



Universidad Politécnica
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Informáticos**



Grado en Matemáticas e Informática

Trabajo Fin de Grado

**Desarrollo de una Aplicación Didáctica
sobre Geometría de Superficies
Parametrizadas y Superficies
Implícitas**

Autor: Asier Merino Herrán

Tutor(a): Juan Ángel Rojo Carulli

Madrid, Junio 2024

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas e Informática

Título: Desarrollo de una Aplicación Didáctica sobre Geometría de Superficies Parametrizadas y Superficies Implícitas

Junio 2024

Autor: Asier Merino Herrán

Tutor: Juan Ángel Rojo Carulli

Departamento de Matemática aplicada a las TIC

ETSI Informáticos

Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado se enmarca dentro del Proyecto Calculadora, promovido por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid. El objetivo del proyecto es desarrollar una aplicación educativa capaz de resolver ejercicios y proporcionar otras funcionalidades relacionadas con las asignaturas de matemáticas impartidas en los programas de grado de la escuela. Esta aplicación se desarrollará a través de diversos trabajos, como el presente, que se centra en la asignatura de Geometría Diferencial, específicamente en los contenidos relacionados con superficies.

En el transcurso de este trabajo, se han implementado un conjunto de métodos utilizando el lenguaje de programación Python, destinados a resolver de manera didáctica algunos de los ejercicios más comunes de la asignatura.

Se distinguen dos maneras de representar superficies: superficies parametrizadas y superficies implícitas. Para las superficies implícitas, se han desarrollado métodos que permiten calcular el vector normal y el plano tangente. Para las superficies parametrizadas, se han implementado métodos para calcular sus elementos característicos, incluyendo el vector normal, el plano tangente, la primera y segunda forma fundamental, la curvatura media, la curvatura de Gauss, entre otros.

Además, se han desarrollado métodos para obtener la representación gráfica de las superficies. Esta representación gráfica permite indicar un punto sobre la superficie y dibujar el vector normal, el plano tangente y, en el caso de superficies parametrizadas, las direcciones principales, el significado geométrico de las curvaturas principales y las direcciones asintóticas.

Adicionalmente, se ha creado una interfaz gráfica rudimentaria que ha permitido probar el correcto funcionamiento de los métodos desarrollados. Asimismo, se ha completado el desarrollo de la versión final de la interfaz gráfica que se integrará en la versión oficial de la aplicación del Proyecto Calculadora, utilizando código HTML. No obstante, las conexiones necesarias para integrar los métodos se realizarán posteriormente con la ayuda de los colaboradores del proyecto.

Abstract

This Final Degree Project is part of the Proyecto Calculadora, promoted by the Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos at Universidad Politécnica de Madrid. The project's objective is to develop an educational application capable of solving exercises and providing other functionalities related to the mathematics courses taught in the school's degree programs. This application will be developed through various works, such as this one, which focuses on the subject of Differential Geometry, specifically on content related to surfaces.

In the course of this work, a set of methods has been implemented using the Python programming language, designed to didactically solve some of the most common exercises in the subject.

Two methods for representing surfaces can be distinguished: differentiable parametrized surfaces and implicit surfaces. For implicit surfaces, methods have been developed to calculate the normal vector and the tangent plane. For parametrized surfaces, methods have been implemented to calculate their characteristic elements, including the normal vector, the tangent plane, the first and second fundamental forms, the mean curvature, the Gaussian curvature, among others.

Additionally, methods have been developed to obtain the graphical representation of the surfaces. This graphical representation allows indicating a point on the surface and drawing the normal vector, the tangent plane, and, in the case of parametrized surfaces, the principal directions, the geometric significance of the principal curvatures, and the asymptotic directions.

Moreover, a rudimentary graphical interface has been created to test the correct functioning of the developed methods. Furthermore, the development of the final version of the graphical interface that will be integrated into the official version of the Calculator Project application has been completed, using HTML code. However, the necessary connections to integrate the methods will be made later with the help of the project's collaborators.

Tabla de contenidos

1. Introducción	1
1.1. Estructura del documento	1
1.2. Contexto	2
1.3. Motivación	2
1.4. Trabajos previos	2
1.5. Módulos desarrollados	3
2. Desarrollo del sistema	5
2.1. Estructura de la librería	5
2.1.1. Estructura de la rama <i>main</i>	6
2.1.2. Estructura de la rama <i>develop</i>	7
2.2. Funcionamiento de la API y envío de resultados	7
2.3. Funcionalidades adicionales	10
2.4. Interfaz gráfica	13
2.5. Representación gráfica de superficies	17
2.5.1. Envío de resultado en superficies parametrizadas	17
2.5.2. Envío de resultado en superficies implícitas	18
2.5.3. Ejemplos	20
2.5.3.1. Ejemplo de esfera parametrizada	20
2.5.3.2. Ejemplo de helicoides parametrizado	21
2.5.3.3. Ejemplo de semiesfera parametrizada con dominio en forma de círculo	22
2.5.3.4. Ejemplo de esfera parametrizada con vector nor- mal y plano tangente	22
2.5.3.5. Ejemplo de paraboloide hiperbólico parametrizado con direcciones y curvaturas principales	23
2.5.3.6. Ejemplo de paraboloide hiperbólico parametrizado con plano tangente y direcciones asintóticas	24
2.5.3.7. Ejemplo de esfera implícita	25
2.5.3.8. Ejemplo de hiperboloide de una hoja	26
2.6. Vector normal	27
2.6.1. Descripción	27
2.6.2. Envío de resultados en superficies parametrizadas	28
2.6.3. Envío de resultados en superficies implícitas	29
2.6.4. Ejemplos	30

2.6.4.1. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie parametrizada en un punto general	30
2.6.4.2. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie parametrizada en un punto concreto	31
2.6.4.3. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie parametrizada con constantes	33
2.6.4.4. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie implícita con constantes	34
2.7. Plano tangente	34
2.7.1. Descripción	35
2.7.2. Envío de resultados en superficies parametrizadas	35
2.7.3. Envío de resultados en superficies implícitas	37
2.7.4. Ejemplos	38
2.7.4.1. Ejemplo de cálculo del plano tangente a una superficie parametrizada en un punto general	38
2.7.4.2. Ejemplo de cálculo del plano tangente a una superficie parametrizada en un punto concreto	39
2.7.4.3. Ejemplo de cálculo del plano tangente a una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas	40
2.7.4.4. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie implícita con constantes	40
2.8. Primera Forma Fundamental	41
2.8.1. Descripción	41
2.8.2. Envío de resultados	42
2.8.3. Ejemplos	43
2.8.3.1. Ejemplo de cálculo de la Primera Forma Fundamental de una superficie parametrizada en un punto general	43
2.8.3.2. Ejemplo de cálculo de la Primera Forma Fundamental de una superficie parametrizada en un punto concreto	44
2.8.3.3. Ejemplo de cálculo de la Primera Forma Fundamental de una superficie parametrizada con constantes	45
2.9. Segunda Forma Fundamental	46
2.9.1. Descripción	46
2.9.2. Envío de resultados	47
2.9.3. Ejemplos	49
2.9.3.1. Ejemplo de cálculo de la Segunda Forma Fundamental de una superficie parametrizada en un punto general	49
2.9.3.2. Ejemplo de cálculo de la Segunda Forma Fundamental de una superficie parametrizada en un punto concreto	50

TABLA DE CONTENIDOS

2.9.3.3. Ejemplo de cálculo de la Segunda Forma Fundamental de una superficie parametrizada con constantes	52
2.10 Aplicación de Weingarten	53
2.10.1 Descripción	53
2.10.2 Envío de resultados	54
2.10.3 Ejemplos	55
2.10.3.1 Ejemplo de cálculo de la matriz de Weingarten de una superficie parametrizada en un punto general	55
2.10.3.2 Ejemplo de cálculo de la matriz de Weingarten de una superficie parametrizada en un punto concreto	57
2.10.3.3 Ejemplo de cálculo de la matriz de Weingarten de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas	59
2.11 Curvaturas principales	61
2.11.1 Descripción	61
2.11.2 Envío de resultados	62
2.11.3 Ejemplos	63
2.11.3.1 Ejemplo de cálculo de las curvaturas principales de una superficie parametrizada en un punto general	63
2.11.3.2 Ejemplo de cálculo de las curvaturas principales de una superficie parametrizada en un punto concreto	65
2.11.3.3 Ejemplo de cálculo de las curvaturas principales de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas	67
2.12 Direcciones principales	69
2.12.1 Descripción	69
2.12.2 Envío de resultados	69
2.12.3 Ejemplos	71
2.12.3.1 Ejemplo de cálculo de las direcciones principales de una superficie parametrizada en un punto general	71
2.12.3.2 Ejemplo de cálculo de las direcciones principales de una superficie parametrizada en un punto concreto	73
2.12.3.3 Ejemplo de cálculo de las direcciones principales de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas	76
2.13 Curvatura de Gauss	78
2.13.1 Descripción	78
2.13.2 Envío de resultados	79
2.13.3 Ejemplos	80
2.13.3.1 Ejemplo de cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie parametrizada en un punto general	80
2.13.3.2 Ejemplo de cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie parametrizada en un punto concreto	82

2.13.3.3Ejemplo de cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas	84
2.14.Curvatura media	85
2.14.1Descripción	85
2.14.2Envío de resultados	86
2.14.3Ejemplos	87
2.14.3.1Ejemplo de cálculo de la curvatura media de una superficie parametrizada en un punto general . . .	87
2.14.3.2Ejemplo de cálculo de la curvatura media de una superficie parametrizada en un punto concreto . .	89
2.14.3.3Ejemplo de cálculo de la curvatura media de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas	91
2.15Punto umbílico	93
2.15.1Descripción	93
2.15.2Envío de resultados	94
2.15.3Ejemplos	95
2.15.3.1Ejemplo de comprobación de punto umbílico en una superficie parametrizada en un punto concreto	95
2.16.Clasificación de un punto	97
2.16.1Descripción	97
2.16.2Envío de resultados	99
2.16.3Ejemplos	100
2.16.3.1Ejemplo de clasificación de punto en una superficie parametrizada en un punto concreto	100
2.17Direcciones asintóticas	103
2.17.1Descripción	103
2.17.2Envío de resultados	104
2.17.3Ejemplos	105
2.17.3.1Ejemplo de cálculo de direcciones asintóticas en una superficie parametrizada en un punto concreto	105
2.18Análisis completo	107
2.18.1Descripción	107
2.18.1.1Superficie parametrizada	107
2.18.1.2Superficie implícita	108
2.18.2Envío de resultados en superficies parametrizadas	109
2.18.3Envío de resultados en superficies implícitas	110
2.18.4Ejemplos	111
2.18.4.1Ejemplo de análisis completo de una superficie parametrizada en un punto general	111
2.18.4.2Ejemplo de análisis completo de una superficie parametrizada en un punto concreto	113
2.18.4.3Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie implícita con constantes	116

TABLA DE CONTENIDOS

3. Resultados y conclusiones.	119
3.1. Funcionamiento de la aplicación	119
3.2. Propuestas de aplicaciones en el aula	122
3.3. Posibles mejoras de la librería desarrollada	123
4. Análisis de impacto.	125
Bibliografía	127
Anexos	131

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estructura del documento

En este documento se detalla toda la información referente al trabajo realizado para implementar en la aplicación didáctica las funcionalidades relacionadas con las superficies estudiadas en la asignatura de Geometría Diferencial.

En el primer capítulo de Introducción (1), se presenta brevemente el trabajo realizado, señalando el contexto, la motivación, los trabajos previos y los módulos desarrollados.

En el capítulo de Desarrollo del sistema (2), se describen los distintos métodos desarrollados, especificando las funcionalidades y opciones disponibles. Este capítulo se divide en varias secciones. En primer lugar, se detalla la estructura de archivos del código, el funcionamiento general y el desarrollo de la interfaz gráfica. En segundo lugar, se abordan los distintos ejercicios que se pueden resolver, describiendo las opciones y requisitos de cada uno. Las funcionalidades se describen tanto para superficies parametrizadas como implícitas (en los casos de vector normal, plano tangente y representación). Para cada funcionalidad, se proporciona una breve introducción teórica, seguida del pseudocódigo en Python y el procedimiento necesario para obtener los resultados, además de ejemplos de uso.

En el capítulo de Resultados y Conclusiones (3), se analizan los resultados obtenidos durante el desarrollo del trabajo. Este capítulo incluye una sección que evalúa el funcionamiento de la aplicación, analiza las potenciales contribuciones académicas, y propone posibles mejoras al código desarrollado.

En el último capítulo, Análisis de impacto (4), se expone el impacto que ha tenido este trabajo tanto a nivel personal como académico.

Por último, este documento cuenta con una bibliografía con las referencias de las fuentes utilizadas para la parte matemática del trabajo y los enlaces a las documentaciones de las diferentes herramientas tecnológicas usadas. Además, al final del documento se añaden dos anexos, una especificación de los métodos de la librería y una extensión de los ejemplos para complementar lo visto en el

segundo capítulo.

1.2. Contexto

Este Trabajo de Fin de Grado se integra en el Proyecto Calculadora, una iniciativa que engloba diversos trabajos con el objetivo de crear una aplicación didáctica capaz de resolver ejercicios de las distintas asignaturas de matemáticas de los grados de la Universidad Politécnica de Madrid. Específicamente, este trabajo se centra en la asignatura de Geometría Diferencial, impartida en el quinto semestre del Grado en Matemáticas e Informática, enfocándose en los temas relacionados con superficies.

La aplicación didáctica pretende proporcionar a los estudiantes una herramienta para resolver todo tipo de ejercicios matemáticos de manera similar a como una calculadora realiza operaciones básicas. Se busca ofrecer una resolución paso a paso de cada ejercicio abordado en la asignatura, tanto de problemas básicos como complejos, indicando los conceptos teóricos utilizados y proporcionando una representación visual de la superficie en cuestión, así como de los elementos y características calculadas (vector normal, curvaturas, etc.) cuando sea posible.

1.3. Motivación

Decidí embarcarme en este grado principalmente por dos razones: mi creciente interés por las matemáticas al finalizar mis estudios en el instituto y mi facilidad para aprender conceptos informáticos. A lo largo de la carrera, mi interés por las matemáticas ha aumentado, especialmente en los campos de la geometría y las matemáticas aplicadas. No obstante, he encontrado mayores dificultades en asignaturas relacionadas con las matemáticas que con la informática.

En este contexto, llegué al quinto semestre del grado y a la asignatura de Geometría Diferencial, cuyos contenidos despertaron mi interés desde el principio. Muchos de los ejercicios de la asignatura son mecánicos y, en ocasiones, tediosos de realizar. Por ello, me pareció interesante desarrollar una aplicación didáctica que resolviera este tipo de ejercicios, permitiendo a los alumnos corregir rápidamente sus soluciones y centrarse en comprender realmente los contenidos, que es el objetivo final de la asignatura.

1.4. Trabajos previos

Este trabajo es uno de los varios que se han realizado sobre las distintas asignaturas del Grado en Matemáticas e Informática. En particular, este Trabajo de Fin de Grado es una continuación del TFG realizado por Adrián Sánchez Roderó [1], quien desarrolló una aplicación similar para curvas en el plano y en el espacio tridimensional.

Introducción

Para facilitar la integración de la API en el sistema del Proyecto Calculadora, se ha tomado como referencia el trabajo de Adrián [1], utilizando siempre que ha sido posible las mismas librerías y formatos, aunque se hayan investigado y contemplado distintas opciones.

1.5. Módulos desarrollados

Para el desarrollo de este trabajo, se han dividido los contenidos en dos partes: superficies implícitas y superficies parametrizadas, con especial atención a las superficies parametrizadas, ya que así se aborda en la asignatura de Geometría Diferencial del quinto semestre.

Se ha utilizado la guía de clase de la asignatura de Geometría Diferencial [2] para obtener y unificar los conocimientos teóricos necesarios. Además, para comprobar el funcionamiento del sistema, se han consultado ejercicios tanto de la guía como de apuntes propios.

Para la implementación del sistema, se ha desarrollado una API (Application Programming Interface), sistema comúnmente utilizado para la comunicación entre distintas partes de una misma aplicación y que es el método seleccionado en el Proyecto Calculadora. Para cada tipo de superficie, se han creado métodos específicos para calcular sus elementos característicos. Además, se ofrece la posibilidad de representar la superficie y, opcionalmente, otros elementos como el vector normal o el plano tangente en un punto de la superficie. La API también proporciona servicios para obtener la teoría y los algoritmos asociados al cálculo de los elementos característicos de la superficie.

Para superficies parametrizadas, la API incluye métodos para obtener el vector normal, el plano tangente, la primera y segunda forma fundamental, la curvatura de Gauss, la curvatura media, las curvaturas y direcciones principales, la matriz de Weingarten, la clasificación de un punto, y las direcciones asintóticas. También se ofrece la opción de realizar un análisis completo que calcula todos estos elementos. Además, se permite representar la superficie y seleccionar un punto para representar elementos como el vector normal, el plano tangente, las direcciones principales, las circunferencias asociadas a las curvaturas principales o las direcciones asintóticas.

Para superficies implícitas, dado que en la asignatura de Geometría Diferencial no se profundiza mucho en ellas, la API cuenta únicamente con métodos para calcular el vector normal y el plano tangente, así como para representar la superficie y, opcionalmente, el vector normal o el plano tangente en un punto.

Adicionalmente, y para comprobar el correcto funcionamiento del sistema de forma más visual, se ha implementado una interfaz gráfica rudimentaria.

Capítulo 2

Desarrollo del sistema

En este capítulo se describe de forma detallada los métodos implementados para resolver los principales ejercicios de superficies de la asignatura de Geometría Diferencial de una forma didáctica. Además, se explican las decisiones tomadas durante el desarrollo del trabajo.

Durante todo este capítulo se utiliza la palabra *endpoint*. Un *endpoint* hace referencia a una URL para realizar una petición HTTP a uno de los métodos de una API. En este caso, un *endpoint* será una URL que permite (a la aplicación didáctica) realizar una petición HTTP a uno de los métodos de la API de la librería de Geometría Diferencial implementada.

Ejemplos de *endpoints* válidos en la librería serían

- `/param_surf/vector_normal?superficie=[cos(u),sin(u),v]&dom_var1=(0,2*pi)`
- `/param_surf/vector_normal?superficie=[u,v,u+v]&u0=1&v0=2`

que se explicarán durante este capítulo.

Para implementar los cálculos que no son objeto de esta librería como, por ejemplo, derivar una función o resolver una ecuación, se ha hecho uso de la librería de Python sympy [3].

2.1. Estructura de la librería

En esta sección se describe la estructura de la librería implementada.

Primero, se decidió utilizar  Git [4] como herramienta de control de versiones. Para ello, se creó un repositorio privado en  GitHub [5] para gestionar el código del proyecto.

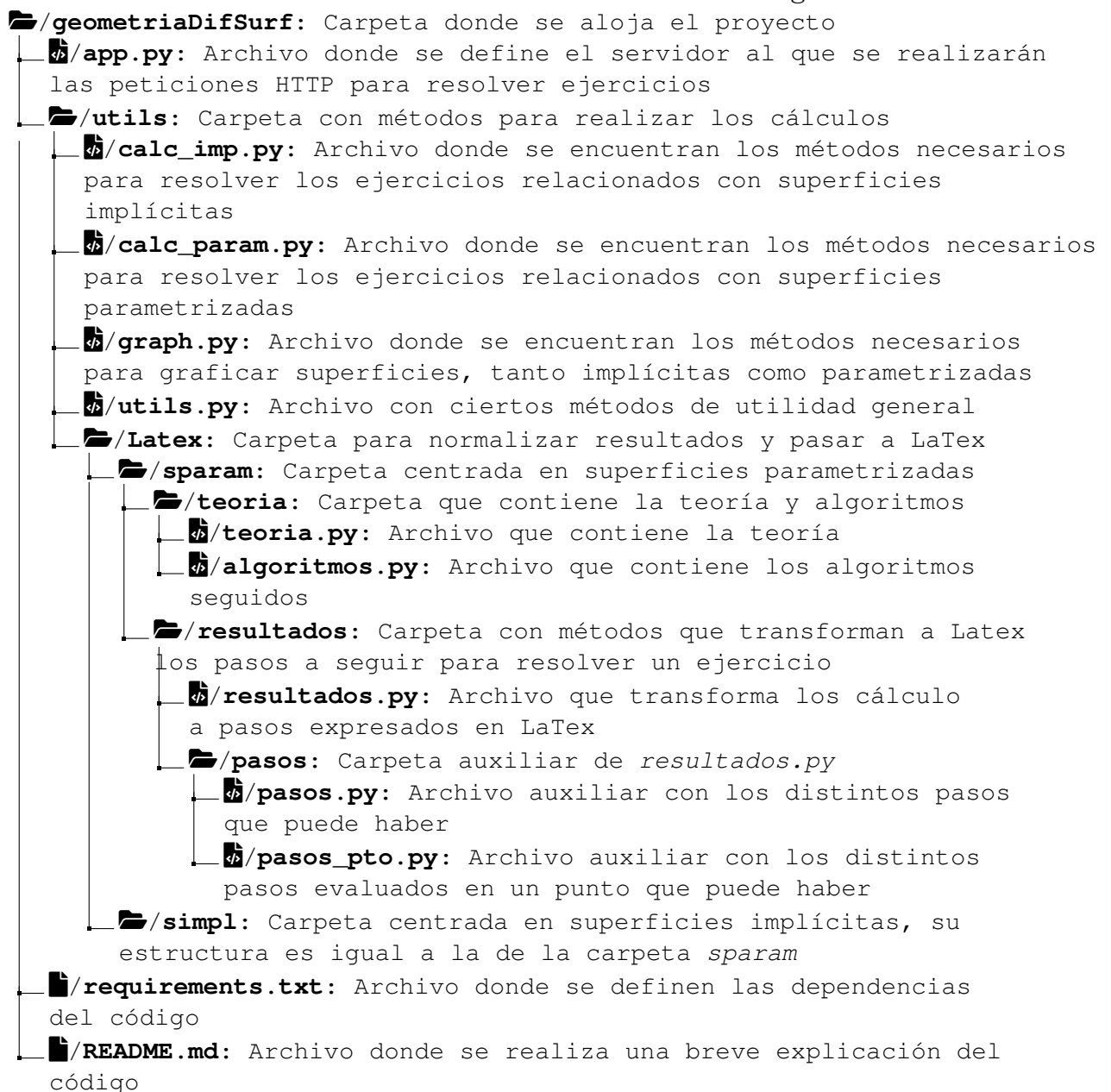
 Git es una herramienta ampliamente utilizada en el desarrollo de software, que permite un enorme control de versiones y la creación de diferentes ramas de desarrollo. Una rama es una versión paralela del código principal que permite desarrollar nuevas funcionalidades sin afectar la versión principal. Una vez completadas las funcionalidades en la rama, se pueden fusionar con el código principal. En el repositorio creado en  GitHub para el desarrollo del proyecto

se han creado dos ramas principales:

- 🔗 **main**: Contiene el código de la API que se utilizará en la versión oficial de la aplicación didáctica.
- 🔗 **develop**: Es una extensión de la rama *main*. Además del código de la API, esta rama contiene el código de la interfaz gráfica.

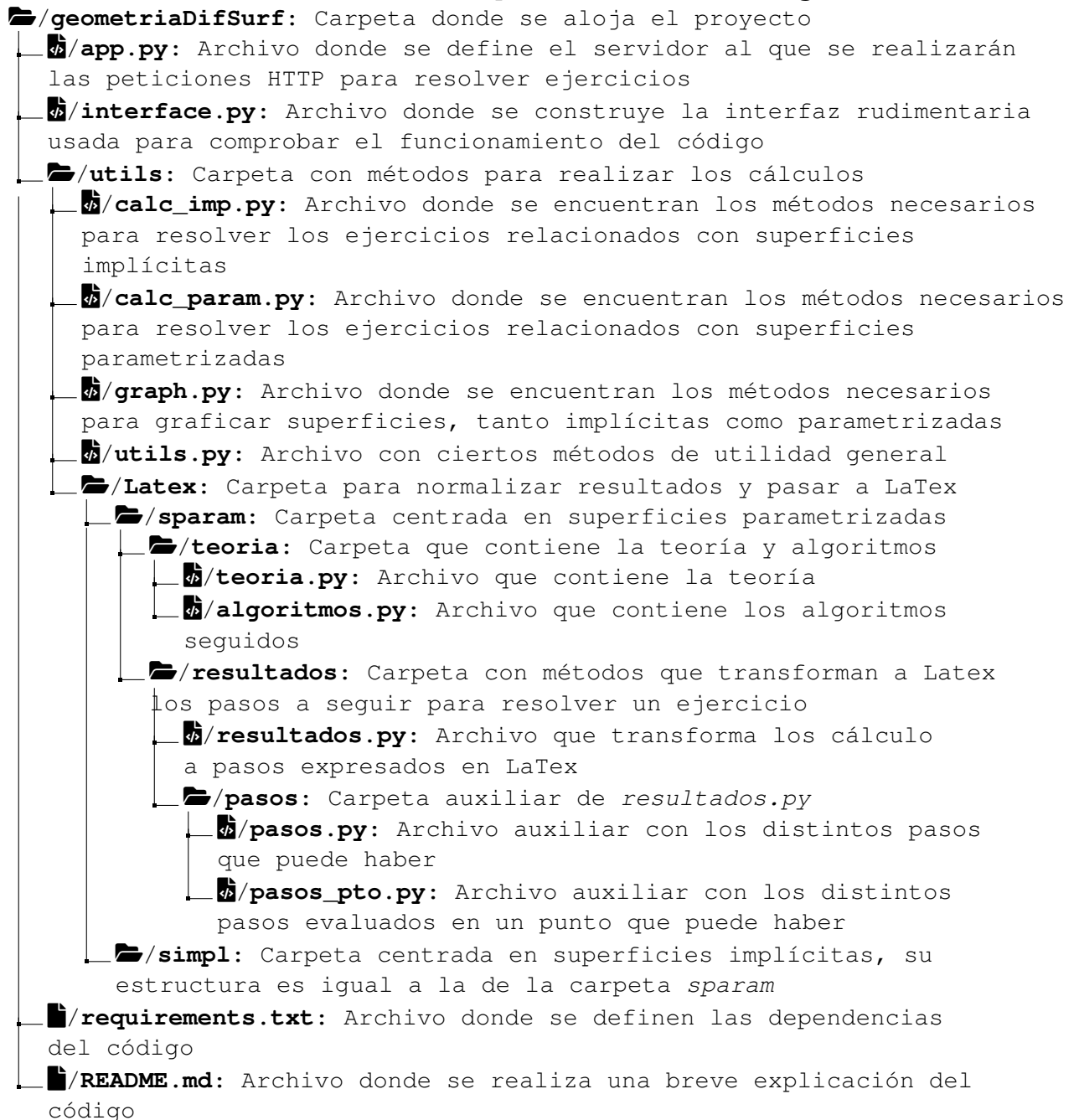
2.1.1. Estructura de la rama *main*

La estructura de ficheros de la rama *main* creada en  Git es la siguiente:



2.1.2. Estructura de la rama *develop*

La estructura de ficheros de la rama *develop* creada en  Git es la siguiente:



2.2. Funcionamiento de la API y envío de resultados

En esta sección se describe el funcionamiento de la API y el método de representación y envío de los resultados de los distintos ejercicios que la librería puede resolver, para su integración con la aplicación didáctica.

2.2. Funcionamiento de la API y envío de resultados

Siguiendo el Trabajo de Fin de Grado de Adrián [1] y las directrices para la implementación de un nuevo módulo en la aplicación didáctica, se ha utilizado la librería Python Flask [6]. Flask permite crear los endpoints necesarios para realizar peticiones HTTP y resolver así los ejercicios requeridos.

En las peticiones HTTP, existen diversas formas de transmitir la información necesaria (por ejemplo, la superficie, los dominios de las variables, etc.). Se ha decidido usar parámetros de tipo *query*, que aparecen al final de la URL precedidos por un signo de interrogación (?) y son pares nombre=valor separados por el símbolo &. Un ejemplo de petición válida usando estos parámetros es:

`/param_surf/vector_normal?superficie=[u,v,u+v]&u0=1&v0=2`

Donde los parámetros en este caso son "*superficie*", cuyo valor es "[u,v,u+v]"; "*u0*", cuyo valor es "1"; y "*v0*", cuyo valor es "2".

Toda la información transmitida a través de una URL es de tipo *string* (cadena de texto). Sin embargo, se debe tener cuidado al introducir los datos, ya que deben codificarse según su representación ASCII [7] para el correcto funcionamiento de la API. Un ejemplo típico es el símbolo '+', que en una URL se transforma automáticamente en un espacio en blanco, provocando errores en la información transmitida. Para corregirlo, el carácter '+' debe ser sustituido por su representación ASCII precedida de un %, es decir, '%2B'. Toda respuesta se transmite en formato JSON (un formato ampliamente utilizado para el intercambio de información) o a través de un objeto HTML con la representación de una superficie.

