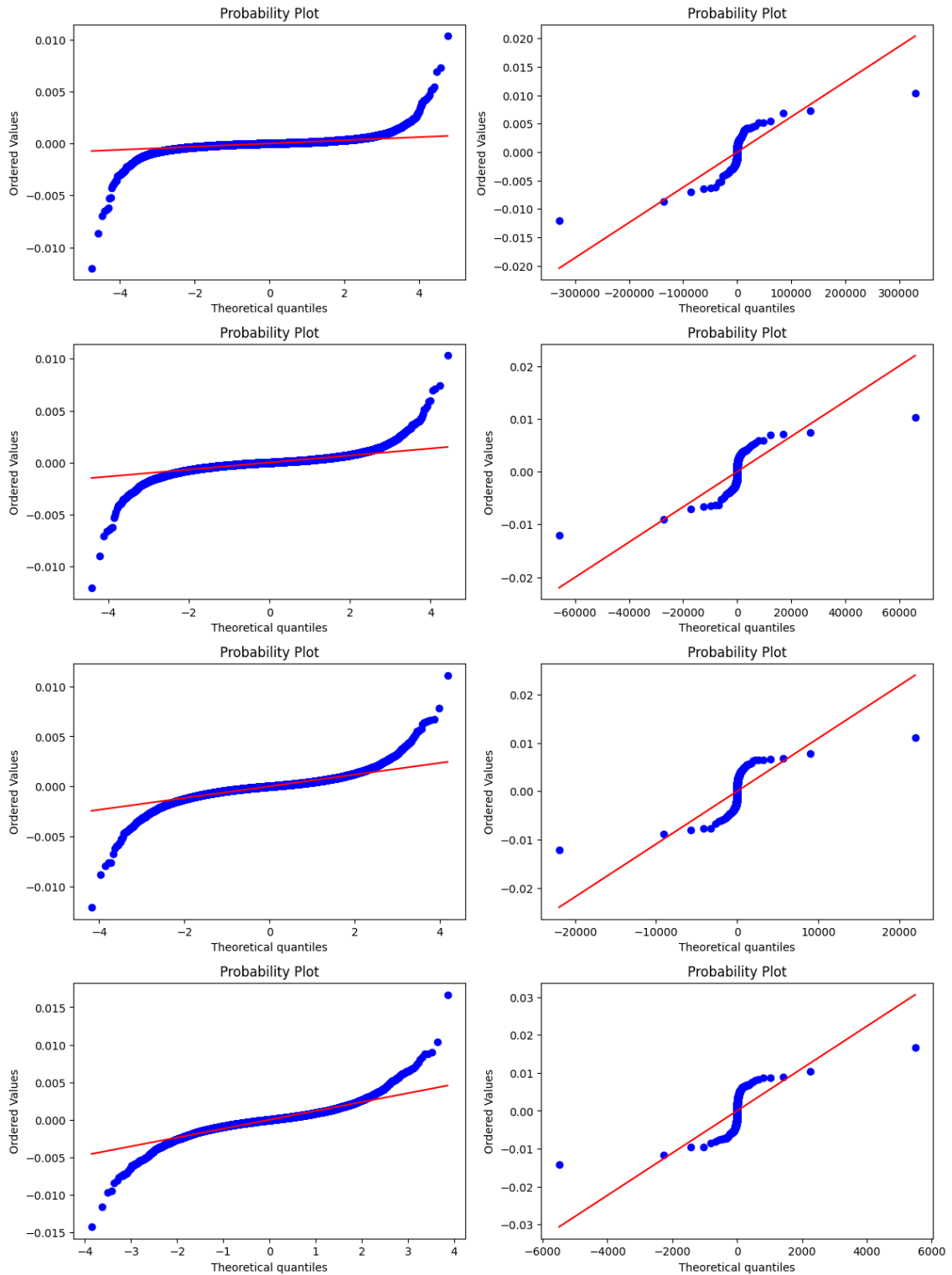


Imagen 5: gráficas de cuantiles de una Normal (izquierda) y una Cauchy (derecha).

**Resultados estadísticos:**

Curtosis de retornos de 1 minutos del EURUSD: 123

Curtosis de retornos de 5 minutos del EURUSD: 33

Curtosis de retornos de 15 minutos del EURUSD: 14

Curtosis de retornos de 60 minutos del EURUSD: 8

**Test estadístico de retornos de 1 minutos del EURUSD:**

Shapiro-Wilk: 0.84

p-value: 0.0

**Test estadístico de retornos de 5 minutos del EURUSD:**

Shapiro-Wilk: 0.87

p-value: 0.0

**Test estadístico de retornos de 15 minutos del EURUSD:**

Shapiro-Wilk: 0.89

p-value: 0.0

**Test estadístico de retornos de 60 minutos del EURUSD:**

Shapiro-Wilk: 0.90

p-value: 0.0

**Conclusiones:**

Las curtosis de los retornos intradiarios han sido superiores a las de los retornos diarios. También llama la atención que a más pequeña la escala temporal, mayor es la curtosis. Evidentemente, ninguna prueba sugiere normalidad de los retornos.

**3.2.3 Análisis de ticks**

En este trabajo, consideraremos un "tick" como un movimiento en el precio. Por ejemplo, en un período de un minuto, pueden ocurrir entre 200 y 1000 movimientos, lo que refleja la dinámica constante del mercado. Es importante destacar que, para que se registre un movimiento en el caso del EURUSD, el precio debe cambiar al menos en  $1e-5$  unidades. Es por esto por lo que los retornos no pueden ser igual a 0 (necesita haber un cambio) y tienen que ser un múltiplo del movimiento mínimo ( $1e-5$ ). Cada bróker puede tener sus propias características y datos de ticks. En nuestro caso los hemos obtenido de un bróker de CFD, IcMarkets.

Estos datos son un poco más complicados que los vistos en los apartados anteriores. El precio de un activo está definido por el Ask y el Bid, o, en otras palabras, el precio mínimo al que se puede comprar (Ask) y el precio máximo al que se puede vender (Bid). El Ask es siempre mayor al Bid. La diferencia entre

Ask-Bid se conoce como spread. En nuestro caso el spread es bastante bajo, por lo que el Ask y el Bid son extremadamente parecidos y se mueven de forma casi idéntica. Por simplificación, solo usaremos los datos Ask de los ticks obtenidos.

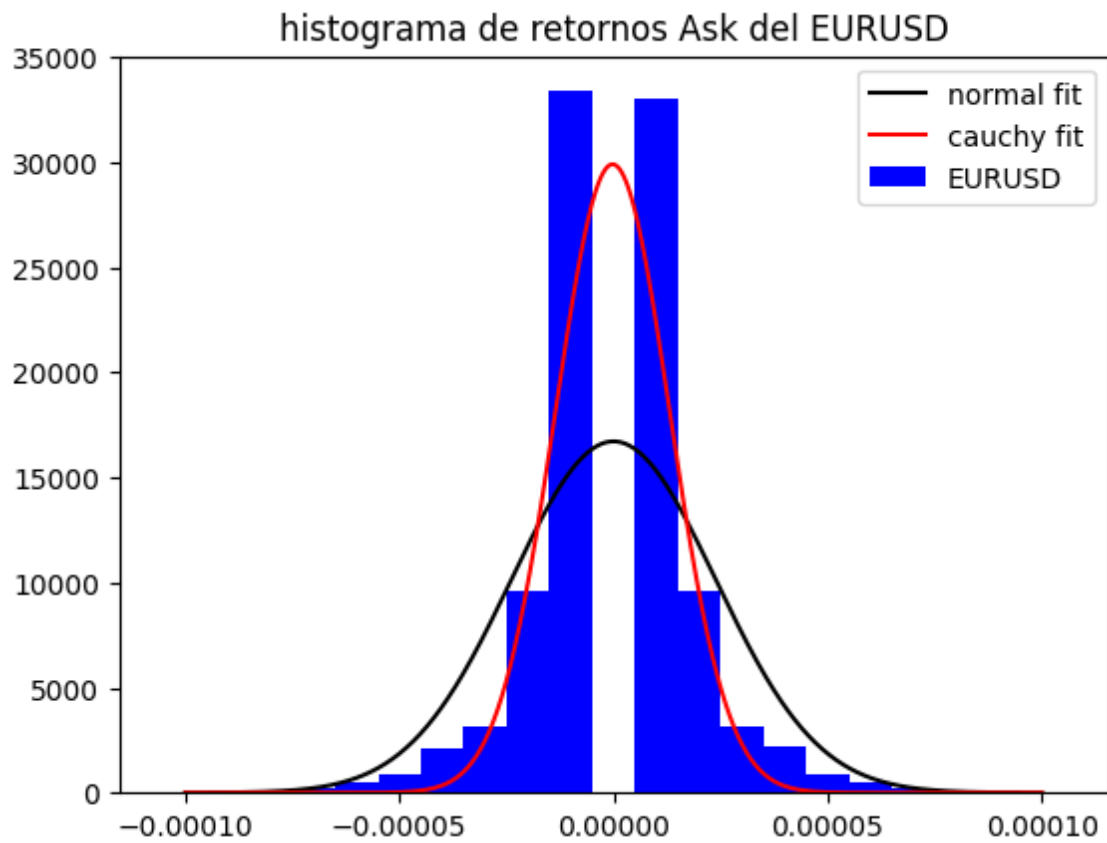


Imagen 6: distribución de los retornos de ticks de Ask.

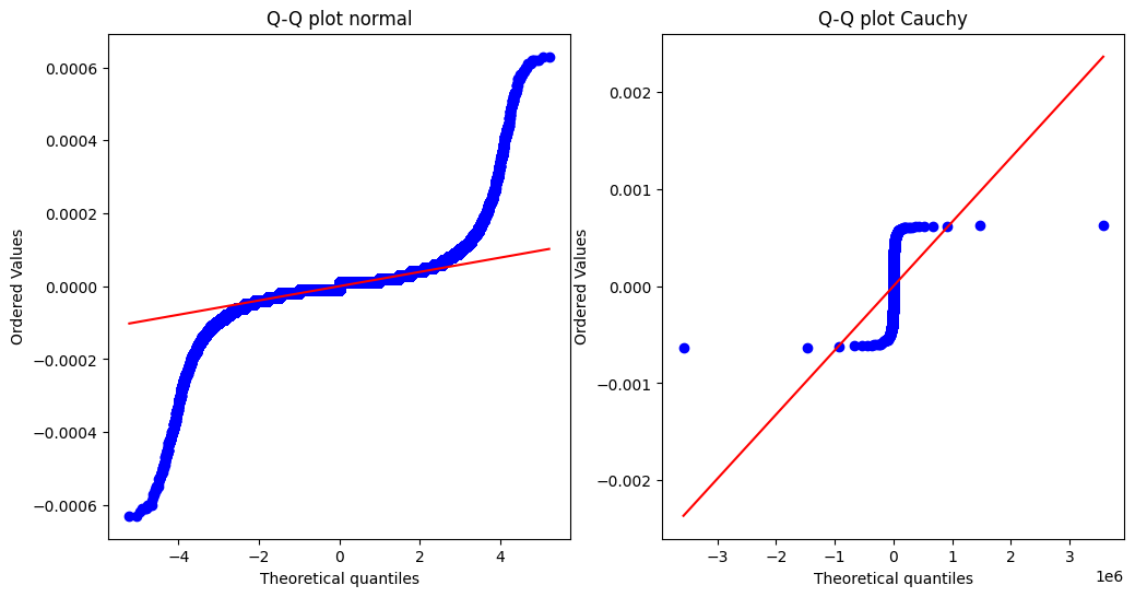


Imagen 7: gráfica de cuantiles de los retornos de ticks de Ask.

**Valor estadístico:**

Kurtois: 784

**Conclusión:**

Debido a la complejidad de estos datos no se realizará pruebas estadísticas. Es obvio que los datos no siguen una distribución normal o cauchy. De hecho, son los datos que más destacan en la gráfica QQ, al tener colas más pronunciadas.

**3.3 Observaciones**

Después de analizar datos de retornos diarios, de diferentes intervalos de tiempo (1, 5, 15 y 60 minutos) y de ticks, se llega a la conclusión de que ni la distribución normal ni la distribución cauchy son adecuadas para modelar estos retornos. Se necesita algo entre medias.

Cabe destacar que cuanto más pequeño el periodo, mayor curtosis obteníamos. Esto sugiere que cuanto menor es el periodo menor índice de estabilidad  $\alpha$  deberá tener la distribución que represente los retornos.

## **4 Modelos financieros tradicionales**

Los modelos financieros tradicionales pueden clasificarse en varias categorías, incluyendo modelos de valoración de activos, modelos de gestión de riesgos y modelos de fijación de precios de derivados, entre otros. Cada uno de estos modelos tiene su propia área de aplicación y utiliza diferentes enfoques y técnicas para lograr sus objetivos.

En este contexto, los modelos financieros tradicionales proporcionan a los inversores y analistas una serie de herramientas poderosas para evaluar el rendimiento de los activos, estimar el riesgo asociado con las inversiones y tomar decisiones estratégicas sobre la asignación de capital. Sin embargo, es importante tener en cuenta que estos modelos se basan en ciertos supuestos y simplificaciones que pueden no reflejar completamente la complejidad del mundo real.

Es importante recalcar que, de estos modelos, que son los que se suelen enseñar en la mayoría de las formaciones de ingeniería financiera, finanzas cuantitativas o econometría, son tan solo la base de modelos más complejos y completos que se usan luego en las entidades más competitivas. Sin embargo, al ser de un valor demasiado grande para las entidades, no es fácil encontrar estos modelos expuestos públicamente.

En la siguiente sección, exploraremos algunos de los modelos financieros tradicionales más importantes y analizaremos sus características, aplicaciones y limitaciones.

### **4.1 Modelo de Black Scholes Merton**

Una opción financiera es un contrato que otorga a su titular el derecho, pero no la obligación, de comprar (Call) o vender (Put) un activo subyacente a un precio específico en una fecha determinada o antes de ella. Las opciones se utilizan comúnmente en los mercados financieros para gestionar el riesgo, especular sobre movimientos futuros de precios y obtener exposición a activos sin necesidad de poseerlos físicamente permitiendo el apalancamiento.

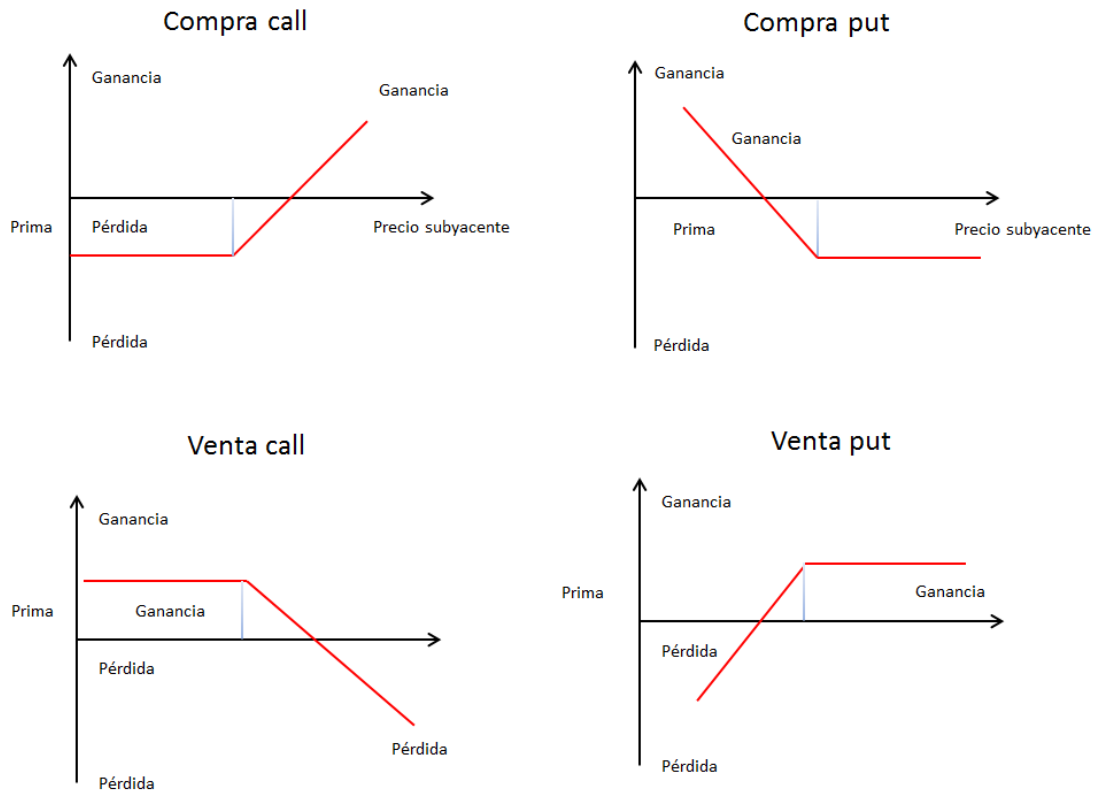


Imagen 8: Representación del funcionamiento de las Opciones financieras mediante gráficas de ganancia y pérdida con respecto al precio subyacente del activo.

El desafío principal en la valoración de opciones radica en determinar un precio justo que refleje su valor intrínseco y su valor temporal. El modelo de Black-Scholes expuesto por primera vez en 1972 por Fischer Black y Myron Scholes [6] (una de las principales razones por la que dichos autores consiguieron el premio Nobel de Economía en 1997) proporciona una solución para esta dificultad al calcular el precio teórico de una opción utilizando una fórmula matemática basada en las siguientes suposiciones:

### 1. Mercado eficiente:

El modelo asume que los mercados son eficientes y que no existen oportunidades de arbitraje. Esto implica que no hay costos de transacción, ni impuestos, ni restricciones sobre la cantidad de activos que se pueden comprar o vender.

### 2. Sin dividendos:

El modelo asume que el activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción.