Para estructurar mejor el código, se han dividido los *endpoints* en dos *blueprints*. Los *blueprints* son objetos de la librería Flask que permiten agrupar un conjunto de *endpoints* relacionados. Una de sus funcionalidades es agrupar los *endpoints* bajo una subdirección URL, evitando colisiones entre nombres de URLs. En este caso, se han creado dos *blueprints*: uno para superficies parametrizadas, bajo la subdirección */param_surf*, y otro para superficies implícitas, bajo la subdirección */imp_surf*. De esta manera, los *endpoints* están bien estructurados y no existen colisiones. Por ejemplo, el *endpoint* llamado */graficar* se diferencia dependiendo del tipo de superficie de la siguiente manera:

`param_surf/graficar?superficie=[cos(u),sin(u),v]`

`imp_surf/graficar?superficie=x^2-y^2-z`

Las funcionalidades de la API se dividen en tres grupos generales:

- Teoría y algoritmos: por cada uno de los *endpoints* disponibles, se da la opción de obtener el título, teoría y algoritmo utilizado. Para ello, simplemente habrá que llamar al *endpoints* deseado sin el parámetro *superficie*. Las llamadas de este tipo devuelven un JSON con la siguiente estructura:

```
{
  "titulo": "...",
  "descripcion": "...",
  "algoritmo": "..."
}
```

Desarrollo del sistema

- Representación gráfica: en este grupo se encuentra únicamente los *endpoints* para representar gráficamente tanto una superficie parametrizada como implícita. Devuelve un objeto HTML que, si se abre en un navegador, muestra la representación sin necesidad de instalar ningún software adicional.
- Cálculo de ejercicios: estos *endpoints* están diseñados para resolver ejercicios. Si se les pasa como parámetro una superficie, devolverán un JSON con la siguiente estructura:

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular el vector normal
      ↪ en el dominio  $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}u & v & \\u^2 + v^2\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a
      ↪  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[1, 0, 2*u]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u = \\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 2u\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "...": "..."
    },
    {
      "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
      ↪ aplicando su fórmula, el vector normal es",
      "paso": "Matrix([[-2*u/sqrt(4*u**2 + 4*v**2 + 1),
      ↪ -2*v/sqrt(4*u**2 + 4*v**2 + 1), 1/sqrt(4*u**2 + 4*v**2 +
      ↪ 1]])",
      "pasoLatex": "\\vec{n} = \\left(\\begin{matrix}- \\frac{2}{\\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} & - \\frac{2}{\\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} & \\frac{1}{\\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}\\end{matrix}\\right)",
    }
  ]
}
```

La estructura está compuesta por una lista de pasos a seguir, donde en cada paso hay una pequeña descripción y el resultado de ese paso. Además, los resultados se devuelven en formato $\text{\LaTeX}$ para una mejor representación en la web del proyecto.

En el caso de las superficies parametrizadas se intenta comprobar que es una superficie regular dentro del dominio indicado por el usuario. Para ello, se asume que la superficie es suave (es computacionalmente muy complejo comprobar que una superficie es de clase infinito) y se verifica que $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v \neq \vec{0}$. Para realizar esta comprobación se usa herramientas que ofrece sympy. Sin embar-

go, en ocasiones estas herramientas son insuficientes y lanzan errores indicando que la complejidad es demasiado grande. En estos casos, el programa continúa la ejecución asumiendo que la superficie es regular. Si se demuestra que la superficie no es regular, se finaliza la ejecución.

De manera análoga se comprueba si un conjunto de nivel de una función es una superficie.

2.3. Funcionalidades adicionales

Todos los métodos desarrollados permiten obtener los resultados tanto en un punto genérico (u, v) como en un punto concreto (u_0, v_0) . Las únicas excepciones son los métodos para clasificar un punto, comprobar si un punto es umbílico y calcular las direcciones asintóticas, que necesitan estar asociados a un punto concreto (u_0, v_0) . De igual manera, los elementos específicos de representación (vector normal, plano tangente, etc.) deben estar asociados a un punto (u_0, v_0) .

Para reflejar ejercicios reales de la asignatura, se ha implementado la opción de definir elementos simbólicos, permitiendo definir constantes y funciones con sus características. Esta funcionalidad surge al observar que algunos ejercicios de Geometría Diferencial tratan con superficies con radios indefinidos, como el cono de radio a y la esfera de radio r

$$\varphi(u, v) = (a \cos(u) \quad a \sin(u) \quad v)$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

o superficies que contienen funciones indefinidas, como la superficie de revolución

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad g(v))$$

Los elementos simbólicos pueden combinarse libremente llegando a un alto nivel de abstracción, como las superficies de revolución en su forma más genérica:

$$\varphi(u, v) = (a \cdot f(v) \cdot \cos(u) \quad a \cdot f(v) \cdot \sin(u) \quad b \cdot g(v))$$

Adicionalmente, es posible especificar las características de cada constante y función indefinida utilizando las siguientes propiedades:

- Positivo
- Negativo
- Entero
- No entero
- Par
- Impar

Describir correctamente estas constantes y funciones indefinidas permite al sistema realizar simplificaciones más precisas.

Desarrollo del sistema

No obstante, debido a la complejidad computacional, las comprobaciones de regularidad de la superficie y de superficie de nivel no se realizan si se define algún elemento simbólico con estas características.

Para superficies parametrizadas, el dominio de las variables se define por defecto como un rectángulo $(-5, 5)^2$. Este dominio rectangular puede modificarse para la primera variable (u) como la segunda variable (v) de la superficie. Analizando ejercicios planteados en la guía y con las indicaciones de mi tutor del TFG, observé que, en ocasiones, se define el dominio de una superficie mediante inecuaciones del tipo:

$$\{(u, v) : au^2 + bv^2 < r, \}$$

siendo el ejemplo más común de dominios de este estilo el disco

$$\{(u, v) : u^2 + v^2 < 1.\}$$

La definición de este estilo de dominio también se ha implementado, lo que permite una mejor simplificación de resultados y representación de superficies.

Adicionalmente se ha utilizado la librería Flasgger [8] para generar un *Swagger* de la API. Un *Swagger* es una documentación de la API que se genera de manera dinámica en forma de página web y contiene toda la información necesaria de los endpoints de la API (parámetros obligatorios, tipo de parámetros y descripción del endpoint). Además, esta documentación permite interactuar con los endpoints realizando peticiones y, visualizando los resultados y códigos HTTP resultantes.

Una vez se inicia la API, se genera un nuevo endpoint en `/apidocs`, que lleva a la siguiente web:

2.3. Funcionalidades adicionales

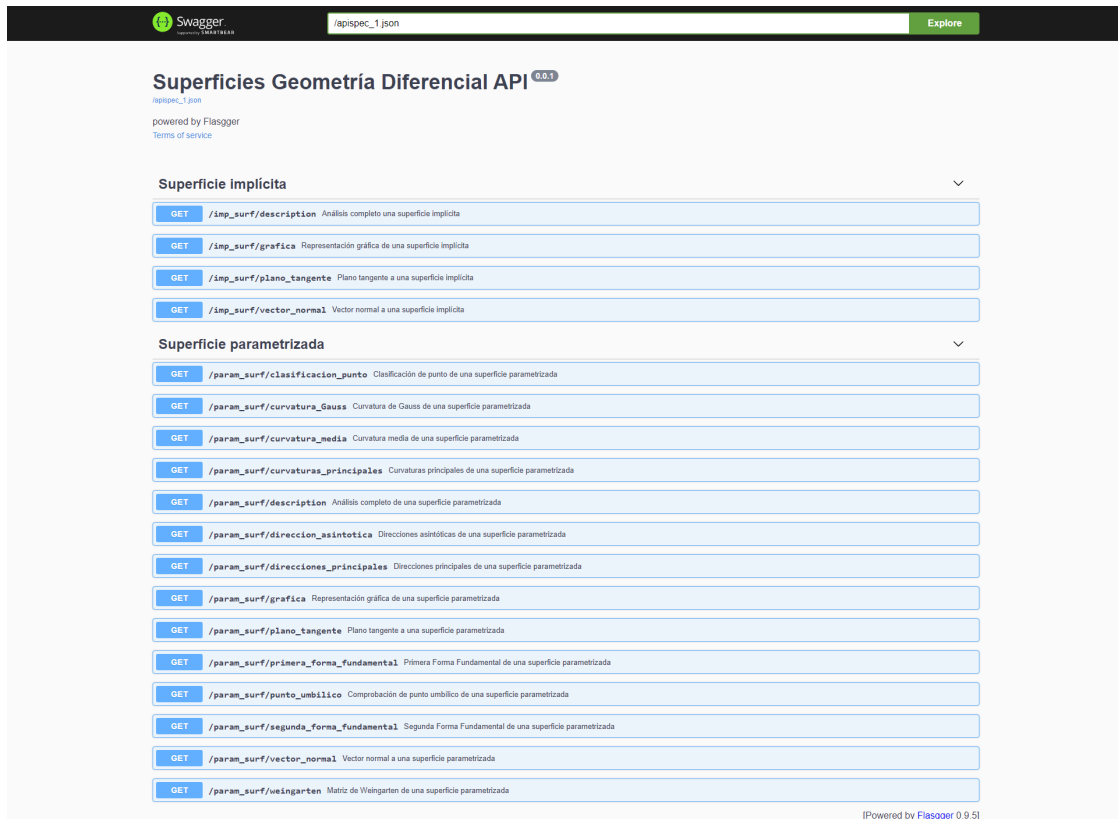


Figura 2.1: Web del Swagger

Como se puede observar, en la web existe una entrada por cada uno de los endpoints disponibles. Al pinchar en alguno de los endpoints se muestra una pequeña explicación, todos los parámetros que se aceptan (especificando cuales son obligatorios, opcionales, valores por defecto, etc) y las distintas respuestas que se pueden obtener.

Desarrollo del sistema

GET

/imp_surf/vector_normal

Vector normal a una superficie implícita

Método que devuelve el vector normal a una superficie parametrizada. Si se indica un punto se devuelve el vector normal en ese punto.

Parameters

Try it out

Name	Description
superficie (query) * required	superficie implícita que se quiere analizar. La ecuación debe ser igualada a cero. Si no se proporciona se devuelve la teoría y algoritmos asociados. x^2 %2B y^2 %2B z^2-1
dom_x (query)	dominio de x. Default value : (-5,5) (-5,5)
dom_y (query)	dominio de y. Default value : (-5,5) (-5,5)
dom_z (query)	dominio de z. Default value : (-5,5) (-5,5)
x0 (query)	valor de x del punto de la superficie donde evaluar. 1
y0 (query)	valor de y del punto de la superficie donde evaluar. 0
z0 (query)	valor de z del punto de la superficie donde evaluar. 0
const (query)	definición de un constante, sus posible definiciones son 'positive', 'negative', 'integer', 'noninteger', 'even', 'odd'. Para añadir más de una se debe añadir el parámetro varias veces. [r, positive, integer]
func (query)	definición de un función indefinida, sus posible definiciones son 'positive', 'negative', 'integer', 'noninteger', 'even', 'odd'. Para añadir más de una se debe añadir el parámetro varias veces. [f(u,v), positive, integer]

Responses

Response content type: application/json

Code	Description
200	Si se proporcionan los datos necesarios para los cálculos, se devuelve un JSON con los pasos a seguir. Si no se proporciona la superficie se devuelve la teoría y algoritmos asociados.
400	Parámetros incorrectos.

Figura 2.2: Ejemplo del Swagger

2.4. Interfaz gráfica

Durante las primeras versiones del desarrollo, se ha utilizado Postman [9], que entre otras muchas funcionalidades permite guardar y modificar fácilmente las peticiones HTTP que se deseen realizar. Sin embargo, a medida que avanzaba el proyecto se decidió implementar una interfaz rudimentaria para simular correctamente cómo sería la interacción del usuario con el sistema.

La interfaz se ha desarrollado en Python usando la librería Tkinter y, al te-

2.4. Interfaz gráfica

ner como única finalidad comprobar el funcionamiento del sistema, no se ha incluido en la rama `main`.

Para simular de la mejor manera posible la experiencia, la interfaz funciona de igual manera que funcionará en la aplicación didáctica oficial. Cuando se inicia la interfaz, se levanta en segundo plano la API, de manera que al resolver un ejercicio se envía una petición al servidor de igual manera que se hará.

La interfaz tiene el siguiente aspecto:

The image shows a software interface titled "Calculadora de superficies". It is split into two main sections: "SUPERFICIE PARAMETRIZADA" and "SUPERFICIE IMPLICITA".

SUPERFICIE PARAMETRIZADA:

- Superficie:** $\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$
- El dominio es un rectángulo** (selected) or **El dominio es una elipse**
- Variable 1:** $u \in (0, 2\pi)$ with options for Positivo, Negativo, Entero, No entero, Par, Impar.
- Variable 2:** $v \in (-\infty, \infty)$ with similar options.
- Buttons:** Definir constante, Definir función.
- Punto:** **Punto genérico** (selected). Other options: Punto $\varphi(\pi/2, 0)$, Punto $(1, 0, 0)$.
- Calculation options:** Vector normal, Plano tangente, Primera Form. Fund., Segunda Form. Fund., Curv Gauss, Dirs principales, Clasificación pto, Análisis completo, Punto umbilico, Dirs asintóticas, Matriz Weingarten, Curv media.
- Buttons:** Calcular, Graficar, Salir.

SUPERFICIE IMPLICITA:

- Superficie:** $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- Representación:** $x \in (-1, 1)$, $y \in (-1, 1)$, $z \in (-1, 1)$
- Punto:** **Punto genérico** (selected). Other option: Punto $(1, 0, 0)$.
- Cálculo:** Vector normal, Plano tangente.
- Buttons:** Calcular, Graficar, Salir.

Figura 2.3: Aspecto de la interfaz gráfica rudimentaria

Las instrucciones para resolver un ejercicio utilizando la interfaz gráfica son los siguientes:

- Ejecutar el archivo `interface.py`
- Si se trata de una superficie parametrizada, introducirla en la sección de la izquierda
 - Seleccionar el tipo de dominio
 - Definir el dominio de las variables en función del tipo que se haya seleccionado
 - (En el caso de dominio en forma de rectángulo, modificar si se desea el dominio de las variables y las constantes y funciones indefinidas)
 - Seleccionar el tipo de punto sobre el que se quiere realizar los cálculos (genérico o específico) y definirlo en caso de ser uno específico.
 - Seleccionar todos los cálculos que se desean realizar o graficar.
 - Pinchar en el botón *Calcular* o **Graficar** según se desee.

Desarrollo del sistema

- Se abrirá una ventana auxiliar con los resultados o se abrirá el navegador con la representación gráfica correspondiente.
- Si se trata de una superficie implícita, introducirla en la sección de la derecha
 - Seleccionar el tipo de punto sobre el que se quiere realizar los cálculos (genérico o específico) y definirlo en caso de ser uno específico.
 - Seleccionar todos los cálculos que se desean realizar o graficar.
 - Pinchar en el botón *Calcular* o **Graficar** según se desee.
 - Se abrirá una ventana auxiliar con los resultados o se abrirá el navegador con la representación gráfica correspondiente.

Por defecto, aparecen difuminados valores de ejemplo que desaparecen cuando el usuario pincha en el recuadro para introducir los suyos.

Se puede salir de la aplicación mediante el botón *Salir*.

Como ejemplo de cómo utilizar la interfaz para resolver un ejercicio veamos cómo calcular el vector normal de una superficie. En las siguientes imágenes se muestra el proceso.

The screenshot shows a web application titled 'Calculadora de superficies'. It is divided into two main panels: 'SUPERFICIE PARAMETRIZADA' on the left and 'SUPERFICIE IMPLICITA' on the right.

SUPERFICIE PARAMETRIZADA:

- Superficie:** $\phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$
- El dominio es un rectángulo** (selected) or **El dominio es una elipse**.
- Variable 1:** $u \in (-2, 2)$. Options: Positivo, Negativo, Entero, No entero, Par, Impar.
- Variable 2:** $v \in (-2, 2)$. Options: Positivo, Negativo, Entero, No entero, Par, Impar.
- Punto:** **Punto genérico** (selected). Other options: Punto $(\pi/2, 0)$, Punto $(1, 0, 0)$.
- Cálculos:** **Vector normal** (checked), Plano tangente, Primera Form. Fund., Segunda Form. Fund., Curv Gauss, Curv media, Curv principales, Dirs principales, Matriz Weingarten, Clasificación pto, Punto umbilico, Dirs asíntóticas, Análisis completo.
- Buttons:** Definir constante, Definir función, Calcular, Graficar, Salir.

SUPERFICIE IMPLICITA:

- Superficie:** $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- Representación:** $x \in (-1, 1)$, $y \in (-1, 1)$, $z \in (-1, 1)$.
- Punto:** **Punto genérico** (selected). Other option: Punto $(1, 0, 0)$.
- Cálculo:** Vector normal, Plano tangente.
- Buttons:** Calcular, Graficar, Salir.

Figura 2.4: Introducir datos en la interfaz rudimentaria

Se introducen los datos de la superficie, se selecciona un dominio en forma de rectángulo y se establece el dominio de las variables como $(-2, 2)$ tanto para u como para v . Se selecciona la opción de *Punto genérico*, se selecciona el recuadro de *Vector normal* y se pincha el botón *Calcular* de la izquierda. Tras eso aparecerá la siguiente ventana

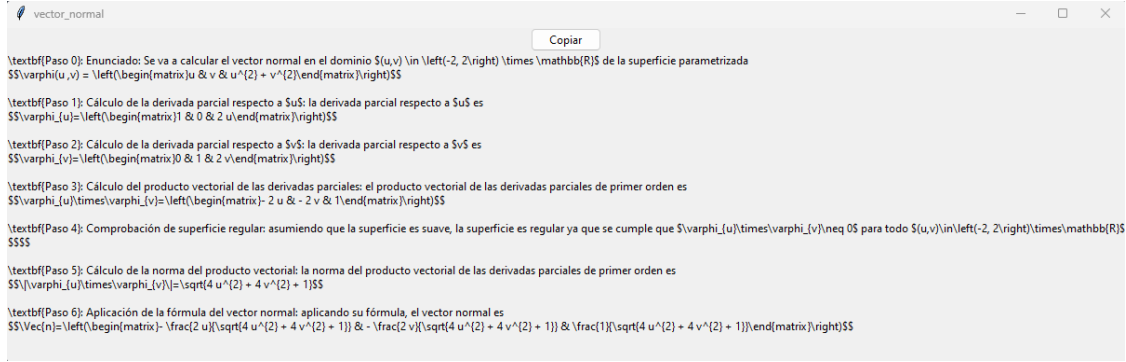


Figura 2.5: Ventana con la solución

La ventana contiene un texto escrito en LaTeX que puede ser copiado con el botón superior de la ventana y en el que se detallan los pasos a seguir para resolver el ejercicio. En este ejemplo el texto generado es el siguiente:

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el vector normal en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u & v & u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \end{pmatrix}$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}$$

Paso 3: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -2u & -2v & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$.

Paso 5: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Paso 6: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{2u}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} & -\frac{2v}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} & \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \end{pmatrix}$$

2.5. Representación gráfica de superficies

En este apartado se describen los métodos para la representación gráfica. Siguiendo los pasos de Adrián en su TFG, se ha decidido usar la librería  Python Plotly, para que el estilo de la interfaz gráfica de la aplicación web esté unificada. Plotly es una potente librería de representación que permite crear todo tipo de figuras tanto en 2D como en 3D. Haciendo uso de la librería se han creado *endpoints* capaces de representar en el espacio 3D tanto superficies como los distintos elementos característicos de algún punto seleccionado de la superficie. Como se ha comentado anteriormente, los métodos de representación devuelven un código HTML con la representación de la superficie.

2.5.1. Envío de resultado en superficies parametrizadas

Para realizar la petición al *endpoint*, se debe introducir obligatoriamente una superficie. Dicha superficie debe contener únicamente las variables u y v de la superficie, es decir, no se aceptan constantes ni funciones indefinidas pues la petición fallará. Además, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar la representación gráfica. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$.

Si se especifica un punto de la superficie, se da la opción de representar el plano tangente, el vector normal, las direcciones principales, las curvaturas principales y las direcciones asintóticas.

Representación gráfica de una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/grafica?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&tangente={tangente}&normal={normal}&dirs_principales={dirs_princ} &curvs_principales={curvs_princ}&dirs_asintoticas={dirs_asintoticas}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.

- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere representar un punto o alguno de sus elementos geométricos característicos.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere representar un punto o alguno de sus elementos geométricos característicos.
- **tangente** (opcional): flag que indica si se quiere pintar el plano tangente a la superficie en un punto. Si no se da valor a los parámetros $u0$ y $v0$ se ignora. Para activarlo no importa el contenido, simplemente se debe dar algún valor. Por defecto está desactivado.
- **normal** (opcional): flag que indica si se quiere pintar el vector normal a la superficie en un punto. Si no se da valor a los parámetros $u0$ y $v0$ se ignora. Para activarlo no importa el contenido, simplemente se debe dar algún valor. Por defecto está desactivado.
- **dirs_principales** (opcional): flag que indica si se quieren pintar las direcciones principales de la superficie en un punto. Si no se da valor a los parámetros $u0$ y $v0$ se ignora. Para activarlo no importa el contenido, simplemente se debe dar algún valor. Por defecto está desactivado.
- **curvs_principales** (opcional): flag que indica si se quieren pintar las circunferencias que dan sentido geométrico a las curvaturas principales de la superficie en un punto. Si no se da valor a los parámetros $u0$ y $v0$ se ignora. Para activarlo no importa el contenido, simplemente se debe dar algún valor. Por defecto está desactivado.
- **dirs_asintoticas** (opcional): flag que indica si se quieren pintar las direcciones asintóticas de la superficie en un punto. Si no se da valor a los parámetros $u0$ y $v0$ se ignora. Para activarlo no importa el contenido, simplemente se debe dar algún valor. Por defecto está desactivado.

Outputs: Código HTML resultante de la gráfica.

2.5.2. Envío de resultado en superficies implícitas

Para realizar la petición al *endpoint*, se debe introducir obligatoriamente una superficie. Dicha superficie debe contener únicamente las variables x , y y z de la superficie, es decir, no se aceptan constantes ni funciones indefinidas pues la petición fallará. La ecuación de la superficie se introduce igualada a 0, es decir si se tiene la ecuación canónica $f(x, y, z) = r$, se debe usar la fórmula $f(x, y, z) - r$.

Desarrollo del sistema

Además, es recomendable especificar el dominio de todas las variables. Esta recomendación se centra principalmente para superficie acotadas como esferas ya que mejorará la calidad de la representación. Este cambio de calidad radica en la manera en la que se calcula la superficie. Ya que la superficie se describe mediante una ecuación, es complejo generar una malla de puntos de un tamaño proporcional a las dimensiones de la superficie. Es por eso que, por defecto, se crea una malla de puntos genérica (en este caso todas las variables toman valores en el intervalo $[-5, 5]$) sobre la que se descartan aquellos que no se encuentran en la superficie. Al especificar el dominio de las variables, se modifican las dimensiones de la malla. Este método hace que, si por ejemplo se tiene una esfera de radio unitario y se considera una malla de puntos tridimensional con valores en $[-5, 5]$, la representación saldrá en un primer instante alejada de la superficie y la calidad y suavidad será peor.

Si se especifica un punto de la superficie, se da la opción de representar el plano tangente y el vector normal.

Representación gráfica de una superficie implícitas

Endpoint: /imp_surf/grafica?superficie={superficie}&dom_x={dom_x}&dom_y={dom_y}&dom_z={dom_z}&x0={x0}&y0={y0}&z0={z0}&tangente={tangente}&normal={normal}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. La ecuación debe ser la igualada a cero (sin llegar a poner el igual). Un ejemplo es $x^2+y^2+z^2-1$, que sería una esfera.
- **dom_x** (opcional): dominio del eje x. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_y** (opcional): dominio del eje y. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_z** (opcional): dominio del eje z. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **x0** (opcional): valor de x de un punto de la superficie. Se usa si se quiere representar un punto o alguno de sus elementos geométricos característicos.
- **y0** (opcional): valor de y de un punto de la superficie. Se usa si se quiere representar un punto o alguno de sus elementos geométricos característicos.
- **z0** (opcional): valor de z de un punto de la superficie. Se usa si se quiere representar un punto o alguno de sus elementos geométricos característicos.
- **tangente** (opcional): flag que indica si se quiere pintar el plano tangente a la superficie en un punto. Si no se da valor a los parámetros $x0$, $y0$ y $z0$ se ignora. Para activarlo no importa el contenido, simplemente se debe dar algún valor. Por defecto está desactivado.
- **normal** (opcional): flag que indica si se quiere pintar el vector nor-

2.5. Representación gráfica de superficies

mal a la superficie en un punto. Si no se da valor a los parámetros x_0 , y_0 y z_0 se ignora. Para activarlo no importa el contenido, simplemente se debe dar algún valor. Por defecto está desactivado.

Outputs: Código HTML resultante de la gráfica.

2.5.3. Ejemplos

2.5.3.1. Ejemplo de esfera parametrizada

Queremos representar una la esfera de radio unidad parametrizada como

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) & \sin(v) \cos(u) & \sin(u) \end{pmatrix}$$

en el dominio $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), v \in (0, 2\pi)\}$.

Petición:

param_surf/grafica?superficie=[cos(u)*cos(v),cos(u)*sin(v),sin(u)] &dom_var1=(-pi/2,pi/2) &dom_var2=(0,2*pi)

Inputs:

- superficie: $\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) & \sin(v) \cos(u) & \sin(u) \end{pmatrix}$
- dom_var1: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- dom_var2: $(0, 2\pi)$

Gráfica resultante:

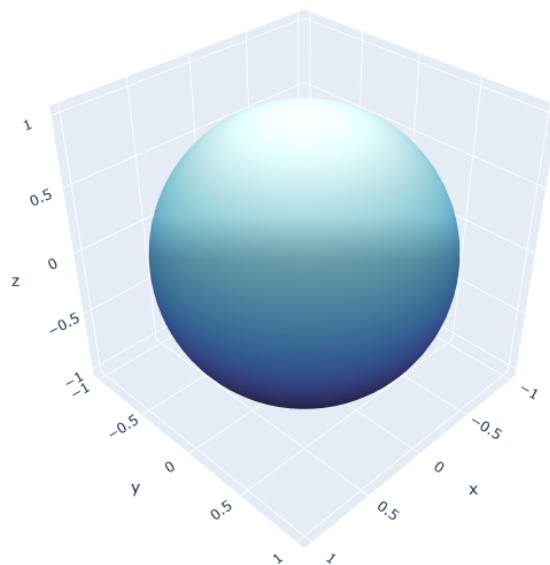


Figura 2.6: Esfera de radio unidad

2.5.3.2. Ejemplo de helicoides parametrizado

Queremos representar el helicoides parametrizado como

$$\varphi(u, v) = (v \cos(2u) \quad v \sin(2u) \quad u)$$

en el dominio $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (0, 2\pi), v \in (-1, 1)\}$.

Petición:

/param_surf/grafica?superficie=[v*cos(u*2),v*sin(u*2),u]&dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(-1,1)

Inputs:

- superficie: $\varphi(u, v) = (v \cos(2u) \quad v \sin(2u) \quad u)$
- dom_var1: $(0, 2\pi)$
- dom_var2: $(-1, 1)$

Gráfica resultante:

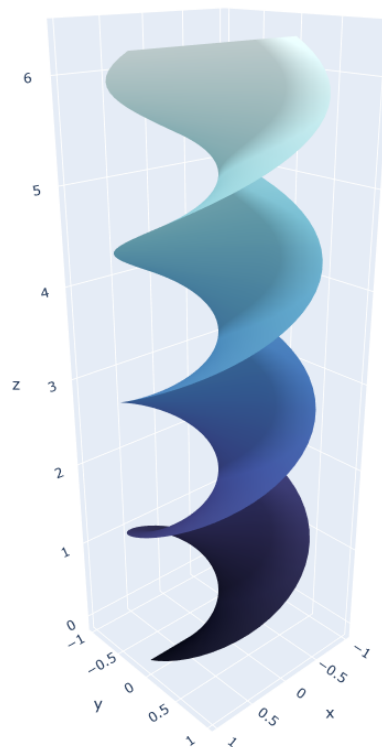


Figura 2.7: Helicoide

2.5. Representación gráfica de superficies

2.5.3.3. Ejemplo de semiesfera parametrizada con dominio en forma de círculo

Queremos representar la parte superior de una la esfera de radio unidad parametrizada con las variable s y t como

$$\varphi(s, t) = (s \quad t \quad \sqrt{1 - s^2 - t^2})$$

en el dominio $U = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 < 1\}$.

Petición:

/param_surf/grafica?superficie=[s,t,sqrt(1-s^2-t^2)]&var1=s&var2=t&cond=s^2+t^2<1

Inputs:

- superficie: $\varphi(s, t) = (s \quad t \quad \sqrt{1 - s^2 - t^2})$
- var1: s
- var2: t
- cond: $s^2 + t^2 < 1$

Gráfica resultante:

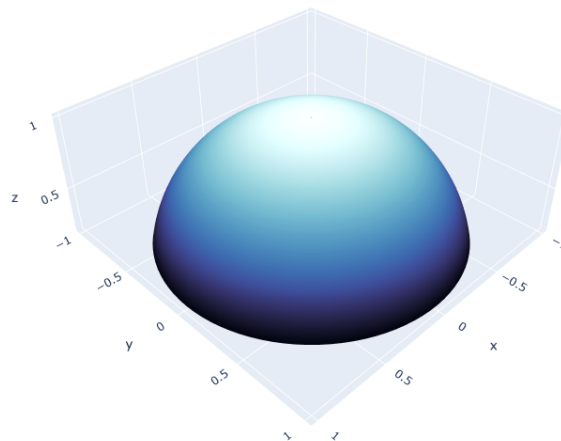


Figura 2.8: Parte superior de una la esfera de radio unidad

2.5.3.4. Ejemplo de esfera parametrizada con vector normal y plano tangente

Queremos representar la parte superior de una la esfera de radio unidad parametrizada como

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \cos(v) \quad \sin(v) \cos(u) \quad \sin(u))$$

en el dominio $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), v \in (0, 2\pi)\}$. Además queremos representar el plano tangente y el vector normal en el punto $\varphi(0.5, 0.5)$

Petición:

/param_surf/grafica?superficie=[cos(u)*cos(v),cos(u)*sin(v),sin(u)] &dom_var1=(-pi/2,pi/2) &dom_var2=(0,2*pi) &u0=0.5 &v0=0.5 &tangente=true &normal=true

Inputs:

- superficie: $\varphi(u, v) = (\cos(u) \cos(v) \quad \sin(v) \cos(u) \quad \sin(u))$
- dom_var1: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- dom_var2: $(0, 2\pi)$
- u0: 0.5
- v0: 0.5
- tangente:true
- normal:true

Gráfica resultante:

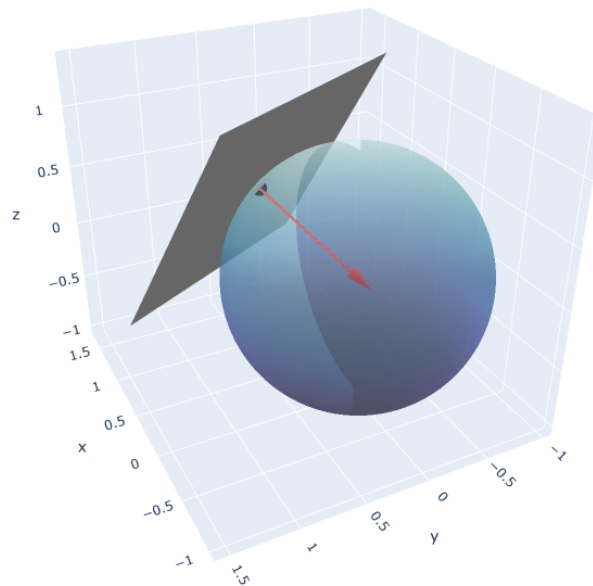


Figura 2.9: Esfera con plano tangente y vector normal

2.5.3.5. Ejemplo de paraboloides hiperbólicos parametrizados con direcciones y curvaturas principales

Queremos representar un paraboloides hiperbólico parametrizado como

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2 - v^2)$$

en el dominio $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (-1, 1), v \in (-1, 1)\}$. Además queremos representar las direcciones y curvaturas principales en el punto $\varphi(0.5, 0.5)$

Petición:

2.5. Representación gráfica de superficies

/param_surf/grafica?superficie=[u,v,u^2-v^2] &dom_var1=(-1,1) &dom_var2=(-1,1) &u0=0.25 &v0=0 &dirs_principales=true &curvs_principales=true

Inputs:

- superficie: $\varphi(u, v) = (u \ v \ u^2 - v^2)$
- dom_var1: $(-1, 1)$
- dom_var2: $(-1, 1)$
- u0: 0.5
- v0: 0.5
- dirs_principales: *true*
- curvs_principales: *true*

Gráfica resultante:

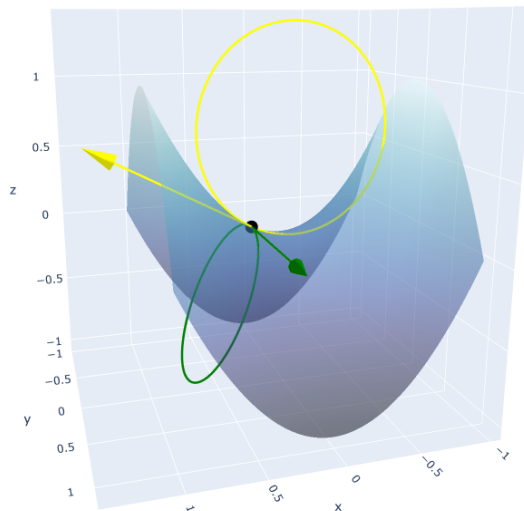


Figura 2.10: Paraboloide hiperbólico con direcciones y curvaturas principales

2.5.3.6. Ejemplo de paraboloide hiperbólico parametrizado con plano tangente y direcciones asintóticas

Queremos representar un paraboloide hiperbólico parametrizado como

$$\varphi(u, v) = (u \ v \ u^2 - v^2)$$

en el dominio $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in (-1, 1), v \in (-1, 1)\}$. Además queremos representar el plano tangente y las direcciones asintóticas en el punto $\varphi(0.1, 0)$

Petición:

/param_surf/grafica?superficie=[u,v,u^2-v^2] &dom_var1=(-1,1) &dom_var2=(-1,1) &u0=0.1 &v0=0 &dirs_asintoticas=true &tangente=true

Desarrollo del sistema

Inputs:

- superficie: $\varphi(u, v) = (u \ v \ u^2 - v^2)$
- dom_var1: $(-1, 1)$
- dom_var2: $(-1, 1)$
- u0: 0.5
- v0: 0.5
- dirs_principales: *true*
- curvs_principales: *true*

Gráfica resultante:

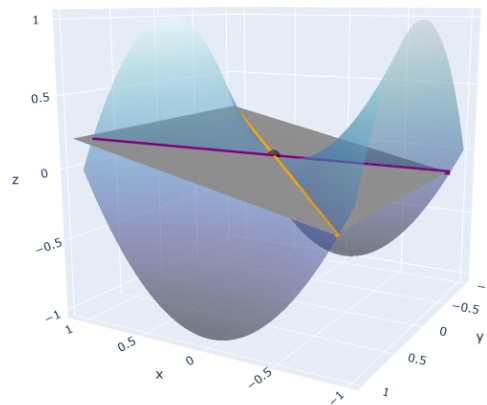


Figura 2.11: Paraboloide hiperbólico con direcciones asíntóticas y plano tangente

2.5.3.7. Ejemplo de esfera implícita

Queremos representar la esfera que viene dada por la ecuación canónica $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Petición:

/imp_surf/grafica?superficie=x^2 %2By^2 %2Bz^2-1 &dom_x=(-1,1) &dom_y=(-1,1) &dom_z=(-1,1)

Inputs:

- superficie: $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- dom_x: $(-1, 1)$
- dom_y: $(-1, 1)$

2.5. Representación gráfica de superficies

- dom_z: $(-1, 1)$

Gráfica resultante:

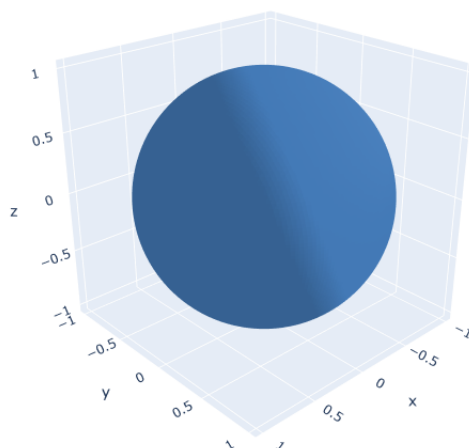


Figura 2.12: Esfera de radio unidad

2.5.3.8. Ejemplo de hiperboloide de una hoja

Queremos representar el hiperboloide de una hoja que viene dado por la ecuación canónica $\{(x, y, z) : 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 1\}$. Además queremos representar el plano tangente y el vector normal en el punto $(0.5, 0.5, 1)$.

Petición:

```
/imp_surf/grafica?superficie=(2*x)^2%2B(2*y)^2-z^2-1&dom_x=(-2,2)&dom_y=(-2,2)&dom_z=(-2,2)&x0=0.5&y0=0.5&z0=1&tangente=true&normal=true
```

Inputs:

- superficie: $\{(x, y, z) : 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 1\}$
- dom_x: $(-1, 1)$
- dom_y: $(-1, 1)$
- dom_z: $(-1, 1)$
- x0: 0.5
- y0: 0.5
- z0: 0
- tangente: true
- normal: true

Gráfica resultante:

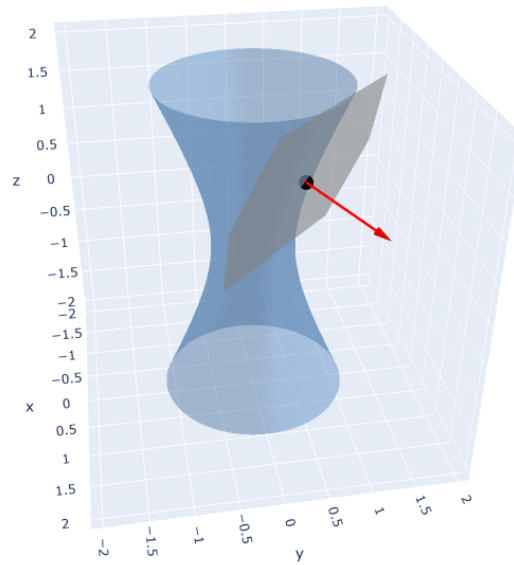


Figura 2.13: Hiperboloide de una hoja

2.6. Vector normal

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación del vector normal a una superficie tanto parametrizada como implícita.

2.6.1. Descripción

Ya sea en superficies parametrizadas como implícitas, el vector normal en un punto p se puede entender como aquel vector cuya dirección se encuentra ortogonal a la superficie en el punto p . Este vector coincide con el vector ortogonal al plano tangente a la superficie en el punto p . Cualquier vector con esa dirección pero cualquier longitud o sentido coincide con estas características, pero siguiendo las convenciones de la Guía de la Asignatura se toma el vector normalizado. Se distinguen dos fórmulas dependiendo de si la superficie es parametrizada o implícita:

- Si la superficie es parametrizada, el vector normal viene dado por

$$\vec{n} = \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$$

Para este caso el pseudocódigo usado es:

```
def vector_normal(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u, v:
↳ sympy.Symbol = v, u0: sympy.number = None, v0: sympy.number = None) ->
↳ dict:
    #Cálculo de la derivada en función de la primera variable
    #Cálculo de la derivada en función de la segunda variable
```

```
#Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
#Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
#Normalización del vector para calcular el vector normal
```

- Si la superficie es implícita y viene dada como el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$, el vector normal viene dado por

$$\vec{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{(g_x, g_y, g_z)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}}$$

Para este caso, el pseudo código es:

```
def vector_normal(superficie: sympy.Add, x0: sympy.number = None, y0:
    sympy.number = None, z0: sympy.number = None) -> dict:
    #Cálculo de la derivada en función de x
    #Cálculo de la derivada en función de y
    #Cálculo de la derivada en función de z
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial del gradiente
    #Normalización del vector
```

2.6.2. Envío de resultados en superficies parametrizadas

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular el vector normal tanto de forma genérico como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría del vector normal en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/vector_normal

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo del vector normal en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/vector_normal?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$.
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u,v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.6.3. Envío de resultados en superficies implícitas

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular el vector normal tanto de forma genérico como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría del vector normal en una superficie implícita

Endpoint: /imp_surf/vector_normal**Inputs:** Sin parámetros de entrada**Output:** JSON con la teoría asociada

Cálculo del vector normal de una superficie implícita

Endpoint: /imp_surf/vector_normal?superficie={superficie}&dom_x={dom_x}&dom_y={dom_y}&dom_z={dom_z}&x0={x0}&y0={y0}&z0={z0}&const={const}&func={func}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. La ecuación debe ser la igualada a cero (sin llegar a poner el igual). Un ejemplo es $x^2 + y^2 + z^2 - 1$, que sería una esfera.
- **dom_x** (opcional): dominio del eje x. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_y** (opcional): dominio del eje y. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_z** (opcional): dominio del eje z. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **x0** (opcional): valor de x de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **y0** (opcional): valor de y de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **z0** (opcional): valor de z de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u,v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.6.4. Ejemplos

2.6.4.1. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio Se quiere calcular el vector normal de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad 0)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-3, 3)$.

Desarrollo del sistema

Petición

/param_surf/vector_normal?superficie=[u,v,0]&dom_var1=(-2,2)&dom2_var=(-3,3)

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el vector normal en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-3, 3)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad 0)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 4: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-3, 3)$

Paso 5: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Paso 6: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

2.6.4.2. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular el vector normal de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2 + v^2)$$

en el punto $\varphi(1, 2)$.

Petición

/param_surf/vector_normal?superficie=[u,v,u^2%2Bv^2]&u0=1&v0=2

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el vector normal en el punto $\varphi(1, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2 + v^2)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad 0 \quad 2u)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(1, 2)$ es

$$\varphi_u(1, 2) = (1 \quad 0 \quad 2)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 1 \quad 2v)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(1, 2)$ es

$$\varphi_v(1, 2) = (0 \quad 1 \quad 4)$$

Paso 5: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(1, 2)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-2 \quad -4 \quad 1)$$

Paso 6: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Paso 7: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(1, 2)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{21}$$

Paso 8: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(1, 2)$ es

$$\vec{n} = \left(-\frac{2\sqrt{21}}{21} \quad -\frac{4\sqrt{21}}{21} \quad \frac{\sqrt{21}}{21} \right)$$

Desarrollo del sistema

2.6.4.3. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie parametrizada con constantes

Datos de ejercicio

Se quiere calcular el vector normal de la superficie

$$\varphi(u, v) = (au \cos(v) \quad au \sin(v) \quad 0)$$

en el dominio $(0, 2) \times (0, 2\pi)$ y tal que $a > 0$.

Petición

`/param_surf/vector_normal?superficie=[a*u*cos(v),a*u*sin(v),0]&dom_var1=(0,2)&dom_var2=(0,2
positive]`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el vector normal en el dominio $(u, v) \in (0, 2) \times (0, 2\pi)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (au \cos(v) \quad au \sin(v) \quad 0)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (a \cos(v) \quad a \sin(v) \quad 0)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (-au \sin(v) \quad au \cos(v) \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (0 \quad 0 \quad a^2u)$$

Paso 4: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2) \times (0, 2\pi)$

Paso 5: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = a^2u$$

Paso 6: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

2.6.4.4. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie implícita con constantes

Datos de ejercicio

Se quiere calcular el vector normal de la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

tal que $r > 0$.

Petición

/imp_surf/vector_normal?superficie= $x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ &const=[r,positive]

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el vector normal de la superficie implícita

$$-r^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Paso 1: Cálculo de la derivada respecto a x : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a x es

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

Paso 2: Cálculo de la derivada respecto a y : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a y es

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

Paso 3: Cálculo de la derivada respecto a z : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a z es

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

Paso 4: Comprobar que es superficie de nivel: se trata de una superficie de nivel ya que el siguiente sistema no tiene solución real:

$$\begin{cases} -r^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Paso 5: Cálculo del vector gradiente: el vector gradiente es

$$\nabla f = (2x \ 2y \ 2z)$$

Paso 6: Cálculo del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

2.7. Plano tangente

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación del plano tangente a una superficie tanto parametrizada como implícita.

2.7.1. Descripción

Ya sea en superficies parametrizadas como implícitas, el plano tangente en un punto p es el plano que contiene todas las direcciones tangentes a la superficie en p . Es el plano perpendicular al vector normal. Se distinguen dos fórmulas dependiendo de si la superficie es parametrizada o implícita:

- Si la superficie es parametrizada, el plano tangente viene dado por

$$(\vec{\varphi}_u(p) \times \vec{\varphi}_v(p)) \cdot ((x, y, z) - \varphi(p)) = 0$$

Se puede expresar mediante un punto genérico (u, v) . Para este caso el pseudocódigo usado es:

```
def plano_tangente(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u, v:
↪ sympy.Symbol = v, u0: sympy.number = None, v0: sympy.number = None) ->
↪ dict:
    #Cálculo de la derivada en función de la primera variable
    #Cálculo de la derivada en función de la segunda variable
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Cálculo del plano usando su fórmula
```

- Si la superficie es implícita y viene dada como el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$, el plano tangente viene dado por

$$\nabla f(p) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$f_x(p)(x - x_0) + f_y(p)(y - y_0) + f_z(p)(z - z_0) = 0$$

Para este caso, el pseudo código es:

```
def plano_tangente(superficie: sympy.Add, x0: sympy.number = None, y0:
↪ sympy.number = None, z0: sympy.number = None) -> dict:
    #Cálculo de la derivada en función de x
    #Cálculo de la derivada en función de y
    #Cálculo de la derivada en función de z
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial del gradiente
    #Cálculo del plano tangente usando su fórmula
```

2.7.2. Envío de resultados en superficies parametrizadas

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular el plano tangente tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la

superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría del plano tangente en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/plano_tangente

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo del plano tangente en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/plano_tangente?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$.
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u, v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas

funciones como se desee.

- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.7.3. Envío de resultados en superficies implícitas

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular el plano tangente tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría del plano tangente en una superficie implícita

Endpoint: /imp_surf/plano_tangente

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo del plano tangente de una superficie implícita

Endpoint: /imp_surf/plano_tangente?superficie={superficie}&dom_x={dom_x}&dom_y={dom_y}&dom_z={dom_z}&x0={x0}&y0={y0}&z0={z0}&const={const}&func={func}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. La ecuación debe ser la igualada a cero (sin llegar a poner el igual). Un ejemplo es $x^2 + y^2 + z^2 - 1$, que sería una esfera.
- **dom_x** (opcional): dominio del eje x. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_y** (opcional): dominio del eje y. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_z** (opcional): dominio del eje z. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **x0** (opcional): valor de x de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **y0** (opcional): valor de y de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **z0** (opcional): valor de z de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en

la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.

- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u,v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.7.4. Ejemplos

2.7.4.1. Ejemplo de cálculo del plano tangente a una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio Se quiere calcular el plano tangente a la superficie

$$\varphi(u, v) = (u + v \quad uv \quad u - v)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-3, 3)$.

Petición

`/param_surf/plano_tangente?superficie=[u%2Bv,u*v,u-v]&dom_var1=(-2,2)&dom2_var=(-3,3)`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el plano tangente en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-3, 3)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u + v \quad uv \quad u - v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad v \quad 1)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (1 \quad u \quad -1)$$

Paso 3: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-u - v \quad 2 \quad u - v)$$

Paso 4: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-3, 3)$

Paso 5: Cálculo del plano tangente: Aplicando su fórmula, el plano afín tangente es

$$2uv = x(u + v) - 2y - z(u - v)$$

2.7.4.2. Ejemplo de cálculo del plano tangente a una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular el plano tangente a la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \cos(v) \quad u \sin(v) \quad u)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2) \times (0, 2\pi)$ punto $\varphi(1, \pi/2)$.

Petición

/param_surf/plano_tangente?superficie=[u*cos(v),u*sin(v),u]&dom_var1=(0,1)
&dom_var2=(0,2*pi)

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el plano tangente en el punto $\varphi(1, \frac{\pi}{2})$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \cos(v) \quad u \sin(v) \quad u)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (\cos(v) \quad \sin(v) \quad 1)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(1, \frac{\pi}{2})$ es

$$\varphi_u(1, \frac{\pi}{2}) = (0 \quad 1 \quad 1)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (-u \sin(v) \quad u \cos(v) \quad 0)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(1, \frac{\pi}{2})$ es

$$\varphi_v(1, \frac{\pi}{2}) = (-1 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 5: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(1, \frac{\pi}{2})$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (0 \quad -1 \quad 1)$$

Paso 6: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2) \times (0, 2\pi)$

Paso 7: Cálculo del plano tangente: aplicando su fórmula, el plano afín tangente en el punto $\varphi(1, \frac{\pi}{2})$ es

$$y = z$$

2.7.4.3. Ejemplo de cálculo del plano tangente a una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas

Datos de ejercicio

Se quiere calcular el plano tangente a la superficie

$$\varphi(u, v) = (a \cdot \cos(u) \quad a \cdot \sin(u) \quad b \cdot g(v))$$

en el dominio $(0, 2\pi) \times (0, 1)$ y tal que $a > 0, b > 0, g(v) > 0$.

Petición

/param_surf/plano_tangente?superficie=[a*cos(u),a*sin(u),b*g(v)]&dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=positive]&const=[b, positive]&func=[g(v), positive]

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el plano tangente en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (a \cos(u) \quad a \sin(u) \quad b g(v))$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-a \sin(u) \quad a \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad b \frac{d}{dv} g(v))$$

Paso 3: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (ab \cos(u) \frac{d}{dv} g(v) \quad ab \sin(u) \frac{d}{dv} g(v) \quad 0)$$

Paso 4: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 5: Cálculo del plano tangente: Aplicando su fórmula, el plano afín tangente es

$$a^2 b \frac{d}{dv} g(v) = ab (x \cos(u) + y \sin(u)) \frac{d}{dv} g(v)$$

2.7.4.4. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie implícita con constantes

Datos de ejercicio

Se quiere calcular el plano tangente a la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Desarrollo del sistema

tal que $r > 0$.

Petición

/imp_surf/plano_tangente?superficie=x^2%2By^2%2Bz^2-r^2&const=[r,positive]

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el plano tangente de la superficie implícita

$$-r^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Paso 1: Cálculo de la derivada respecto a x : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a x es

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

Paso 2: Cálculo de la derivada respecto a y : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a y es

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

Paso 3: Cálculo de la derivada respecto a z : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a z es

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

Paso 4: Comprobar que es superficie de nivel: se trata de una superficie de nivel ya que el siguiente sistema no tiene solución real:

$$\begin{cases} -r^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Paso 5: Cálculo del vector gradiente: el vector gradiente es

$$\nabla f = (2x \ 2y \ 2z)$$

Paso 6: Cálculo del plano tangente: aplicando su fórmula, el plano tangente es

$$2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 = 2x_0^2 + 2y_0^2 + 2z_0^2$$

2.8. Primera Forma Fundamental

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de la Primera Forma Fundamental en superficies parametrizadas.

2.8.1. Descripción

La Primera Forma Fundamental es una aplicación que define un producto escalar, muy útil para calcular ángulos y longitudes. En el caso de la Primera Forma Fundamental, se trabaja con vectores tangentes a la superficie. La aplicación se define de dos maneras:

- $I_p : T_p\varphi \times T_p\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $I_p(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ para todo $\vec{a}, \vec{b} \in T_p\varphi$
- $I_p : T_p\varphi \times T_p\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $I_p(\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2$ para todo $\vec{a} \in T_p\varphi$

Su forma matricial viene dada por:

$$I_p(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

donde

$$E = \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_u \quad F = \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_v \quad G = \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_v$$

El pseudocódigo sería

```
def primera_forma_fundamental(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u,
    ↪ v: sympy.Symbol = v, u0: sympy.numer = None, v0: sympy.numer = None) ->
    ↪ dict:
    #Cálculo de la derivada en función de la primera variable
    #Cálculo de la derivada en función de la segunda variable
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
```

2.8.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular la Primera Forma Fundamental tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de la Primera Forma Fundamental en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/primera_forma_fundamental

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo de la Primera Forma Fundamental en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/primera_forma_fundamental?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}

```
{dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}
```

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$.
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u, v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.8.3. Ejemplos

2.8.3.1. Ejemplo de cálculo de la Primera Forma Fundamental de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la Primera Forma Fundamental de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u^2 + v \quad u - v^2 \quad u)$$

2.8. Primera Forma Fundamental

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$.

Petición

/param_surf/primera_forma_fundamental?superficie=[u^2%2Bv,u-v^2,u]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la primera forma fundamental en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u^2 + v \quad u - v^2 \quad u)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (2u \quad 1 \quad 1)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (1 \quad -2v \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (2v \quad 1 \quad -4uv - 1)$$

Paso 4: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

Paso 5: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} 4u^2 + 2 & 2u - 2v \\ 2u - 2v & 4v^2 + 1 \end{pmatrix}$$

2.8.3.2. Ejemplo de cálculo de la Primera Forma Fundamental de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la Primera Forma Fundamental de la superficie

$$\varphi(s, t) = (s \quad s^2 \quad t)$$

en el dominio $(s, t) \in (-2, 2)^2$ y punto $\varphi(0, 0)$.

Petición

/param_surf/primera_forma_fundamental?superficie=[s,s^2,t]&var1=s&var2=t&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)&u0=0&v0=0

Desarrollo del sistema

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la primera forma fundamental en el punto $\varphi(0,0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(s, t) = (s \quad s^2 \quad t)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a s : la derivada parcial respecto a s es

$$\varphi_s = (1 \quad 2s \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a s : la derivada parcial respecto a s en el punto $\varphi(0,0)$ es

$$\varphi_s(0,0) = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a t : la derivada parcial respecto a t es

$$\varphi_t = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a t : la derivada parcial respecto a t en el punto $\varphi(0,0)$ es

$$\varphi_t(0,0) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 5: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(0,0)$ es

$$\varphi_s \times \varphi_t = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 6: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_s \times \varphi_t \neq 0$ para todo $(s, t) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

Paso 7: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(0,0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8.3.3. Ejemplo de cálculo de la Primera Forma Fundamental de una superficie parametrizada con constantes

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la Primera Forma Fundamental de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \cos(v) \quad u \sin(v) \quad av)$$

2.9. Segunda Forma Fundamental

en el dominio $(-2, 2) \times (0, 2\pi)$ y tal que $a > 0$.

Petición

`/param_surf/primera_forma_fundamental?superficie=[u*cos(v),u*sin(v),v*a]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(0,2*pi)&const=[a, positive]`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la primera forma fundamental en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (0, 2\pi)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \cos(v) \quad u \sin(v) \quad av)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (\cos(v) \quad \sin(v) \quad 0)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (-u \sin(v) \quad u \cos(v) \quad a)$$

Paso 3: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (a \sin(v) \quad -a \cos(v) \quad u)$$

Paso 4: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (0, 2\pi)$

Paso 5: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 + u^2 \end{pmatrix}$$

2.9. Segunda Forma Fundamental

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de la Segunda Forma Fundamental en superficies parametrizadas.

2.9.1. Descripción

A grandes rasgos, la Segunda Forma Fundamental es una herramienta que nos permite, entre otras cosas, medir cuánto se aleja una superficie de su plano tangente. Para ello mide las curvaturas de las curvas contenidas en la superficie y que pasan por el punto que se estudia. La aplicación se define de dos maneras:

Desarrollo del sistema

- $II_p : T_p\varphi \times T_p\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $II_p(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot W(\vec{b})$ para todo $\vec{a}, \vec{b} \in T_p\varphi$
- $II_p : T_p\varphi \times T_p\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $II_p(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a} \cdot W(\vec{a})$ para todo $\vec{a} \in T_p\varphi$

Siendo W la forma matricial de la aplicación de Weingarten (2.10), que se explicará más adelante. Su forma matricial viene dada por:

$$II_p(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

donde

$$e = \vec{n} \cdot \vec{\varphi}_{uu} \quad f = \vec{n} \cdot \vec{\varphi}_{uv} \quad g = \vec{n} \cdot \vec{\varphi}_{vv}$$

Las distintas componentes se podrían calcular de otras maneras, sin embargo, esta es la que se ha implementado en la API. Por lo tanto, el pseudocódigo sería

```
def segunda_forma_fundamental(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u,
    ↪ v: sympy.Symbol = v, u0: sympy.numer = None, v0: sympy.numer = None) ->
    ↪ dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
    #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Normalización del vector para calcular el vector normal
    #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
```

2.9.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular la Segunda Forma Fundamental tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de la Segunda Forma Fundamental en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/segunda_forma_fundamental

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo de la Segunda Forma Fundamental en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/segunda_forma_fundamental?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs dom_var1 y dom_var2 si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$.
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u, v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.9.3. Ejemplos

2.9.3.1. Ejemplo de cálculo de la Segunda Forma Fundamental de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la Segunda Forma Fundamental de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2 + v^2)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$.

Petición

/param_surf/primera_forma_fundamental?superficie=[u^2%2Bv,u-v^2,u]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la segunda forma fundamental en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2 + v^2)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad 0 \quad 2u)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 1 \quad 2v)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (0 \quad 0 \quad 2)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad 2)$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-2u \quad -2v \quad 1)$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

2.9. Segunda Forma Fundamental

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \left(-\frac{2u}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \quad -\frac{2v}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \quad \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \right)$$

Paso 10: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{pmatrix}$$

2.9.3.2. Ejemplo de cálculo de la Segunda Forma Fundamental de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la Segunda Forma Fundamental de la superficie

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

/param_surf/segunda_forma_fundamental?superficie=[cos(u),cos(v),v] &dom_var1=(0,2*pi) &dom_var2=(-2,2) &u0=pi &v0=0 &trig=true

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \quad \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Desarrollo del sistema

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \ -\sin(u) \ 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \ 0 \ 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 15: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.9.3.3. Ejemplo de cálculo de la Segunda Forma Fundamental de una superficie parametrizada con constantes

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la Segunda Forma Fundamental de la superficie

$$\varphi(u, v) = (r \cos(u) \cos(v) \ r \sin(v) \cos(u) \ r \sin(u))$$

en el dominio $(-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$ y tal que $r > 0$.

Petición

/param_surf/segunda_forma_fundamental?superficie=[r*cos(u)*cos(v),r*cos(u)*sin(v),r*sin(u)]
&dom_var1=(-pi/2,pi/2)&dom_var2=(0,2*pi)&const=[r, positive]&trig=True

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la segunda forma fundamental en el dominio $(u, v) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (r \cos(u) \cos(v) \ r \sin(v) \cos(u) \ r \sin(u))$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-r \sin(u) \cos(v) \ -r \sin(u) \sin(v) \ r \cos(u))$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (-r \sin(v) \cos(u) \ r \cos(u) \cos(v) \ 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-r \cos(u) \cos(v) \ -r \sin(v) \cos(u) \ -r \sin(u))$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (r \sin(u) \sin(v) \ -r \sin(u) \cos(v) \ 0)$$

Desarrollo del sistema

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = \begin{pmatrix} -r \cos(u) \cos(v) & -r \sin(v) \cos(u) & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -r^2 \cos^2(u) \cos(v) & -r^2 \sin(v) \cos^2(u) & -\frac{r^2 \sin(2u)}{2} \end{pmatrix}$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = r^2 \cos(u)$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\cos(u) \cos(v) & -\sin(v) \cos(u) & -\sin(u) \end{pmatrix}$$

Paso 10: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \cos^2(u) \end{pmatrix}$$

2.10. Aplicación de Weingarten

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de la aplicación de Weingarten en superficies parametrizadas.

2.10.1. Descripción

La aplicación de Weingarten es una herramienta que permite estudiar el comportamiento de las superficies además de definir y calcular otros elementos de la superficie. La aplicación se define como la aplicación lineal

$$W_p : T_p \varphi \longrightarrow T_p \varphi$$

que verifica

$$\begin{cases} W_p(\vec{\varphi}_u) = -\vec{n}_u \\ W_p(\vec{\varphi}_v) = -\vec{n}_v \end{cases}$$

Matricialmente se puede representar como

$$[W_p] = [I_p]^{-1} [II_p] = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fG - gF & gE - fF \end{pmatrix}$$

Su pseudocódigo sería

```
def weingarten(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u, v: sympy.Symbol
↪ = v, u0: sympy.number = None, v0: sympy.number = None) -> dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
    #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Normalización del vector para calcular el vector normal
    #Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la expresión matricial de la aplicación de Weingarten usando
    ↪ sus fórmulas
```

2.10.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular la aplicación de Weingarten tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de la aplicación de Weingarten en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/weingarten

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo de la aplicación de Weingarten en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/weingarten?superficie={superficie}&var1={var1}
&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}
&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$.
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u,v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.10.3. Ejemplos

2.10.3.1. Ejemplo de cálculo de la matriz de Weingarten de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la matriz de Weingarten de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2 + v^2)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$.

Petición

2.10. Aplicación de Weingarten

/param_surf/weingarten?superficie=[u^2%2Bv,u-v^2,u]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular la matriz de Weingarten en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2 + v^2)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad 0 \quad 2u)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 1 \quad 2v)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (0 \quad 0 \quad 2)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad 2)$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-2u \quad -2v \quad 1)$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \left(-\frac{2u}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \quad -\frac{2v}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \quad \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \right)$$

Desarrollo del sistema

Paso 10: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 4uv \\ 4uv & 4v^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su fórmula, la matriz de Weingarten es

$$[W] = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot (4v^2+1)}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{8uv}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{8uv}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{2 \cdot (4u^2+1)}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

2.10.3.2. Ejemplo de cálculo de la matriz de Weingarten de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la matriz de Weingarten de la superficie

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

/param_surf/weingarten?superficie=[cos(u),cos(v),v]&dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(-2,2)&u0=pi&v0=0&trig=true

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular la matriz de Weingarten en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \quad \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \ -\sin(u) \ 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \ 0 \ 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Desarrollo del sistema

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 15: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 17: Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su fórmula, la matriz de Weingarten en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[W] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.10.3.3. Ejemplo de cálculo de la matriz de Weingarten de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la matriz de Weingarten a la superficie

$$\varphi(u, v) = (a \cdot \cos(u) \ a \cdot \sin(u) \ f(v))$$

en el dominio $(0, 2\pi) \times (0, 1)$ y tal que $a > 0, f(v) > 0$.

Petición

`/param_surf/weingarten?superficie=[a*cos(u),a*sin(u),f(v)] &dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(0,1) &const=[a, positive] &func=[f(u), positive]`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular la matriz de Weingarten en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (a \cos(u) \ a \sin(u) \ f(v))$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-a \sin(u) \ a \cos(u) \ 0)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \ 0 \ \frac{d}{dv}f(v))$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = \begin{pmatrix} -a \cos(u) & -a \sin(u) & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d^2}{dv^2} f(v) \end{pmatrix}$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} a \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) & a \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = a \sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(u) \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & \frac{\sin(u) \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 10: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dv} f(v) \right)^2 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} -\frac{a \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su fórmula, la matriz de Weingarten es

$$[W] = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{d}{dv} f(v)}{a \sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.11. Curvaturas principales

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de las curvaturas principales en superficies parametrizadas.

2.11.1. Descripción

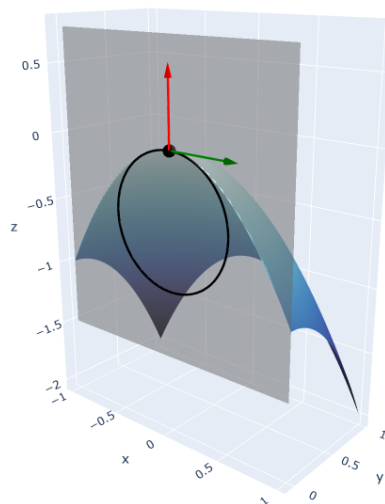
Las curvaturas principales son los autovectores de la matriz de Weingarten. Dado un punto p de una superficie, las curvaturas principales son las curvaturas normales máxima y mínima de la superficie en el punto p . Es decir, son una excelente característica para estudiar el comportamiento de una superficie en un punto.

Si el objetivo final es únicamente obtener las curvaturas principales, es posible obtenerlas con la fórmula

$$\kappa_1, \kappa_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

donde K y H son, respectivamente la curvatura de Gauss y la curvatura media, que se explicarán más adelante y que para su cálculo solo es necesario conocer la Primera y Segunda Forma Fundamental.

Geométricamente, a partir de las curvaturas principales se pueden construir unas circunferencias osculatrices a la superficie: se toma como radio el inverso de la curvatura principal y, como centro, el punto $\varphi(u_0, v_0) - \frac{1}{\kappa} \vec{n}$. Es decir



donde el vector rojo es el vector normal, el vector verde es una direcciones principales δ_i y la circunferencia tiene radio $1/\kappa_i$.

Su pseudocódigo sería