### 3. Movimientos de precios lognormales:

Los movimientos de precios del activo subyacente se distribuyen lognormalmente. Es decir, los cambios porcentuales en los precios del activo subyacente tienen una distribución normal.

#### 4. Tasa de interés constante y conocida:

La tasa de interés libre de riesgo es constante y conocida durante toda la vida de la opción.

#### 5. Volatilidad constante:

La volatilidad del activo subyacente es constante y conocida durante toda la vida de la opción.

La fórmula para el precio de una opción de compra (call option) según el modelo de Black-Scholes es:

$$C = S_0N(d_1) - Xe^{-rt}N(d_2)$$

Donde:

- $C$  es el precio de la opción de compra.
- $S_0$  es el precio actual del activo subyacente.
- $X$  es el precio de ejercicio de la opción.
- $r$  es la tasa de interés libre de riesgo
- $t$  es el tiempo hasta la expiración de la opción.
- $N$  es la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar.
- $d_1$  y  $d_2$  son calculados como:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Intuitivamente se puede pensar en la fórmula como la expectativa del valor ganado del activo en el momento de cierre ( $S_0N(d_1)$ ) menos la expectativa del coste de ejecutar la acción teniendo en cuenta la tasa de interés libre de riesgo ( $Xe^{-rt}N(d_2)$ ).

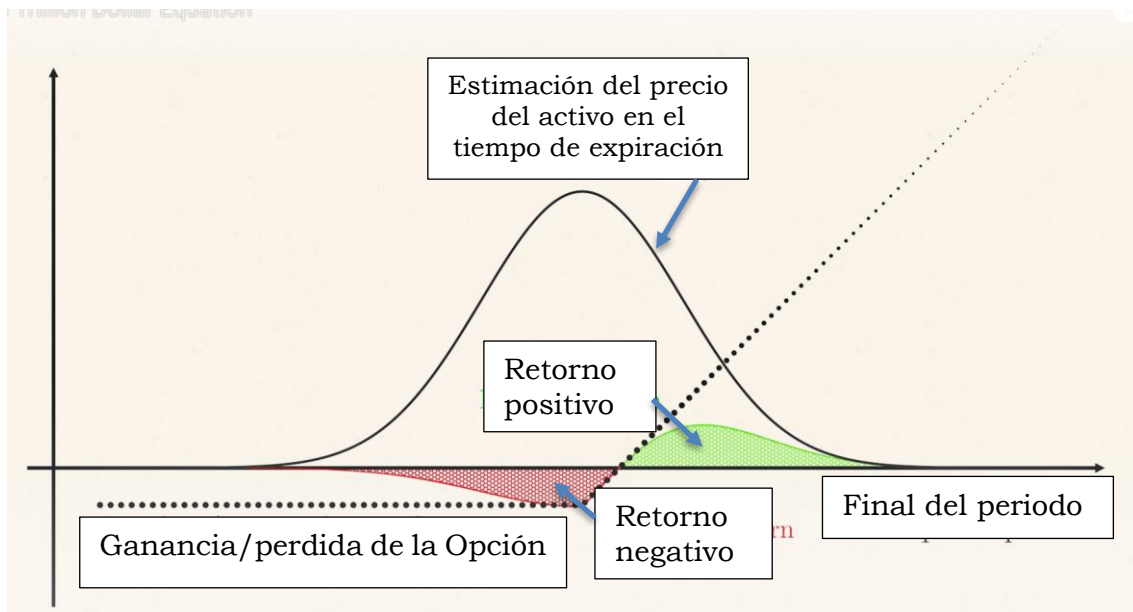


Imagen 9: representación gráfica de la fórmula de Black-Scholes. La superficie de la zona roja representa la estimación de las posibles pérdidas de un comprador de la opción y la superficie de la zona verde representa la estimación de las posibles ganancias de un comprador de la opción. El modelo se basa en equilibrar estas dos superficies para que ambas sean iguales y no exista ventaja entre comprar o vender la opción (que el precio esté equilibrado).

## 4.2 Modelos VaR

El Value at Risk (VaR) es una medida de riesgo utilizada en finanzas para estimar la pérdida máxima que una cartera de inversiones podría experimentar en un período de tiempo específico con un cierto nivel de confianza. En otras palabras, el VaR proporciona una estimación cuantitativa de la cantidad de dinero que una cartera podría perder en condiciones normales de mercado durante un intervalo de tiempo determinado, manteniendo un nivel de confianza predefinido.

El VaR se expresa en términos de una cantidad de dinero y un horizonte temporal, y generalmente se interpreta en el contexto de un intervalo de confianza, como el 95% o el 99%. Por ejemplo, un VaR del 95% a un día de \$1 millón indica que hay un 95% de probabilidad de que la cartera no pierda más de \$1 millón en un solo día bajo condiciones normales de mercado.

Es importante destacar que una de las principales suposiciones de este tipo de modelos es la distribución que siguen los rendimientos de los activos. Normalmente se asumen distribuciones normales o se realizan simulaciones de Montecarlo para esto.

## 4.3 Modelo CAPM

El Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital (CAPM, por sus siglas en inglés) es un modelo financiero que describe la relación entre el riesgo y el

rendimiento esperado de un activo financiero. Fue desarrollado por William Sharpe, John Lintner y Jan Mossin en la década de 1960.

El CAPM establece que el rendimiento esperado de un activo financiero es igual a la tasa libre de riesgo más un premio por riesgo de mercado, multiplicado por la beta del activo. La beta ( $\beta$ ) es una medida de la sensibilidad del activo a los movimientos del mercado en general. En otras palabras, el CAPM propone que el rendimiento esperado de un activo está determinado por su exposición al riesgo sistemático o no diversificable, que es el riesgo que no se puede eliminar mediante la diversificación de la cartera.

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f)$$

Donde:

- $E(R_i)$  es el rendimiento esperado del activo  $i$ .
- $R_f$  es la tasa libre de riesgo, que representa el rendimiento de un activo sin riesgo, como los bonos del gobierno.
- $\beta_i$  es la beta del activo  $i$ , que mide la sensibilidad del activo a los movimientos del mercado.
- $E(R_m)$  es el rendimiento esperado del mercado.
- $R_f$  es la tasa libre de riesgo

El CAPM se basa en varias suposiciones clave, incluyendo la existencia de inversores racionales y mercados eficientes. Los inversores racionales se definen como aquellos que buscan maximizar su utilidad esperada, teniendo en cuenta el riesgo y el rendimiento de sus inversiones. Por otro lado, los mercados eficientes se caracterizan por reflejar rápidamente toda la información disponible y ajustarse rápidamente a cualquier nueva información.

Bajo estas suposiciones, el CAPM implica que los rendimientos de los activos financieros se distribuyen normalmente en el mercado. La distribución normal de los rendimientos implica que los eventos extremos ocurren con una probabilidad baja y que la mayoría de los rendimientos se concentran alrededor de la media, siguiendo una curva de campana simétrica.

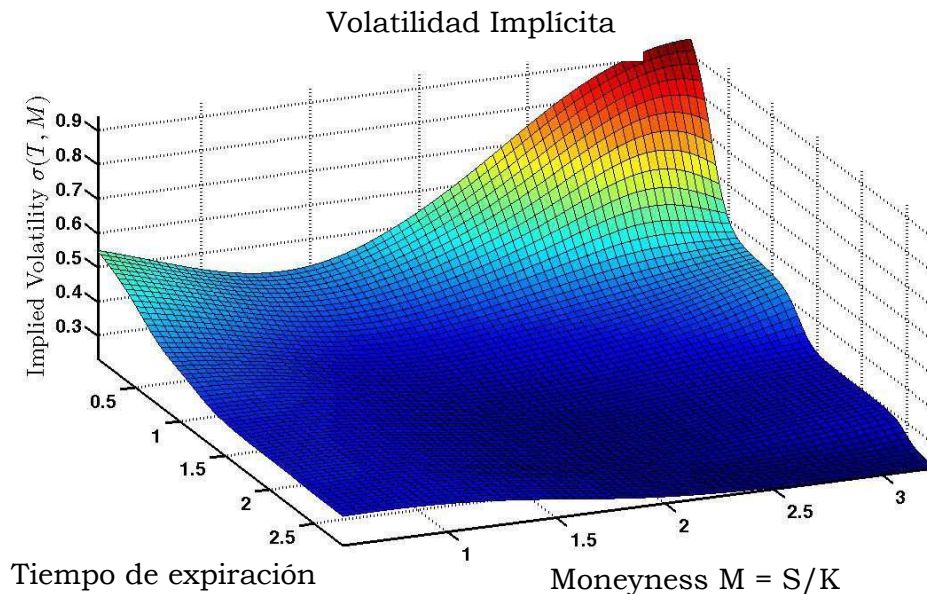
## 4.4 Observación

Si algo destaca en estos tres modelos es que todos asumen normalidad en los retornos de los activos financieros ¿Pero si hemos visto en el capítulo anterior que los retornos no son normales, por qué se usa esta distribución?

Al hablar sobre las distribuciones estables hemos destacado dos en particular: la Normal y la de Cauchy. Estas distribuciones destacan por tener soluciones exactas, lo que simplifica mucho las cosas a la hora de realizar cálculos. De las dos, la distribución Normal cuadra más que la de Cauchy, además, tiene una varianza conocida. Debido a esto los modelos asumen distribuciones normales

de los precios. Sin embargo, esto puede tener graves consecuencias si no se entiende bien. Es fácil subestimar riesgos con estos modelos.

En el caso del modelo de Black Scholes Merton se necesita calcular la volatilidad implícita (la observada en el mercado) constantemente para calibrar los modelos. Resulta que hay una volatilidad implícita diferente para cada precio de ejercicio y cada tiempo de expiración. Si el modelo fuera correcto tan solo debería de haber una misma volatilidad para cualquier parámetro. La superficie de volatilidades que se crea es la famosa superficie de volatilidad. Es algo así como “jugar a encontrar los parámetros correctos para el modelo erróneo”.



*Imagen 10: Superficie de la Volatilidad Implícita. Dicha superficie se obtiene encontrando las volatilidades ( $\sigma$ ) que hacen que el modelo de Black Scholes de el mismo precio de la opción que el que se encuentra en el mercado. (gráfica obtenida de Wikipedia para usos ilustrativos)*

Los profesionales del sector son conscientes de esto, y durante los últimos años se han publicado numerosos modelos que tratan de mejorar los modelos expuestos anteriormente:

- Black-Scholes-Merton → Volatilidad Estocástica y el modelo de Salto-Difusión [7]
- VaR → GARCH [8]
- CAPM → CAPM extendido [9]

La mayoría de estos avances requieren de conocimientos cada vez más técnicos y complicados. Es por esto que el sector de las finanzas se ha llenado en los últimos años de perfiles técnicos (estadísticos, matemáticos, físicos, ingenieros, etc). Aquellos que consigan desarrollar los mejores modelos serán los que consigan más ventajas con respecto a la competencia.

Cabe destacar que estos modelos no están diseñados para modelar retornos de duraciones de menos de un día. Los precios intradiarios tienen la dificultad añadida que, dependiendo de la hora, habrá más volatilidad o menos en función de las casas de intercambio abiertas (Londres, Tokio, Nueva York...).

Además, se están explorando soluciones de Aprendizaje Automático para crear modelos financieros y de trading mediante uso de GANs, RNNs, TCNN, etc. Estos modelos no serán enfocados en este estudio, pero es importante mencionarlos debido a su gran potencial en estos años.

## 5 Modelo clásico multifractal

### 5.1 ¿Qué es un multifractal?

Los fractales son estructuras geométricas que exhiben autosimilitud a diferentes escalas. En otras palabras, un fractal es un objeto geométrico cuya forma se repite a sí misma en múltiples niveles de magnificación. Esto significa que, al observar un fractal, se pueden encontrar patrones similares sin importar el nivel de detalle en el que se observe.

Es raro encontrarse papers con más de 100 citas sobre fractales en finanzas. Una de las tesis más útiles para realizar este capítulo es la de Rostislav Sibirtsev [5], en donde implementa el MMAR y estudia los resultados. Sin embargo, los papers de fractales enfocados a otras ciencias consiguen miles de citas. “Hay una necesidad de herramientas fractales en finanzas” comentaba Mandelbrot, pionero en estudio de fractales, en 2005[10].

En finanzas, si quitamos la variable temporal, se vuelve verdaderamente complicado interpretar a qué temporalidad puede pertenecer un gráfico. Esto quiere decir que, las estructuras menores del precio son auto similares a estructuras mayores, una cualidad fractal. Aquí muestro cuatro gráficos de diferentes temporalidades (1 hora, 4 horas, diario y semanal).

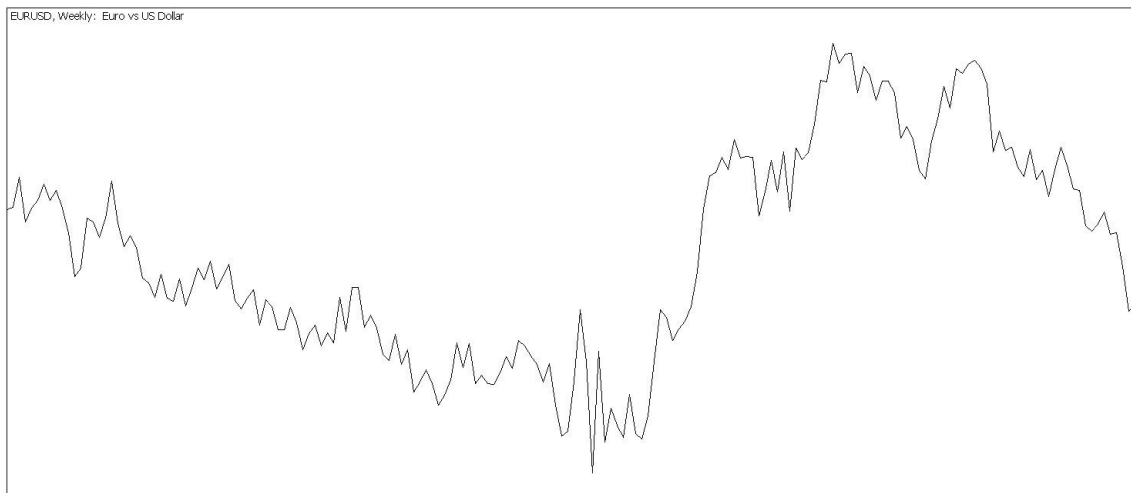


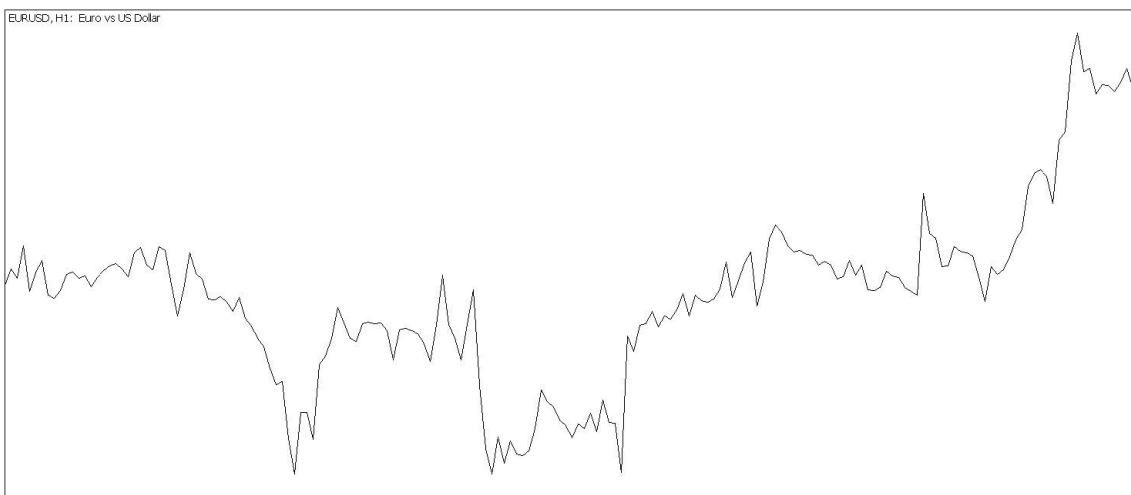
Imagen 11: gráfico de líneas semanal del EURUSD.



*Imagen 12: gráfico de líneas diario del EURUSD.*

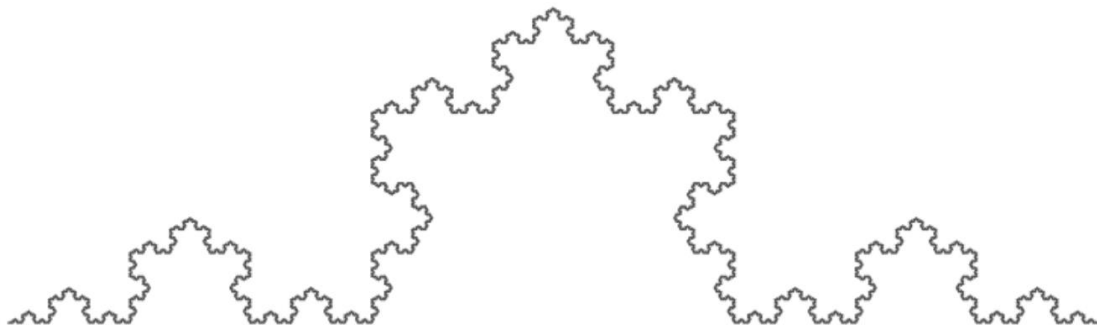


*Imagen 13: gráfico de líneas de 4 horas del EURUSD.*



*Imagen 14: gráfico de líneas de 1 hora del EURUSD.*

Los fractales son objetos que pueden ser infinitamente complejos, pero definidos matemáticamente de manera relativamente simple. A menudo se construyen mediante algoritmos iterativos, donde una regla o conjunto de reglas se aplica repetidamente para generar la estructura completa del fractal. Estas reglas pueden ser bastante simples, pero el resultado final puede ser sorprendentemente intrincado y complejo.



*Imagen 15: curva de Koch. Fractal autosemejante.*

En finanzas, generar movimiento browniano (movimiento aleatorio, normalmente gaussiano, usado para generar simulaciones de precios financieros) es un punto clave. Una forma de generar movimiento browniano con la teoría fractal es utilizando métodos de simulación numérica basados en fractales. En estos métodos hay un componente clave, el exponente de Hurst. Dependiendo de los valores que este tome se obtendrán series temporales anti persistentes ( $H < 0.5$ ), aleatorias/normales ( $H = 0.5$ ) y persistentes ( $H > 0.5$ ).

## Construcción de Movimiento Browniano Fraccional

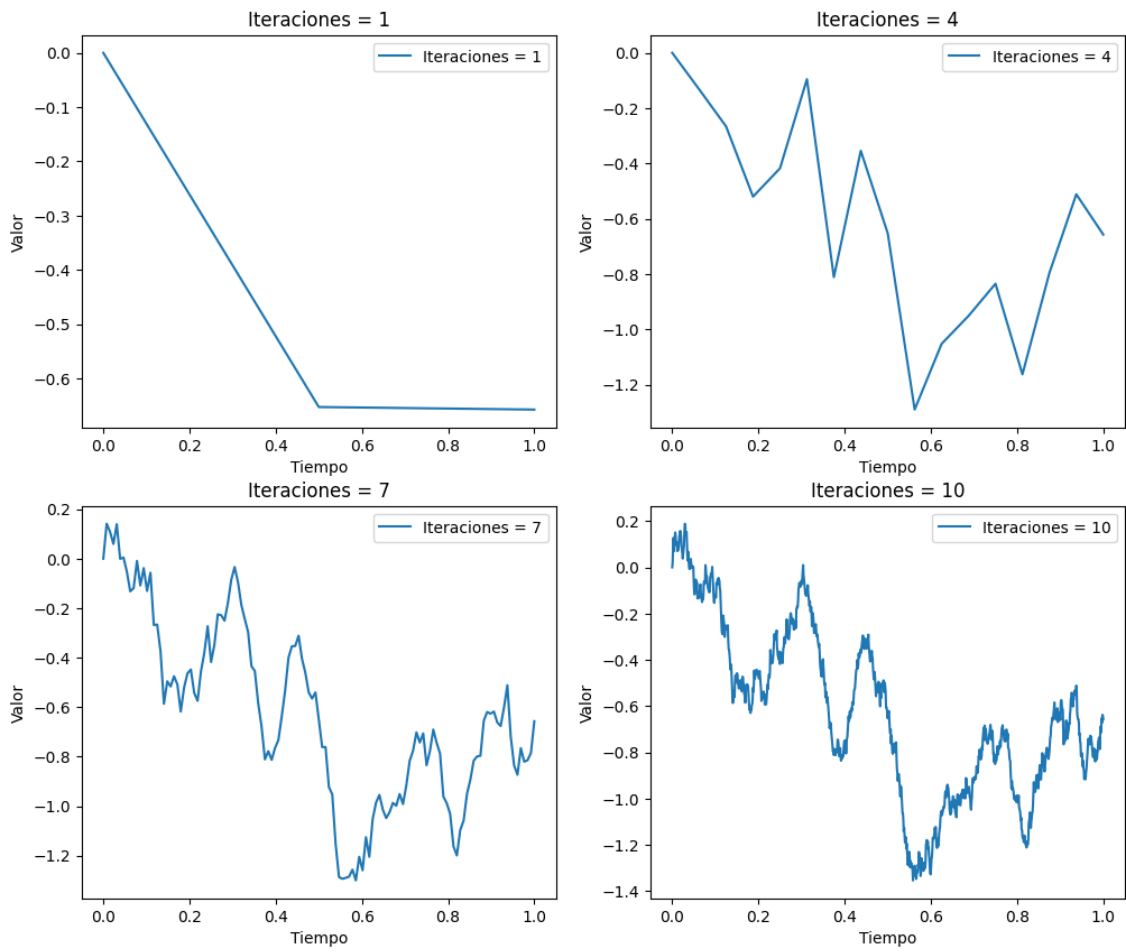


Imagen 16: Iteraciones de la construcción de Movimiento Browniano Fraccional.

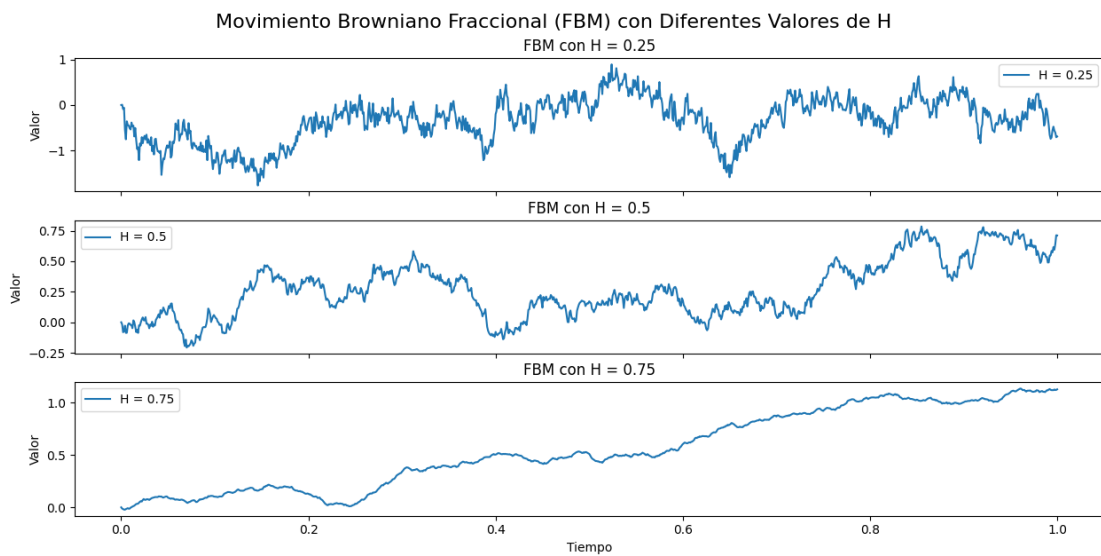


Imagen 17: Movimiento Browniano Fraccional con diferentes valores  $H$ . Destacar que a menor  $H$  (primer gráfico) mayor anti-persistencia en las tendencias y que a mayor  $H$  (tercer gráfico), mayor persistencia en las tendencias

Un multifractal es una generalización de los fractales que exhibe múltiples escalas de autosimilitud, en contraste con los fractales tradicionales que muestran autosimilitud en una sola escala. En otras palabras, un multifractal es una estructura matemática que presenta diferentes grados de irregularidad o complejidad en diferentes regiones del objeto fractal. Esto quiere decir que el exponente de Hurst ahora es variable, pasando a llamarse exponente de Hölder.

La idea detrás de los multifractales es que en ciertos sistemas complejos, como los mercados financieros, la naturaleza de la irregularidad o variabilidad puede ser heterogénea y no uniforme en todas partes. En lugar de tener una sola dimensión fractal que caracterice toda la estructura, los multifractales pueden tener múltiples dimensiones fractales que describen la irregularidad en diferentes partes del objeto fractal.

## 5.2 Aplicación de modelos multifractales a finanzas

Una de las primeras obras en criticar públicamente y en estudiar nuevas formas de modelar los mercados es el paper de 1997 de Mandelbrot junto con sus dos estudiantes Fisher y Calvet (“A multifractal model of asset returns”) [2]. En esta obra se presenta un modelo basado en teoría multifractal que aplicaremos paso a paso con el EURUSD.

## 5.3 Introducción

El MMAR (“Multifractal Model for Asset Returns”) [2] es un modelo para simular el crecimiento a lo largo del tiempo, compuesto por una cascada multifractal y un movimiento browniano fraccional. Lo que se busca con esto es conseguir un proceso que genere:

1. Distribuciones con colas largas ( $1 < \alpha < 2$ ).
2. Dependencia temporal en los retornos.
3. Momentos de volatilidad que tiendan a agruparse.

Podemos definirlo de la siguiente forma:

$$X(t) = B_H[\theta(t)]$$

Donde  $X(t)$  corresponde con el precio simulado,  $B_H$  corresponde al Movimiento Browniano Fraccional y  $\theta(t)$  es una función de distribución acumulativa de un proceso de cascada multifractal definida en  $[0, T]$ .

$B_H$  depende únicamente de un parámetro,  $H$  (exponente de Hurst).  $\theta(t)$  depende de  $\{\alpha, \lambda, \sigma^2\}$ , y es el componente que le aporta la multifractalidad. Podemos pensar en este parámetro como el encargado de acelerar/desacelerar el tiempo y, por tanto, el encargado de aportar periodos de más o menos volatilidad al precio.

La idea es la siguiente: Conseguir la función de escalado del EURUSD con datos diarios, obtener los parámetros necesarios a partir de ella ( $H, \alpha, \lambda, \sigma^2$ ), generar movimiento fractal browniano ( $B_H$ ) y el tiempo de trading ( $\theta(t)$ ), y juntar ambas simulaciones ( $X(t)$ ). Se puede encontrar información sobre los procesos en el capítulo de multifractales de la obra Falconer. St Andrews, Fractal Geometry [11].

### 5.3.1 Recopilación de datos y cálculo de los retornos de cada observación

Vamos a coger 5040 retornos diarios del EURUSD. Hemos escogido este número debido a su gran cantidad de divisores (60) ya que necesitaremos dividir estos datos en observaciones de diferentes longitudes y estudiar cómo escala la magnitud de los retornos de estas observaciones. También destacar cómo estos números se encuentran de forma exponencial, algo que se puede ver bien en la siguiente gráfica logarítmica:

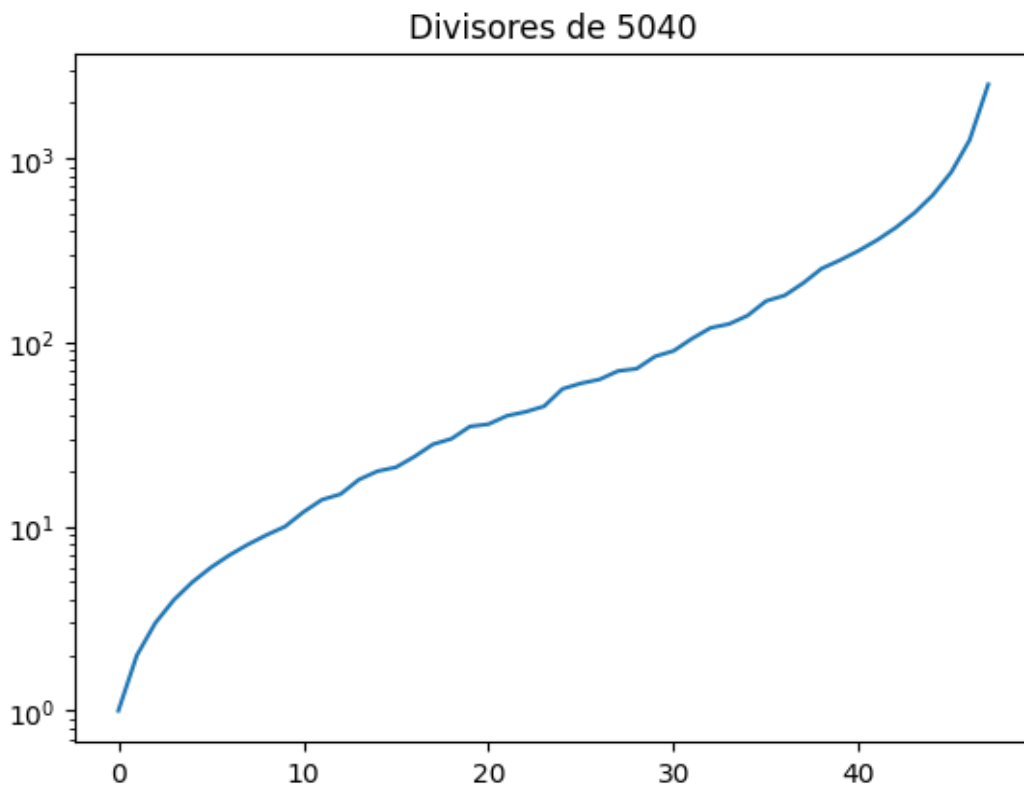


Imagen 18: divisores del 5040 expuestos en escala logarítmica.

### 5.3.2 Cálculo de las funciones de partición con diferentes “q”

Las funciones de partición, en el contexto de la multifractalidad, son utilizadas para estudiar las propiedades estadísticas de las series temporales a diferentes

escalas. Se definen a partir de las sumas de potencias de los incrementos de la serie.

Las funciones de partición se consiguen separando los datos en particiones de tamaño  $\Delta t$  (estos tamaños serán los divisores vistos anteriormente) y aplicando:

$$S_q(T, \Delta t) = \sum_{i=0}^{N-1} [|X(i * \Delta t + \Delta t) - X(i * \Delta t)|^q]$$

Donde  $N = \frac{T}{\Delta t}$  y  $q$  es escogido arbitrariamente. Calcularemos  $S$  para un rango de  $q$  entre  $[0,10]$  pero con mayor densidad de puntos cercanos a 2 ( $q = [0, 1, 1.5, 1.8, 1.9, 1.95, 2, 2.05, 2.1, 2.2, 2.5, 3, 4]$  por ejemplo).

Los resultados se pueden visualizar mediante un plot:

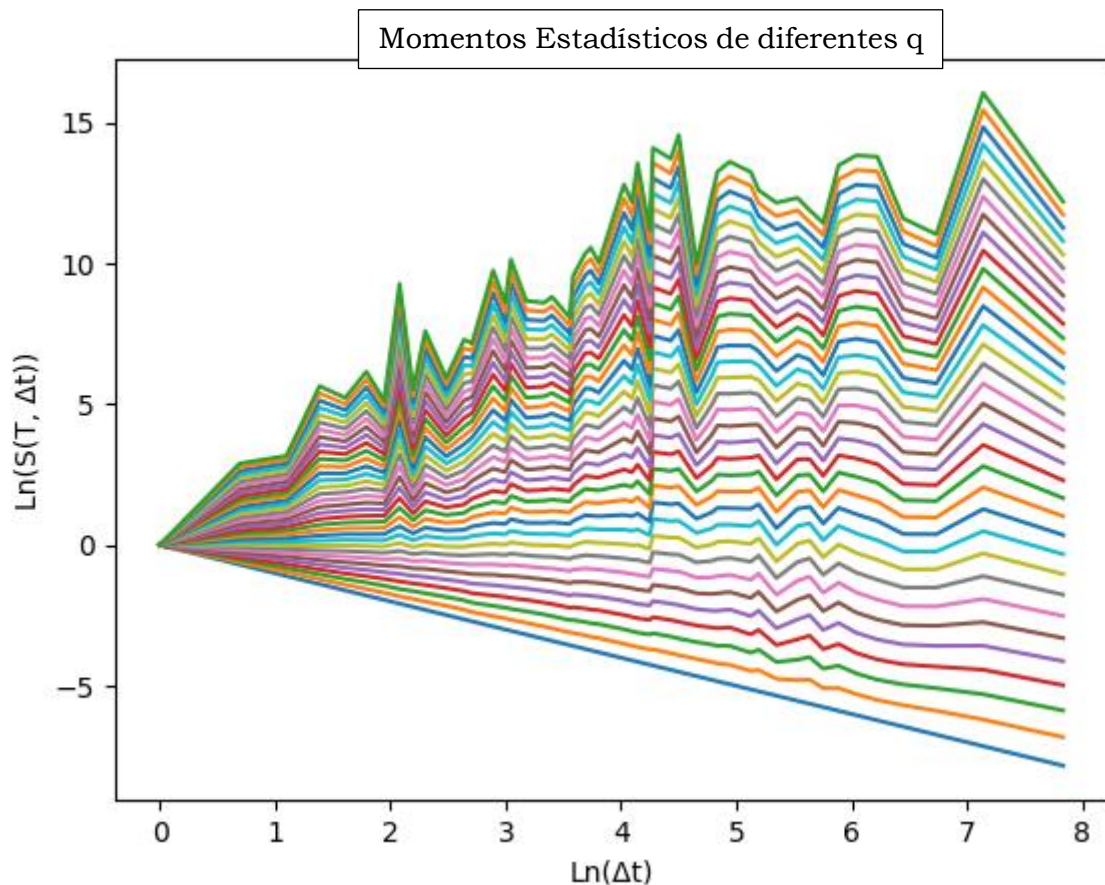


Imagen 19: momentos estadísticos (S) de diferentes q.

### 5.3.3 Estimación de la función de escalado

Mediante la fórmula:

$$\text{Ln} [E[S_q(T, \Delta t)]] = \tau(q) \text{Ln}[\Delta t] + c(q) \text{Ln}[T]$$

Se estima la función de escalado  $\tau(q)$  realizando regresión lineal (OLS) de todas las gráficas obtenidas de diferentes qs. La pendiente de las rectas obtenidas corresponde con la estimación de  $\tau(q) \cdot c(q)$ , que equivale al término independiente de  $\Delta t$ , se puede ignorar.