```
def curvs_principales(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u, v:
    ↳ sympy.Symbol = v, u0: sympy.number = None, v0: sympy.number = None) ->
    ↳ dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
```

```
#Cálculo de las derivadas de segundo orden
#Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
#Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
#Normalización del vector para calcular el vector normal
#Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
↪ sus fórmulas
#Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
↪ sus fórmulas
#Cálculo de las curvaturas principales mediante su fórmula
```

2.11.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular las curvaturas principales tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de las curvaturas principales en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/curvaturas_principales

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo de las curvaturas principales en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/curvaturas_principales?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por

defecto se usa el $(-5, 5)$.

- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u,v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.11.3. Ejemplos

2.11.3.1. Ejemplo de cálculo de las curvaturas principales de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio

Se quiere calcular las curvaturas principales de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$.

Petición

`/param_surf/curvaturas_principales?superficie=[u^2%2Bv,u-v^2,u]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular las curvaturas principales en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto

a u es

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \end{pmatrix}$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -2u & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{4u^2 + 1}$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{2u}{\sqrt{4u^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}} \end{pmatrix}$$

Paso 10: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollo del sistema

Paso 12: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss es

$$K = 0$$

Paso 13: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media es

$$H = \frac{1}{(4u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Paso 14: Cálculo de las curvaturas principales: aplicando su fórmula, las curvaturas principales son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = \left(\frac{2}{(4u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad 0 \right)$$

2.11.3.2. Ejemplo de cálculo de las curvaturas principales de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular las curvaturas principales de la superficie

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

`/param_surf/curvaturas_principales?superficie=[cos(u),cos(v),v] &dom_var1=(0,2*pi) &dom_var2=(-2,2) &u0=pi &v0=0 &trig=true`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular las curvaturas principales en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \quad \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = \begin{pmatrix} -\cos(u) & -\sin(u) & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollo del sistema

Paso 15: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 17: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$K = 0$$

Paso 18: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$H = -\frac{1}{2}$$

Paso 19: Cálculo de las curvaturas principales: aplicando su fórmula, las curvaturas principales en el punto $\varphi(\pi, 0)$ son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = (0, -1)$$

2.11.3.3. Ejemplo de cálculo de las curvaturas principales de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas

Datos de ejercicio

Se quiere calcular las curvaturas principales de la superficie

$$\varphi(u, v) = (a \cdot \cos(u) \quad a \cdot \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(0, 2\pi) \times (0, 1)$ y tal que $a > 0$.

Petición

`/param_surf/curvaturas_principales?superficie=[a*cos(u),a*sin(u),v]&dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(0,1)&const=[a, positive]`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular las curvaturas principales en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (a \cos(u) \quad a \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-a \sin(u) \quad a \cos(u) \quad 0)$$

2.11. Curvaturas principales

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-a \cos(u) \ -a \sin(u) \ 0)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (a \cos(u) \ a \sin(u) \ 0)$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = a$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = (\cos(u) \ \sin(u) \ 0)$$

Paso 10: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss es

$$K = 0$$

Desarrollo del sistema

Paso 13: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media es

$$H = -\frac{1}{2a}$$

Paso 14: Cálculo de las curvaturas principales: aplicando su fórmula, las curvaturas principales son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = \left(0 \quad -\frac{1}{a}\right)$$

2.12. Direcciones principales

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de las direcciones principales en superficies parametrizadas.

2.12.1. Descripción

Las direcciones principales son los autovectores de la matriz de Weingarten. Dado un punto p de una superficie, las direcciones principales se pueden interpretar como las direcciones en las que las curvaturas normales de la superficie en p son máximas y mínimas (curvaturas principales).

Su pseudocódigo sería

```
def dirvs_principales(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u, v:
↪ sympy.Symbol = v, u0: sympy.number = None, v0: sympy.number = None) ->
↪ dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
    #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Normalización del vector para calcular el vector normal
    #Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la expresión matricial de la aplicación de Weingarten usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de autovectores de la matriz de Weingarten
```

2.12.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular las direcciones principales tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en

forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de las direcciones principales en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/direcciones_principales

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo de las direcciones principales en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/direcciones_principales?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$.
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u, v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las

funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.12.3. Ejemplos

2.12.3.1. Ejemplo de cálculo de las direcciones principales de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio

Se quiere calcular las direcciones principales de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$.

Petición

/param_surf/direcciones_principales?superficie=[u,v,u^2]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular las direcciones principales en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad 0 \quad 2u)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (0 \quad 0 \quad 2)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-2u \quad 0 \quad 1)$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{4u^2 + 1}$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \left(-\frac{2u}{\sqrt{4u^2+1}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}} \right)$$

Paso 10: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su fórmula, la matriz de Weingarten es

$$[W] = \begin{pmatrix} \frac{2}{(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 13: Cálculo de las curvaturas principales: calculando los autovalores de la matriz de Weingarten, las curvaturas principales son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = \left(0 \quad \frac{2}{(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Paso 14: Cálculo del primer autovector: usando el primer autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_1 es

$$[W]_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 15: Cálculo del segundo autovector: usando el segundo autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_2 es

$$[W]_{\kappa_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollo del sistema

Paso 16: Cálculo de las direcciones principales: los autovectores calculados representan las coordenadas de las direcciones principales en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Por lo tanto se debe hacer un cambio a la base canónica.

Paso 17: Cálculo de la primera dirección principal: realizando un cambio de base la primera dirección principal es

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 18: Cálculo de la segunda dirección principal: realizando un cambio de base la segunda dirección principal es

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \end{pmatrix}$$

2.12.3.2. Ejemplo de cálculo de las direcciones principales de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular las direcciones principales de la superficie

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u) & v \end{pmatrix}$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

`/param_surf/direcciones_principales?superficie=[cos(u),cos(v),v] &dom_var1=(0,2*pi) &dom_var2=(-2,2) &u0=pi &v0=0 &trig=true`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular las direcciones principales en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u) & v \end{pmatrix}$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} -\sin(u) & \cos(u) & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \ -\sin(u) \ 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \ 0 \ 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Desarrollo del sistema

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 15: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 17: Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su fórmula, la matriz de Weingarten en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[W] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 18: Cálculo de autovalores: calculando los autovalores de la matriz de Weingarten, se tiene que las direcciones principales en el punto $\varphi(\pi, 0)$ son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = (0, -1)$$

Paso 19: Cálculo del primer autovector: usando el primer autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_1 en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[W]_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 20: Cálculo del segundo autovector: usando el segundo autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_2 en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[W]_{\kappa_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 21: Cálculo de las direcciones principales: los autovectores calculados representan las coordenadas de las direcciones principales en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Por lo tanto se debe hacer un cambio a la base canónica.

Paso 22: Cálculo de la primera dirección principal: realizando un cambio de base la primera dirección principal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$d_1 = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 23: Cálculo de la segunda dirección principal: realizando un cambio de base la segunda dirección principal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$d_2 = (0 \ -1 \ 0)$$

2.12.3.3. Ejemplo de cálculo de las direcciones principales de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas

Datos de ejercicio

Se quiere calcular las direcciones principales de la superficie

$$\varphi(u, v) = (a \cdot \cos(u) \quad a \cdot \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(0, 2\pi) \times (0, 1)$ y tal que $a > 0$.

Petición

`/param_surf/direcciones_principales?superficie=[a*cos(u),a*sin(u),v]&dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(0,1)&const=[a, positive]`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular las direcciones principales en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (a \cos(u) \quad a \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-a \sin(u) \quad a \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-a \cos(u) \quad -a \sin(u) \quad 0)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (a \cos(u) \quad a \sin(u) \quad 0)$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$

Desarrollo del sistema

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = a$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad 0)$$

Paso 10: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su fórmula, la matriz de Weingarten es

$$[W] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 13: Cálculo de las curvaturas principales: calculando los autovalores de la matriz de Weingarten, las curvaturas principales son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = (0 \quad -\frac{1}{a})$$

Paso 14: Cálculo del primer autovector: usando el primer autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_1 es

$$[W]_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 15: Cálculo del segundo autovector: usando el segundo autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_2 es

$$[W]_{\kappa_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Cálculo de las direcciones principales: los autovectores calculados representan las coordenadas de las direcciones principales en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Por lo tanto se debe hacer un cambio a la base canónica.

Paso 17: Cálculo de la primera dirección principal: realizando un cambio de base la primera dirección principal es

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 18: Cálculo de la segunda dirección principal: realizando un cambio de base la segunda dirección principal es

$$d_2 = \begin{pmatrix} -a \sin(u) & a \cos(u) & 0 \end{pmatrix}$$

2.13. Curvatura de Gauss

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de la curvatura de Gauss en superficies parametrizadas.

2.13.1. Descripción

La curvatura de Gauss se puede definir de dos manera distintas:

- Determinante de la matriz de Weingarten

$$K(p) = \det([W_p]) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

- Producto de las curvaturas principales

$$K(p) = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

Geométricamente, la curvatura de Gauss mide un "promedio"(similar a la media geométrica) de cómo son las curvaturas en todas las direcciones de un punto de la superficie y sirve para estudiar el comportamiento local de la superficie.

Su pseudocódigo sería

```
def segunda_forma_fundamental(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u,
↪ v: sympy.Symbol = v, u0: sympy.number = None, v0: sympy.number = None) ->
↪ dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
    #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Normalización del vector para calcular el vector normal
    #Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la curvatura de gauss usando su fórmula
```

2.13.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular la curvatura de Gauss tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de la curvatura de Gauss en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/curvatura_Gauss

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo de la curvatura de Gauss en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/curvatura_Gauss?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un

- punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
 - **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma *[r, positive, odd]*. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
 - **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma *[f(u,v), positive, odd]*. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
 - **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.13.3. Ejemplos

2.13.3.1. Ejemplo de cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la curvatura de Gauss de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$.

Petición

/param_surf/curvatura_Gauss?superficie=[u^2%2Bv,u-v^2,u]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la curvatura de Gauss en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad 0 \quad 2u)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (0 \quad 0 \quad 2)$$

Desarrollo del sistema

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -2u & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{4u^2 + 1}$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\frac{2u}{\sqrt{4u^2+1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}} \end{pmatrix}$$

Paso 10: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss es

$$K = 0$$

2.13.3.2. Ejemplo de cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la curvatura de Gauss de la superficie

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

/param_surf/curvatura_Gauss?superficie=[cos(u),cos(v),v] &dom_var1=(0,2*pi) &dom_var2=(-2,2) &u0=pi &v0=0 &trig=true

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la curvatura de Gauss en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \quad \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \quad -\sin(u) \quad 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Desarrollo del sistema

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 15: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 17: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$K = 0$$

2.13.3.3. Ejemplo de cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la curvatura de Gauss a la superficie

$$\varphi(u, v) = (a \cdot \cos(u) \quad a \cdot \sin(u) \quad f(v))$$

en el dominio $(0, 2\pi) \times (0, 1)$ y tal que $a > 0, f(v) > 0$.

Petición

`/param_surf/curvatura_Gauss?superficie=[a*cos(u),a*sin(u),f(v)]&dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(0,1)&const=[a, positive]&func=[f(u), positive]`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la curvatura de Gauss en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (a \cos(u) \quad a \sin(u) \quad f(v))$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-a \sin(u) \quad a \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad \frac{d}{dv}f(v))$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-a \cos(u) \quad -a \sin(u) \quad 0)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad \frac{d^2}{dv^2}f(v))$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (a \cos(u) \frac{d}{dv}f(v) \quad a \sin(u) \frac{d}{dv}f(v) \quad 0)$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$

Desarrollo del sistema

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = a \sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(u) \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & \frac{\sin(u) \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 10: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dv} f(v) \right)^2 \end{pmatrix}$$

Paso 11: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} -\frac{a \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss es

$$K = 0$$

2.14. Curvatura media

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de la curvatura media en superficies parametrizadas.

2.14.1. Descripción

La curvatura media se puede definir de dos manera distintas:

- Traza de la matriz de Weingarten

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{traza}([W_p]) = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}$$

- Producto de las curvaturas principales

$$K(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

Geométricamente, la curvatura media es la media aritmética de las curvaturas principales de una superficie en un punto.

Su pseudocódigo sería

```
def segunda_forma_fundamental(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u,
    ↪ v: sympy.Symbol = v, u0: sympy.numer = None, v0: sympy.numer = None) ->
    ↪ dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
    #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Normalización del vector para calcular el vector normal
    #Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la curvatura media usando su fórmula
```

2.14.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular la curvatura media tanto de forma genérica como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de la curvatura media en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/curvatura_media

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Cálculo de la curvatura media en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/curvatura_media?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por

comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.

- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u, v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.14.3. Ejemplos

2.14.3.1. Ejemplo de cálculo de la curvatura media de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la curvatura media de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$.

Petición

`/param_surf/curvatura_media?superficie=[u^2%2Bv,u-v^2,u]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la curvatura media en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \quad v \quad u^2)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad 0 \quad 2u)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \quad 0 \quad 2u)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 1 \quad 0)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (0 \quad 0 \quad 2)$$

Paso 6: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 8: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-2u \quad 0 \quad 1)$$

Paso 9: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

Paso 10: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{4u^2 + 1}$$

Desarrollo del sistema

Paso 11: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \left(-\frac{2u}{\sqrt{4u^2+1}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}} \right)$$

Paso 12: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 13: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 14: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media es

$$H = \frac{1}{(4u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

2.14.3.2. Ejemplo de cálculo de la curvatura media de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la curvatura media de la superficie

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

/param_surf/curvatura_media?superficie=[cos(u),cos(v),v] &dom_var1=(0,2*pi) &dom_var2=(-2,2) &u0=pi &v0=0 &trig=true

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la curvatura media en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \quad \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \ \cos(u) \ 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \ -1 \ 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \ -\sin(u) \ 0)$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \ 0 \ 0)$$

Paso 11: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 12: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 13: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Desarrollo del sistema

Paso 14: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 15: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 17: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Paso 18: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 19: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 20: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 21: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$H = -\frac{1}{2}$$

2.14.3.3. Ejemplo de cálculo de la curvatura media de una superficie parametrizada con constantes y funciones indefinidas

Datos de ejercicio

Se quiere calcular la curvatura media a la superficie

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(u) & a \cdot \sin(u) & f(v) \end{pmatrix}$$

en el dominio $(0, 2\pi) \times (0, 1)$ y tal que $a > 0, f(v) > 0$.

Petición

`/param_surf/curvatura_media?superficie=[a*cos(u),a*sin(u),f(v)] &dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(0,1) &const=[a, positive] &func=[f(u), positive]`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular la curvatura media en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (a \cos(u) \quad a \sin(u) \quad f(v))$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-a \sin(u) \quad a \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad \frac{d}{dv}f(v))$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-a \sin(u) \quad a \cos(u) \quad 0)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad \frac{d}{dv}f(v))$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-a \cos(u) \quad -a \sin(u) \quad 0)$$

Paso 6: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad \frac{d^2}{dv^2}f(v))$$

Paso 8: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (a \cos(u) \frac{d}{dv}f(v) \quad a \sin(u) \frac{d}{dv}f(v) \quad 0)$$

Paso 9: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$

Desarrollo del sistema

Paso 10: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = a \sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}$$

Paso 11: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(u) \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & \frac{\sin(u) \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dv} f(v) \right)^2 \end{pmatrix}$$

Paso 13: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} -\frac{a \frac{d}{dv} f(v)}{\sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 14: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media es

$$H = -\frac{\frac{d}{dv} f(v)}{2a \sqrt{\left| \sin(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2 + \left| \cos(u) \frac{d}{dv} f(v) \right|^2}}$$

2.15. Punto umbílico

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de los punto umbílicos en superficies parametrizadas.

2.15.1. Descripción

Los puntos umbílicos son aquellos cuyos cuarvaturas principales coinciden, es decir

$$\kappa_1 = \kappa_2$$

Geométricamente, son aquellos puntos de la superficie que, sin importan la dirección que se tome, la curvatura siempre será la misma. Por ejemplo en un plano o una esfera todos los puntos son umbílicos. Por otro lado, en un parabolioide elíptico el único punto umbílico es aquel en el vertice.

```
def punto_umbilico(superficie: sympy.Matrix, u0: sympy.number, v0:
↪ sympy.number, u: sympy.Symbol = u, v: sympy.Symbol = v) -> dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
    #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    #Sustitución de los valores de u0 y v0
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Normalización del vector para calcular el vector normal
    #Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de las curvaturas principales mediante su fórmula
    #Comprobación de punto umbílico igualando curvaturas principales
```

2.15.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para comprobar si un punto es umbílico.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$.

Es obligatorio especificar el punto que se quiere analizar y no se permiten constantes ni funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de los puntos umbílicos en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/punto_umbilico

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Comprobación de punto umbílico en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/punto_umbilico?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **u0** (obligatorio): valor de la primera variable de dependencia del

- punto de la superficie.
- **v0** (obligatorio): valor de la segunda variable de dependencia del punto de la superficie.
 - **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
 - **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
 - **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
 - **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
 - **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.15.3. Ejemplos

2.15.3.1. Ejemplo de comprobación de punto umbílico en una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere comprobar si un punto es umbílico en la superficie

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

`/param_surf/punto_umbilico?superficie=[cos(u),sin(u),v] &dom_var1=(0,2*pi) &dom_var2=(-2,2) &u0=pi &v0=0 &trig=true`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a calcular los puntos umbílicos en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \quad \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \ -\sin(u) \ 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \ 0 \ 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Desarrollo del sistema

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 15: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 17: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$K = 0$$

Paso 18: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$H = -\frac{1}{2}$$

Paso 19: Cálculo de las curvaturas principales: aplicando su fórmula, las curvaturas principales en el punto $\varphi(\pi, 0)$ son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = (0, -1)$$

Paso 20: Comparación de curvaturas principales: ya que no se cumple que $\kappa_1 = \kappa_2$, el punto $\varphi(\pi, 0)$ no es umbílico

2.16. Clasificación de un punto

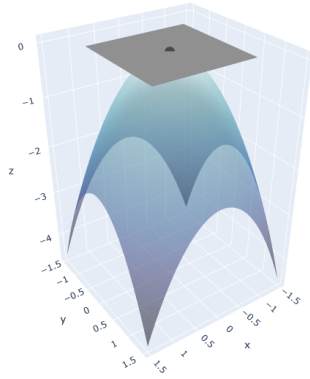
En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de la clasificación de un punto de una superficie parametrizada.

2.16.1. Descripción

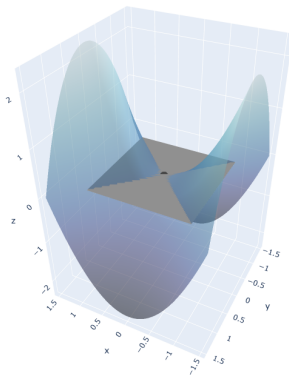
En una superficie tan solo existen cuatro tipos de puntos, que depende de sus curvaturas principales:

2.16. Clasificación de un punto

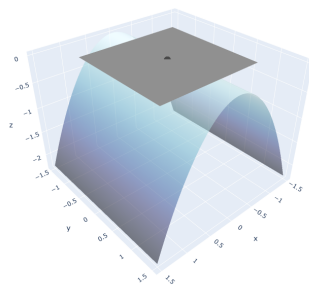
- **Los puntos elípticos:** si $\kappa_1\kappa_2 > 0$



- **Los puntos hiperbólicos:** si $\kappa_1\kappa_2 < 0$

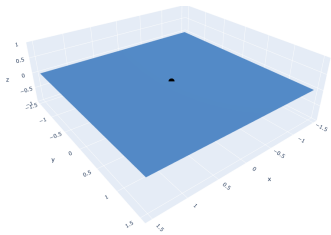


- **Los puntos parabólicos :** si $\kappa_1\kappa_2 = 0$ y $\kappa_1 \neq \kappa_2$



- **Los puntos planares:** si $\kappa_1\kappa_2 = 0$ y $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

Desarrollo del sistema



Su pseudocódigo es

```
def clasificacion_punto(superficie: sympy.Matrix, u0: sympy.number, v0:
    sympy.number, u: sympy.Symbol = u, v: sympy.Symbol = v) -> dict:
    ↪ #Cálculo de las derivadas de primer orden
    ↪ #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    ↪ #Sustitución de los valores de u0 y v0
    ↪ #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    ↪ #Normalización del vector para calcular el vector normal
    ↪ #Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    ↪ #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    ↪ #Cálculo de las curvaturas principales mediante su fórmula
    ↪ #Clasificación del punto dependiendo del producto de las curvaturas
    ↪ principales
```

2.16.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para clasificar un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$.

Es obligatorio especificar el punto que se quiere analizar y no se permiten constantes ni funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de la clasificación de un punto de una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/clasificacion_punto

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Comprobación de la clasificación de un punto de superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/clasificacion_punto?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **u0** (obligatorio): valor de la primera variable de dependencia del punto de la superficie.
- **v0** (obligatorio): valor de la segunda variable de dependencia del punto de la superficie.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs dom_var1 y dom_var2 si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.16.3. Ejemplos

2.16.3.1. Ejemplo de clasificación de punto en una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere clasificar un punto de la superficie

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

/param_surf/clasificacion_punto?superficie=[cos(u),sin(u),v]&dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(-2,2)&u0=pi&v0=0&trig=true

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se van a clasificar el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parame-

Desarrollo del sistema

trizada

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \quad \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \quad -\sin(u) \quad 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

2.16. Clasificación de un punto

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 15: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 17: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$K = 0$$

Paso 18: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$H = -\frac{1}{2}$$

Paso 19: Cálculo de las curvaturas principales: aplicando su fórmula, las curvaturas principales en el punto $\varphi(\pi, 0)$ son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = (0, -1)$$

Paso 20: Clasificación del punto: ya que $\kappa_1 \kappa_2 = 0$ y $\kappa_1 \neq \kappa_2$, el punto $\varphi(\pi, 0)$ es un punto parabólico

2.17. Direcciones asintóticas

En esta sección se va explicar la teoría y la implementación de las direcciones asintóticas de un punto de una superficie parametrizada.

2.17.1. Descripción

Las direcciones asintóticas en p son aquellas que cumplen que $II_p(\vec{a}) = 0$. Geométricamente, las direcciones asintóticas marcan la dirección que toman las curvas contenidas en la superficie que pasan por el punto p y que tienen curvatura nula en p . Es decir es la dirección que se debe de tomar desde el punto p para seguir una trayectoria sin ninguna curvatura. Las curvas que siguen las direcciones asintóticas coinciden con la intersección la superficie y el plano tangente en el punto p .

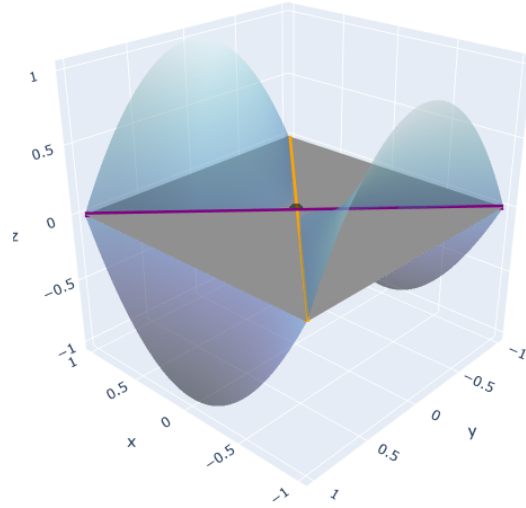


Figura 2.14: Ejemplo de curvas que siguen las direcciones asintóticas

Analizando paramétricamente la ecuación

$$II_p(\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

Se han obtenido los siguientes casos que se comprueban de manera secuencial:

1. Si $e = f = g = 0$, entonces el punto es planar y todas las direcciones son asintóticas
2. Si $e = 0, g \neq 0$, entonces las coordenadas de las direcciones con respecto a la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son

$$\{(1, 0), (-g, 2f)\}$$

3. Si $e \neq 0, g = 0$, entonces las coordenadas de las direcciones con respecto a la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son

$$\{(0, 1), (-2f, e)\}$$

4. Si $f^2 - ge < 0$, entonces estamos ante un punto elíptico y por lo tanto no hay direcciones asintóticas
5. En el resto de casos, las coordenadas de las direcciones con respecto a la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son

$$\{(g, -f + \sqrt{f^2 - ge}), (-f - \sqrt{f^2 - ge})\}$$

En los casos 2,3 y 5 es posible que las direcciones calculadas resulten repetidas, en cuyo estaremos ante un punto parabólico y solo habrá una dirección principal. Si el resultado son dos direcciones asintóticas distintas estaremos ante un punto hiperbólico.

Su pseudocódigo es

```
def dirs_asintoticas(superficie: sympy.Matrix, u0: sympy.numer, v0:
    sympy.numer, u: sympy.Symbol = u, v: sympy.Symbol = v) -> dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
    #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    #Sustitución de los valores de u0 y v0
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Normalización del vector para calcular el vector normal
    #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↪ sus fórmulas
    #Cálculo de las direcciones principales consiguiendo sus coordenadas y
    ↪ pasando a base canónica
```

2.17.2. Envío de resultados

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para obtener las direcciones asintóticas en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Si por el contrario se desea resolver un ejercicio, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$.

Es obligatorio especificar el punto que se quiere analizar y no se permiten constantes ni funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Teoría de las direcciones asintóticas de una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/direccion_asintotica

Inputs: Sin parámetros de entrada

Output: JSON con la teoría asociada

Comprobación de las direcciones asintóticas de superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/direccion_asintotica?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **u0** (obligatorio): valor de la primera variable de dependencia del punto de la superficie.
- **v0** (obligatorio): valor de la segunda variable de dependencia del punto de la superficie.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs dom_var1 y dom_var2 si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.17.3. Ejemplos

2.17.3.1. Ejemplo de cálculo de direcciones asintóticas en una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere calcular las direcciones asintóticas de un punto de la superficie

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

/param_surf/direccion_asintotica?superficie=[cos(u),sin(u),v]&dom_var1=(0,2*pi)&dom_var2=(-2,2)&u0=pi&v0=0&trig=true

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular las direcciones asintóticas en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\cos(u) \quad \sin(u) \quad v)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (-\sin(u) \quad \cos(u) \quad 0)$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \quad -\sin(u) \quad 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-1 \quad 0 \quad 0)$$

Desarrollo del sistema

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 15: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Calcular las direcciones principales: buscando los vectores que cumplan que $II(\vec{w}, \vec{w}) = 0$ se tiene que las direcciones asintóticas son

$$\{(0 \ 1)\}$$

2.18. Análisis completo

En esta sección se va explicar la implementación del análisis completo que se ha realizado, tanto en superficies parametrizadas como en implícitas.

2.18.1. Descripción

Se ha implementado un método capaz de calcular todas las funcionalidades anteriormente descritas. Dependiendo si se está en el caso de superficie parametrizada o superficie implícita se realizan todos los cálculos posibles de manera óptima.

2.18.1.1. Superficie parametrizada

Si la superficie es parametrizada, se calcula lo siguiente:

- Vector normal
- Plano tangente
- Primera Forma Fundamental
- Segunda Forma fundamental
- Matriz de Weingarten

- Curvaturas principales
- Direcciones principales
- Curvatura de Gauss
- Curvatura media
- Comprobación de punto umbílico (si se especifica punto)
- Clasificación de punto (si se especifica punto)
- Direcciones asintóticas (si se especifica punto)

Su pseudocódigo sería

```
def analisis_completo(superficie: sympy.Matrix, u: sympy.Symbol = u, v:
↳ sympy.Symbol = v, u0: sympy.number = None, v0: sympy.number = None) ->
↳ dict:
    #Cálculo de las derivadas de primer orden
    #Cálculo de las derivadas de segundo orden
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales
    #Normalización del vector para calcular el vector normal
    #Cálculo de la expresión matricial de la primera forma fundamental usando
    ↳ sus fórmulas
    #Cálculo de la expresión matricial de la segunda forma fundamental usando
    ↳ sus fórmulas
    #Cálculo de la matriz de Weingarten
    #Cálculo de autovalores y autovectores de la matriz de Weingarten para
    ↳ conseguir las curvaturas y direcciones principales
    #Cálculo de la curvatura de Gauss usando su fórmula
    #Cálculo de la curvatura media usando su fórmula
    #Comprobación de punto umbílico
    #Clasificación de punto
    #Cálculo de las direcciones principales
```

2.18.1.2. Superficie implícita

Si la superficie es implícita, se calcula lo siguiente:

- Vector normal
- Plano tangente

Su pseudocódigo sería