El resultado de las regresiones se observa en la siguiente gráfica:

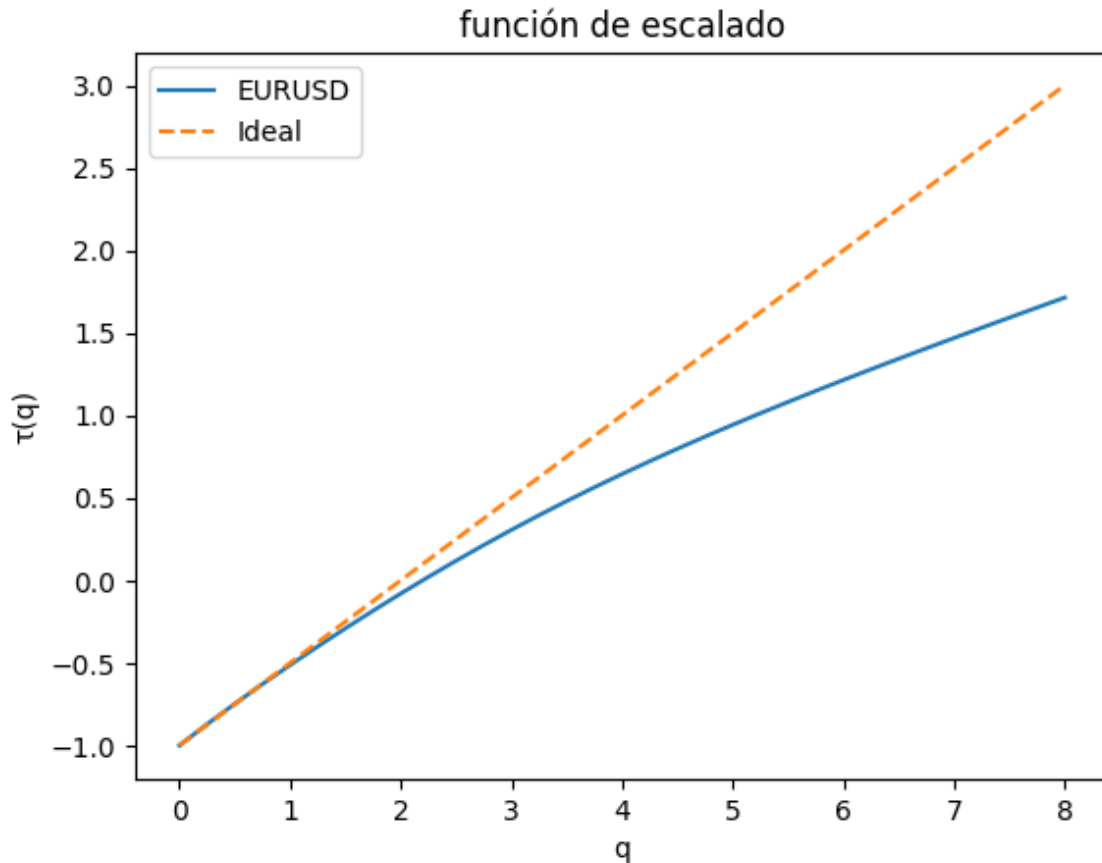


Imagen 20: función de escalado. Al salir curva se sugiere la existencia de multifractalidad.

### 5.3.4 Estimación del exponente de Hurst

H se deriva de la función de escalado mediante la siguiente fórmula:

$$\tau\left(\frac{1}{H}\right) = 0,$$

$$H = \frac{1}{\tau^{-1}(0)}$$

Tomamos  $\tau()$  como una función cuadrática, por lo que estimamos los parámetros y calculamos el punto de intrsección  $\tau(x) = 0$ :

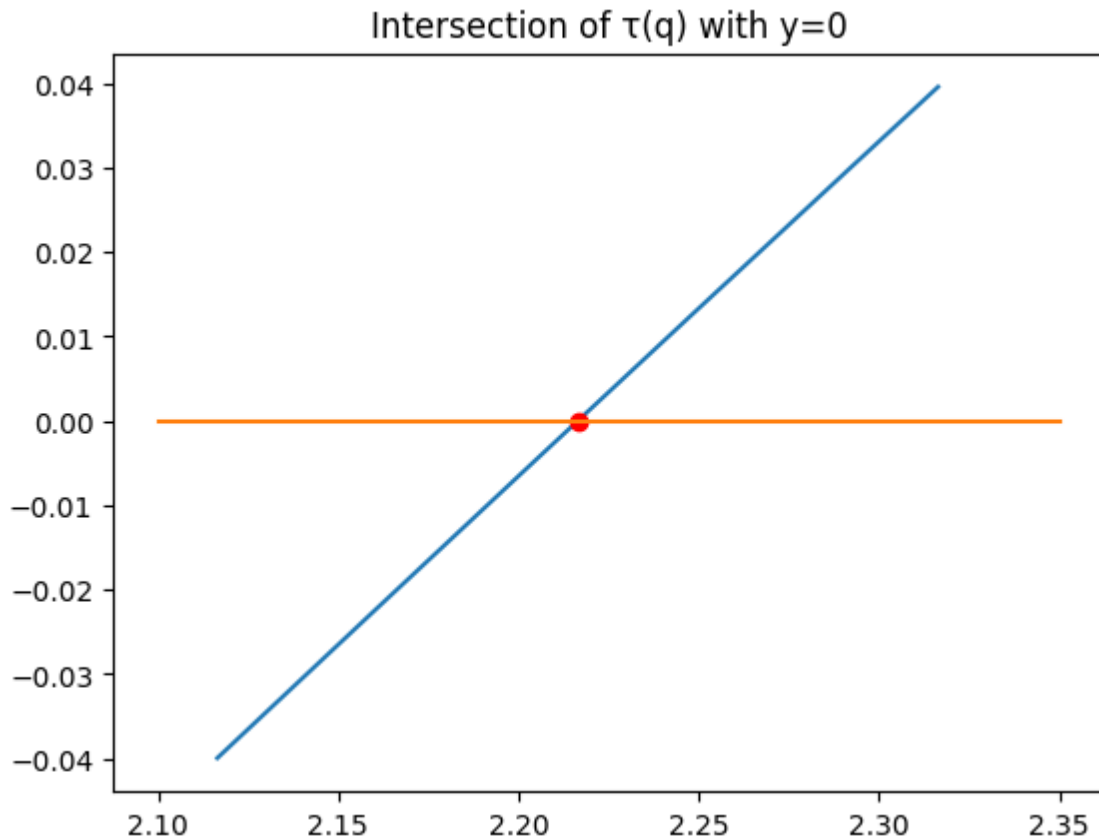


Imagen 21: gráfica que muestra el punto en el que  $t(q)=0$ .

Obtenemos:  $q = 2.2164$  y  $H = 0.4511$ . Este último valor  $H$  corresponde con el exponente de Hurst que usaremos como parámetro para el movimiento browniano fraccional.

### 5.3.5 Obtención del espectro multifractal $f(\alpha)$ mediante la transformada de Lagrange

La definición del espectro multifractal es muy técnica. Según el paper de MMAR [2], un espectro multifractal  $f(\alpha)$  es una función que "describe la tasa de crecimiento local en un proceso multifractal". Por lo tanto, el espectro "describe la dimensión fractal del conjunto de instantes que tienen un exponente local (Hölder) dado". La dimensión fractal mide la suavidad de una función en un punto dado. Conceptualmente, el espectro multifractal permite que el exponente de Hurst varíe en el tiempo, en cuyo caso podríamos llamarlo "exponente de Hölder". Buscamos:

$$f(\alpha) = \inf[q\alpha - \tau(q)]$$

Si  $\tau(q)$  es cuadrática ( $ax^2 + bx + c$ ),  $f(\alpha)$  también será cuadrática con parámetros dependientes de  $a$ ,  $b$  y  $c$  de  $\tau(q)$ .

$$a_f = \frac{1}{4a}$$

$$b_f = -\frac{b}{2a}$$

$$c_f = \frac{-4ac + b^2}{4a}$$

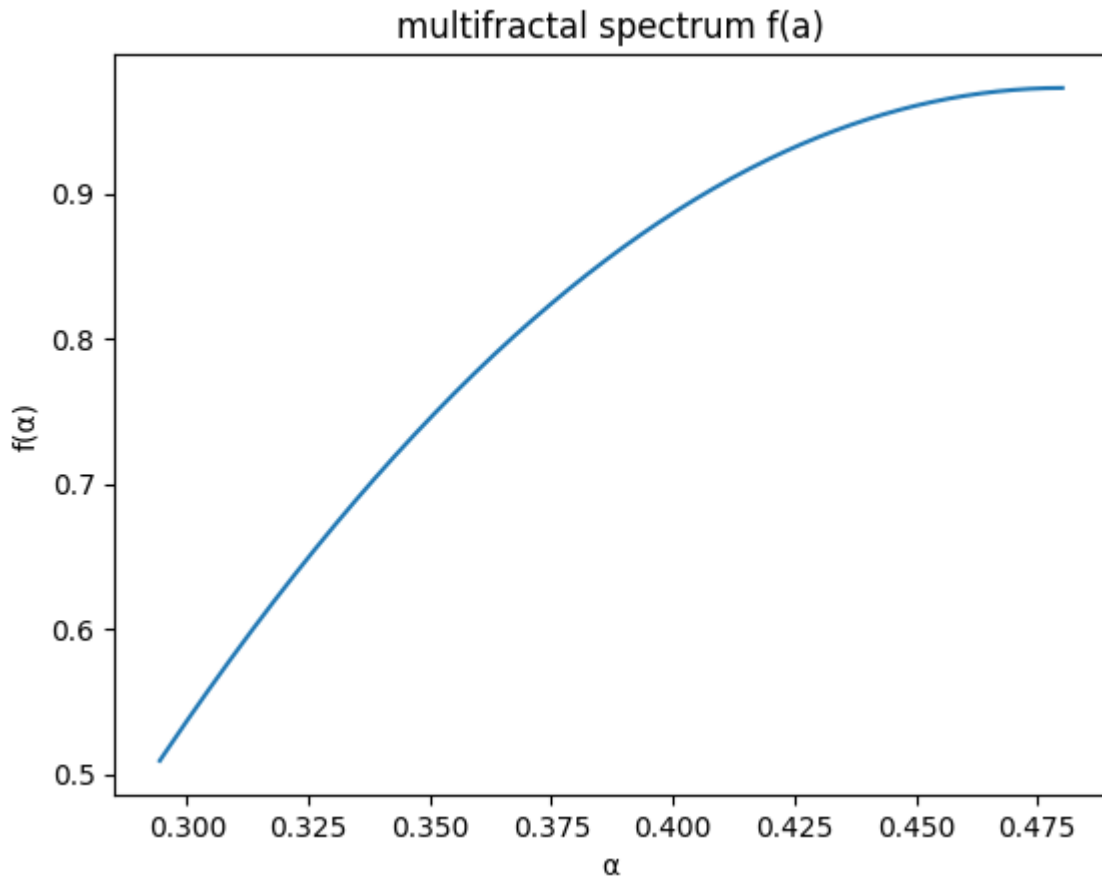


Imagen 22: Espectro multifractal.

El exponente de Holder más probable será el  $\alpha$  para el cuál la función es máxima. En nuestro caso  $\alpha = 0.48$ .

### 5.3.6 Estimación de la media y varianza para la distribución log-normal para la generación del tiempo

Para la cascada multiplicativa se necesitará generar números aleatorios de una distribución log-normal. Los parámetros de dicha distribución se obtienen mediante las fórmulas:

$$\lambda = \frac{\alpha}{H}$$

$$\sigma^2 = \frac{2(\lambda - 1)}{\ln 2}$$

En nuestro caso obtenemos:  $\lambda = 1.064$  y  $\sigma^2 = 0.185$

### 5.3.7 Simulación de tiempo

Generamos una cascada multiplicativa lognormal con los parámetros obtenidos anteriormente (código en github). Estas son las iteraciones 1,3,5,7,9 y 11 de nuestro proceso:

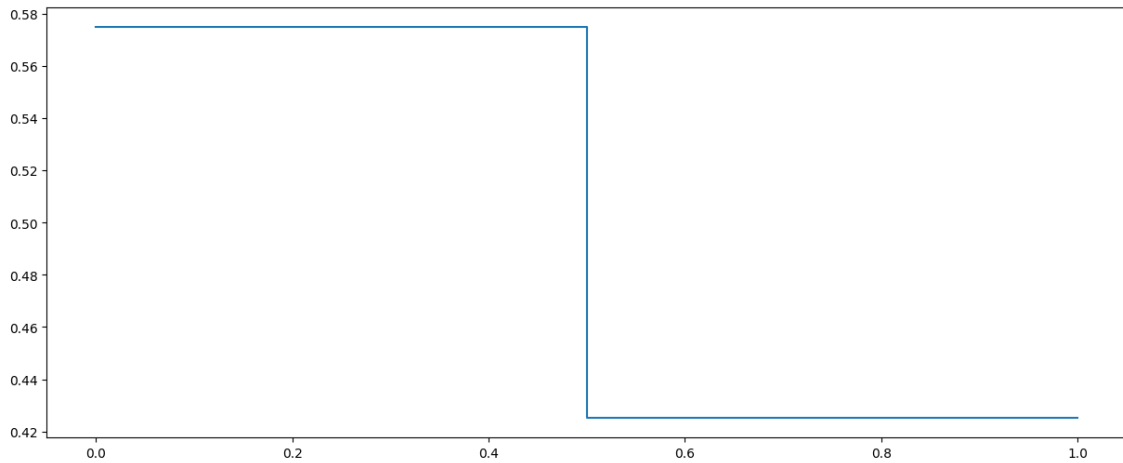


Imagen 23: iteración 1 de la cascada multiplicativa.

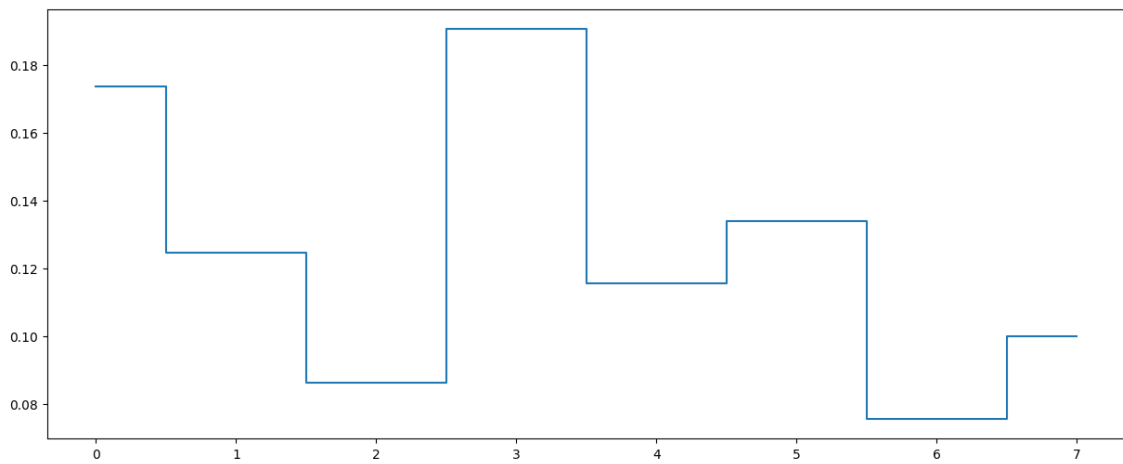
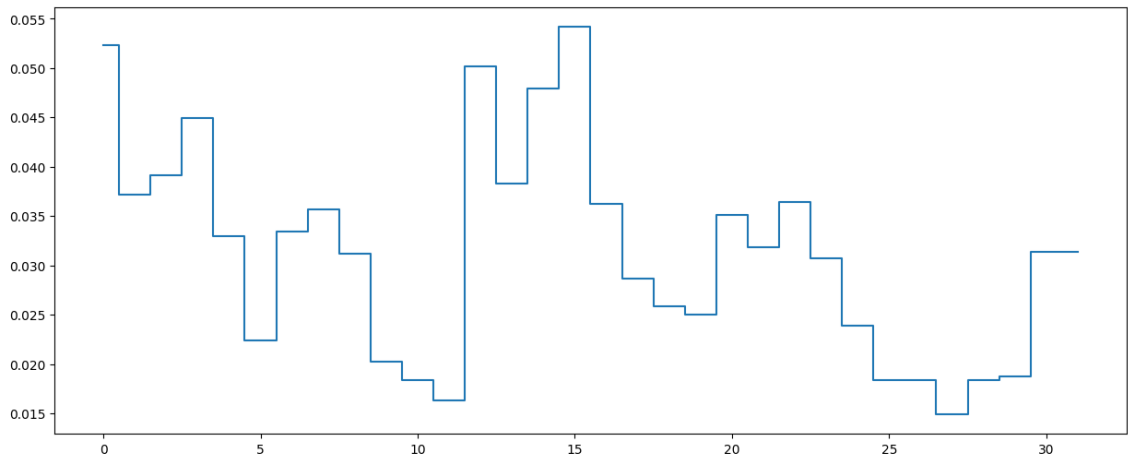
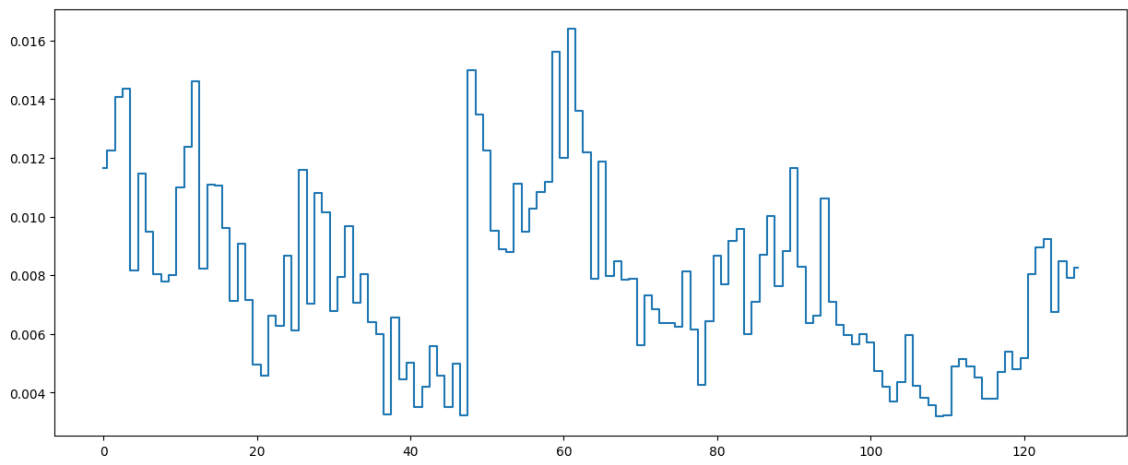


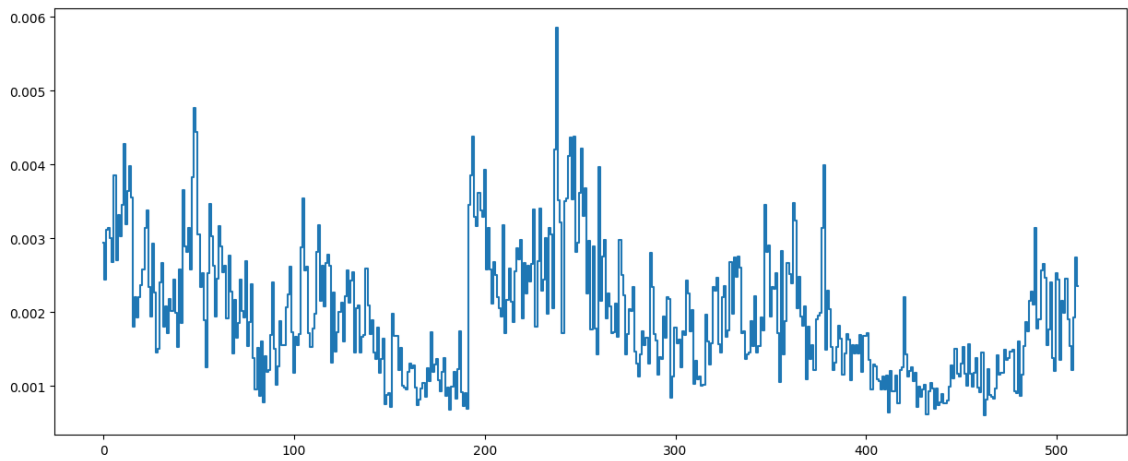
Imagen 24: iteración 3 de la cascada multiplicativa.