```
def analisis_completo(superficie: sympy.Add, x0: sympy.number = None, y0:
↳ sympy.number = None, z0: sympy.number = None) -> dict:
    #Cálculo de la derivada en función de x
    #Cálculo de la derivada en función de y
    #Cálculo de la derivada en función de z
    #Sustitución de los valores de u0 y v0 si se requiere
    #Cálculo del producto vectorial del gradiente
    #Normalización del vector
    #Cálculo del plano tangente usando su fórmula
```

2.18.2. Envío de resultados en superficies parametrizadas

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para realizar un análisis completo.

Para este apartado no hay teoría asociada. En el caso de superficie parametrizada, es recomendable especificar el dominio de ambas variables. Si bien no es obligatorio, si no se especifica el dominio de alguna variable se usa por defecto el intervalo abierto $(-5, 5)$. Si no se tiene esto en cuenta es posible que el sistema indique que la superficie no es de regular y finalice la ejecución antes de realizar los cálculos. Otra opción para describir el dominio de las variables es definir un dominio en forma de elipse. Solo se aceptan dominios de la forma $au^2 + bv^2 < r$. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoint* disponibles son:

Análisis completo en una superficie parametrizada

Endpoint: /param_surf/description?superficie={superficie}&var1={var1}&var2={var2}&dom_var1={dom_var1}&dom_var2={dom_var2}&cond={cond}&u0={u0}&v0={v0}&const={const}&func={func}&trig={trig}

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. Debe ir rodeado por corchetes y separado cada uno de sus elementos por comas. Un ejemplo sería $[u, v, u - v]$.
- **var1** (opcional): primera variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa u .
- **var2** (opcional): segunda variable de dependencia de la superficie. Por defecto se usa v .
- **dom_var1** (opcional): dominio de la primera variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **dom_var2** (opcional): dominio de la segunda variable de dependencia. Debe ser un intervalo abierto descrito de la forma (a, b) . Por defecto se usa el $(-5, 5)$.
- **cond** (opcional): condición de dominio de variables en forma de elipse. Si se introduce este input se ignoran los inputs `dom_var1` y `dom_var2` si los hubiera. Un ejemplo sería $a^2 + b^2 < 1$.
- **u0** (opcional): valor de la primera variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **v0** (opcional): valor de la segunda variable de dependencia de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.

- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u,v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.
- **trig**: flag que indica si se quiere hacer una simplificación de las funciones trigonométricas más profunda que tiene en cuenta los intervalos de las variables. Por defecto está desactivado.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.18.3. Envío de resultados en superficies implícitas

Como se ha explicado anteriormente, se tiene la opción de realizar una petición para obtener la teoría y algoritmos asociados o bien para calcular el vector normal tanto de forma genérico como en un punto.

En el caso en el que se quiera obtener la teoría, no se debe introducir la superficie. Se permiten constantes y funciones indefinidas.

Los *endpoints* disponibles son:

Análisis completo de una superficie implícita

Endpoint: `/imp_surf/description?superficie={superficie}&dom_x={dom_x}&dom_y={dom_y}&dom_z={dom_z}&x0={x0}&y0={y0}&z0={z0}&const={const}&func={func}`

Inputs:

- **superficie** (obligatorio): superficie que se quiere representar. La ecuación debe ser la igualada a cero (sin llegar a poner el igual). Un ejemplo es $x^2 + y^2 + z^2 - 1$, que sería una esfera.
- **x0** (opcional): valor de x de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **y0** (opcional): valor de y de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **z0** (opcional): valor de z de un punto de la superficie. Se usa si se quiere evaluar en ese punto.
- **const** (opcional): constante y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[r, \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas constantes como se desee.
- **func** (opcional): función indefinida y, opcionalmente, sus características (positivo, negativo, entero, no entero, par, impar). Se debe pasar en la forma $[f(u,v), \text{positive}, \text{odd}]$. Se pueden introducir tantas funciones como se desee.

Outputs: JSON con los pasos a seguir para obtener la solución

2.18.4. Ejemplos

2.18.4.1. Ejemplo de análisis completo de una superficie parametrizada en un punto general

Datos de ejercicio

Se quiere realizar un análisis completo de la superficie

$$\varphi(u, v) = (u \ v \ u^2)$$

en un punto genérico en el dominio $(-2, 2) \times (-2, 2)$.

Petición

/param_surf/description?superficie=[u,v,u^2]&dom_var1=(-2,2)&dom_var2=(-2,2)

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a realizar un análisis completo en el dominio $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = (u \ v \ u^2)$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = (1 \ 0 \ 2u)$$

Paso 2: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \ 1 \ 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (0 \ 0 \ 2)$$

Paso 4: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \ 0 \ 0)$$

Paso 6: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-2u \ 0 \ 1)$$

Paso 7: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$

Paso 8: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = \sqrt{4u^2 + 1}$$

Paso 9: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \left(-\frac{2u}{\sqrt{4u^2+1}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}} \right)$$

Paso 10: Cálculo del afín plano tangente: Aplicando su fórmula, el plano afín tangente es

$$u^2 = 2ux - z$$

Paso 11: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental es

$$[I] = \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 12: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental es

$$[II] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 13: Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su fórmula, la matriz de Weingarten es

$$[W] = \begin{pmatrix} \frac{2}{(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 14: Cálculo de las curvaturas principales: calculando los autovalores de la matriz de Weingarten, las curvaturas principales son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = \left(0 \quad \frac{2}{(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Paso 15: Cálculo del primer autovector: usando el primer autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_1 es

$$[W]_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 16: Cálculo del segundo autovector: usando el segundo autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_2 es

$$[W]_{\kappa_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollo del sistema

Paso 17: Cálculo de las direcciones principales: los autovectores calculados representan las coordenadas de las direcciones principales en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Por lo tanto se debe hacer un cambio a la base canónica.

Paso 18: Cálculo de la primera dirección principal: realizando un cambio de base la primera dirección principal es

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 19: Cálculo de la segunda dirección principal: realizando un cambio de base la segunda dirección principal es

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \end{pmatrix}$$

Paso 20: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss es

$$K = 0$$

Paso 21: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media es

$$H = \frac{1}{(4u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

2.18.4.2. Ejemplo de análisis completo de una superficie parametrizada en un punto concreto

Datos de ejercicio

Se quiere realizar un análisis completo de la superficie

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u) & v \end{pmatrix}$$

en el dominio $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$ y punto $\varphi(\pi, 0)$.

Petición

`/param_surf/description?superficie=[cos(u),sin(u),v] &dom_var1=(0,2*pi) &dom_var2=(-2,2) &u0=pi &v0=0 &trig=true`

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a realizar un análisis completo en el punto $\varphi(\pi, 0)$ de la superficie parametrizada

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) & \sin(u) & v \end{pmatrix}$$

Paso 1: Cálculo de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u es

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} -\sin(u) & \cos(u) & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a u : la derivada parcial respecto a u en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u(\pi, 0) = (0 \quad -1 \quad 0)$$

Paso 3: Cálculo de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v es

$$\varphi_v = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 4: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a v : la derivada parcial respecto a v en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_v(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Paso 5: Cálculo de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu es

$$\varphi_{uu} = (-\cos(u) \quad -\sin(u) \quad 0)$$

Paso 6: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uu : la derivada parcial respecto a uu en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uu}(\pi, 0) = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 7: Cálculo de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv es

$$\varphi_{uv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 8: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a uv : la derivada parcial respecto a uv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{uv}(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 9: Cálculo de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv es

$$\varphi_{vv} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 10: Sustitución en el punto de la derivada parcial respecto a vv : la derivada parcial respecto a vv en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_{vv}(\pi, 0) = (0 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 11: Cálculo del producto vectorial de las derivadas parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-1 \quad 0 \quad 0)$$

Paso 12: Comprobación de superficie regular: asumiendo que la superficie es suave, la superficie es regular ya que se cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-2, 2)$

Desarrollo del sistema

Paso 13: Cálculo de la norma del producto vectorial: la norma del producto vectorial de las derivadas parciales de primer orden en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$$

Paso 14: Aplicación de la fórmula del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$\vec{n} = (-1 \ 0 \ 0)$$

Paso 15: Cálculo del afín plano tangente: aplicando su fórmula, el plano afín tangente en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$x = -1$$

Paso 16: Cálculo de la primera forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la primera forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 17: Cálculo de la segunda forma fundamental: aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[II] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 18: Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su fórmula, la matriz de Weingarten en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[W] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 19: Cálculo de autovalores: calculando los autovalores de la matriz de Weingarten, se tiene que las direcciones principales en el punto $\varphi(\pi, 0)$ son

$$(\kappa_1, \kappa_2) = (0, -1)$$

Paso 20: Cálculo del primer autovector: usando el primer autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_1 en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[W]_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 21: Cálculo del segundo autovector: usando el segundo autovector, se tiene que el espacio propio asociado a κ_2 en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$[W]_{\kappa_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Paso 22: Cálculo de las direcciones principales: los autovectores calculados representan las coordenadas de las direcciones principales en la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$. Por lo tanto se debe hacer un cambio a la base canónica.

Paso 23: Cálculo de la primera dirección principal: realizando un cambio de base la primera dirección principal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 24: Cálculo de la segunda dirección principal: realizando un cambio de base la segunda dirección principal en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 25: Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su fórmula, la curvatura de Gauss en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$K = 0$$

Paso 26: Cálculo de la curvatura media: aplicando su fórmula, la curvatura media en el punto $\varphi(\pi, 0)$ es

$$H = -\frac{1}{2}$$

Paso 27: Comparación de curvaturas principales: ya que no se cumple que $\kappa_1 = \kappa_2$, el punto $\varphi(\pi, 0)$ no es umbílico

Paso 28: Clasificación del punto: ya que $\kappa_1 \kappa_2 = 0$ y $\kappa_1 \neq \kappa_2$, el punto $\varphi(\pi, 0)$ es un punto parabólico

Paso 29: Calcular las direcciones principales: buscando los vectores que cumplan que $II(\vec{w}, \vec{w}) = 0$ se tiene que las direcciones asintóticas son

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2.18.4.3. Ejemplo de cálculo de vector normal de una superficie implícita con constantes

Datos de ejercicio

Se quiere calcular el vector normal de la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

tal que $r > 0$.

Desarrollo del sistema

Petición

/imp_surf/description?superficie= $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - r^2$ &const=[r,positive]

Resultado

Paso 0: Enunciado: Se va a calcular el vector normal de la superficie implícita

$$-r^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Paso 1: Cálculo de la derivada respecto a x : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a x es

$$f_x(x, y, z) = 2x$$

Paso 2: Cálculo de la derivada respecto a y : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a y es

$$f_y(x, y, z) = 2y$$

Paso 3: Cálculo de la derivada respecto a z : la derivada de $f(x, y, z)$ respecto a z es

$$f_z(x, y, z) = 2z$$

Paso 4: Comprobar que es superficie de nivel: se trata de una superficie de nivel ya que el siguiente sistema no tiene solución real:

$$\begin{cases} -r^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Paso 5: Cálculo del vector gradiente: el vector gradiente es

$$\nabla f = (2x \quad 2y \quad 2z)$$

Paso 6: Cálculo del vector normal: aplicando su fórmula, el vector normal es

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

Paso 6: Cálculo del plano tangente: aplicando su fórmula, el plano tangente es

$$2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 = 2x_0^2 + 2y_0^2 + 2z_0^2$$

Capítulo 3

Resultados y conclusiones.

En este capítulo se analizan los resultados conseguidos con la realización de este Trabajo de Fin de Grado. Estos resultados se analizan desde tres enfoques: uno más visual como es el uso de la librería en la aplicación didáctica, otro desde el punto de vista académico y un último que se centra en las posibles mejoras que se pueden realizar en un futuro.

3.1. Funcionamiento de la aplicación

La API desarrollada durante este trabajo será la que se integre en la aplicación didáctica. Actualmente, esta integración ya ha comenzado: he desarrollado por completo toda la interfaz gráfica, quedando pendientes únicamente las conexiones, que se completarán en los próximos días con la colaboración del equipo del proyecto.

En la página web, al igual que en la API, se distinguirán dos módulos: uno para superficies parametrizadas y otro para superficies implícitas. En la imagen siguiente se puede observar la presentación de los módulos en la sección correspondiente a la asignatura.

Geometría Diferencial



Figura 3.1: Apartados de la aplicación didáctica

La estructura de cada una de las secciones se divide en tres partes: la sección inicial, el cuadro con las entradas de datos y la parte destinada a la presentación de resultados.

En la sección inicial se muestra el título del contenido actualmente seleccionado, la teoría asociada y un desplegable con el algoritmo utilizado. Esta sección obtiene toda la información de la API y, dado que las conexiones aún no están realizadas, actualmente muestra un mensaje de error.

A continuación, hay una barra de navegación que permite seleccionar los distintos módulos disponibles, junto con un cuadro donde el usuario introduce los datos. La interfaz se ha desarrollado de manera que los campos a rellenar se actualicen según las acciones del usuario. Por ejemplo, si se selecciona el módulo *Clasificación de un punto*, desaparecen los campos para definir constantes y funciones indefinidas. Si se selecciona la opción de un dominio en forma de elipse, los cuadros de entrada se actualizan para adaptarse al nuevo tipo de dominio. Al final del cuadro existe un botón para realizar los cálculos.

Una vez realizados los cálculos, la página web los mostrará a continuación. Sin embargo, dado que las conexiones todavía no están completadas, esta parte aún no está implementada.

Resultados y conclusiones.

Error

Error al cargar la información del contenido.

Algoritmo utilizado

$\square^2$ $\sqrt{\square}$ $\sqrt{\square}$ $\square/\square$ $\square/\square$ $\ln$ π sen cos tg

Elija el tipo de ejercicio que quiera resolver:

[Graficar](#) [Vector normal](#) [Plano tangente](#) [Primera Forma Fundamental](#) [Segunda Forma Fundamental](#) [Curvatura de Gauss](#) [Curvatura media](#) [Matriz de Weingarten](#) [Curvaturas principales](#) [Direcciones principales](#) [Calsificación de un punto](#) [Punto umbílico](#) [Direcciones asíntóticas](#) [Análisis completo](#)

Seleccione las variables de dependencia.

Primera variable u

Segunda variable v

Introduzca la superficie deseada, parametrizada como $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

$x(u,v)=$ u $y(u,v)=$ v $z(u,v)=$ $u+v$

Defina el dominio de las variables de dependencia.

☒ El dominio es un rectángulo ☐ El dominio es una elipse

Valor máximo y mínimo del eje u : -2 2

Valor máximo y mínimo del eje v : -2 2

Añada, si lo desea, constantes indefinidas:

Constante r

☐ Positiva ☐ Negativa ☐ Entera ☐ Par ☐ Impar

Añadir constante

Añada, si lo desea, funciones indefinidas:

Añadir función

Introduzca, si lo desea, un punto donde evaluar los resultados:

$(u_0, v_0) =$

Si no se define un punto, se evaluará en un punto genérico $\Phi(u,v)$.

Calcular

Figura 3.2: Entreda datos aplicación didactica

De igual manera se ha desarrollado la interfaz para el apartado de superficie implícitas.

Error

Error al cargar la información del contenido.

Algoritmo

Elija el tipo de ejercicio que quiera resolver:

Graficar
Vector normal
Plano tangente

Introduzca la superficie deseada en la forma $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: f(x,y,z)=0 \}$

$f(x,y,z)=$

Defina el dominio de las variables.

Valor máximo y mínimo del eje x:	-2	2
Valor máximo y mínimo del eje y:	-2	2
Valor máximo y mínimo del eje z:	-2	2

Elija el tipo de elementos extra que dibujar:

☐ Vector normal
☐ Plano tangente

Figura 3.3: Entreda datos aplicación didactica

3.2. Propuestas de aplicaciones en el aula

La aplicación didáctica va a suponer una gran mejora para aquellos que la usen en cualquier asignatura de las impartidas en la escuela y especialmente en Geometría Diferencial. En primer lugar, las representaciones gráficas serán un gran apoyo para el profesor o para el alumno que decide estudiar individualmente, en la mayoría de casos los alumnos comprenden mejor los conceptos si los pueden visualizar; en segundo lugar el hecho de poder generar paso a paso la solución de problema puede ayudar tanto a comenzar a realizar ejercicios durante el estudio de la asignatura, como a corregir a los ejercicios resueltos una vez se han afianzado más los conceptos. El hecho de poder generar paso a paso las respuestas de un ejercicio será de gran ayuda ya que uno de los principales problemas que los alumnos se encuentran en asignaturas matemáticas es la gran cantidad de ejercicios que tienen disponibles sin resolver. Esto muchas veces ocurre por falta de tiempo en clase para solucionar los problemas. Además, gracias a la aplicación didáctica, se podrán dedicar menos horas a la resolución mecánica de ejercicios para el profesor pueda centrarse más en asegurarse de que sus alumnos han comprendido realmente los conceptos y a resolver ejercicios menos mecánicos y más analíticos.

Resultados y conclusiones.

Por supuesto, la aplicación didáctica también se podrá usar para consultar la teoría y algoritmos que usados que no hayan entendido en clase.

3.3. Posibles mejoras de la librería desarrollada

Dado que se trata de un software con numerosas funcionalidades y una gran flexibilidad a la hora de definir superficies, es probable que existan fallos no detectados que se manifestarán cuando un mayor número de usuarios utilicen el sistema. Para minimizar la cantidad de errores, durante la implementación se han realizado diversas pruebas para cada una de las funcionalidades implementadas; en particular, se han llevado a cabo pruebas con ejercicios reales resueltos durante el desarrollo de la asignatura de mi promoción. Por lo tanto, el primer paso para mejorar el software sería aumentar el número de pruebas realizadas por diferentes usuarios, para abordar la corrección desde todas las perspectivas posibles.

Otra mejora posible sería unificar la manera en la que se realizan las distintas operaciones matemáticas (derivación, norma, etc.) con el resto de la aplicación, eliminando así la dependencia de la librería SymPy. Sin embargo, esta sería una acción delicada, ya que en este trabajo se utilizan operaciones con elementos como constantes y funciones que deben tenerse en cuenta para la simplificación.

También se podría considerar la implementación de un pequeño módulo de curvas sobre superficies, que relacione la sección de superficies desarrollada en este trabajo con la sección de curvas desarrollada por Adrián durante el curso pasado [1]. Adicionalmente, se podrían implementar otros elementos explicados durante la asignatura, como los símbolos de Christoffel.

Finalmente, una mejora no solo para la API, sino para toda la aplicación didáctica, sería ofrecer la opción de obtener los resultados en diferentes idiomas.

Capítulo 4

Análisis de impacto.

A nivel personal, la implementación completa de la API ha requerido una cantidad significativa de horas, durante las cuales he estado en constante contacto con los conceptos de la asignatura. Este proceso ha involucrado:

- **Revisión de Conocimientos:** Durante las primeras versiones de la implementación, tuve que referirme constantemente a la guía de la asignatura.
- **Búsqueda de Casos Especiales:** Identificar los límites de mis métodos me obligó a buscar y analizar casos irregulares y especiales.
- **Asesoramiento Continuo:** Las reuniones semanales con mi tutor, Juan Rojo, fueron cruciales para aclarar conceptos que no comprendía.

Como resultado, mis conocimientos sobre la asignatura de Geometría Diferencial se han incrementado significativamente.

Desde el punto de vista informático, este proyecto me ha permitido:

- **Mejora en Python:** He perfeccionado mis habilidades en Python, especialmente en el desarrollo de APIs y en el intercambio de información entre aplicaciones.
- **Dominio de SymPy:** He adquirido un conocimiento profundo de la librería SymPy, llegando a explorar los límites de sus capacidades según los manuales.
- **Representación en 3D:** He obtenido un sólido conocimiento en librerías de representación en 3D, trabajando con Matplotlib [10] y Mayavi [11] antes de optar por Plotly.

A nivel académico y tal como se describe en la sección de Aportaciones Académicas (3.2), este trabajo ha contribuido significativamente al Proyecto Calculadora, proporcionando una herramienta valiosa para los estudiantes de los grados de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid. Concretamente, el trabajo facilita:

- **Comprensión de Conceptos:** Ayuda a los estudiantes a entender tanto la teoría formal de la asignatura de Geometría Diferencial como su significado geométrico de una manera más visual.

-
- Verificación de Soluciones: Permite a los estudiantes verificar las soluciones de sus ejercicios.
 - Ejemplos Resueltos: Proporciona ejemplos resueltos paso a paso que pueden ser utilizados como punto de partida para otros ejercicios.

Por último, se va a relacionar el trabajo con los objetivos de desarrollo sostenible [12]. Los objetivos de desarrollo sostenible son una lista de 17 objetivos a cumplir para 2030 fomentados por las Naciones Unidas y que pretender acabar con la pobreza, proteger el planeta y asegurar la prosperidad para todos.

Este trabajo tiene como objetivo principal el punto 4, fomentando una educación de calidad ofreciendo herramientas tanto a profesores como estudiantes para un mejor desarrollo de la actividad educativa.

También cumple los puntos 13 y 15 de acción por el clima y vida de ecosistemas terrestres al haberse desarrolla el trabajo con equipos informáticos minimizando el gasto de papel.

Bibliografía

- [1] Adrián Sánchez Rodero, Juan Ángel Rojo Carulli, Héctor Barge Yañez, *Desarrollo de una Aplicación Didáctica sobre Geometría de Curvas en el Plano y en el Espacio*. Universidad Politécnica de Madrid, 2023.
- [2] Águeda Mata, Miguel Reyes, *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Fundación General de la Universidad Politécnica de Madrid, 2020.
- [3] Documentación de sympy. [Online]. Available: <https://docs.sympy.org/latest/index.html>
- [4] Git. [Online]. Available: <https://git-scm.com/>
- [5] Github. [Online]. Available: <https://github.com/>
- [6] Documentación de flask. [Online]. Available: <https://flask.palletsprojects.com/en/3.0.x/>
- [7] Codificación de caracteres en html. [Online]. Available: https://www.w3schools.com/tags/ref_urlencode.asp
- [8] Flasgger. easy swagger ui for your flask api. [Online]. Available: <https://github.com/flasgger/flasgger>
- [9] Postman. [Online]. Available: <https://www.postman.com/>
- [10] Documentación de matplotlib. [Online]. Available: <https://matplotlib.org/stable/users/index.html>
- [11] Documentación de mayavi. [Online]. Available: <https://docs.entthought.com/mayavi/mayavi/>
- [12] Objetivos y metas de desarrollo sostenible. [Online]. Available: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/>
- [13] Documentación de python. [Online]. Available: <https://docs.python.org/3.11/tutorial/index.html>
- [14] Documentación de plotly. [Online]. Available: <https://plotly.com/python/>
- [15] Documentación de tkinter. [Online]. Available: <https://docs.python.org/es/3/library/tkinter.html>
- [16] Correspondencia unicode de caracteres especiales. [Online]. Available: <https://symbl.cc/es/unicode-table/>

Anexos

Especificación de los métodos de la librería

Durante los inicios del desarrollo del código se implementaron todos los métodos de manera que se hiciesen los cálculos de manera independiente. Tras realizar pruebas se observó muchas de las funcionalidades implementadas son incrementales y dependen de resultados anteriores, por lo que en muchas ocasiones se repetían operaciones. Es por eso que se decidió cambiar el enfoque. En el momento en el que se inicia la solicitud y se han procesado y transformado los datos de entrada a objetos de sympy con los que trabajar, se crea un diccionario de Python donde se guardan todos los resultados. Un diccionario de Python es una estructura de datos similar a los JSON en los que se tienen pares de clave-valor, con la diferencia de que el valor puede ser cualquier objeto (en este caso se usan objetos de SymPy, desde números hasta matrices). La estructura del diccionario que se usa es la siguiente:

```
{
    'sup' : ...           #Parametrización de la superficie
    'u' : ...             #Primera variable de dependencia.
    'v' : ...             #Segunda variable de dependencia.
    'cond' : ...          #Condicion si el dominio tiene forma eliptica
    'dom_u' : ...         #Dominio de u
    'dom_v' : ...         #Dominio de v
    'u0' : ...            #Valor de u en un punto
    'v0' : ...            #Valor de v en un punto

    'du' : ...            #derivada de u
    'dv' : ...            #derivada de v
    'duu' : ...           #derivada de uu
    'duv' : ...           #derivada de uv
    'dvv' : ...           #derivada de vv
    'duXdv' : ...         #du producto vectorial dv
    'norma' : ...         #norma de duXdv
    'normal' : ...        #vector normal
    'E' : ...             #componente E de primera forma fundamental
    'F' : ...             #componente F de primera forma fundamental
    'G' : ...             #componente G de primera forma fundamental
    'e' : ...             #componente e de segunda forma fundamental
    'f' : ...             #componente f de segunda forma fundamental
    'g' : ...             #componente g de segunda forma fundamental
    'tangente' : ...      #Plano tangente general
    'curv_Gauss' : ...    #Curvatura de Gauss
}
```

```

'curv_media' : ...      #Curvatura media
'k1' : ...             #curvatura principal 1
'k2' : ...             #curvatura principal 2
'd1' : ...             #direccion principal 1
'd2' : ...             #direccion principal 2
'coord_d1' : ...       #coordenadas de direccion principal 1
'coord_d2' : ...       #coordenadas de direccion principal 2
'W' : ...              #Matriz de Weingarten

'du_pt' : ...           #derivada de u en pto
'dv_pt' : ...           #derivada de v en pto
'duu_pt' : ...          #derivada de uu en pto
'duv_pt' : ...          #derivada de uv en pto
'dvv_pt' : ...          #derivada de vv en pto
'duXdv_pt' : ...        #du producto vectorial dv en pto
'norma_pt' : ...        #norma de duXdv_pt en pto
'normal_pt' : ...       #vector normal en pto
'E_pt' : ...            #componente E de primera form fund en pto
'F_pt' : ...            #componente F de primera form fund en pto
'G_pt' : ...            #componente G de primera form fund en pto
'e_pt' : ...            #componente e de segunda form fund en pto
'f_pt' : ...            #componente f de segunda form fund en pto
'g_pt' : ...            #componente g de segunda form fund en pto
'tangente_pt' : ...     #Plano tangente general en pto
'curv_Gauss_pt' : ...   #Curvatura de Gauss en pto
'curv_media_pt' : ...   #Curvatura media en pto
'k1_pt' : ...           #curvatura principal 1 en pto
'k2_pt' : ...           #curvatura principal 2 en pto
'd1_pt' : ...           #direccion principal 1 en pto
'd2_pt' : ...           #direccion principal 2 en pto
'coord_d1_pt' : ...     #coordenadas de dir principal 1 en pto
'coord_d2_pt' : ...     #coordenadas de dir principal 2 en pto
'W_pt' : ...            #Matriz de Weingarten en pto
}

```

La estructura expuesta incluye todas las posibles claves que puede haber, si bien no están instanciadas si no se han realizados los cálculos anteriormente. De esta manera los métodos reciben como parámetro únicamente el diccionario y realiza únicamente el cálculo que le involucra, añadiéndolo al diccionario. Si necesita de otros resultados posteriores, llama al método correspondiente para que añada al diccionario los elementos que se necesiten.

La estructura anteriormente descrita corresponde con las superficies paramétrizadas, el caso de las superficies implícitas es análogo.

Esta manera de centralizar los cálculos facilita también el procesamiento y transformación a LaTeX de los resultados.

Módulo de superficies parametrizadas

- `def normal(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el vector normal.

- `def normal_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el vector normal en un punto.

- `def planoTangente(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el plano tangente.

- `def planoTangente_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el plano tangente en un punto.

- `def primeraFormaFundamental(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la primera forma fundamental.

- `def primeraFormaFundamental_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la primera forma fundamental en un punto.

- `def segundaFormaFundamental(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la segunda forma fundamental.

- `def segundaFormaFundamental_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la segunda forma fundamental en un punto.

- `def curvaturaGauss(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la curvatura de Gauss.

- `def curvaturaGauss_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la curvatura de Gauss en un punto.

- `def curvaturaMedia(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la curvatura media.

- `def curvaturaMedia_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la curvatura media en un punto.

- `def curvaturasPrincipales(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados las curvaturas principales.

- `def curvaturasPrincipales_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados las curvaturas principales en un punto.

- `def clasicoPt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la clasificación de un punto.

- `def weingarten(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la matriz de Weingarten.

- `def weingarten_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados la matriz de Weingarten en un punto.

- `def dirPrinc(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados las direcciones principales.

- `def dirPrinc_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados las direcciones principales en un punto.

- `def umbilico_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados si un punto es umbílico.

- `def dirAsin_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados las direcciones asintóticas en un punto.

- `def descripcion(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el análisis completo.

- `def descripccion_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el análisis completo en un punto. .

- `def sup_param(sup, u, v, dom_u=sp.Interval(-5,5),
↪ dom_v=sp.Interval(-5,5), fig=None, resolucion=100,
↪ titulo='Superficie', color=None):`

Método que devuelve la representación gráfica de una superficie. Se han definido por defecto ciertos valores que se pueden modificar.

- `def sup_param_cond_elipse(sup, u, v, a, b ,fig=None, resolucion=100,
↪ titulo='Superficie'):`

Método que devuelve la representación gráfica de una superficie con dominio en forma de elipse. Se han definido por defecto ciertos valores que se pueden modificar.

- `def param_desc_pt_uv(sup, u, v, u0, v0, dom_u=sp.Interval(-5,5),
↪ dom_v=sp.Interval(-5,5), fig=None, tangente=True, normal=True,
↪ dirs_principales=True, curvs_principales=True,
↪ dirs_asintoticas=True):`

Método que devuelve la representación gráfica de una superficie, junto con lo elementos que se indiquen. Se han definido por defecto ciertos valores que se pueden modificar.

Módulo de superficies implícita

- `def normal(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el vector normal.

- `def normal_pt(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el vector normal en un punto.

- `def tangente(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el plano tangente.

- `def descripcion(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el análisis completo.

- `def tangente_pt(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el plano tangente en un punto.

- `def descripcion_pt_uv(res : dict ={}) -> dict:`

Método que añade al diccionario de resultados el análisis completo en un punto.

- `def sup_imp(sup, x, y, z, dom_x=sp.Interval(-5,5),
↪ dom_y=sp.Interval(-5,5), dom_z=sp.Interval(-5,5), fig=None,
↪ color=None, titulo='Superficie implicita', resolucio=75):`

Método que devuelve la representación gráfica de una superficie. Se han definido por defecto ciertos valores que se pueden modificar.

- `def imp_desc_pt(f, x, y, z, x0, y0, z0, dom_x=sp.Interval(-5,5),
↪ dom_y=sp.Interval(-5,5), dom_z=sp.Interval(-5,5), tangente=True,
↪ normal=True, fig=None):`

Método que devuelve la representación gráfica de una superficie, junto con los elementos que se indiquen. Se han definido por defecto ciertos valores que se pueden modificar.

Resultados de las peticiones realizadas en los ejemplos

Ejemplo 2.6.4.1

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular el vector normal en  

      ↪ el dominio  $(u,v) \in (-2, 2) \times$   

      ↪  $\mathbb{R}$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}u & v & \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[1, 0, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u = \\left(\\begin{matrix}1 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  

      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[0, 1, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}0 & 1 & \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  

      ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  

      ↪ de primer orden es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 1\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_u \\times \\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  

      ↪ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  

      ↪ cumple que  $\\varphi_u \\times \\varphi_v \\neq 0$  para todo  

      ↪  $(u,v) \\in (-2, 2) \\times \\mathbb{R}$ ",
      "paso": ""
    }
  ]
}
```

```

    "pasoLatex": ""
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
    ↪ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
    ↪ primer orden es",
    "paso": "1",
    "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\|\\times\\|\\varphi_{v}\\|=1"
  },
  {
    "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
    ↪ aplicando su fórmula, el vector normal es",
    "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
    "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\right)"
  }
]
}

```

Ejemplo 2.6.4.2

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular el vector normal en
      ↪ el punto  $\\varphi(1,2)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}u & v & \\right)"
      ↪  $u^2 + v^2$ \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[1, 0, 2*u]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 2"
      ↪  $u$ \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
      ↪ respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el
      ↪ punto  $\\varphi(1,2)$  es",
      "paso": "Matrix([[1, 0, 2]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u(1,2)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 2"
      ↪  $2$ \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[0, 1, 2*v]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & 1 & 2"
      ↪  $v$ \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
      ↪ respecto a  $v$ : la derivada parcial respecto a  $v$  en el
      ↪ punto  $\\varphi(1,2)$  es",

```

```
"paso": "Matrix([[0, 1, 4]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{v}(1,2)=\\left(\\begin{matrix}0 & 1 & \\rightarrow 4\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
  → parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
  → de primer orden en el punto  $\\varphi(1,2)$  es",
  "paso": "Matrix([[-2, -4, 1]])",
  "pasoLatex":
  → "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}-2 & \\rightarrow -4 & 1\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  → la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  → cumple que  $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$  para todo
  →  $(u,v)\\in\\mathbb{R}\\times\\mathbb{R}$ ",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  → norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  → primer orden en el punto  $\\varphi(1,2)$  es",
  "paso": "sqrt(21)",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\| = \\sqrt{21}"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  → aplicando su fórmula, el vector normal en el punto
  →  $\\varphi(1,2)$  es",
  "paso": "Matrix([[-2*sqrt(21)/21, -4*sqrt(21)/21,
  → sqrt(21)/21]])",
  "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}-\\frac{2}{\\sqrt{21}} & -\\frac{4}{\\sqrt{21}} & \\frac{1}{\\sqrt{21}}\\end{matrix}\\right)"
}
]
}
```

Ejemplo 2.6.4.2

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular el vector normal en
      → el dominio  $(u,v) \\in (0, 2) \\times (0, 2)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}a u \\rightarrow \\cos(v) & a u \\sin(v) & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
  ],
}
```

```

    "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $u$: la
    ↪ derivada parcial respecto a $u$ es",
    "paso": "Matrix([[a*cos(v), a*sin(v), 0]])",
    "pasoLatex": "\\varphi_{u}=\\left(\\begin{matrix}a \\cos{\\left(v\\right)} & a \\sin{\\left(v\\right)} & 0\\end{matrix}\\right)",
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
    ↪ derivada parcial respecto a $v$ es",
    "paso": "Matrix([[-a*u*sin(v), a*u*cos(v), 0]])",
    "pasoLatex": "\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}-a u \\sin{\\left(v\\right)} & a u \\cos{\\left(v\\right)} & 0\\end{matrix}\\right)",
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
    ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
    ↪ de primer orden es",
    "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & a^2\\end{matrix}\\right)",
    "pasoLatex": "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & a^2\\end{matrix}\\right)",
  },
  {
    "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
    ↪ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
    ↪ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
    ↪ $(u,v)\\in\\left(0, 2\\right)\\times\\left(0, 2\\right)$",
    "paso": "",
    "pasoLatex": ""
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
    ↪ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
    ↪ primer orden es",
    "paso": "a**2*u",
    "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=a^2 u"
  },
  {
    "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
    ↪ aplicando su fórmula, el vector normal es",
    "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
    "pasoLatex": "\\vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 1\\end{matrix}\\right)"
  }
]
}

```

Ejemplo 2.6.4.4

```

{
  "pasos": [
    {

```

```
"descripcion": "Enunciado: Se va a calcular el vector normal de
↪ la superficie implicita",
"paso": "",
"pasoLatex": "- r^{2} + x^{2} + y^{2} + z^{2} = 0"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada respecto a $x$: la
↪ derivada de $f(x,y,z)$ respecto a $x$ es",
  "paso": "2*x",
  "pasoLatex": "f_x(x,y,z)=2 x"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada respecto a $y$: la
↪ derivada de $f(x,y,z)$ respecto a $y$ es",
  "paso": "2*y",
  "pasoLatex": "f_y(x,y,z)=2 y"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada respecto a $z$: la
↪ derivada de $f(x,y,z)$ respecto a $z$ es",
  "paso": "2*z",
  "pasoLatex": "f_z(x,y,z)=2 z"
},
{
  "descripcion": "Comprobar que es superficie de nivel: se trata de
↪ una superficie de nivel ya que el siguiente sistema no tiene
↪ solución real:",
  "paso": "",
  "pasoLatex": "\\left\\{ \\begin{array}{rcl} - r^{2} + x^{2} +
↪ y^{2} + z^{2} & = & 0 \\\\ 2 x & = & 0 \\\\ 2 y & = & 0 \\\\
↪ 2 z & = & 0 \\end{array} \\right."
},
{
  "descripcion": "Cálculo del vector gradiente: el vector gradiente
↪ es",
  "paso": "",
  "pasoLatex": "\\nabla f = \\left(\\begin{matrix}2 x & 2 y & 2
↪ z\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del vector normal: aplicando su fórmula,
↪ el vector normal es",
  "paso": "",
  "pasoLatex": "\\vec{n} =
↪ \\left(\\begin{matrix}\\frac{x}{\\sqrt{x^{2} + y^{2} +
↪ z^{2}}} & \\frac{y}{\\sqrt{x^{2} + y^{2} + z^{2}}} &
↪ \\frac{z}{\\sqrt{x^{2} + y^{2} +
↪ z^{2}}}\end{matrix}\\right)"
}
]
}
```

Ejemplo 2.7.4.1

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular el plano tangente en  

      ⇨ el dominio  $(u,v) \in (-2, 2) \times \mathbb{R}$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}u + v & u v \\ & u - v\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

      ⇨ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[1, v, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u = \\left(\\begin{matrix}1 & v & 1\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  

      ⇨ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[1, u, -1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}1 & u & -1\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  

      ⇨ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  

      ⇨ de primer orden es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}-u - v & 2 & u - v\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_u \\times \\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}-u - v & 2 & u - v\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  

      ⇨ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  

      ⇨ cumple que  $\\varphi_u \\times \\varphi_v \\neq 0$  para todo  

      ⇨  $(u,v) \in (-2, 2) \times \mathbb{R}$ ",
      "paso": "",
      "pasoLatex": ""
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del afín plano tangente: Aplicando su  

      ⇨ fórmula, el plano afín tangente es",
      "paso": "Eq(2*u*v, x*(u + v) - 2*y - z*(u - v))",
      "pasoLatex": "2 u v = x \\left(u + v\\right) - 2 y - z \\left(u - v\\right)"
    }
  ]
}

```


}

Ejemplo 2.7.4.3

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular el plano tangente en  

      ↪ el dominio  $(u,v) \in \left(0, 2\pi\right) \times$   

      ↪  $\left(0, 1\right)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}a \\cos{\\left(u\\right)} & a \\sin{\\left(u\\right)} & b \\sin{\\left(v\\right)} \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[ -a*sin(u), a*cos(u), 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u = \\left(\\begin{matrix}- a \\sin{\\left(u\\right)} & a \\cos{\\left(u\\right)} & 0 \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  

      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[0, 0, b*Derivative(g(v), v)])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}0 & 0 & b \\frac{d}{d v} g{\\left(v\\right)} \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  

      ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  

      ↪ de primer orden es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}a b \\cos{\\left(u\\right)} \\frac{d}{d v} g{\\left(v\\right)} & a b \\sin{\\left(u\\right)} \\frac{d}{d v} g{\\left(v\\right)} & 0 \\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_u \\times \\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}a b \\cos{\\left(u\\right)} \\frac{d}{d v} g{\\left(v\\right)} & a b \\sin{\\left(u\\right)} \\frac{d}{d v} g{\\left(v\\right)} & 0 \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  

      ↪ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  

      ↪ cumple que  $\\varphi_u \\times \\varphi_v \\neq 0$  para todo  

      ↪  $(u,v) \\in \\left(0, 2\\pi\\right) \\times \\left(0, 1\\right)$ ",
      "paso": "",
      "pasoLatex": ""
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del afín plano tangente: Aplicando su  

      ↪ fórmula, el plano afín tangente es",
    }
  ]
}

```

```
"paso": "Eq(a**2*b*Derivative(g(v), v), a*b*(x*cos(u) +  
  ↪ y*sin(u))*Derivative(g(v), v))",  
"pasoLatex": "a^{2} b \\frac{d}{d v} g{\\left(v \\right)} = a b  
  ↪ \\left(x \\cos{\\left(u \\right)} + y \\sin{\\left(u  
  ↪ \\right)}\\right) \\frac{d}{d v} g{\\left(v \\right)}"  
  }  
]  
}
```

Ejemplo 2.7.4.4

```
{  
  "pasos": [  
    {  
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular el plano tangente de  
        ↪ la superficie implicita",  
      "paso": "",  
      "pasoLatex": "- r^{2} + x^{2} + y^{2} + z^{2} = 0"  
    },  
    {  
      "descripcion": "Cálculo de la derivada respecto a $x$: la  
        ↪ derivada de $f(x,y,z)$ respecto a $x$ es",  
      "paso": "2*x",  
      "pasoLatex": "f_x(x,y,z)=2 x"  
    },  
    {  
      "descripcion": "Cálculo de la derivada respecto a $y$: la  
        ↪ derivada de $f(x,y,z)$ respecto a $y$ es",  
      "paso": "2*y",  
      "pasoLatex": "f_y(x,y,z)=2 y"  
    },  
    {  
      "descripcion": "Cálculo de la derivada respecto a $z$: la  
        ↪ derivada de $f(x,y,z)$ respecto a $z$ es",  
      "paso": "2*z",  
      "pasoLatex": "f_z(x,y,z)=2 z"  
    },  
    {  
      "descripcion": "Comprobar que es superficie de nivel: se trata de  
        ↪ una superficie de nivel ya que el siguiente sistema no tiene  
        ↪ solución real:",  
      "paso": "",  
      "pasoLatex": "\\left\\{ \\begin{array}{rcl} - r^{2} + x^{2} +  
        ↪ y^{2} + z^{2} & = & 0 \\\\ 2 x & = & 0 \\\\ 2 y & = & 0 \\\\  
        ↪ 2 z & = & 0 \\end{array} \\right."   
    },  
    {  
      "descripcion": "Cálculo del vector gradiente: el vector gradiente  
        ↪ es",  
      "paso": "",  
      "pasoLatex": "\\nabla f = \\left(\\begin{matrix}2 x & 2 y & 2  
        ↪ z\\end{matrix}\\right)"   
    },  
    {  
      "descripcion": "Cálculo del plano tangente: aplicando su fórmula,  
        ↪ el plano tangente es",  
    }  
  ]  
}
```

```

    "paso": "",
    "pasoLatex": "2 x x_{0} + 2 y y_{0} + 2 z z_{0} = 2 x_{0}^2 + 2
    ↪ y_{0}^2 + 2 z_{0}^2"
  }
]
}

```

Ejemplo 2.8.3.1

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la primera forma
      ↪ fundamental en el dominio $(u,v) \in \left(-2, 2\right)$
      ↪ $\times \left(-2, 2\right)$ de la superficie
      ↪ parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \left(\begin{matrix}u^2 + v &
      ↪ u - v^2\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $u$: la
      ↪ derivada parcial respecto a $u$ es",
      "paso": "Matrix([[2*u, 1, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u = \left(\begin{matrix}2 u & 1 &
      ↪ 1\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
      ↪ derivada parcial respecto a $v$ es",
      "paso": "Matrix([[1, -2*v, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v = \left(\begin{matrix}1 & -2 v &
      ↪ 0\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
      ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
      ↪ de primer orden es",
      "paso": "\\left(\begin{matrix}2 v & 1 & -4 u v -
      ↪ 1\end{matrix}\right)",
      "pasoLatex":
      ↪ "\\varphi_u \times \varphi_v = \left(\begin{matrix}2 v &
      ↪ 1 & -4 u v - 1\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
      ↪ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
      ↪ cumple que $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ para todo
      ↪ $(u,v) \in \left(-2, 2\right) \times \left(-2, 2\right)$",
      "paso": "",
      "pasoLatex": ""
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
      ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la
      ↪ primera forma fundamental es",

```

```
"paso": "(4*u**2 + 2, 2*u - 2*v, 4*v**2 + 1)",
"pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}4 u^{2} + 2 \\\n\\rightarrow & 2 u - 2 v \\\n\\rightarrow & 1\\end{matrix}\\right)"
}
```

Ejemplo 2.8.3.2

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la primera forma \n\\rightarrow fundamental en el punto $\\varphi(0,0)$ de la superficie \n\\rightarrow parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(s,t) = \\left(\\begin{matrix}s & s^{2} & \n\\rightarrow t\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $$s$: la \n\\rightarrow derivada parcial respecto a $$$ es",
      "paso": "Matrix([[1, 2*s, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{s}=\\left(\\begin{matrix}1 & 2 s & \n\\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial \n\\rightarrow respecto a $$s$: la derivada parcial respecto a $$s$ en el \n\\rightarrow punto $\\varphi(0,0)$ es",
      "paso": "Matrix([[1, 0, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{s}(0,0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & \n\\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $$t$: la \n\\rightarrow derivada parcial respecto a $$t$ es",
      "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{t}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \n\\rightarrow 1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial \n\\rightarrow respecto a $$t$: la derivada parcial respecto a $$t$ en el \n\\rightarrow punto $\\varphi(0,0)$ es",
      "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{t}(0,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \n\\rightarrow 1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas \n\\rightarrow parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales \n\\rightarrow de primer orden en el punto $\\varphi(0,0)$ es",
      "paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",

```

```

"pasoLatex":
  ↪ "\\varphi_{s}\\times\\varphi_{t}=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 \\end{matrix}\\right)"
  ↪ & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ↪ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ↪ cumple que $\\varphi_{s}\\times\\varphi_{t}\\neq 0$ para todo
  ↪ $(s,t)\\in\\left(-2, 2\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la
  ↪ primera forma fundamental en el punto $\\varphi(0,0)$ es",
  "paso": "(1, 0, 1)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 0 \\end{matrix}\\right)"
  ↪ & 1\\end{matrix}\\right)"
}
]
}

```

Ejemplo 2.8.3.3

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la primera forma
      ↪ fundamental en el dominio $(u,v) \\in \\left(-2, 2\\right)$
      ↪ $\\times \\left(0, 2 \\pi\\right)$ de la superficie
      ↪ parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}u \\end{matrix}"
      ↪ \\cos{\\left(v \\right)} & u \\sin{\\left(v \\right)} & a \\end{matrix}\\right)"
      ↪ v\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $u$: la
      ↪ derivada parcial respecto a $u$ es",
      "paso": "Matrix([[cos(v), sin(v), 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}\\cos{\\left(v"
      ↪ \\right)} & \\sin{\\left(v \\right)} & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
      ↪ derivada parcial respecto a $v$ es",
      "paso": "Matrix([[-u*sin(v), u*cos(v), a]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}-u \\end{matrix}"
      ↪ \\sin{\\left(v \\right)} & u \\cos{\\left(v \\right)} & a\\end{matrix}\\right)"
    }
  ],
}

```

```
"descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  
→ de primer orden es",  
"paso": "\\left(\\begin{matrix}a \\sin{\\left(v \\right)} & - a \\cos{\\left(v \\right)} & u\\end{matrix}\\right)",  
"pasoLatex":  
→ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}a \\sin{\\left(v \\right)} & - a \\cos{\\left(v \\right)} & u\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
"descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  
→ cumple que  $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$  para todo  
→  $(u,v)\\in\\left(-2, 2\\right)\\times\\left(0, 2\\right)$ ",  
"paso": "",  
"pasoLatex": ""  
},  
{  
"descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la  
→ primera forma fundamental es",  
"paso": "(1, 0, a**2 + u**2)",  
"pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 0 \\ & a^2 & + u^2\\end{matrix}\\right)"  
}  
]  
}
```

Ejemplo 2.9.3.1

```
{  
"pasos": [  
{  
"descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la primera forma  
→ fundamental en el dominio  $(u,v) \\in \\left(-2, 2\\right)\\times \\left(-2, 2\\right)$  de la superficie  
→ parametrizada",  
"paso": "",  
"pasoLatex": "\\varphi(u ,v) = \\left(\\begin{matrix}u^2 + v & u - v^2 & u\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $u$  es",  
"paso": "Matrix([[2*u, 1, 1]])",  
"pasoLatex": "\\varphi_{u}=\\left(\\begin{matrix}2 u & 1 & 1\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $v$  es",  
"paso": "Matrix([[1, -2*v, 0]])",  
"pasoLatex": "\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}1 & - 2 v & 0\\end{matrix}\\right)"  
}]
```

```

},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  

  ↳ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  

  ↳ de primer orden es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}2 v & 1 & - 4 u v - \\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex":
  ↳ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}2 v & \\end{matrix}\\right) & 1 & - 4 u v - 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  

  ↳ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  

  ↳ cumple que  $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$  para todo  

  ↳  $(u,v)\\in\\left(-2, 2\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$ ",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:  

  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la  

  ↳ primera forma fundamental es",
  "paso": "(4*u**2 + 2, 2*u - 2*v, 4*v**2 + 1)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}4 u^{2} + 2 \\end{matrix}\\right) & 2 u - 2 v \\\\ 2 u - 2 v & 4 v^{2} + \\end{matrix}\\right)"
}
]
}

```

Ejemplo 2.9.3.2

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la segunda forma  

      ↳ fundamental en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  de la superficie  

      ↳ parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u ,v) =  

      ↳ \\left(\\begin{matrix}\\cos{\\left(u \\right)} & \\end{matrix}\\right) & \\cos{\\left(v \\right)} & v\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

      ↳ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([-sin(u), 0, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{u}=\\left(\\begin{matrix}- \\sin{\\left(u \\right)} & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  

      ↳ respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el  

      ↳ punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",

```

```
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{u}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
  ↪ derivada parcial respecto a $v$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -sin(v), 1]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\rightarrow \\sin{\\left(v \\right)} & 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a $v$: la derivada parcial respecto a $v$ en el
  ↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{v}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $uu$ es",
  "paso": "Matrix([[-cos(u), 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-\\rightarrow \\cos{\\left(u \\right)} & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a $uu$: la derivada parcial respecto a $uu$ en el
  ↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[1, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
  ↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -cos(v), 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\rightarrow \\cos{\\left(v \\right)} & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
```

```

    "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
    ↪ respecto a $v_v$: la derivada parcial respecto a $v_v$ en el
    ↪ punto $\varphi(\pi,0)$ es",
    "paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
    "pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 \\
    ↪ & 0\\end{matrix}\\right)",
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
    ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
    ↪ de primer orden en el punto $\varphi(\pi,0)$ es",
    "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
    "pasoLatex":
    ↪ "\\varphi_u\\times\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\
    ↪ & 0\\end{matrix}\\right)",
  },
  {
    "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
    ↪ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
    ↪ cumple que $\varphi_u\\times\\varphi_v\\neq 0$ para todo
    ↪ $(u,v)\\in\\left(0, 2\\pi\\right)\\times\\left(-2, \\
    ↪ 2\\right)$",
    "paso": "",
    "pasoLatex": ""
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
    ↪ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
    ↪ primer orden en el punto $\varphi(\pi,0)$ es",
    "paso": "0",
    "pasoLatex": "\\|\\varphi_u\\times\\varphi_v\\|=0"
  },
  {
    "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
    ↪ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto
    ↪ $\varphi(\pi,0)$ es",
    "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
    "pasoLatex": "\\vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\
    ↪ 0\\end{matrix}\\right)",
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
    ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la
    ↪ segunda forma fundamental en el punto $\varphi(\pi,0)$ es",
    "paso": "(0, 0, 0)",
    "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\ \\
    ↪ 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
  }
]
}

```

Ejemplo 2.9.3.3

```

{
  "pasos": [

```

```
{
  "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la segunda forma
  → fundamental en el dominio  $(u,v) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, 2\pi\right)$  de la superficie parametrizada",
  "paso": "",
  "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}r \\cos\\left(u\\right) & r \\sin\\left(u\\right) \\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
  → derivada parcial respecto a  $u$  es",
  "paso": "Matrix([[-r*sin(u)*cos(v), -r*sin(u)*sin(v), r*cos(u)])",
  "pasoLatex": "\\varphi_u = \\left(\\begin{matrix}-r \\sin\\left(u\\right) & -r \\sin\\left(u\\right) & r \\cos\\left(u\\right) \\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
  → derivada parcial respecto a  $v$  es",
  "paso": "Matrix([[-r*sin(v)*cos(u), r*cos(u)*cos(v), 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}-r \\sin\\left(v\\right) & r \\cos\\left(v\\right) & 0 \\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :
  → la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}-r \\cos\\left(u\\right) & -r \\sin\\left(u\\right) \\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu} = \\left(\\begin{matrix}-r \\cos\\left(u\\right) & -r \\sin\\left(u\\right) \\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uv$ :
  → la derivada parcial respecto a  $uv$  es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}r \\sin\\left(u\\right) & -r \\sin\\left(u\\right) \\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv} = \\left(\\begin{matrix}r \\sin\\left(u\\right) & -r \\sin\\left(u\\right) \\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $vv$ :
  → la derivada parcial respecto a  $vv$  es",

```

```

"paso": "\\left(\\begin{matrix}- r \\cos(\\left(u \\right)) \\rightarrow \\cos(\\left(v \\right)) & - r \\sin(\\left(v \\right)) \\rightarrow \\cos(\\left(u \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{\\mathbf{v}}=\\left(\\begin{matrix}- r \\rightarrow \\cos(\\left(u \\right)) \\cos(\\left(v \\right)) & - r \\rightarrow \\sin(\\left(v \\right)) \\cos(\\left(u \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
→ de primer orden es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}- r^2 \\cos^2(\\left(u \\right)) \\cos(\\left(v \\right)) & - r^2 \\sin(\\left(v \\right)) \\cos^2(\\left(u \\right)) & - \\frac{r^2}{\\sin(\\left(2 u \\right))}\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex":
→ "\\varphi_{\\mathbf{u}}\\times\\varphi_{\\mathbf{v}}=\\left(\\begin{matrix}- r^2 \\cos^2(\\left(u \\right)) \\cos(\\left(v \\right)) & - r^2 \\sin(\\left(v \\right)) \\cos^2(\\left(u \\right)) & - \\frac{r^2}{\\sin(\\left(2 u \\right))}\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
→ cumple que $\\varphi_{\\mathbf{u}}\\times\\varphi_{\\mathbf{v}}\\neq 0$ para todo
→ $(u,v)\\in\\left(-\\frac{\\pi}{2},\\frac{\\pi}{2}\\right)\\times\\left(0,2\\pi\\right)$",
"paso": "",
"pasoLatex": ""
},
{
"descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
→ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
→ primer orden es",
"paso": "r**2*cos(u)",
"pasoLatex": "\\|\\varphi_{\\mathbf{u}}\\times\\varphi_{\\mathbf{v}}\\|=r^2 \\rightarrow \\cos(\\left(u \\right))"
},
{
"descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
→ aplicando su fórmula, el vector normal es",
"paso": "Matrix([[ -cos(u)*cos(v), -sin(v)*cos(u), -sin(u) ]])",
"pasoLatex": "\\vec{n}=\\left(\\begin{matrix}- \\cos(\\left(u \\right)) \\cos(\\left(v \\right)) & - \\sin(\\left(v \\right)) \\cos(\\left(u \\right)) & - \\sin(\\left(u \\right))\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la
→ segunda forma fundamental es",
"paso": "(r, 0, r*cos(u)**2)",
"pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}r & 0 & 0 \\rightarrow 0 & r \\cos^2(\\left(u \\right))\\end{matrix}\\right)"
}

```

```
]
}
```

Ejemplo 2.10.3.1

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se van a calcular la matriz de
      ↪ Weingarten en el dominio  $(u,v) \in (-2, 2)$ 
      ↪  $\times (-2, 2)$  de la superficie
      ↪ parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}u^2 + v & \\right) \\rightarrow u - v^2 & u\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[2*u, 1, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u = \\left(\\begin{matrix}2u & 1 & \\right) \\rightarrow 1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[1, -2*v, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}1 & -2v & \\right) \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :
      ↪ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}2 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uu} = \\left(\\begin{matrix}2 & 0 & \\right) \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uv$ :
      ↪ la derivada parcial respecto a  $uv$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uv} = \\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\right) \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $vv$ :
      ↪ la derivada parcial respecto a  $vv$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & -2 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{vv} = \\left(\\begin{matrix}0 & -2 & \\right) \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
      ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
      ↪ de primer orden es",
    }
  ]
}
```

```

"paso": "\\left(\\begin{matrix}2 v & 1 & - 4 u v - \\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex":
  ↳ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}2 v & \\end{matrix}\\right)
  ↳ 1 & - 4 u v - 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ↳ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ↳ cumple que  $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$  para todo
  ↳  $(u,v)\\in\\left(-2, 2\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$ ",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ↳ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ↳ primer orden es",
  "paso": "sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1)",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\| = \\sqrt{4
  ↳ v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  ↳ aplicando su fórmula, el vector normal es",
  "paso": "Matrix([[2*v/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1),
  ↳ 1/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1), (-4*u*v - 1)/sqrt(4*v**2
  ↳ + (4*u*v + 1)**2 + 1)])",
  "pasoLatex": "\\vec{n}=\\left(\\begin{matrix}\\frac{2 v}{\\sqrt{4
  ↳ v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}} & \\frac{1}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}} \\& \\frac{- 4 u v - 1}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}}\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ primera forma fundamental es",
  "paso": "(4*u**2 + 2, 2*u - 2*v, 4*v**2 + 1)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}4 u^{2} + 2
  ↳ & 2 u - 2 v & \\ 2 u - 2 v & 4 v^{2} + \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ segunda forma fundamental es",
  "paso": "(4*v/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1), 0,
  ↳ -2/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1))",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}\\frac{4
  ↳ v}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}} & 0 \\& \\frac{0}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}}\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su
  ↳ fórmula, la matriz de Weingarten es",

```

```
"paso": "Matrix([[sqrt(2)*v*(4*v**2 + 1)/(8*u**2*v**2 + 4*u*v +  
→ 2*v**2 + 1)**(3/2), sqrt(2)*(u - v)/(8*u**2*v**2 + 4*u*v +  
→ 2*v**2 + 1)**(3/2)], [2*sqrt(2)*v*(-u + v)/(8*u**2*v**2 +  
→ 4*u*v + 2*v**2 + 1)**(3/2), sqrt(2)*(-2*u**2 -  
→ 1)/(8*u**2*v**2 + 4*u*v + 2*v**2 + 1)**(3/2)])",  
"pasoLatex":  
→ "\\left[W\\right]=\\left(\\begin{matrix}\\frac{\\sqrt{2}}{v  
→ \\left(4 v^2 + 1\\right)}\\frac{\\left(8 u^2 v^2 + 4 u v + 2  
→ v^2 + 1\\right)^{\\frac{3}{2}}}{\\sqrt{2}} & \\frac{\\sqrt{2}}{\\left(u  
→ - v\\right)}\\frac{\\left(8 u^2 v^2 + 4 u v + 2 v^2 +  
→ 1\\right)^{\\frac{3}{2}}}{\\sqrt{2}} \\frac{2 \\sqrt{2}}{v} \\left(- u  
→ + v\\right)\\frac{\\left(8 u^2 v^2 + 4 u v + 2 v^2 +  
→ 1\\right)^{\\frac{3}{2}}}{\\sqrt{2}} & \\frac{\\sqrt{2}}{\\left(- 2 u^2  
→ - 1\\right)}\\frac{\\left(8 u^2 v^2 + 4 u v + 2 v^2 +  
→ 1\\right)^{\\frac{3}{2}}}{\\sqrt{2}}\\end{matrix}\\right)"  
}  
]  
}
```

Ejemplo 2.10.3.2

```
{  
  "pasos": [  
    {  
      "descripcion": "Enunciado: Se van a calcular la matriz de  
→ Weingarten en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  de la superficie  
→ parametrizada",  
      "paso": "",  
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) =  
→ \\left(\\begin{matrix}\\cos(\\left(u \\right)) &  
→ \\cos(\\left(v \\right)) & v\\end{matrix}\\right)"  
    },  
    {  
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $u$  es",  
      "paso": "Matrix([-sin(u), 0, 0])",  
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}- \\sin(\\left(u  
→ \\right)) & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"  
    },  
    {  
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  
→ respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el  
→ punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",  
      "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",  
      "pasoLatex": "\\varphi_u(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  
→ 0\\end{matrix}\\right)"  
    },  
    {  
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $v$  es",  
      "paso": "Matrix([0, -sin(v), 1])",  
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & -  
→ \\sin(\\left(v \\right)) & 1\\end{matrix}\\right)"  
    }  
  ],  
}
```

```

"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
→ respecto a $v$: la derivada parcial respecto a $v$ en el
→ punto $\varphi(\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{v}(\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:
→ la derivada parcial respecto a $uu$ es",
"paso": "Matrix([[-cos(u), 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-\\cos(u) & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
→ respecto a $uu$: la derivada parcial respecto a $uu$ en el
→ punto $\varphi(\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[1, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uu}(\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
→ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
→ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
→ punto $\varphi(\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
→ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
"paso": "Matrix([[0, -cos(v), 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\cos(v) & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
→ respecto a $vv$: la derivada parcial respecto a $vv$ en el
→ punto $\varphi(\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
→ de primer orden en el punto $\varphi(\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",

```

```
"pasoLatex":
  ↳ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ↳ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ↳ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
  ↳ $(u,v)\\in\\left(0, 2 \\pi\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ↳ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ↳ primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "0",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=0"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  ↳ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto
  ↳ $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([0, 0, 0])",
  "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0 \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ primera forma fundamental en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "(0, 0, 1)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0 \\end{matrix}\\right) \\begin{matrix} 0 \\end{matrix} \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ segunda forma fundamental en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "(0, 0, 0)",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0 \\end{matrix}\\right) \\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su
  ↳ fórmula, la matriz de Weingarten en el punto
  ↳ $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([0, 0], [0, 0])",
  "pasoLatex": "\\left[W\\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\end{matrix}\\right) \\begin{matrix} 0 & 0 \\end{matrix}\\right)"
}
]
}
```

Ejemplo 2.10.3.3

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se van a calcular la matriz de
      ↪ Weingarten en el dominio  $(u,v) \in \left(0, 2\pi\right)$ 
      ↪  $\times \left(0, 1\right)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}a
      ↪ \\cos\\left(u\\right) & a \\sin\\left(u\\right) &
      ↪ f\\left(u\\right)\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([-a*sin(u), a*cos(u), Derivative(f(u), u)])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}- a
      ↪ \\sin\\left(u\\right) & a \\cos\\left(u\\right) &
      ↪ \\frac{d}{d u} f\\left(u\\right)\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
      ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :
      ↪ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}- a \\cos\\left(u\\right) & - a
      ↪ \\sin\\left(u\\right) & \\frac{d^2}{d u^2} f\\left(u
      ↪ \\right)\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}- a
      ↪ \\cos\\left(u\\right) & - a \\sin\\left(u\\right) &
      ↪ \\frac{d^2}{d u^2} f\\left(u
      ↪ \\right)\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uv$ :
      ↪ la derivada parcial respecto a  $uv$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
      ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $vv$ :
      ↪ la derivada parcial respecto a  $vv$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
      ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
      ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
      ↪ de primer orden es",
    }
  ]
}