*Imagen 25: iteración 5 de la cascada multiplicativa.*



*Imagen 26: iteración 7 de la cascada multiplicativa.*



*Imagen 27: iteración 9 de la cascada multiplicativa.*

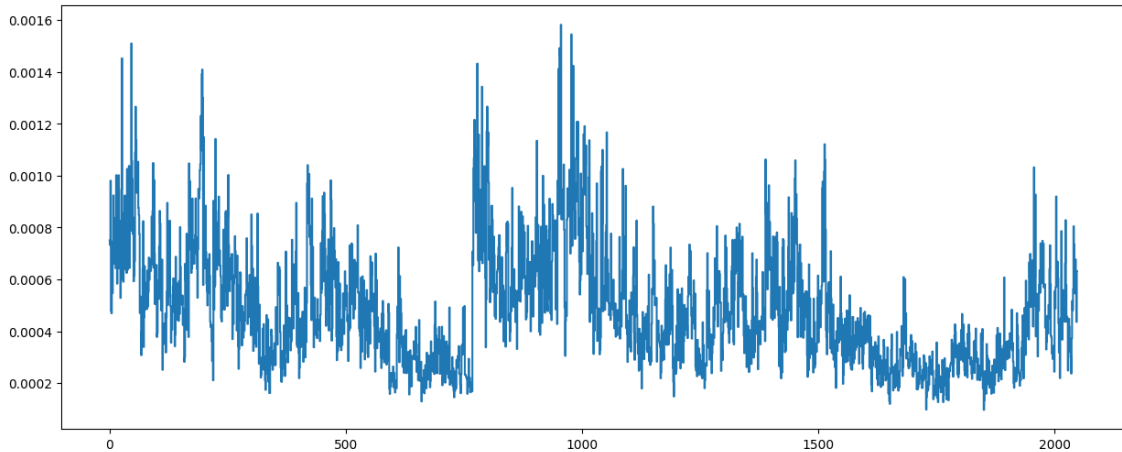


Imagen 28: iteración 11 de la cascada multiplicativa.

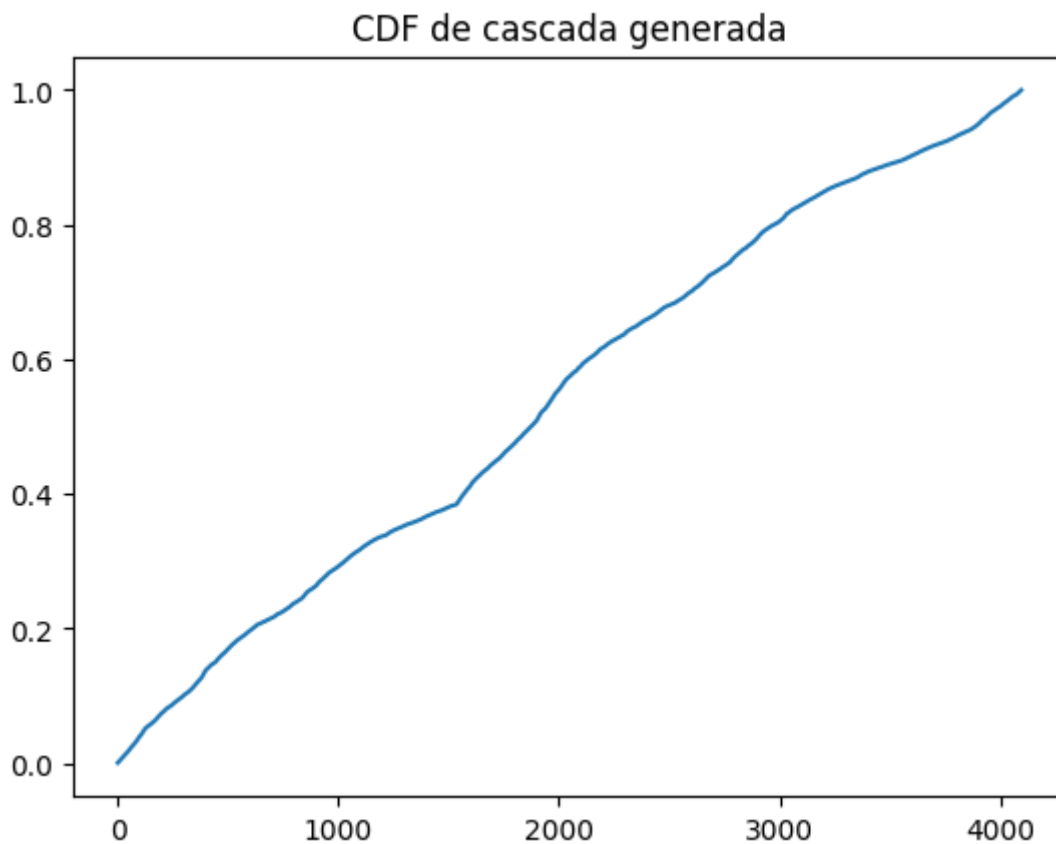


Imagen 29: CDF de los valores generados.

(Aclaración: en los trabajos de Mandelbrot este proceso se ve con picos bastante más exagerados. Esto es debido a que los activos analizados, DM/USD, daban una varianza bastante mayor a la nuestra con el EURUSD)

### 5.3.8 Simulación de movimiento browniano fraccional

Para esto usaremos la librería de Python de FBM (Fractional Brownian Motion) con el algoritmo de Davies-Harte:

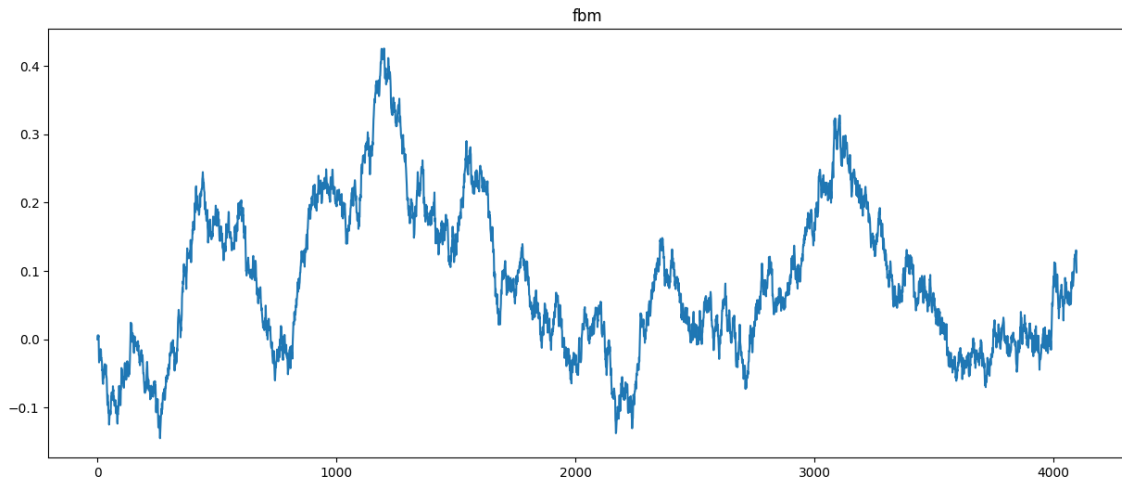


Imagen 30: representación del movimiento browniano fraccional generado.

### 5.3.9 Poniendo el tiempo y precio generados juntos

Ahora que ya tenemos los precios y los tiempos tan solo tenemos que juntarlos:

$$X(t) = B_H[\theta(t)]$$

Para esto tenemos que hacer continuo  $B_H$  mediante una interpolación y obtener  $X(t)$  para todos los  $t$  pertenecientes a la CDF obtenida de la cascada (un total de 4048 puntos):

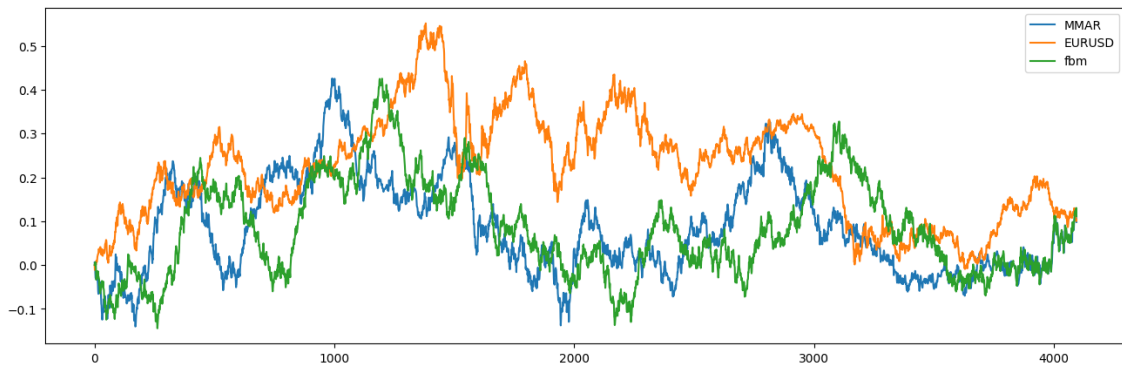
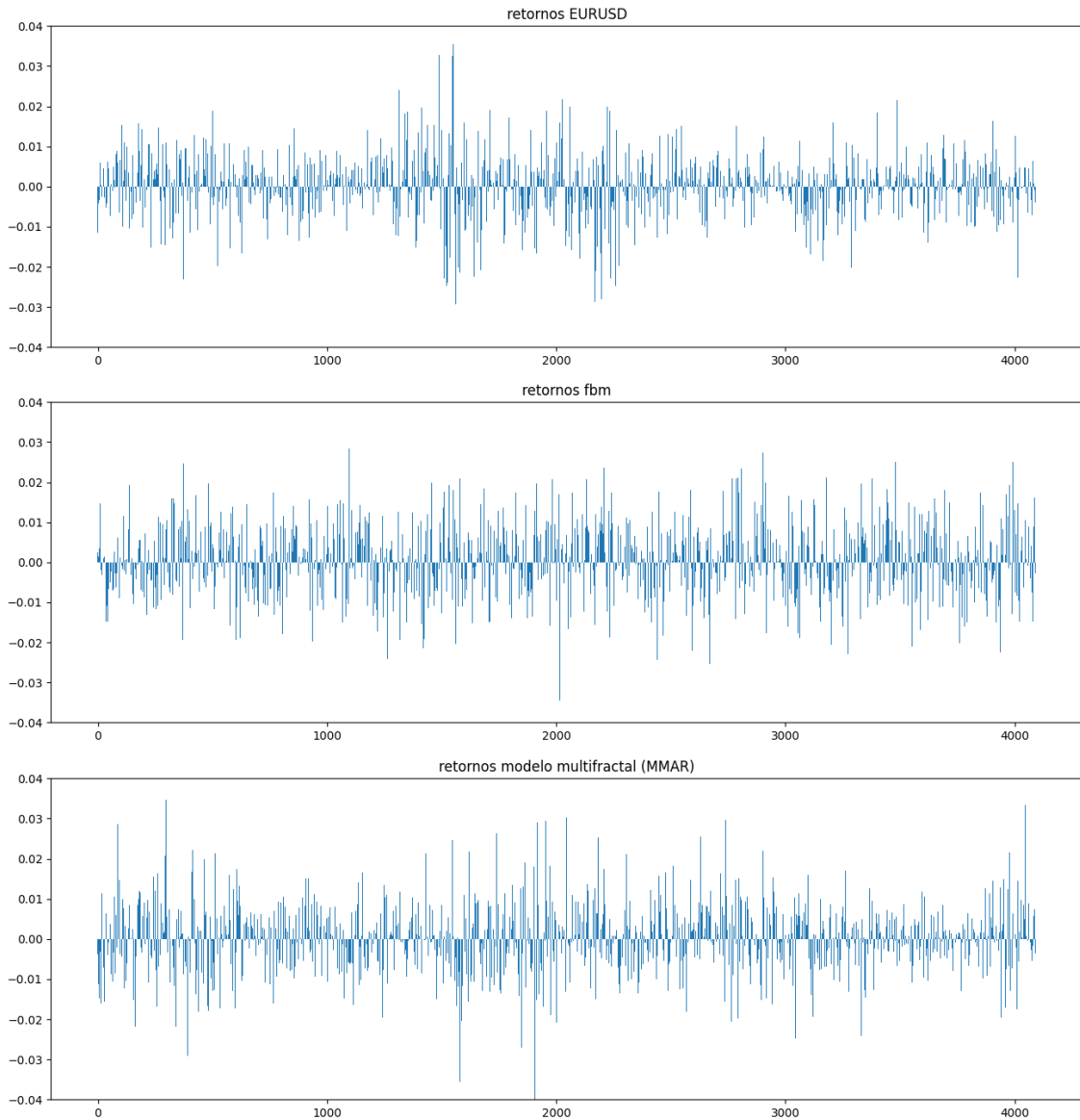


Imagen 31: gráfica donde se muestra 4048 puntos reales del EURUSD (naranja), del fbm(verde) y del MMAR(azul). Destacar que el MMAR es el fbm pero comprimido y expandido en algunas zonas, lo que proporciona momentos de una mayor o menor volatilidad.



Podemos observar que con el MMAR obtenemos volatilidades con un rango mayor (sobresale del -0.04, a diferencia del FBM normal que no lo hace, por ejemplo) y tiene algún periodo de poca volatilidad que no son tan evidentes en el FBM normal. Estas cualidades hacen que se asemeje más a los datos reales. Sin embargo, habría que tratar de realizar algún tipo de prueba estadística para verificar dichas observaciones.

## 5.4 Conclusiones

El modelo multifractal de rendimientos de activos, que es nuevo en este artículo y en Mandelbrot (1997)[2], incorpora regularidades importantes observadas en series de tiempo financieras, incluidas colas largas y memoria. La multifractalidad se define por un conjunto de restricciones en los tiempos del proceso a medida que cambia la escala de tiempo de las observaciones. Está

integrado en el modelo a través del tiempo de negociación, una distorsión aleatoria del tiempo del reloj que explica los cambios en la volatilidad.

Las propiedades de MMAR incluyen multifractalidad, consistencia de escala y memoria de volatilidad prolongada. La previsibilidad de los precios (logarítmicos) no está especificada teóricamente, ya que el modelo tiene suficiente flexibilidad para satisfacer la propiedad martingala en algunos casos y larga memoria en sus incrementos en otros. Por tanto, el MMAR es una alternativa prometedora a los modelos tipo ARCH. Al igual que GARCH, MMAR incorpora memoria larga a la volatilidad. Además, la MMAR permite la posibilidad de que los rendimientos no estén correlacionados, pero no lo exige. Esta es una propiedad importante para los investigadores interesados en cuestiones de eficiencia del mercado. La principal ventaja de MMAR sobre alternativas como GARCH es la propiedad de coherencia de escala. Debido a esta propiedad, las características de agregación de los datos (consideradas de otro modo como la información contenida en diferentes frecuencias de muestreo) se pueden utilizar para probar e identificar el modelo.

Sin embargo, el modelo también tiene sus restricciones. Una de las restricciones más notables del MMAR (y de la mayoría de los modelos clásicos) es su aplicación exclusiva a retornos diarios. Esta limitación puede restringir su utilidad en ciertos contextos financieros donde el análisis de datos intradía o de alta frecuencia es crucial. Por ejemplo, en los mercados de alta frecuencia, donde las transacciones se realizan en fracciones de segundos, la capacidad de modelar dinámica intradía es esencial para capturar la verdadera naturaleza de la volatilidad y las fluctuaciones de precios. Es en este contexto en donde nos centraremos para desarrollar nuestro modelo.

Otra posible limitación del MMAR es su complejidad computacional y la necesidad de una implementación cuidadosa para asegurar resultados precisos. No hay una implementación "oficial" sobre qué algoritmos usar para el FBM y la cascada multiplicativa lognormal. La generación de series de tiempo multifractales requiere de una considerable potencia de cálculo y una comprensión profunda de las matemáticas de detrás del modelo.

Además, aunque el MMAR incorpora propiedades importantes como la coherencia de escala y la memoria prolongada de la volatilidad, su capacidad para capturar todas las características empíricas de los datos financieros reales puede ser limitada. Las series de tiempo financieras son extremadamente complejas y pueden contener patrones y comportamientos que no se ajustan perfectamente a las suposiciones del MMAR.

## 6 Modelo Multifractal Intra-diario

### 6.1 Objetivo

El objetivo de este modelo multifractal intra-diario es proporcionar una representación realista y detallada de los precios de los activos a lo largo de un día de negociación, modelando tick a tick. Este modelo se enfoca en capturar las características intradías y de alta frecuencia de los precios de los activos, manteniendo la complejidad y realismo observados en los datos reales. A continuación, se detallan los objetivos específicos del modelo:

- **Realismo en los Ticks de Precios:**

**Objetivo:** Crear un modelo que reproduzca los ticks de precios a lo largo del día de manera que no se pueda distinguir fácilmente entre datos reales y simulados.

**Implementación:** Obligar a redondear los precios simulados al valor mínimo de los precios observados en el mercado y generar tiempos y tamaños de transacción realistas.

- **Colas Más Exageradas en la Distribución de Retornos:**

**Objetivo:** Obtener distribuciones de retornos que presenten colas más pronunciadas en comparación con una distribución normal.

**Implementación:** Utilizar distribuciones t-Student al generar el Movimiento Browniano Fraccional (FBM) para simular los retornos.

- **Correlaciones a Diferentes Escalas Temporales (Consistencia de Escala):**

**Objetivo:** Reflejar las correlaciones observadas en los datos a diversas escalas temporales.

**Implementación:** Construir el FBM con diferentes parámetros de Hurst (H) para capturar estas correlaciones en múltiples escalas.

- **Distribución de Tiempos Autosemejante:**

**Objetivo:** Conseguir que los tiempos entre transacciones sigan una distribución autosemejante similar a la observada en los datos reales.

**Implementación:** Utilizar distribuciones lognormales para modelar los tiempos entre transacciones.

- **Tendencias Diarias de Volatilidad:**

**Objetivo:** Reflejar las tendencias diarias de volatilidad observadas en los mercados.

**Implementación:** Modelar el tiempo de negociación de manera que refleje las variaciones de la volatilidad a diferentes horas del día, capturando los patrones intradía típicos. (Lo ideal sería tener esto en cuenta también para modelar el tamaño de ticks, algo que no me dió tiempo a implementar pero que resolveré en un futuro, más explicación en las conclusiones)

- **Autocorrelación de la Volatilidad:**

**Objetivo:** Modelar la autocorrelación de la volatilidad en el tiempo entre transacciones y en el tamaño de los ticks.

**Implementación:** Utilizar un modelo GARCH para incorporar la memoria prolongada y la autocorrelación en la volatilidad.

Este enfoque permitirá desarrollar un modelo multifractal intra-diario que capture las complejas dinámicas de las series de tiempo financieras, logrando que los datos simulados sean lo más cercano a indistinguibles de los reales en escalas que van desde los ticks hasta días enteros.

Es importante mencionar que muchos de los conceptos utilizados en este capítulo (como el exponente de Hurst o el análisis RS) se pueden encontrar explicados en profundidad en la obra de Edgar E. Peters, “Fractal Market Analysis” [4].

## 6.2 Construcción e implementación

La idea es la siguiente, normalmente los modelos tratan de simular directamente los precios según escalas temporales (semanas, meses, días, horas...). En el modelo MMAR explicado e implementado anteriormente se da un enfoque de “separar el precio y el tiempo”. Sin embargo, creo que esto se puede llevar más lejos.

El precio de un activo financiero está formado por ticks. Un tick es un movimiento en el mercado. Entre dos ticks transcurre un tiempo que suele estar comprendido entre unos pocos milisegundos hasta unos pocos segundos dependiendo del mercado y del Bróker o Exchange. Este tiempo entre ticks va variando a lo largo del día, por ejemplo, en el caso del EURUSD el tiempo entre ticks es más corto (el mercado se mueve más) cuando los mercados de Europa Y Estados Unidos están abiertos.

Para reflejar esto, vamos a modelar por un lado el precio (el tamaño de los Ticks) y por otro lado el tiempo entre ticks. Esto se hará de forma similar a como se separa en el MMAR el tiempo y el precio, pero con la diferencia de que estamos

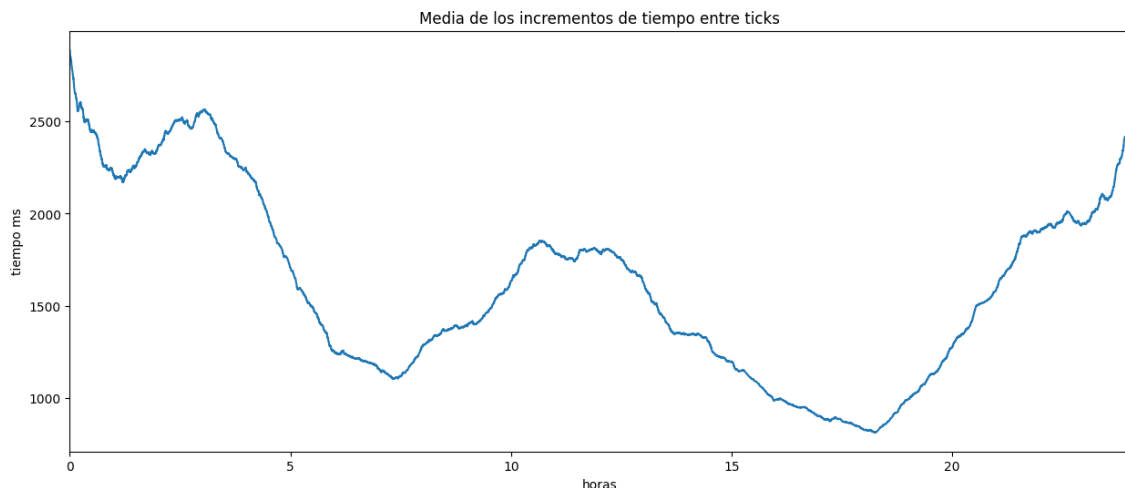
modelando todos y cada uno de los movimientos que ocurren a lo largo de un día.

### 6.2.1 Obtención de datos

Para la obtención de datos usaremos los datos de tick del EURUSD de un año (alrededor de 15 millones de ticks) de un bróker tal y como se hizo en el estudio de las distribuciones en el capítulo 2.

### 6.2.2 Obtención de la media de tiempos entre ticks de cada hora del día

A lo largo del día, la media de los tiempos entre ticks varía según las sesiones de mercado que estén abiertas.



*Imagen 32: Media de 1000 periodos de los incrementos de tiempo entre ticks.*

En el gráfico, los dos valles (zonas más volátiles) corresponden a las aperturas de Londres y Nueva York, respectivamente.

Una vez calculadas las medias, se utilizan en las distribuciones lognormales para generar los datos aleatorios. Este es un ejemplo de un histograma que muestra los valores reales (en rojo) y los valores obtenidos de una distribución lognormal (en azul):

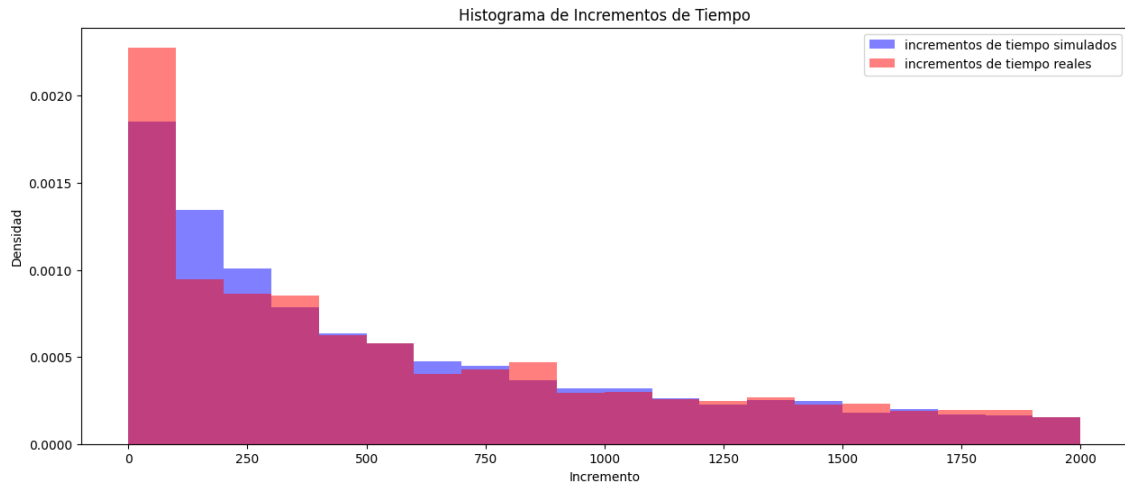


Imagen 33: histograma de los incrementos de tiempo reales (rojo) y los generados (azul).

### 6.2.3 Obtención de GARCH

Una vez tenemos las medias, para obtener la varianza de estas distribuciones usaremos GARCH. El modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) permite modelar la varianza condicional de los rendimientos financieros, capturando la dependencia temporal de la volatilidad. En concreto, GARCH considera que la varianza en un momento dado depende tanto de los choques pasados (rendimientos anteriores) como de las varianzas pasadas. Esto se expresa mediante ecuaciones que combinan términos autoregresivos y de media móvil para la varianza. Este enfoque es útil para ajustar las distribuciones lognormales de los incrementos de tiempo entre ticks, reflejando de manera más precisa la variabilidad observada en los datos financieros:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Donde:

$\alpha_0 > 0$  es una constante.

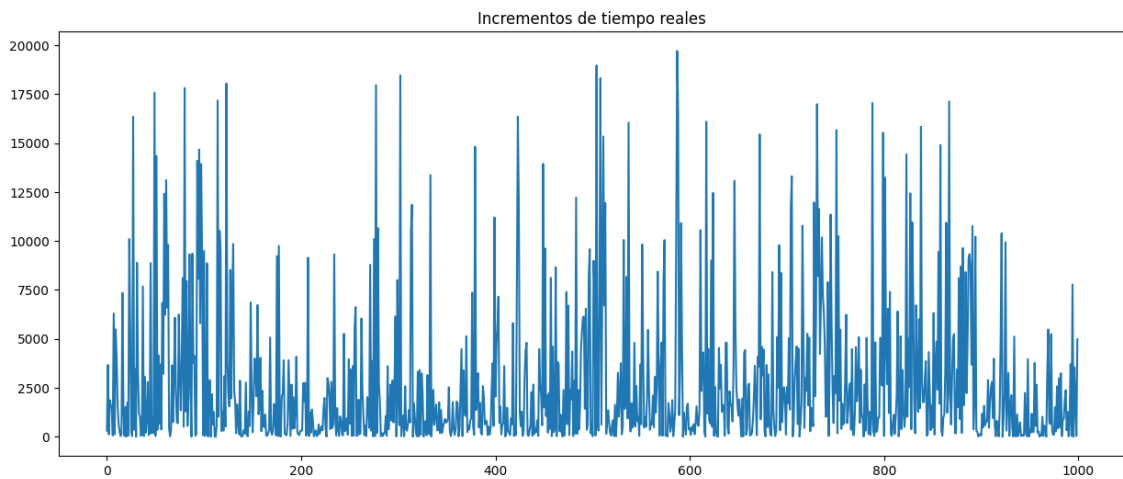
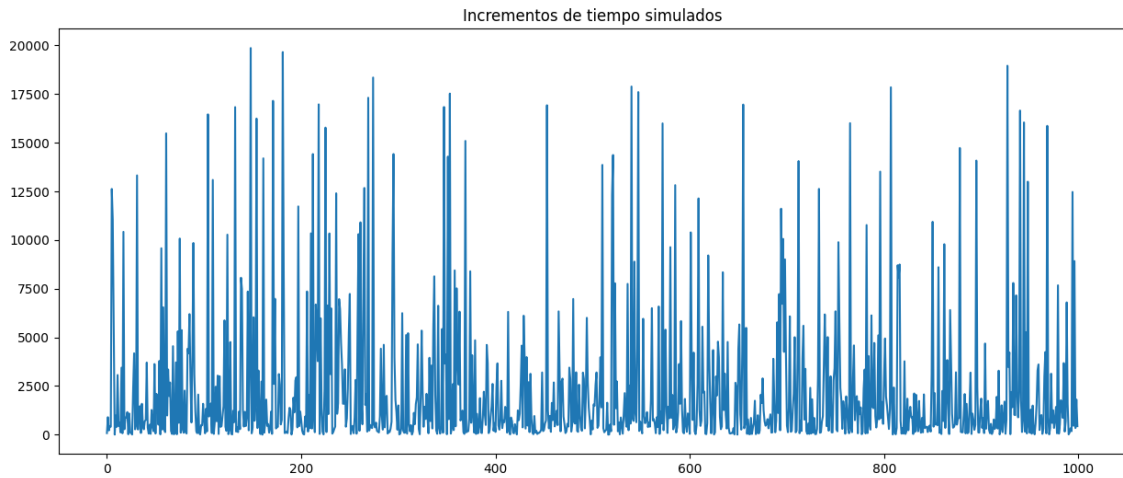
$\alpha_i \geq 0$  son los coeficientes asociados a los rezagos de los términos de error  $\varepsilon_{t-i}^2$ .

$\beta_j \geq 0$  son los coeficientes asociados a los rezagos de las varianzas condicionales anteriores  $\sigma_{t-j}^2$ .

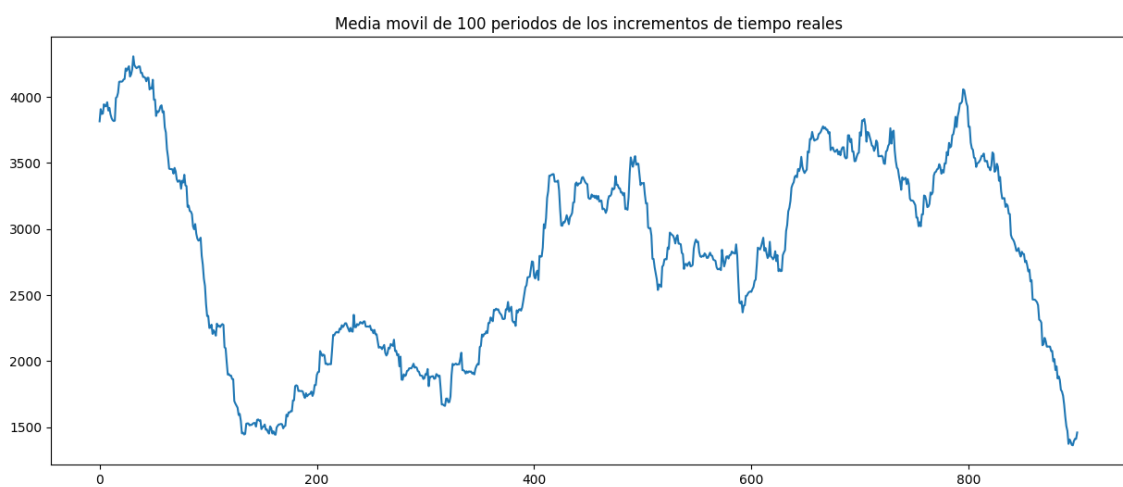
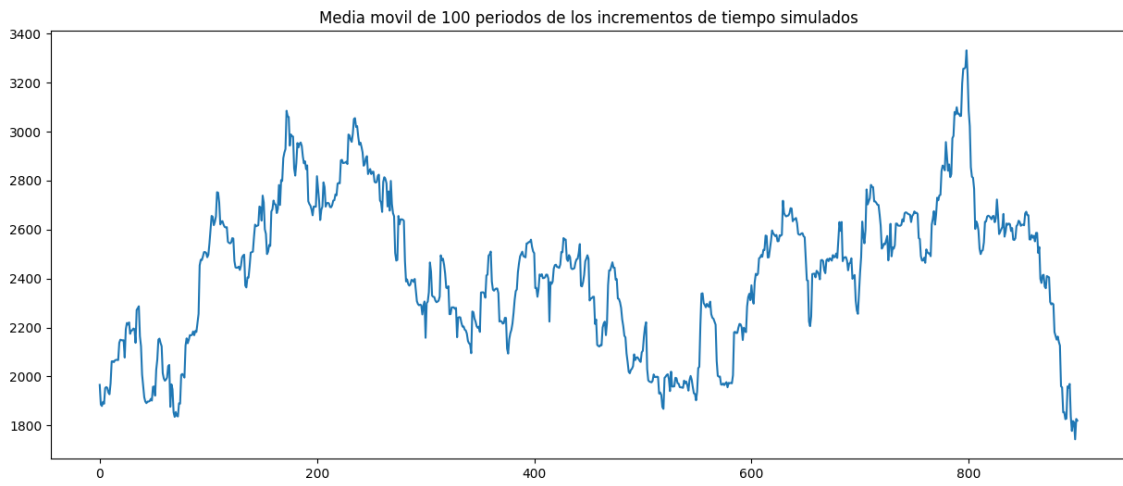
En nuestro caso usaremos un solo GARCH(2, 2).

### 6.2.4 Simular tiempo

Una vez obtenidas las 24 medias y entrenado el modelo GARCH, falta crear las simulaciones. Primero comprobemos que tal se ven los datos reales comparados con los simulados:



A simple vista costaría mucho saber cuales son los valores simulados y cuales los reales, lo que indica que haber elegido una distribución lognormal a partir de la cual obtener los datos aleatorios ha sido un acierto. Comprobemos qué tal se ve la media de 100 periodos de los tiempos y los rangos en las que se encuentra:



Se puede observar en las gráficas que la primera es algo más rugosa que la segunda. A su vez, la segunda tiene un rango mayor (1500-4000) comparado con la primera (1800 – 3500).