```

```
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex":
  ⇨ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0
  ⇨ & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ⇨ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ⇨ cumple que  $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$  para todo
  ⇨  $(u,v)\\in\\left(0, 2 \\pi\\right)\\times\\left(0,
  ⇨ 1\\right)$ ",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ⇨ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ⇨ primer orden es",
  "paso": "0",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=0"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  ⇨ aplicando su fórmula, el vector normal es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
  ⇨ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ⇨ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ⇨ primera forma fundamental es",
  "paso": "(a**2 + Derivative(f(u), u)**2, 0, 0)",
  "pasoLatex": "\\left[ I \\right]=\\left(\\begin{matrix}a^{2} +
  ⇨ \\left(\\frac{d}{d u} f\\left(u \\right)\\right)^{2} & 0
  ⇨ \\ \\ 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ⇨ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ⇨ segunda forma fundamental es",
  "paso": "(0, 0, 0)",
  "pasoLatex": "\\left[ II \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\ \\
  ⇨ 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su
  ⇨ fórmula, la matriz de Weingarten es",
  "paso": "Matrix([[0, 0], [0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\left[ W \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\ \\ 0 &
  ⇨ 0\\end{matrix}\\right)"
}
]
}
```

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se van a calcular las curvaturas  

      ↪ principales en el dominio  $(u,v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$  de la superficie  

      ↪ parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u, v) = \\left(\\begin{matrix}u^2 + v & u - v^2\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $u$: la  

      ↪ derivada parcial respecto a $u$ es",
      "paso": "Matrix([[2*u, 1, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u = \\left(\\begin{matrix}2 u & 1 & 1\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la  

      ↪ derivada parcial respecto a $v$ es",
      "paso": "Matrix([[1, -2*v, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}1 & -2 v & 0\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:  

      ↪ la derivada parcial respecto a $uu$ es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}2 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uu} = \\left(\\begin{matrix}2 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:  

      ↪ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uv} = \\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:  

      ↪ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & -2 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{vv} = \\left(\\begin{matrix}0 & -2 & 0\\end{matrix}\\right)",
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  

      ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  

      ↪ de primer orden es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}2 v & 1 & -4 u v - 1\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_u \\times \\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}2 v & 1 & -4 u v - 1\\end{matrix}\\right)"
    }
  ]
}

```

```
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ↳ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ↳ cumple que  $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$  para todo
  ↳  $(u,v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$ ",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ↳ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ↳ primer orden es",
  "paso": "sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1)",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_u \\times \\varphi_v\\| = \\sqrt{4
  ↳ v^2 + \\left(4 u v + 1\\right)^2 + 1}"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  ↳ aplicando su fórmula, el vector normal es",
  "paso": "Matrix([[2*v/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1),
  ↳ 1/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1), (-4*u*v - 1)/sqrt(4*v**2
  ↳ + (4*u*v + 1)**2 + 1)])",
  "pasoLatex": "\\vec{n} = \\left(\\begin{matrix} \\frac{2 v}{\\sqrt{4
  ↳ v^2 + \\left(4 u v + 1\\right)^2 + 1}} &
  ↳ \\frac{1}{\\sqrt{4 v^2 + \\left(4 u v + 1\\right)^2 + 1}} \\
  ↳ & \\frac{-4 u v - 1}{\\sqrt{4 v^2 + \\left(4 u v +
  ↳ 1\\right)^2 + 1}} \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ primera forma fundamental es",
  "paso": "(4*u**2 + 2, 2*u - 2*v, 4*v**2 + 1)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right] = \\left(\\begin{matrix} 4 u^2 + 2
  ↳ & 2 u - 2 v & 2 u - 2 v & 4 v^2 +
  ↳ 1 \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ segunda forma fundamental es",
  "paso": "(4*v/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1), 0,
  ↳ -2/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1))",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right] = \\left(\\begin{matrix} \\frac{4
  ↳ v}{\\sqrt{4 v^2 + \\left(4 u v + 1\\right)^2 + 1}} & 0
  ↳ & 0 & - \\frac{2}{\\sqrt{4 v^2 + \\left(4 u v +
  ↳ 1\\right)^2 + 1}} \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su
  ↳ fórmula, la curvatura de Gauss es",
  "paso": "4*v/((2*(u - v)**2 - (2*u**2 + 1)*(4*v**2 + 1))*(4*v**2
  ↳ + (4*u*v + 1)**2 + 1))",
  "pasoLatex": "K = \\frac{4 v}{\\left(2 \\left(u - v\\right)^2 -
  ↳ \\left(2 u^2 + 1\\right) \\left(4 v^2 + 1\\right)\\right)
  ↳ \\left(4 v^2 + \\left(4 u v + 1\\right)^2 + 1\\right)}"
```

```

},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su
  ↪ fórmula, la curvatura media es",
  "paso": "sqrt(2)*(-2*u**2 + 4*v**3 + v - 1)/(2*(8*u**2*v**2 +
  ↪ 4*u*v + 2*v**2 + 1)**(3/2))",
  "pasoLatex": "H=\\frac{\\sqrt{2}}{2} \\left( - 2 u^{2} + 4 v^{3} + v -
  ↪ 1 \\right) \\sqrt[3]{8 u^{2} v^{2} + 4 u v + 2 v^{2} +
  ↪ 1 \\right)^{\\frac{3}{2}}}"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de las curvaturas principales: aplicando
  ↪ su fórmula, las curvaturas principales son",
  "paso": "(sqrt(2)*(sqrt(-8*v/(2*(u - v)**2 - (2*u**2 + 1)*(4*v**2
  ↪ + 1)) + (4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1)*(-2*u**2 + 4*v**3 + v -
  ↪ 1)**2/(8*u**2*v**2 + 4*u*v + 2*v**2 + 1)**3)*(8*u**2*v**2 +
  ↪ 4*u*v + 2*v**2 + 1)**(3/2) + sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 +
  ↪ 1)*(-2*u**2 + 4*v**3 + v - 1))/(2*sqrt(4*v**2 + (4*u*v +
  ↪ 1)**2 + 1)*(8*u**2*v**2 + 4*u*v + 2*v**2 + 1)**(3/2))),
  ↪ sqrt(2)*(-sqrt(-8*v/(2*(u - v)**2 - (2*u**2 + 1)*(4*v**2 +
  ↪ 1)) + (4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1)*(-2*u**2 + 4*v**3 + v -
  ↪ 1)**2/(8*u**2*v**2 + 4*u*v + 2*v**2 + 1)**3)*(8*u**2*v**2 +
  ↪ 4*u*v + 2*v**2 + 1)**(3/2) + sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 +
  ↪ 1)*(-2*u**2 + 4*v**3 + v - 1))/(2*sqrt(4*v**2 + (4*u*v +
  ↪ 1)**2 + 1)*(8*u**2*v**2 + 4*u*v + 2*v**2 + 1)**(3/2)))",
  "pasoLatex": "(\\kappa_1,
  ↪ \\kappa_2)=\\left(\\begin{matrix}\\frac{\\sqrt{2}}{2} \\left( - \\frac{8 v}{2 \\left( u - v \\right)^{2} -
  ↪ \\left( 2 u^{2} + 1 \\right) \\left( 4 v^{2} + 1 \\right) \\right) +
  ↪ \\frac{\\left( 4 v^{2} + \\left( 4 u v + 1 \\right)^{2} +
  ↪ 1 \\right) \\left( - 2 u^{2} + 4 v^{3} + v -
  ↪ 1 \\right)^{2}}{\\left( 8 u^{2} v^{2} + 4 u v + 2 v^{2} +
  ↪ 1 \\right)^{3}} + \\sqrt{4 v^{2} + \\left( 4 u v +
  ↪ 1 \\right)^{2} + 1} \\left( - 2 u^{2} + 4 v^{3} + v -
  ↪ 1 \\right) \\sqrt[3]{8 u^{2} v^{2} + 4 u v + 2 v^{2} +
  ↪ 1 \\right)^{\\frac{3}{2}}} & \\frac{\\sqrt{2}}{2} \\left( -
  ↪ \\sqrt{- \\frac{8 v}{2 \\left( u - v \\right)^{2} - \\left( 2
  ↪ u^{2} + 1 \\right) \\left( 4 v^{2} + 1 \\right) \\right) +
  ↪ \\frac{\\left( 4 v^{2} + \\left( 4 u v + 1 \\right)^{2} +
  ↪ 1 \\right) \\left( - 2 u^{2} + 4 v^{3} + v -
  ↪ 1 \\right)^{2}}{\\left( 8 u^{2} v^{2} + 4 u v + 2 v^{2} +
  ↪ 1 \\right)^{3}} + \\sqrt{4 v^{2} + \\left( 4 u v +
  ↪ 1 \\right)^{2} + 1} \\left( 8 u^{2} v^{2} + 4 u v + 2 v^{2} +
  ↪ 1 \\right)^{\\frac{3}{2}}} \\end{matrix} \\right)"
}
]
}

```

Ejemplo 2.11.3.2

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se van a calcular las curvaturas  
→ principales en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  de la superficie  
→ parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\varphi(u, v) =  
→ \left(\begin{matrix}\cos(u) \\ \cos(v) \\ v\end{matrix}\right) &  
→ \cos(v) & v\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([-sin(u), 0, 0])",
      "pasoLatex": "\varphi_u = \left(\begin{matrix}-\sin(u) \\ 0 \\ 0\end{matrix}\right) &  
→ \sin(u) & 0 & 0\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  
→ respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el  
→ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([0, 0, 0])",
      "pasoLatex": "\varphi_u(\pi, 0) = \left(\begin{matrix}0 \\ 0 \\ 0\end{matrix}\right) &  
→ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([0, -sin(v), 1])",
      "pasoLatex": "\varphi_v = \left(\begin{matrix}0 \\ -\sin(v) \\ 1\end{matrix}\right) &  
→ \sin(v) & 1\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  
→ respecto a  $v$ : la derivada parcial respecto a  $v$  en el  
→ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([0, 0, 1])",
      "pasoLatex": "\varphi_v(\pi, 0) = \left(\begin{matrix}0 \\ 0 \\ 1\end{matrix}\right) &  
→ 1\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :  
→ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
      "paso": "Matrix([-cos(u), 0, 0])",
      "pasoLatex": "\varphi_{uu} = \left(\begin{matrix}-\cos(u) \\ 0 \\ 0\end{matrix}\right) &  
→ \cos(u) & 0 & 0\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  
→ respecto a  $uu$ : la derivada parcial respecto a  $uu$  en el  
→ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([1, 0, 0])",
      "pasoLatex": "\varphi_{uu}(\pi, 0) = \left(\begin{matrix}1 \\ 0 \\ 0\end{matrix}\right) &  
→ 1 & 0 & 0\end{matrix}\right)"
    }
  ]
}
```

```

},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
  ⇨ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ⇨ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
  ⇨ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
  ⇨ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -cos(v), 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\cos(\\left(v \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ⇨ respecto a $vv$: la derivada parcial respecto a $vv$ en el
  ⇨ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
  ⇨ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
  ⇨ de primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex":
    ⇨ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
    ⇨ "& 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ⇨ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ⇨ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
  ⇨ $(u,v)\\in\\left(0, 2 \\pi\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ⇨ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ⇨ primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "0",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=0"
},
{

```

```
"descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
→ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto
→  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la
→ primera forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "(0, 0, 1)",
"pasoLatex": "\\left[ I \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right) \\begin{matrix} 0 \\end{matrix} & 1 \\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la
→ segunda forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "(0, 0, 0)",
"pasoLatex": "\\left[ II \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right) \\begin{matrix} 0 & 0 & \\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su
→ fórmula, la curvatura de Gauss en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "nan",
"pasoLatex": "K=\\text{NaN}"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su
→ fórmula, la curvatura media en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "nan",
"pasoLatex": "H=\\text{NaN}"
},
{
"descripcion": "Cálculo de las curvaturas principales: aplicando
→ su fórmula, las curvaturas principales en el punto
→  $\varphi(\pi, 0)$  son",
"paso": "(nan, nan)",
"pasoLatex": "(\\kappa_1, \\kappa_2)=\\left(\\begin{matrix}\\text{NaN} , & \\text{NaN}\\end{matrix}\\right)"
}
]
}
```

Ejemplo 2.11.3.3

```
{
"pasos": [
{
```

```

"descripcion": "Enunciado: Se van a calcular las curvaturas
→ principales en el dominio  $(u,v) \in \left(0, 2\right. \\ \left.\pi\right) \times \left(0, 1\right)$  de la superficie
→ parametrizada",
"paso": "",
"pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}a \\cos\\left(u\\right) & a \\sin\\left(u\\right) & v\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
→ derivada parcial respecto a  $u$  es",
"paso": "Matrix([-a*sin(u), a*cos(u), 0])",
"pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}-a \\sin\\left(u\\right) & a \\cos\\left(u\\right) & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
→ derivada parcial respecto a  $v$  es",
"paso": "Matrix([0, 0, 1])",
"pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 1\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :
→ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}-a \\cos\\left(u\\right) & -a \\sin\\left(u\\right) & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-a \\cos\\left(u\\right) & -a \\sin\\left(u\\right) & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uv$ :
→ la derivada parcial respecto a  $uv$  es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $vv$ :
→ la derivada parcial respecto a  $vv$  es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
→ de primer orden es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}a \\cos\\left(u\\right) & a \\sin\\left(u\\right) & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_u\\times\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}a \\cos\\left(u\\right) & a \\sin\\left(u\\right) & 0\\end{matrix}\\right)"
}

```

```
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ↳ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ↳ cumple que  $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$  para todo
  ↳  $(u,v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$ ",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ↳ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ↳ primer orden es",
  "paso": "a",
  "pasoLatex": " $|\varphi_u \times \varphi_v| = a$ "
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  ↳ aplicando su fórmula, el vector normal es",
  "paso": "Matrix([[cos(u), sin(u), 0]])",
  "pasoLatex": " $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$ "
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ primera forma fundamental es",
  "paso": "(a**2, 0, 1)",
  "pasoLatex": " $I = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ "
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ segunda forma fundamental es",
  "paso": "(-a, 0, 0)",
  "pasoLatex": " $II = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ "
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su
  ↳ fórmula, la curvatura de Gauss es",
  "paso": "0",
  "pasoLatex": "K=0"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su
  ↳ fórmula, la curvatura media es",
  "paso": "-1/(2*a)",
  "pasoLatex": " $H = -\frac{1}{2a}$ "
},
{
  "descripcion": "Cálculo de las curvaturas principales: aplicando
  ↳ su fórmula, las curvaturas principales son",
  "paso": "(0, -1/a)",
```

```

    "pasoLatex": "(\kappa_1, \kappa_2)=\left(\begin{matrix}0 & - \\ \frac{1}{a}\end{matrix}\right)"
  }
]
}

```

Ejemplo 2.12.3.1

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se van a calcular las direcciones  

        ↪ principales en el dominio  $(u,v) \in (-2, 2)$   

        ↪  $\times (-2, 2)$  de la superficie  

        ↪ parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\varphi(u, v) = \left(\begin{matrix}u & v & \\ u^2\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

        ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[1, 0, 2*u]])",
      "pasoLatex": "\varphi_u = \left(\begin{matrix}1 & 0 & 2 \\ u\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  

        ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[0, 1, 0]])",
      "pasoLatex": "\varphi_v = \left(\begin{matrix}0 & 1 & \\ 0\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :  

        ↪ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
      "paso": "\left(\begin{matrix}0 & 0 & 2\end{matrix}\right)",
      "pasoLatex": "\varphi_{uu} = \left(\begin{matrix}0 & 0 & \\ 2\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uv$ :  

        ↪ la derivada parcial respecto a  $uv$  es",
      "paso": "\left(\begin{matrix}0 & 0 & 0\end{matrix}\right)",
      "pasoLatex": "\varphi_{uv} = \left(\begin{matrix}0 & 0 & \\ 0\end{matrix}\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $vv$ :  

        ↪ la derivada parcial respecto a  $vv$  es",
      "paso": "\left(\begin{matrix}0 & 0 & 0\end{matrix}\right)",
      "pasoLatex": "\varphi_{vv} = \left(\begin{matrix}0 & 0 & \\ 0\end{matrix}\right)"
    }
  ]
}

```

```
"descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  
→ de primer orden es",  
"paso": "\\left(\\begin{matrix}- 2 u & 0 & \\end{matrix}\\right)",  
"pasoLatex":  
→ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}- 2 u  
→ & 0 & 1\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
"descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  
→ cumple que  $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$  para todo  
→  $(u,v)\\in\\left(-2, 2\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$ ",  
"paso": "",  
"pasoLatex": ""  
},  
{  
"descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la  
→ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de  
→ primer orden es",  
"paso": "sqrt(4*u**2 + 1)",  
"pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=\\sqrt{4  
→ u^{2} + 1}"  
},  
{  
"descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:  
→ aplicando su fórmula, el vector normal es",  
"paso": "Matrix([[-2*u/sqrt(4*u**2 + 1), 0, 1/sqrt(4*u**2 +  
→ 1)])",  
"pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}- \\frac{2  
→ u}{\\sqrt{4 u^{2} + 1}} & 0 & \\frac{1}{\\sqrt{4 u^{2} +  
→ 1}}\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
"descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la  
→ primera forma fundamental es",  
"paso": "(4*u**2 + 1, 0, 1)",  
"pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}4 u^{2} + 1  
→ & 0 & 0 \\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
"descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la  
→ segunda forma fundamental es",  
"paso": "(2/sqrt(4*u**2 + 1), 0, 0)",  
"pasoLatex":  
→ "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}\\frac{2}{\\sqrt{4  
→ u^{2} + 1}} & 0 & 0 \\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
"descripcion": "Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su  
→ fórmula, la matriz de Weingarten es",  
"paso": "Matrix([[2/(4*u**2 + 1)**(3/2), 0], [0, 0]])",
```

172

Ejemplo 2.12.3.2

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se van a calcular las direcciones  
→ principales en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  de la superficie  
→ parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u, v) =  
→ \\left(\\begin{matrix}\\cos(\\left(u\\right)) &  
→ \\cos(\\left(v\\right)) & v\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([-sin(u), 0, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}-\\sin(\\left(u\\right)) &  
→ \\right) & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  
→ respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el  
→ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([0, 0, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u(\\pi, 0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  
→ 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([0, -sin(v), 1])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & -  
→ \\sin(\\left(v\\right)) & 1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  
→ respecto a  $v$ : la derivada parcial respecto a  $v$  en el  
→ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([0, 0, 1])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v(\\pi, 0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  
→ 1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :  
→ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
      "paso": "Matrix([-cos(u), 0, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-  
→ \\cos(\\left(u\\right)) & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  
→ respecto a  $uu$ : la derivada parcial respecto a  $uu$  en el  
→ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([1, 0, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uu}(\\pi, 0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 &  
→ 0\\end{matrix}\\right)"
    }
  ]
}
```

```

},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
  ↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -cos(v), 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\cos(\\left(v \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a $vv$: la derivada parcial respecto a $vv$ en el
  ↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
  ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
  ↪ de primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex":
  ↪ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
  ↪ & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ↪ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ↪ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
  ↪ $(u,v)\\in\\left(0, 2 \\pi\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ↪ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ↪ primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "0",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=0"
},
{

```

```
"descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
→ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto
→  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
→ primera forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "(0, 0, 1)",
"pasoLatex": "\\left[ I \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix} \\end{matrix} \\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
→ segunda forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "(0, 0, 0)",
"pasoLatex": "\\left[ II \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix} \\end{matrix} \\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su
→ fórmula, la matriz de Weingarten en el punto
→  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "Matrix([[0, 0], [0, 0]])",
"pasoLatex": "\\left[ W \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\end{matrix} \\end{matrix} \\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de autovalores: calculando los
→ autovalores de la matriz de Weingarten, se tiene que las
→ direcciones principales en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  son",
"paso": "(0, 0)",
"pasoLatex": "(\\kappa_1, \\kappa_2)=\\left(\\begin{matrix}0 , & \\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo del primer autovector: usando el primer
→ autovector, se tiene que el espacio propio asociado a
→  $\kappa_1$  en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "Matrix([[1], [0]])",
"pasoLatex": "\\left[ W \\right]_{\\kappa_1} = \\left(\\begin{matrix}1 \\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo del segundo autovector: usando el segundo
→ autovector, se tiene que el espacio propio asociado a
→  $\kappa_2$  en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "Matrix([[0], [1]])",
"pasoLatex": "\\left[ W \\right]_{\\kappa_2} = \\left(\\begin{matrix}0 \\end{matrix}\\right)",
},
{
```

```

"descripcion": "Cálculo de las direcciones principales: los
→ autovectores calculados representan las coordenadas de las
→ direcciones principales en la base  $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ . Por lo tanto se debe hacer un cambio a la
→ base canónica.",
"paso": "",
"pasoLatex": ""
},
{
"descripcion": "Cálculo de la primera dirección principal:
→ realizando un cambio de base la primera dirección principal
→ en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "d_1 = \left(\begin{matrix} 0 & 0 & \\ 0 & \end{matrix}\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la segunda dirección principal:
→ realizando un cambio de base la segunda dirección principal
→ en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
"pasoLatex": "d_2 = \left(\begin{matrix} 0 & 0 & \\ 1 & \end{matrix}\right)"
}
]
}

```

Ejemplo 2.12.3.3

```

{
"pasos": [
{
"descripcion": "Enunciado: Se van a calcular las direcciones
→ principales en el dominio  $(u,v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$  de la superficie
→ parametrizada",
"paso": "",
"pasoLatex": "\varphi(u,v) = \left(\begin{matrix} a \\ \cos(u) & a \sin(u) & v \end{matrix}\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
→ derivada parcial respecto a  $u$  es",
"paso": "Matrix([-a*sin(u), a*cos(u), 0])",
"pasoLatex": "\varphi_u = \left(\begin{matrix} -a \\ \sin(u) & a \cos(u) & 0 \end{matrix}\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
→ derivada parcial respecto a  $v$  es",
"paso": "Matrix([0, 0, 1])",
"pasoLatex": "\varphi_v = \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)"
}
]
}

```

```
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:  

  ⇨ la derivada parcial respecto a $uu$ es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}- a \\cos(\\left(u \\right)) & - a \\sin(\\left(u \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}- a \\cos(\\left(u \\right)) & - a \\sin(\\left(u \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:  

  ⇨ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:  

  ⇨ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  

  ⇨ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  

  ⇨ de primer orden es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}a \\cos(\\left(u \\right)) & a \\sin(\\left(u \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex":  

  ⇨ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}a \\cos(\\left(u \\right)) & a \\sin(\\left(u \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  

  ⇨ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  

  ⇨ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo  

  ⇨ $(u,v)\\in\\left(0, 2 \\pi\\right)\\times\\left(0, 1\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la  

  ⇨ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de  

  ⇨ primer orden es",
  "paso": "a",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=a"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:  

  ⇨ aplicando su fórmula, el vector normal es",
  "paso": "Matrix([[cos(u), sin(u), 0]])",
}
```

```

"pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}\\cos{\\left(u\\right)} & \\sin{\\left(u\\right)} & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
        ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la
        ↪ primera forma fundamental es",
      "paso": "(a*2, 0, 1)",
      "pasoLatex": "\\left[ I \\right]=\\left(\\begin{matrix}a^2 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
        ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la
        ↪ segunda forma fundamental es",
      "paso": "(-a, 0, 0)",
      "pasoLatex": "\\left[ II \\right]=\\left(\\begin{matrix}-a & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su
        ↪ fórmula, la matriz de Weingarten es",
      "paso": "Matrix([-1/a, 0], [0, 0])",
      "pasoLatex": "\\left[ W \\right]=\\left(\\begin{matrix}-\\frac{1}{a} & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de las curvaturas principales: calculando
        ↪ los autovalores de la matriz de Weingarten, las curvaturas
        ↪ principales son",
      "paso": "(0, -1/a)",
      "pasoLatex": "(\\kappa_1, \\kappa_2)=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\frac{1}{a}\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del primer autovector: usando el primer
        ↪ autovector, se tiene que el espacio propio asociado a
        ↪ $\\kappa_1$ es",
      "paso": "Matrix([0], [1])",
      "pasoLatex": "\\left[ W \\right]_{\\kappa_1}=\\left(\\begin{matrix}0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo del segundo autovector: usando el segundo
        ↪ autovector, se tiene que el espacio propio asociado a
        ↪ $\\kappa_2$ es",
      "paso": "Matrix([1], [0])",
      "pasoLatex": "\\left[ W \\right]_{\\kappa_2}=\\left(\\begin{matrix}1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de las direcciones principales: los
        ↪ autovectores calculados representan las coordenadas de las
        ↪ direcciones principales en la base $\\{\\varphi_u, \\varphi_v\\}$. Por lo tanto se debe hacer un cambio a la
        ↪ base canónica.",
    }
  ]

```

```
"paso": "",
"pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera dirección principal:
  ↪ realizando un cambio de base la primera dirección principal
  ↪ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
  "pasoLatex": "d_1=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda dirección principal:
  ↪ realizando un cambio de base la segunda dirección principal
  ↪ es",
  "paso": "Matrix([-a*sin(u), a*cos(u), 0])",
  "pasoLatex": "d_2=\\left(\\begin{matrix}- a \\sin\\left(u \\right) & a \\cos\\left(u \\right) & 0\\end{matrix}\\right)"
}
]
}
```

Ejemplo 2.13.3.1

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la curvatura de Gauss
      ↪ en el dominio  $(u,v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u, v) = \\left(\\begin{matrix}u^2 + v & u - v^2 & u\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[2*u, 1, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}2 u & 1 & 1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[1, -2*v, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}1 & -2 v & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :
      ↪ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}2 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}2 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    }
  ]
}
```

```

},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & -2 & 0\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & -2 &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
  ↪ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
  ↪ de primer orden es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}2 v & 1 & - 4 u v -
  ↪ 1\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex":
  ↪ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}2 v &
  ↪ 1 & - 4 u v - 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ↪ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ↪ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
  ↪ $(u,v)\\in\\left(-2, 2\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ↪ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ↪ primer orden es",
  "paso": "sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1)",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=\\sqrt{4
  ↪ v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  ↪ aplicando su fórmula, el vector normal es",
  "paso": "Matrix([[2*v/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1),
  ↪ 1/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1), (-4*u*v - 1)/sqrt(4*v**2
  ↪ + (4*u*v + 1)**2 + 1)])",
  "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}\\frac{2 v}{\\sqrt{4
  ↪ v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}} &
  ↪ \\frac{1}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}}
  ↪ & \\frac{- 4 u v - 1}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v +
  ↪ 1\\right)^{2} + 1}}\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↪ primera forma fundamental es",

```

```
"paso": "(4*u**2 + 2, 2*u - 2*v, 4*v**2 + 1)",
"pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}4 u^{2} + 2 \\\n\\rightarrow & 2 u - 2 v \\\n\\rightarrow & 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:\n\\rightarrow aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la\n\\rightarrow segunda forma fundamental es",
  "paso": "(4*v/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1), 0,\n\\rightarrow -2/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1))",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}\\frac{4 \\\n\\rightarrow v}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}} & 0 \\\n\\rightarrow \\frac{0}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v + \\\n\\rightarrow 1\\right)^{2} + 1}}\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su\n\\rightarrow fórmula, la curvatura de Gauss es",
  "paso": "4*v/((2*(u - v)**2 - (2*u**2 + 1)*(4*v**2 + 1))*(4*v**2\n\\rightarrow + (4*u*v + 1)**2 + 1))",
  "pasoLatex": "K=\\frac{4 v}{\\left(2 \\left(u - v\\right)^{2} - \\\n\\rightarrow \\left(2 u^{2} + 1\\right) \\left(4 v^{2} + 1\\right)\\right) \\\n\\rightarrow \\left(4 v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1\\right)}"
}
]
```

Ejemplo 2.13.3.2

```
{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la curvatura de Gauss\n\\rightarrow en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  de la superficie\n\\rightarrow parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u, v) = \\\n\\rightarrow \\left(\\begin{matrix}\\cos(\\left(u \\right)) & \\\n\\rightarrow \\cos(\\left(v \\right)) & v\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la\n\\rightarrow derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[ -sin(u), 0, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}- \\sin(\\left(u \\\n\\rightarrow \\right)) & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial\n\\rightarrow respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el\n\\rightarrow punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
      "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\\n\\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
    }
  ]
}
```

```

},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
  ⇨ derivada parcial respecto a $v$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -sin(v), 1]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\sin{\\left(v \\right)} & 1\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ⇨ respecto a $v$: la derivada parcial respecto a $v$ en el
  ⇨ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{v}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 1\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:
  ⇨ la derivada parcial respecto a $uu$ es",
  "paso": "Matrix([[-cos(u), 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-\\cos{\\left(u \\right)} & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ⇨ respecto a $uu$: la derivada parcial respecto a $uu$ en el
  ⇨ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[1, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
  ⇨ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ⇨ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
  ⇨ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
  ⇨ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -cos(v), 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\cos{\\left(v \\right)} & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ⇨ respecto a $vv$: la derivada parcial respecto a $vv$ en el
  ⇨ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",

```

```
"paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 \\\\ & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  
→ de primer orden en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_u\\times\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\\\ & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  
→ cumple que  $\\varphi_u\\times\\varphi_v\\neq 0$  para todo  
→  $(u,v)\\in\\left(0, 2\\pi\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$ ",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la  
→ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de  
→ primer orden en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
  "paso": "0",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_u\\times\\varphi_v\\|=0"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:  
→ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto  
→  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la  
→ primera forma fundamental en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
  "paso": "(0, 0, 1)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0 \\\\ & 0 & 1\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la  
→ segunda forma fundamental en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
  "paso": "(0, 0, 0)",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0 \\\\ & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su  
→ fórmula, la curvatura de Gauss en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
}
```

```

        "paso": "nan",
        "pasoLatex": "K=\\text{NaN}"
    }
]
}

```

Ejemplo 2.13.3.3

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la curvatura de Gauss  

        ↪ en el dominio  $(u,v) \in (0, 2\pi) \times$   

        ↪  $(0, 1)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}a \\cos(u) & a \\sin(u) & f(u) \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

        ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([-a*sin(u), a*cos(u), Derivative(f(u), u)])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u = \\left(\\begin{matrix}-a \\sin(u) & a \\cos(u) & f'(u) \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  

        ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([0, 0, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v = \\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0 \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uv$ :  

        ↪ la derivada parcial respecto a  $uv$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}-a \\cos(u) & -a \\sin(u) & f''(u) \\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uv} = \\left(\\begin{matrix}-a \\cos(u) & -a \\sin(u) & f''(u) \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uvv$ :  

        ↪ la derivada parcial respecto a  $uvv$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0 \\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uvv} = \\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0 \\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $vvv$ :  

        ↪ la derivada parcial respecto a  $vvv$  es",

```

```
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
  \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
  \\rightarrow parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
  \\rightarrow de primer orden es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex":
  \\rightarrow "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0
  \\rightarrow & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  \\rightarrow la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  \\rightarrow cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
  \\rightarrow $(u,v)\\in\\left(0, 2 \\pi\\right)\\times\\left(0,
  \\rightarrow 1\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  \\rightarrow norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  \\rightarrow primer orden es",
  "paso": "0",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=0"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  \\rightarrow aplicando su fórmula, el vector normal es",
  "paso": "Matrix([0, 0, 0])",
  "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
  \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  \\rightarrow aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la
  \\rightarrow primera forma fundamental es",
  "paso": "(a**2 + Derivative(f(u), u)**2, 0, 0)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}a^{2} +
  \\rightarrow \\left(\\frac{d}{d u} f(\\left(u \\right))\\right)^{2} & 0
  \\rightarrow \\|\\| 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  \\rightarrow aplicando las fórmulas de cada una de sus componetes, la
  \\rightarrow segunda forma fundamental es",
  "paso": "(0, 0, 0)",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\|\\|
  \\rightarrow 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su
  \\rightarrow fórmula, la curvatura de Gauss es",
  "paso": "nan",
```

```

    "pasoLatex": "K=\\text{NaN}"
  }
]
}

```

Ejemplo 2.14.3.1

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la curvatura media en  

      ↪ el dominio  $(u,v) \in (-2, 2) \times$   

      ↪  $(-2, 2)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u,v) = \\left(\\begin{matrix}u^2 + v & \\u - v^2\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[2*u, 1, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}2 u & 1 & \\1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  

      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[1, -2*v, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}1 & -2 v & \\0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([[2*u, 1, 1]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}2 u & 1 & \\1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  

      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([[1, -2*v, 0]])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}1 & -2 v & \\0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :  

      ↪ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
      "paso": "\\left(\\begin{matrix}2 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}2 & 0 & \\0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uv$ :  

      ↪ la derivada parcial respecto a  $uv$  es",

```

```
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v_v$:  
→ la derivada parcial respecto a $v_v$ es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & -2 & 0\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & -2 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  
→ de primer orden es",
  "paso": "\\left(\\begin{matrix}2 v & 1 & - 4 u v - \\rightarrow 1\\end{matrix}\\right)",
  "pasoLatex":  
→ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}2 v & \\rightarrow 1 & - 4 u v - 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  
→ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo  
→ $(u,v)\\in\\left(-2, 2\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la  
→ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de  
→ primer orden es",
  "paso": "sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1)",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=\\sqrt{4  
→ v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:  
→ aplicando su fórmula, el vector normal es",
  "paso": "Matrix([[2*v/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1),  
→ 1/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1), (-4*u*v - 1)/sqrt(4*v**2  
→ + (4*u*v + 1)**2 + 1)])",
  "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}\\frac{2 v}{\\sqrt{4  
→ v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}} & \\frac{1}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v + 1\\right)^{2} + 1}}  
→ & \\frac{- 4 u v - 1}{\\sqrt{4 v^{2} + \\left(4 u v +  
→ 1\\right)^{2} + 1}}\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la  
→ primera forma fundamental es",
  "paso": "(4*u**2 + 2, 2*u - 2*v, 4*v**2 + 1)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}4 u^{2} + 2  
→ & 2 u - 2 v & \\sqrt{2 u - 2 v & 4 v^{2} +  
→ 1\\end{matrix}\\right)"
```

```

},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la
  ↪ segunda forma fundamental es",
  "paso": "(4*v/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1), 0,
  ↪ -2/sqrt(4*v**2 + (4*u*v + 1)**2 + 1))",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}\\frac{4}{v}\\sqrt{4 v^2} + \\left(4 u v + 1\\right)^2 + 1\\} & 0 \\\\ 0 & - \\frac{2}{\\sqrt{4 v^2} + \\left(4 u v + 1\\right)^2 + 1}\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su
  ↪ fórmula, la curvatura media es",
  "paso": "sqrt(2)*(-2*u**2 + 4*v**3 + v - 1)/(2*(8*u**2*v**2 + 4*u*v + 2*v**2 + 1)**(3/2))",
  "pasoLatex": "H=\\frac{\\sqrt{2} \\left(- 2 u^2 + 4 v^3 + v - 1\\right)}{2 \\left(8 u^2 v^2 + 4 u v + 2 v^2 + 1\\right)^{\\frac{3}{2}}}"
}
]
}

```

Ejemplo 2.14.3.2

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la curvatura media en
      ↪ el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u ,v) =
      ↪ \\left(\\begin{matrix}\\cos{\\left(u \\right)} & \\cos{\\left(v \\right)} & v\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([-sin(u), 0, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{u}=\\left(\\begin{matrix}- \\sin{\\left(u \\right)} & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
      ↪ respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el
      ↪ punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
      "paso": "Matrix([0, 0, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{u}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
      ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([0, -sin(v), 1])",

```



```

"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
→ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
→ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
→ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
→ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
"paso": "Matrix([[0, -cos(v), 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & -\\rightarrow \\cos(\\left(v \\right)) & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
→ respecto a $vv$: la derivada parcial respecto a $vv$ en el
→ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 & \\rightarrow & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
→ de primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex":
→ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
→ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
→ $(u,v)\\in\\left(0, 2 \\pi\\right)\\times\\left(-2, \\rightarrow 2\\right)$",
"paso": "",
"pasoLatex": ""
},
{
"descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
→ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
→ primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "0",
"pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=0"
},
{

```

```
"descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:  
→ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto  
→  $\varphi(\pi, 0)$  es",  
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",  
"pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  
→ 0\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la  
→ primera forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",  
  "paso": "(0, 0, 1)",  
  "pasoLatex": "\\left[ I \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\ \\ 0  
→ & 1\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la  
→ segunda forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",  
  "paso": "(0, 0, 0)",  
  "pasoLatex": "\\left[ II \\right]=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\ \\ \\ 0  
→ 0 & 0\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su  
→ fórmula, la curvatura media en el punto  $\varphi(\pi, 0)$   
→ es",  
  "paso": "nan",  
  "pasoLatex": "H=\\text{NaN}"  
}  
]  
}
```

Ejemplo 2.14.3.3

```
{  
  "pasos": [  
    {  
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular la curvatura media en  
→ el dominio  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times$   
→  $(0, 1)$  de la superficie parametrizada",  
      "paso": "",  
      "pasoLatex": "\\varphi(u, v) = \\left(\\begin{matrix}a  
→ \\cos(\\left(u \\right)) & a \\sin(\\left(u \\right)) & &  
→ f(\\left(u \\right))\\end{matrix}\\right)"  
    },  
    {  
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  
→ derivada parcial respecto a  $u$  es",  
      "paso": "Matrix([[-a*sin(u), a*cos(u), Derivative(f(u), u)])",  
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}- a  
→ \\sin(\\left(u \\right)) & a \\cos(\\left(u \\right)) & &  
→ \\frac{d}{d u} f(\\left(u \\right))\\end{matrix}\\right)"  
    },  
  ],  
}
```

```

"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
→ derivada parcial respecto a $v$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $u$: la
→ derivada parcial respecto a $u$ es",
"paso": "Matrix([-a*sin(u), a*cos(u), Derivative(f(u), u)])",
"pasoLatex": "\\varphi_{u}=\\left(\\begin{matrix}- a \\sin(\\left(u \\right)) & a \\cos(\\left(u \\right)) & \\frac{d}{d u} f(\\left(u \\right))\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
→ derivada parcial respecto a $v$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:
→ la derivada parcial respecto a $uu$ es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}- a \\cos(\\left(u \\right)) & - a \\sin(\\left(u \\right)) & \\frac{d^2}{d u^2} f(\\left(u \\right))\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}- a \\cos(\\left(u \\right)) & - a \\sin(\\left(u \\right)) & \\frac{d^2}{d u^2} f(\\left(u \\right))\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
→ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
→ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
→ de primer orden es",
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
"pasoLatex":
→ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 \\end{matrix}\\right)"
→ & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{

```

```
"descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
→ cumple que  $\|\varphi_u\| \times \|\varphi_v\| \neq 0$  para todo
→  $(u,v) \in (0, 2\pi) \times (0, 1)$ ",
"paso": "",
"pasoLatex": ""
},
{
"descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
→ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
→ primer orden es",
"paso": "0",
"pasoLatex": " $\|\varphi_u\| \times \|\varphi_v\| = 0$ "
},
{
"descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
→ aplicando su fórmula, el vector normal es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": " $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ "
},
{
"descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
→ primera forma fundamental es",
"paso": "(a**2 + Derivative(f(u), u)**2, 0, 0)",
"pasoLatex": " $I = \begin{pmatrix} a^2 + \left(\frac{df}{du}(u)\right)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ "
},
{
"descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
→ segunda forma fundamental es",
"paso": "(0, 0, 0)",
"pasoLatex": " $II = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ "
},
{
"descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su
→ fórmula, la curvatura media es",
"paso": "nan",
"pasoLatex": "H=\text{NaN}"
}
]
```

Ejemplo 2.15.3.1

```
{
"pasos": [
{
"descripcion": "Enunciado: Se van a calcular los puntos umbílicos
→ en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  de la superficie
→ parametrizada",
```

```

"paso": "",
"pasoLatex": "\\varphi(u, v) =
  ↪ \\left(\\begin{matrix}\\cos{\\left(u \\right)} &
  ↪ \\sin{\\left(u \\right)} & v\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $u$: la
  ↪ derivada parcial respecto a $u$ es",
  "paso": "Matrix([[ -sin(u), cos(u), 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{u}=\\left(\\begin{matrix}- \\sin{\\left(u
  ↪ \\right)} & \\cos{\\left(u \\right)} &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a $u$: la derivada parcial respecto a $u$ en el
  ↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{u}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
  ↪ derivada parcial respecto a $v$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
  ↪ 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a $v$: la derivada parcial respecto a $v$ en el
  ↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{v}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
  ↪ 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $uu$ es",
  "paso": "Matrix([[ -cos(u), -sin(u), 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-
  ↪ \\cos{\\left(u \\right)} & - \\sin{\\left(u \\right)} &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a $uu$: la derivada parcial respecto a $uu$ en el
  ↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[1, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
  ↪ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",

```

```
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↳ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
  ↳ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
  ↳ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↳ respecto a $vv$: la derivada parcial respecto a $vv$ en el
  ↳ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
  ↳ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
  ↳ de primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[-1, 0, 0]])",
  "pasoLatex":
    ↳ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 \\rightarrow & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  ↳ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  ↳ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
  ↳ $(u,v)\\in\\left(0, 2 \\pi\\right)\\times\\left(-2, \\rightarrow 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  ↳ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  ↳ primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "1",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=1"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  ↳ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto
  ↳ $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[-1, 0, 0]])",
```

```

    "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
    ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la
    ↪ primera forma fundamental en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
    "paso": "(1, 0, 1)",
    "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & \\rightarrow 0 \\rightarrow & 1\\end{matrix}\\right)"
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
    ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenetes, la
    ↪ segunda forma fundamental en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
    "paso": "(-1, 0, 0)",
    "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\rightarrow 0 \\rightarrow 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su
    ↪ fórmula, la curvatura de Gauss en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
    "paso": "0",
    "pasoLatex": "K=0"
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su
    ↪ fórmula, la curvatura media en el punto  $\\varphi(\\pi,0)$  es",
    "paso": "-1/2",
    "pasoLatex": "H=- \\frac{1}{2}"
  },
  {
    "descripcion": "Cálculo de las curvaturas principales: aplicando
    ↪ su fórmula, las curvaturas principales en el punto
    ↪  $\\varphi(\\pi,0)$  son",
    "paso": "(0, -1)",
    "pasoLatex": "(\\kappa_1, \\kappa_2)=\\left(\\begin{matrix}0 , & \\rightarrow -1\\end{matrix}\\right)"
  },
  {
    "descripcion": "Comparación de curvaturas principales: ya que no
    ↪ se cumple que  $\\kappa_1=\\kappa_2$ , el punto
    ↪  $\\varphi(\\pi,0)$  no es umbílico",
    "paso": "",
    "pasoLatex": ""
  }
]
}

```

Ejemplo 2.16.3.1

```

{
  "pasos": [

```

```
{
  "descripcion": "Enunciado: Se van a clasificar el punto
  ↪  $\varphi(\pi, 0)$  de la superficie parametrizada",
  "paso": "",
  "pasoLatex": "\\varphi(u, v) =
  ↪ \\left(\\begin{matrix}\\cos(\\left(u \\right)) &
  ↪ \\sin(\\left(u \\right)) & v\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
  ↪ derivada parcial respecto a  $u$  es",
  "paso": "Matrix([-sin(u), cos(u), 0])",
  "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}- \\sin(\\left(u
  ↪ \\right)) & \\cos(\\left(u \\right)) &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el
  ↪ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([0, -1, 0])",
  "pasoLatex": "\\varphi_u(\\pi, 0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
  ↪ derivada parcial respecto a  $v$  es",
  "paso": "Matrix([0, 0, 1])",
  "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
  ↪ 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a  $v$ : la derivada parcial respecto a  $v$  en el
  ↪ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([0, 0, 1])",
  "pasoLatex": "\\varphi_v(\\pi, 0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &
  ↪ 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :
  ↪ la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
  "paso": "Matrix([-cos(u), -sin(u), 0])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-
  ↪ \\cos(\\left(u \\right)) & - \\sin(\\left(u \\right)) &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  ↪ respecto a  $uu$ : la derivada parcial respecto a  $uu$  en el
  ↪ punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([1, 0, 0])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uu}(\\pi, 0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 &
  ↪ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
```

```

"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
→ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
→ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
→ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
→ la derivada parcial respecto a $vv$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
→ respecto a $vv$: la derivada parcial respecto a $vv$ en el
→ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
→ de primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[-1, 0, 0]])",
"pasoLatex":
→ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 \\end{matrix}\\right)"
→ "& 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
→ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
→ $(u,v)\\in\\left(0, 2\\pi\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",
"paso": "",
"pasoLatex": ""
},
{
"descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
→ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
→ primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "1",
"pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=1"
},
{

```

```
"descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:  
→ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto  
→  $\varphi(\pi, 0)$  es",  
"paso": "Matrix([[ -1, 0, 0]])",  
"pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\end{matrix}\\right)",  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la  
→ primera forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",  
  "paso": "(1, 0, 1)",  
  "pasoLatex": "\\left[ I \\right]=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & \\end{matrix}\\right) & 1\\end{matrix}\\right)",  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:  
→ aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la  
→ segunda forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",  
  "paso": "(-1, 0, 0)",  
  "pasoLatex": "\\left[ II \\right]=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\end{matrix}\\right) & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su  
→ fórmula, la curvatura de Gauss en el punto  $\varphi(\pi, 0)$   
→ es",  
  "paso": "0",  
  "pasoLatex": "K=0",  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su  
→ fórmula, la curvatura media en el punto  $\varphi(\pi, 0)$   
→ es",  
  "paso": "-1/2",  
  "pasoLatex": "H=- \\frac{1}{2}",  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de las curvaturas principales: aplicando  
→ su fórmula, las curvaturas principales en el punto  
→  $\varphi(\pi, 0)$  son",  
  "paso": "(0, -1)",  
  "pasoLatex": "(\\kappa_1, \\kappa_2)=\\left(\\begin{matrix}0 , & \\end{matrix}\\right) & -1\\end{matrix}\\right)",  
},  
{  
  "descripcion": "Clasificación del punto: ya que  $\kappa_1$   
→  $\kappa_2 = 0$  y  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , el punto  
→  $\varphi(\pi, 0)$  es un punto parabólico",  
  "paso": "",  
  "pasoLatex": ""  
}  
]  
}
```

Ejemplo 2.17.3.1

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a calcular las direcciones  

      ↪  asintóticas en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  de la superficie  

      ↪  parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u, v) =  

      ↪  \\left(\\begin{matrix}\\cos{\\left(u \\right)} &  

      ↪  \\sin{\\left(u \\right)} & v\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la  

      ↪  derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([-sin(u), cos(u), 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}- \\sin{\\left(u \\right)} &  

      ↪  \\cos{\\left(u \\right)} &  

      ↪  0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  

      ↪  respecto a  $u$ : la derivada parcial respecto a  $u$  en el  

      ↪  punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([0, -1, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u(\\pi, 0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 &  

      ↪  0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la  

      ↪  derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([0, 0, 1])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  

      ↪  1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  

      ↪  respecto a  $v$ : la derivada parcial respecto a  $v$  en el  

      ↪  punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([0, 0, 1])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v(\\pi, 0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  

      ↪  1\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $uu$ :  

      ↪  la derivada parcial respecto a  $uu$  es",
      "paso": "Matrix([-cos(u), -sin(u), 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-  

      ↪  \\cos{\\left(u \\right)} & - \\sin{\\left(u \\right)} &  

      ↪  0\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial  

      ↪  respecto a  $uu$ : la derivada parcial respecto a  $uu$  en el  

      ↪  punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
      "paso": "Matrix([1, 0, 0])",

```

```
"pasoLatex": "\\varphi_{uu}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
  → la derivada parcial respecto a $uv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  → respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
  → punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:
  → la derivada parcial respecto a $vv$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  → respecto a $vv$: la derivada parcial respecto a $vv$ en el
  → punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
  → parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
  → de primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[-1, 0, 0]])",
  "pasoLatex":
  → "\\varphi_u\\times\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\rightarrow \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  → la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  → cumple que $\\varphi_u\\times\\varphi_v\\neq 0$ para todo
  → $(u,v)\\in\\left(0, 2\\pi\\right)\\times\\left(-2, \\rightarrow 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  → norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  → primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "1",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_u\\times\\varphi_v\\|=1"
```

```

},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  ⇨ aplicando su fórmula, el vector normal en el punto
  ⇨  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([-1, 0, 0])",
  "pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ⇨ aplicando las fórmulas de cada una de sus componentes, la
  ⇨ segunda forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "(-1, 0, 0)",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\end{matrix}\\right) \\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Calcular las direcciones principales: buscando
  ⇨ los vectores que cumplan que  $II(\\vec{w}, \\vec{w})=0$  se
  ⇨ tiene que las direcciones asintóticas son",
  "paso": "[Matrix([0, 1])]",
  "pasoLatex": "\\{\\left(\\begin{matrix}0 & 1\\end{matrix}\\right)\\}"
}
]
}

```

Ejemplo 2.18.4.1

```

{
  "pasos": [
    {
      "descripcion": "Enunciado: Se va a realizar un análisis completo
      ⇨ en el dominio  $(u, v) \in (-2, 2) \times (-2, 2)$  de la superficie parametrizada",
      "paso": "",
      "pasoLatex": "\\varphi(u, v) = \\left(\\begin{matrix}u & v & u^2\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
      ⇨ derivada parcial respecto a  $u$  es",
      "paso": "Matrix([1, 0, 2*u])",
      "pasoLatex": "\\varphi_u=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 2\\end{matrix}\\right)"
    },
    {
      "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $v$ : la
      ⇨ derivada parcial respecto a  $v$  es",
      "paso": "Matrix([0, 1, 0])",
      "pasoLatex": "\\varphi_v=\\left(\\begin{matrix}0 & 1 & 0\\end{matrix}\\right)"
    }
  ]
}

```

```
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:  
→ la derivada parcial respecto a $uu$ es",  
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 2\\end{matrix}\\right)",  
"pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  
→ 2\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:  
→ la derivada parcial respecto a $uv$ es",  
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",  
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  
→ 0\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $vv$:  
→ la derivada parcial respecto a $vv$ es",  
"paso": "\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",  
"pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 &  
→ 0\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas  
→ parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales  
→ de primer orden es",  
"paso": "\\left(\\begin{matrix}- 2 u & 0 &  
→ 1\\end{matrix}\\right)",  
"pasoLatex":  
→ "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}- 2 u  
→ & 0 & 1\\end{matrix}\\right)"  
},  
{  
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que  
→ la superficie es suave, la superficie es regular ya que se  
→ cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo  
→ $(u,v)\\in\\left(-2, 2\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",  
"paso": "",  
"pasoLatex": ""  
},  
{  
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la  
→ norma del producto vectorial de las derivadas parciales de  
→ primer orden es",  
"paso": "sqrt(4*u**2 + 1)",  
"pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=\\sqrt{4  
→ u^{2} + 1}"  
},  
{  
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:  
→ aplicando su fórmula, el vector normal es",  
"paso": "Matrix([-2*u/sqrt(4*u**2 + 1), 0, 1/sqrt(4*u**2 +  
→ 1)])",  
"pasoLatex": "\\Vec{n}=\\left(\\begin{matrix}- \\frac{2  
→ u}{\\sqrt{4 u^{2} + 1}} & 0 & \\frac{1}{\\sqrt{4 u^{2} +  
→ 1}}\\end{matrix}\\right)"  
},  
{
```

```

"descripcion": "Cálculo del afín plano tangente: Aplicando su
  ↳ fórmula, el plano afín tangente es",
"paso": "Eq(u**2, 2*u*x - z)",
"pasoLatex": "u^{2} = 2 u x - z"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ primera forma fundamental es",
"paso": "(4*u**2 + 1, 0, 1)",
"pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}4 u^{2} + 1
  ↳ & 0 \\ \\ 0 & 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ↳ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↳ segunda forma fundamental es",
"paso": "(2/sqrt(4*u**2 + 1), 0, 0)",
"pasoLatex":
  ↳ "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}\\frac{2}{\\sqrt{4
  ↳ u^{2} + 1}} & 0 \\ \\ 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su
  ↳ fórmula, la matriz de Weingarten es",
"paso": "Matrix([[2/(4*u**2 + 1)**(3/2), 0], [0, 0]])",
"pasoLatex":
  ↳ "\\left[W\\right]=\\left(\\begin{matrix}\\frac{2}{\\left(4
  ↳ u^{2} + 1\\right)^{\\frac{3}{2}}} & 0 \\ \\ 0 &
  ↳ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de las curvaturas principales: calculando
  ↳ los autovalores de la matriz de Weingarten, las curvaturas
  ↳ principales son",
"paso": "(0, 2/(4*u**2 + 1)**(3/2))",
"pasoLatex": "(\\kappa_1, \\kappa_2)=\\left(\\begin{matrix}0 &
  ↳ \\frac{2}{\\left(4 u^{2} +
  ↳ 1\\right)^{\\frac{3}{2}}}\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo del primer autovector: usando el primer
  ↳ autovector, se tiene que el espacio propio asociado a
  ↳ $\\kappa_1$ es",
"paso": "Matrix([[0], [1]])",
"pasoLatex":
  ↳ "\\left[W\\right]_{\\kappa_1}=\\left(\\begin{matrix}0 \\ \\ 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo del segundo autovector: usando el segundo
  ↳ autovector, se tiene que el espacio propio asociado a
  ↳ $\\kappa_2$ es",
"paso": "Matrix([[1], [0]])",
"pasoLatex":
  ↳ "\\left[W\\right]_{\\kappa_2}=\\left(\\begin{matrix}1 \\ \\ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{

```

```
"descripcion": "Cálculo de las direcciones principales: los
→ autovectores calculados representan las coordenadas de las
→ direcciones principales en la base  $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ . Por lo tanto se debe hacer un cambio a la
→ base canónica.",
"paso": "",
"pasoLatex": ""
},
{
"descripcion": "Cálculo de la primera dirección principal:
→ realizando un cambio de base la primera dirección principal
→ es",
"paso": "Matrix([[0, 1, 0]])",
"pasoLatex": "d_1=\left(\begin{matrix}0 & 1 & \\ 0\end{matrix}\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la segunda dirección principal:
→ realizando un cambio de base la segunda dirección principal
→ es",
"paso": "Matrix([[1, 0, 2*u]])",
"pasoLatex": "d_2=\left(\begin{matrix}1 & 0 & 2 \\ u\end{matrix}\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su
→ fórmula, la curvatura de Gauss es",
"paso": "0",
"pasoLatex": "K=0"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su
→ fórmula, la curvatura media es",
"paso": "(4*u**2 + 1)**(-3/2)",
"pasoLatex": "H=\frac{1}{\left(4 u^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}"
}
]
}
```

Ejemplo 2.18.4.2

```
{
"pasos": [
{
"descripcion": "Enunciado: Se va a realizar un análisis completo
→ en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  de la superficie
→ parametrizada",
"paso": "",
"pasoLatex": "\varphi(u, v) =
→ \left(\begin{matrix}\cos(u) \\ \sin(u) \\ v\end{matrix}\right)"
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a  $u$ : la
→ derivada parcial respecto a  $u$  es",
```

```

"paso": "Matrix([[ -sin(u), cos(u), 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{u}=\\left(\\begin{matrix}-\\sin{\\left(u\\right)} & \\cos{\\left(u\\right)} & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
↪ respecto a $u$: la derivada parcial respecto a $u$ en el
↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{u}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & -1 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v$: la
↪ derivada parcial respecto a $v$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 1\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
↪ respecto a $v$: la derivada parcial respecto a $v$ en el
↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{v}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 1\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uu$:
↪ la derivada parcial respecto a $uu$ es",
"paso": "Matrix([[ -cos(u), -sin(u), 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uu}=\\left(\\begin{matrix}-\\cos{\\left(u\\right)} & -\\sin{\\left(u\\right)} & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
↪ respecto a $uu$: la derivada parcial respecto a $uu$ en el
↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[1, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uu}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $uv$:
↪ la derivada parcial respecto a $uv$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & 0\\end{matrix}\\right)",
},
{
"descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
↪ respecto a $uv$: la derivada parcial respecto a $uv$ en el
↪ punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
"paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",

```

```
"pasoLatex": "\\varphi_{uv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la derivada parcial respecto a $v_v$:
  → la derivada parcial respecto a $v_v$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Sustitución en el punto de la derivada parcial
  → respecto a $v_v$: la derivada parcial respecto a $v_v$ en el
  → punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\varphi_{vv}(\\pi,0)=\\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del producto vectorial de las derivadas
  → parciales: el producto vectorial de las derivadas parciales
  → de primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[-1, 0, 0]])",
  "pasoLatex":
  → "\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\rightarrow \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Comprobación de superficie regular: asumiendo que
  → la superficie es suave, la superficie es regular ya que se
  → cumple que $\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\neq 0$ para todo
  → $(u,v)\\in\\left(0, 2\\pi\\right)\\times\\left(-2, 2\\right)$",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la norma del producto vectorial: la
  → norma del producto vectorial de las derivadas parciales de
  → primer orden en el punto $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "1",
  "pasoLatex": "\\|\\varphi_{u}\\times\\varphi_{v}\\|=1"
},
{
  "descripcion": "Aplicación de la fórmula del vector normal:
  → aplicando su fórmula, el vector normal en el punto
  → $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Matrix([[-1, 0, 0]])",
  "pasoLatex": "\\vec{n}=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 & \\rightarrow 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del afín plano tangente: aplicando su
  → fórmula, el plano afín tangente en el punto
  → $\\varphi(\\pi,0)$ es",
  "paso": "Eq(x, -1)",
  "pasoLatex": "x = -1"
```

```

},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera forma fundamental:
  ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↪ primera forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "(1, 0, 1)",
  "pasoLatex": "\\left[I\\right]=\\left(\\begin{matrix}1 & 0 \\\\ 0
  ↪ & 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda forma fundamental:
  ↪ aplicando las fórmulas de cada una de sus componenets, la
  ↪ segunda forma fundamental en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "(-1, 0, 0)",
  "pasoLatex": "\\left[II\\right]=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 \\\\
  ↪ 0 & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la matriz de Weingarten: aplicando su
  ↪ fórmula, la matriz de Weingarten en el punto
  ↪  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([-1, 0], [0, 0])",
  "pasoLatex": "\\left[W\\right]=\\left(\\begin{matrix}-1 & 0 \\\\ 0
  ↪ & 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de autovalores: calculando los
  ↪ autovalores de la matriz de Weingarten, se tiene que las
  ↪ direcciones principales en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  son",
  "paso": "(0, -1)",
  "pasoLatex": "(\\kappa_1, \\kappa_2)=\\left(\\begin{matrix}0 , &
  ↪ -1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del primer autovector: usando el primer
  ↪ autovector, se tiene que el espacio propio asociado a
  ↪  $\kappa_1$  en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([0], [1])",
  "pasoLatex": "\\left[W\\right]_{\\kappa_1} =
  ↪ \\left(\\begin{matrix}0 \\\\ 1\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo del segundo autovector: usando el segundo
  ↪ autovector, se tiene que el espacio propio asociado a
  ↪  $\kappa_2$  en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([1], [0])",
  "pasoLatex": "\\left[W\\right]_{\\kappa_2} =
  ↪ \\left(\\begin{matrix}1 \\\\ 0\\end{matrix}\\right)"
},
{
  "descripcion": "Cálculo de las direcciones principales: los
  ↪ autovectores calculados representan las coordenadas de las
  ↪ direcciones principales en la base  $\{\\varphi_u, \\varphi_v\\}$ . Por lo tanto se debe hacer un cambio a la
  ↪ base canónica.",
  "paso": "",
  "pasoLatex": ""
}

```

```
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la primera dirección principal:
  ⇨ realizando un cambio de base la primera dirección principal
  ⇨ en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([[0, 0, 1]])",
  "pasoLatex": "d_1 = \\left(\\begin{matrix}0 & 0 & \\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la segunda dirección principal:
  ⇨ realizando un cambio de base la segunda dirección principal
  ⇨ en el punto  $\varphi(\pi, 0)$  es",
  "paso": "Matrix([[0, -1, 0]])",
  "pasoLatex": "d_2 = \\left(\\begin{matrix}0 & -1 & \\end{matrix}\\right)",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura de Gauss: aplicando su
  ⇨ fórmula, la curvatura de Gauss en el punto  $\varphi(\pi, 0)$ 
  ⇨ es",
  "paso": "0",
  "pasoLatex": "K=0",
},
{
  "descripcion": "Cálculo de la curvatura media: aplicando su
  ⇨ fórmula, la curvatura media en el punto  $\varphi(\pi, 0)$ 
  ⇨ es",
  "paso": "-1/2",
  "pasoLatex": "H=- \\frac{1}{2}",
},
{
  "descripcion": "Comparación de curvaturas principales: ya que no
  ⇨ se cumple que  $\kappa_1 = \kappa_2$ , el punto
  ⇨  $\varphi(\pi, 0)$  no es umbílico",
  "paso": "",
  "pasoLatex": "",
},
{
  "descripcion": "Clasificación del punto: ya que  $\kappa_1$ 
  ⇨  $\kappa_2 = 0$  y  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , el punto
  ⇨  $\varphi(\pi, 0)$  es un punto parabólico",
  "paso": "",
  "pasoLatex": "",
},
{
  "descripcion": "Calcular las direcciones principales: buscando
  ⇨ los vectores que cumplan que  $II(\\vec{w}, \\vec{w})=0$  se
  ⇨ tiene que las direcciones asintóticas son",
  "paso": "[Matrix([[0, 1]])]",
  "pasoLatex": "\\{\\left(\\begin{matrix}0 & 1\\end{matrix}\\right)\\}",
},
]
}
```

Este documento esta firmado por



Firmante	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Fecha/Hora	Sat Jun 01 14:07:45 CEST 2024
Emisor del Certificado	EMAILADDRESS=camanager@etsiinf.upm.es, CN=CA ETS Ingenieros Informaticos, O=ETS Ingenieros Informaticos - UPM, C=ES
Numero de Serie	561
Metodo	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)