Por último modelamos varios días (rojo) y los presentamos en forma de CFD comparándolos con reales (azul):

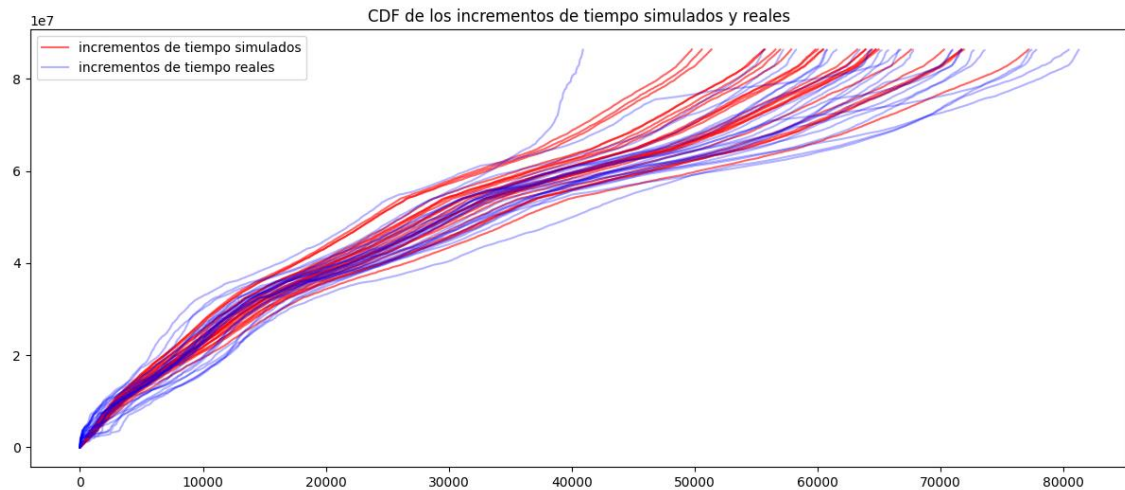


Imagen 34: CDF de 25 días de tiempos reales (azul) y tiempos simulados (rojo).

### 6.2.5 Obtencion de exponentes de Hurst

Para el modelo, hemos estudiado los exponentes de Hurst del EUR/USD mediante un análisis de rango reescalado (RS). El exponente de Hurst (H) es una medida utilizada para evaluar la presencia de dependencia a largo plazo en una serie temporal. Como se mencionó previamente, un valor de H mayor a 0.5 indica persistencia (tendencia a continuar en la misma dirección), mientras que un valor menor a 0.5 sugiere anti-persistencia (tendencia a revertir). Un valor de  $H=0.5$  es característico de un paseo aleatorio, indicando ausencia de memoria a largo plazo.

#### El análisis RS se realiza en varias etapas:

- Segmentación de la serie temporal: La serie temporal de precios del EUR/USD se segmenta en subseries de longitud  $n$ . En nuestro caso, sabemos que a la hora de construir el FBM usaremos potencias de 2, por lo que nuestros segmentos serán de longitudes  $n = 2^0, 2^1, \dots, 2^{18}$ .
- Cálculo del rango reescalado (RS): Para cada subserie, se calcula la media ( $\bar{X}$ ).

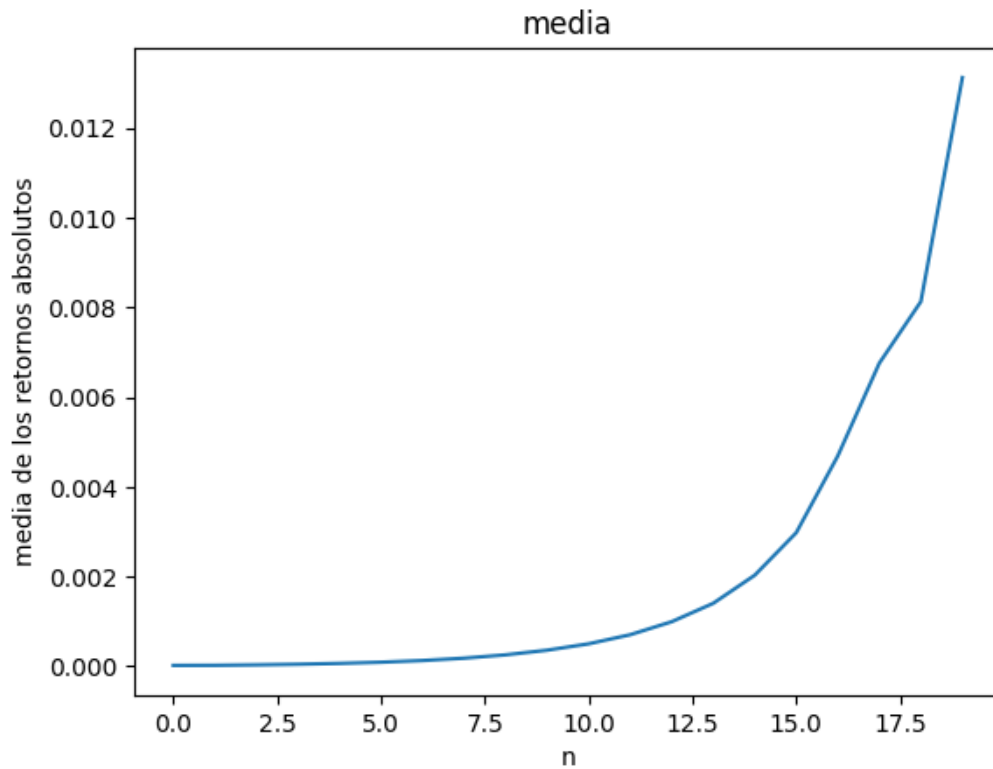


Imagen 35: media de los tamaños de los retornos de las diferentes observaciones.

Ahora obtenemos los diferentes escalados dividiendo el valor de cada media de segmentos de tamaño  $n_i$  por la media de segmentos de tamaño  $n_{i-1}$ .

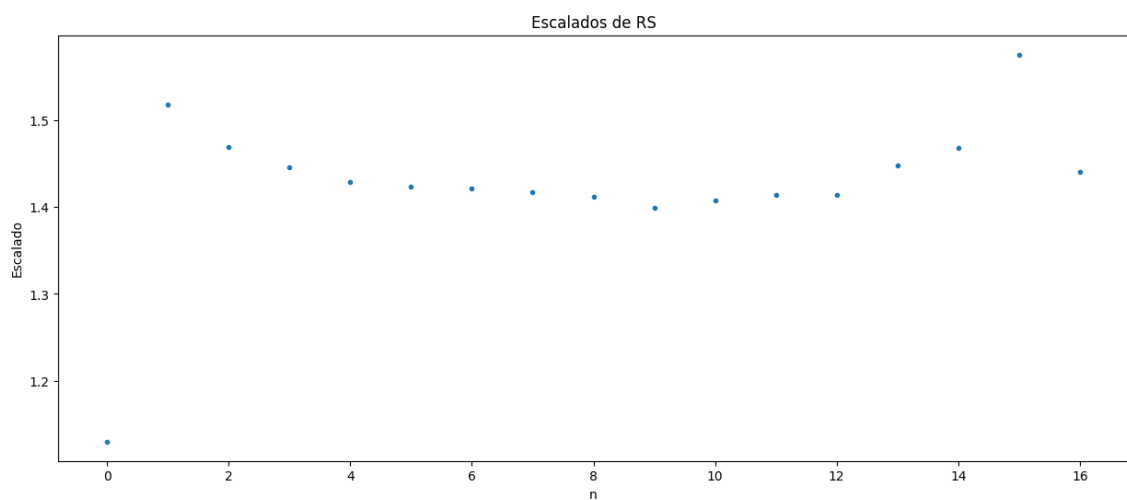


Imagen 36: Escalados de RS.

Normalmente, el valor del rango reescalado se grafica en una escala logarítmica frente al tamaño de la subserie en una escala logarítmica. Se realiza una

regresión lineal sobre estos puntos y la línea de regresión en la gráfica log-log proporciona una estimación del exponente de Hurst.

La mayoría de los valores están cercanos a 1.5 o ligeramente por debajo, lo que es normal, recordar también que al construir el MMAR obtuvimos un valor de H de alrededor de 0.45, que equivale a escalado de 1.45, muy parecido a los valores que obtenemos en la gráfica.

Sin embargo, hay algo que llama la atención en el gráfico. Para  $n=1$ , es decir para los incrementos inmediatos de ticks obtenemos un valor muy cercano a 1.12, lo que significa que exponente de Hurst para dichos intervalos sería de 0.12, indicando una gran anti-persistencia. Esto no es algo aleatorio, para movimientos inmediatos, el siguiente movimiento es mucho más probable que sea en dirección opuesta. En otras palabras, si tenemos un tick positivo, lo más probable es que el siguiente tick sea negativo. Desafortunadamente, son movimientos demasiado pequeños de los cuales no se puede beneficiar uno (comisiones, spread, etc).

Es por esto por lo que en vez de usar un solo valor de reescalado en el FBM de  $S = 1+H$ , usaremos directamente los obtenidos en la gráfica para reflejar estos comportamientos a escalas pequeñas.

Al aplicar este método al EUR/USD, los valores de escalado obtenidos permiten evaluar la estructura de dependencia y antidependencia a largo plazo de esta serie temporal. Esto es crucial para el modelo, ya que influye en la parametrización de los procesos estocásticos subyacentes, como los modelos GARCH, que se utilizarán para la simulación y el análisis de la volatilidad.

## 6.2.6 Generar FBM con distribuciones t\_student

Una vez tenemos los valores de escalado, el otro punto importante es obtener los valores aleatorios de una función de colas más largas que la normal, de una t\_student con 3 grados de libertad. Veamos en una misma gráfica una simulación comparada con datos reales:

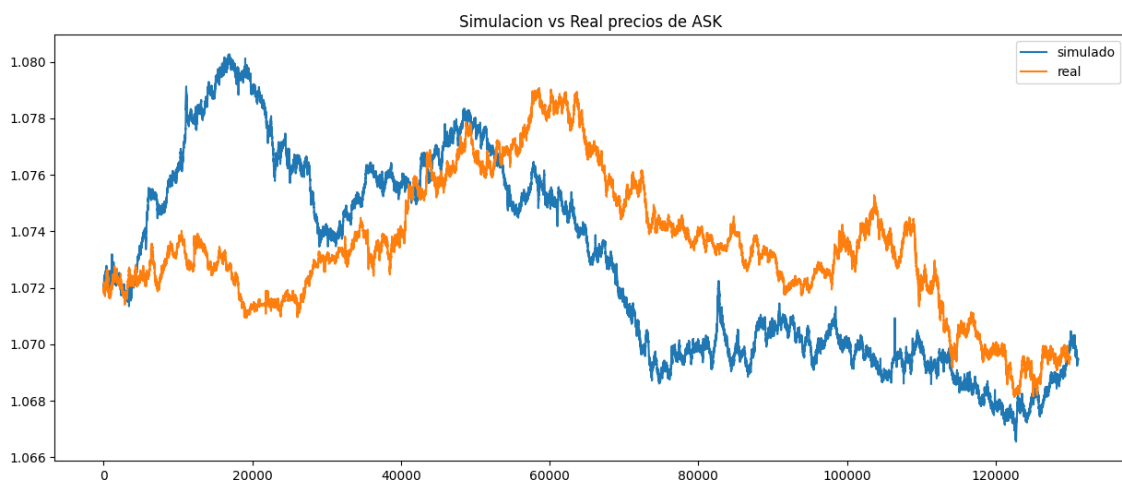


Imagen 37: comparación de simulación de 120.000 ticks (azul) en comparación con datos reales (naranja).

A simple vista parecen dos procesos bastante similares, veamos las distribuciones que obtenemos. Mostraremos los incrementos 1 a 1 tick e incrementos de 10.000 a 10.000 ticks.

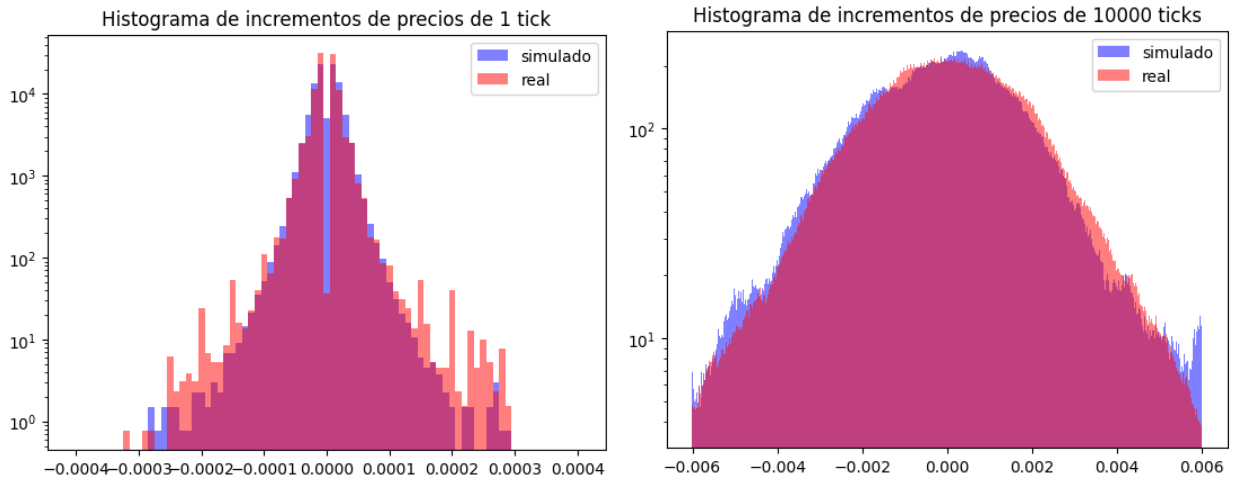


Imagen 38: histograma de retornos de 1 tick (izquierda) y de 10.000 ticks (derecha) con números aleatorios generados de distribuciones  $t\_student$ .

Obtenemos distribuciones extremadamente similares a reales. Hay también que tener en cuenta que se está mostrando en escala logarítmica. Ahora veamos cómo se generarían dichas distribuciones obteniendo los números aleatorios de distribuciones normales:

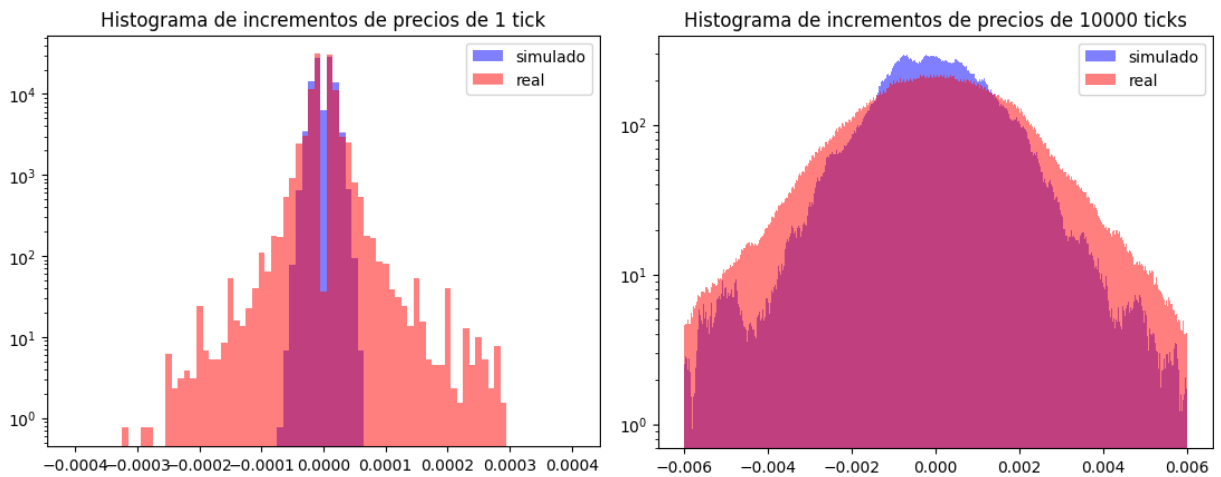


Imagen 39 histograma de retornos de 1 tick (izquierda) y de 10.000 ticks (derecha) con números generados de distribuciones normales.

A pesar de utilizar los diferentes escalados al ejecutar el FBM (que hacen que las colas a pequeñas escalas sean más largas) nos encontramos con distribuciones que tienen colas claramente menos pronunciadas que las reales. Esta es la principal razón por la que decidimos utilizar otro tipo de distribuciones con colas más largas para obtener los números aleatorios.

### 6.2.7 Juntar tiempo y precio

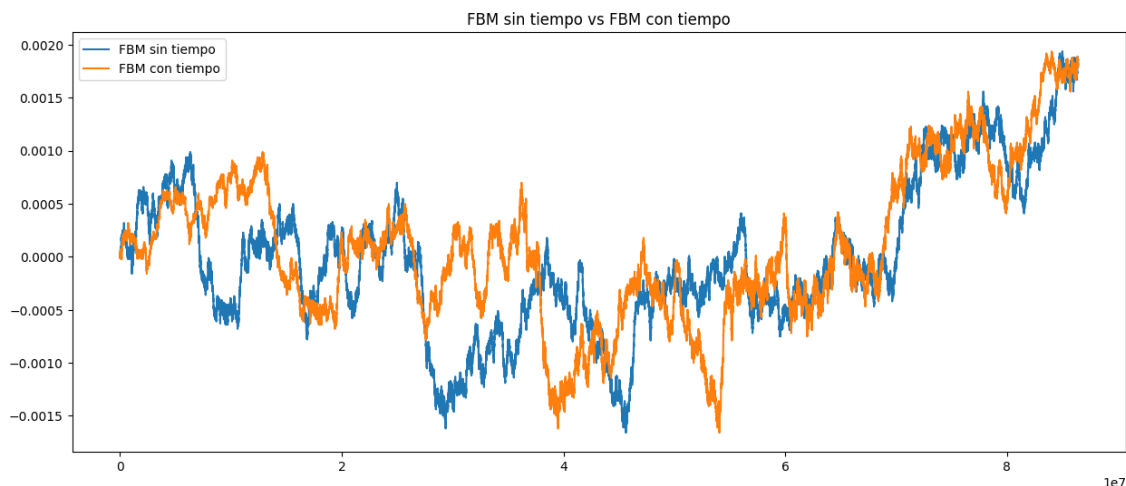
Ahora tan solo habría que juntar el precio en función del tiempo para generar una simulación completa de un día, de una forma muy parecida a como se juntaba el tiempo y precio en el MMAR:

$$X(t) = P(T(i))$$

Donde:

- P son los precios generados por el FBM
- T son los valores de la suma cumulativa de los tiempos generados
- i es el índice que va desde 0 hasta n, siendo n la cantidad de tiempos generados (a la hora de generar los tiempos se para cuándo se llega a las 24h)

De esta forma se consigue comprimir y expandir los precios generados para que se asemejen mejor a precios diarios en donde existen diferentes volatilidades a lo largo del día. Aquí el ejemplo del precio sin tiempo (azul) y precio con el tiempo (naranja):



*Imagen 40: FBM con tiempo constante (azul) y FBM con tiempo variable generado anteriormente (naranja).*

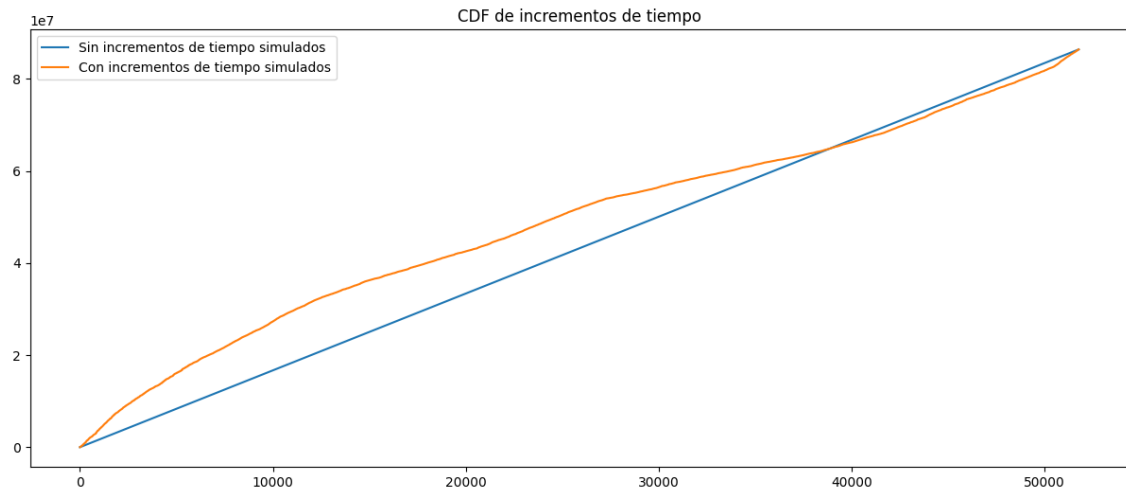


Imagen 41: CFD de los tiempos de las graficas de la figura anterior.

En finanzas, la visualización de los precios se hace normalmente mediante velas de periodos, también conocidas como gráficos de velas japonesas. Estas velas representan las variaciones de precio en intervalos específicos de tiempo, mostrando la apertura, el cierre, el máximo y el mínimo de los precios en cada periodo. Esta forma de visualización es particularmente útil para identificar patrones y tendencias en los datos de precios.

A continuación, mostraré un gráfico de velas de periodo de 5 minutos para comparar los precios generados por mi modelo con los precios reales de un día específico.



Imagen 42: Gráfico de una simulación de un día del EURUSD con velas de 5 minutos.



*Imagen 43: Gráfico de un día real del EURUSD con velas de 5 minutos.*

## **7 Resultados y conclusiones**

En este capítulo redactaremos los Resultados y Conclusiones obtenidas tras la construcción del modelo. Además, comentaremos las posibles mejoras y siguientes pasos a seguir.

### **7.1 Resultados**

#### **1. Realismo en los Ticks de Precios**

El modelo multifractal intra-diario ha sido capaz de generar ticks de precios que se asemejan a los datos reales del mercado. Esto se ha conseguido redondeando los precios simulados al valor de resolución observado en el mercado y generando tiempos y tamaños de transacción realistas. En las pruebas realizadas, los observadores no pudieron distinguir fácilmente entre los datos simulados y los reales, lo que demuestra el éxito en el logro de este objetivo. Esto quiere decir que se pueden llegar a realizar simulaciones a tiempo real en donde se pueda observar cómo se va moviendo el precio tick a tick a lo largo del día.

#### **2. Colas Más Exageradas en la Distribución de Retornos**

El principal problema de los modelos clásicos era el no conseguir modelar las colas largas y, por tanto, tener consecuencias como subestimar eventos extremos. Las distribuciones de retornos generadas por el modelo presentan colas significativamente más pronunciadas que una distribución normal que se asemejan mucho más a las reales, lo cual es consistente con la observación de eventos extremos en los mercados financieros. Utilizando distribuciones t-Student para generar el Movimiento Browniano Fraccional (FBM) además de implementar un tiempo entre ticks con volatilidad variable, el modelo ha capturado efectivamente las colas largas en la distribución de retornos, proporcionando una mejor representación de los riesgos extremos.

#### **3. Correlaciones a Diferentes Escalas Temporales**

En el MMAR, la consistencia de escala se consigue mediante un único valor  $H$  para todos los periodos, exigiendo una correlación constante indiferente de la escala. En nuestro modelo, al construir el FBM con diferentes parámetros de Hurst ( $H$ ), se han capturado las correlaciones presentes en las diferentes escalas de los datos de precios reales.

#### **4. Distribución de Tiempos Autosemejante**

La distribución de los tiempos entre transacciones sigue una estructura autosemejante, similar a la observada en los datos reales. Se ha logrado utilizando distribuciones lognormales con varianzas obtenidas de un modelo GARCH. Esto es particularmente importante para capturar la dinámica de alta frecuencia en los precios.

## 5. Tendencias Diarias de Volatilidad

El modelo refleja las tendencias diarias de volatilidad observadas en los mercados. La modelación del tiempo de negociación en función de la hora del día ha permitido capturar las variaciones de intradiaria, incluyendo picos y valles de volatilidad durante las aperturas y cierres de los mercados. Aunque el tamaño de los ticks aún no ha sido modelado en función de estas variaciones, los resultados preliminares indican que el modelo está bien encaminado para lograr esto en futuras versiones.

## 6. Autocorrelación de la Volatilidad

En el mercado, la volatilidad ocurre de forma autocorrelacionada, dando lugar a momentos de alta o bajas volatilidades, en otras palabras, los momentos de volatilidad son persistentes a lo largo del tiempo (memoria larga). El uso del modelo GARCH ha permitido incorporar la memoria prolongada y la autocorrelación en la volatilidad en el tiempo entre transacciones. Gracias a la generación de movimiento browniano mediante FBM (Frctional Brownian Motion) se consigue también la autocorrelación y memoria larga en el tamaño de los ticks. En un futuro se pueden estudiar formas de conseguir que esta volatilidad se genere a partir de un solo proceso tanto para el tiempo entre ticks como para el tamaño para conseguir que las volatilidades entre los dos procesos sean consistentes.

## 7.2 Conclusiones

El modelo multifractal intra-diario desarrollado ha demostrado ser una herramienta poderosa para simular precios de activos financieros a lo largo de un día de negociación, capturando características intradías y de alta frecuencia con un alto grado de realismo. Los objetivos específicos del modelo se han alcanzado de la siguiente manera:

- **Realismo en los Ticks de Precios:** Los precios simulados son prácticamente indistinguibles de los precios reales, gracias a la implementación de redondeos a la resolución del mercado y generación de transacciones realistas.
- **Colas Más Exageradas y Realistyas en la Distribución de Retornos:** Las distribuciones t-Student utilizadas en el FBM han permitido capturar efectivamente las colas largas observadas en los retornos financieros.

- **Correlaciones a Diferentes Escalas Temporales:** El uso de parámetros de Hurst variables en el FBM ha permitido reflejar consistencia de escala. Esto significa que las propiedades estadísticas de los precios financieros son coherentes cuando se observan a diferentes escalas temporales. Algo muy importante cuando se estudian escalas temporales muy pequeñas en el precio.
- **Distribución de Tiempos Autosemejante:** La modelación de los tiempos entre transacciones con distribuciones lognormales ha replicado adecuadamente las distribuciones de tiempo reales.
- **Tendencias Diarias de Volatilidad:** El modelo de tiempo de negociación ha capturado las variaciones intradías en la volatilidad, aunque se requiere más trabajo para modelar de forma similar el tamaño de los ticks a diferentes horas del día.
- **Autocorrelación de la Volatilidad:** El modelo GARCH ha incorporado de manera efectiva la autocorrelación y la memoria larga en la volatilidad del tiempo entre ticks. Además, gracias a usar FBM (Fractional Brownian Motion) para modelar los incrementos de precio, también conseguimos memoria larga y autocorrelación en la volatilidad del tamaño de los ticks.

### 7.3 Futuras Mejoras

A pesar de los logros alcanzados, el modelo puede mejorarse en varios aspectos. En un futuro se conseguirá también reflejar las tendencias diarias del tamaño de los ticks a lo largo de las diferentes horas del día. Esto incluirá desarrollar métodos para ajustar dinámicamente el tamaño de los ticks en función de las variaciones de la volatilidad a lo largo del día. También será importante en trabajar en conseguir que la volatilidad encontrada en los tamaños de los ticks y en el tiempo entre ticks sea coherente y no independiente.

También será importante trabajar un estudio más elaborado de pruebas estadísticas para validar mejor las cualidades del modelo y conseguir una formulación más matemática para definir mejor el modelo.

En resumen, nuestro modelo multifractal intra-diario representa un avance significativo en la simulación de precios de activos financieros, proporcionando una herramienta robusta para la investigación y el análisis financiero que puede ser mejorada y expandida en futuras versiones.

## **8 Aplicaciones**

En este capítulo trataremos las principales posibles aplicaciones del modelo desarrollado: valoración de derivados, trading de alta frecuencia y análisis de riesgos y simulaciones para backtesting.

### **8.1 Valoración de Derivados**

La valoración precisa de derivados, como opciones, requiere modelar o suponer la dinámica subyacente del precio del activo con alta precisión, especialmente en contextos de alta frecuencia. Por ejemplo, los modelos clásicos explicados en el capítulo 2 suponen que la distribución de precios sigue una distribución log-normal basada en el movimiento browniano geométrico.

Con nuestro modelo, para valorar una opción financiera, se pueden realizar simulaciones de trayectorias de precios del activo. Estas trayectorias, que incorporan la variabilidad intradía y la autocorrelación, pueden proporcionar estimaciones más precisas del valor esperado de la opción.

### **8.2 Trading de Alta Frecuencia**

El trading de alta frecuencia (HFT) se basa en la ejecución de operaciones a muy corto plazo, aprovechando pequeñas ineficiencias de mercado. Es por esto que la precisión en la predicción de los movimientos de precios a corto plazo es fundamental.

Nuestro modelo captura las variaciones intradiarias y de alta frecuencia en los precios, proporcionando datos realistas sobre los movimientos de precios tick a tick. Al modelar la volatilidad y los patrones de precios intradía, el modelo podría generar señales de trading más precisas para los algoritmos de HFT, mejorando la capacidad de predicción a corto plazo.

### **8.3 Análisis de Riesgos y Simulaciones para Backtesting**

El análisis de riesgos implica la identificación y evaluación de riesgos financieros que puedan afectar a una cartera de inversiones o de estrategias. El backtesting es el proceso de evaluar la efectividad de una estrategia de trading utilizando datos históricos. Sin embargo, muchas veces estos datos históricos no son suficientes y se recurren a simulaciones de Montecarlo para evaluar la robustez de las estrategias de trading o inversión.

Con nuestro modelo podemos realizar simulaciones que generan trayectorias de precios tick a tick con propiedades estadísticas realistas, incluyendo colas largas y autocorrelación, esenciales para pruebas de estrés y evaluación de riesgos.

## **8.4 Conclusión**

El modelo desarrollado es una herramienta para capturar la complejidad y el realismo de las series de precios financieros intradiarios. Las posibles aplicaciones en la valoración de derivados, el trading de alta frecuencia y el análisis de riesgos pueden permitir una mejor toma de decisiones financieras y una gestión de riesgos más precisa.

## 9 Análisis de Impacto

Este capítulo analiza el impacto potencial de los resultados obtenidos durante la realización del Trabajo de Fin de Grado (TFG) en diferentes contextos: personal, empresarial, social, económico, medioambiental y cultural. También se considera su relación con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de la Agenda 2030.

### 9.1 Impacto Personal

#### **Beneficios Esperados:**

- Desarrollo de habilidades técnicas avanzadas en modelado y análisis financiero.
- Mejora del perfil profesional, abriendo nuevas oportunidades laborales.

#### **Posibles Efectos Perjudiciales:**

- Sobrecarga de trabajo y estrés durante el desarrollo del TFG.

### 9.2 Impacto Empresarial

#### **Beneficios Esperados:**

- Innovación en modelos financieros, mejorando la valoración de derivados, estrategias de trading y análisis de riesgos.

#### Posibles Efectos Perjudiciales:

- Altos costos de implementación y resistencia al cambio dentro de las empresas.

### 9.3 Impacto Social

#### **Beneficios Esperados:**

- Mejora de la educación financiera y comprensión de modelos multifractales.

#### **Impacto Económico**

**Beneficios Esperados:**

- Contribución a la estabilidad financiera y crecimiento económico mediante una mejor gestión del riesgo.

## 9.4 Impacto Medioambiental

**Beneficios Esperados:**

- Promoción de la sostenibilidad económica mediante una mayor eficiencia en los mercados financieros.

## 9.5 Impacto Cultural

**Beneficios Esperados:**

- Inspiración y fomento de la innovación en el campo financiero.

**Posibles Efectos Perjudiciales:**

- Resistencia para adoptar nuevas metodologías.

## 9.6 Impacto en los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)

El proyecto puede contribuir a los ODS relevantes, como:

- ODS 4: Contribución a la educación de calidad.
- ODS 8: Promoción del trabajo decente y el crecimiento económico.
- ODS 9: Fomento de la industria, innovación e infraestructura.



## 10 Bibliografia

- [1] Benoit B. Mandelbrot, *The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence*, 2004.
- [2] Mandelbrot, B., Fisher, A. and Calvet, L., *A multifractal model of asset returns*. Cowles Foundation Discussion Paper No. 1164; Sauder School of Business Working Paper, 1997.
- [3] Mittnik, S., & Rachev, S. T. *Modeling asset returns with alternative stable distributions*, *Econometric Reviews*, 12(3), 261–330. <https://doi.org/10.1080/07474939308800266>, 1993.
- [4] Edgar E. Peters, *Fractal Market analysis*, 1994.
- [5] Rostislav Sibirtsev, *How to Avoid Bankruptcy?: Monte Carlo Simulation of Three Financial Markets, using the Multifractal Model of Asset Returns*, 2019.
- [6] Fischer Black and Myron Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, 1973.
- [7] Roman V. Ivanov, *On the Stochastic Volatility in the Generalized Black-Scholes-Merton Model*, 2023
- [8] Robert Engle, *An Introduction to the Use of ARCH/GARCH models in Applied Econometrics*, Stern School of Business, New York University,
- [9] Hendri Adriaens, Bas Donkers, *Extending the CAPM model*, 2004.
- [10] Benoit B. Mandelbrot, *The inescapable need for fractal tools in finance*, [https://www.researchgate.net/publication/5143102\\_The\\_inescapable\\_need\\_for\\_fractal\\_tools\\_in\\_finance](https://www.researchgate.net/publication/5143102_The_inescapable_need_for_fractal_tools_in_finance), 2005
- [11] Keneth Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 2003.

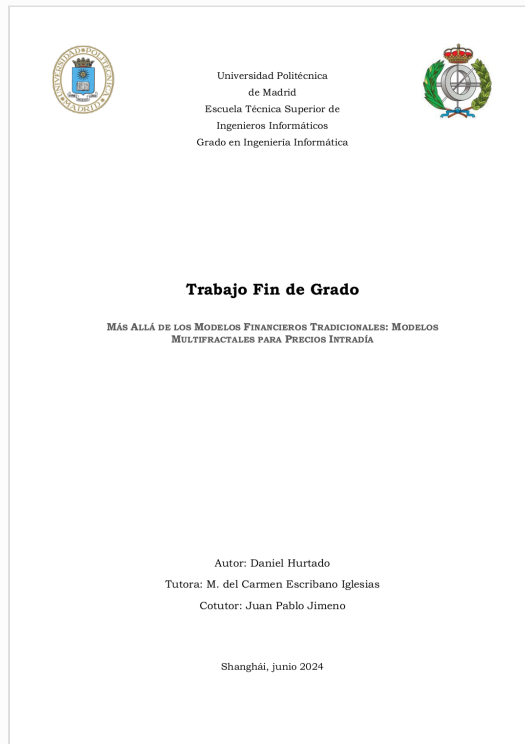


## Digital Receipt


This receipt acknowledges that Turnitin received your paper. Below you will find the receipt information regarding your submission.

The first page of your submissions is displayed below.

Submission author: DANIEL HURTADO PLATERO  
Assignment title: Turnitin Memoria Final (Moodle PP)  
Submission title: TFG.pdf  
File name: 26327\_DANIEL\_HURTADO\_PLATERO\_TFG\_530678\_1942522799...  
File size: 3.11M  
Page count: 62  
Word count: 11,541  
Character count: 64,361  
Submission date: 03-Jun-2024 07:06PM (UTC+0200)  
Submission ID: 2394743225



Este documento esta firmado por

	<b>Firmante</b>	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
	<b>Fecha/Hora</b>	Mon Jun 03 19:41:49 CEST 2024
	<b>Emisor del Certificado</b>	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
	<b>Numero de Serie</b>	561
	<b>Metodo</b>	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)